Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 02

Didattica della Matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

novembre 2017

DOI: 10.33683/ddm.17.2

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Repubblica e Canton Ticino, Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport (DECS).

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio Risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC)
Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI

Impaginazione:
Jessica Gallarate e Sharon Scimé

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
Matematica

02

novembre 2017

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

Editoriale

La rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* è nata per far confrontare e dialogare il mondo della ricerca e quello della scuola. È in effetti dai processi di insegnamento/apprendimento vissuti in aula che nascono molte considerazioni e spunti per la ricerca e, allo stesso tempo, è per mezzo della ricerca che cambiano e si evolvono le prassi scolastiche. È proprio il continuo scambio tra questi due mondi che permette di arricchirsi vicendevolmente, rinforzandosi e consolidandosi l'uno con l'altro.
Allo stesso tempo, questa rivista rappresenta un'occasione per il Ticino di aprirsi ad altre realtà, condividendo le proprie esperienze nell'ambito della matematica e della sua didattica e accogliendo quelle che si stanno vivendo in altri Paesi, favorendo così un ricco scambio e confronto.
Inoltre, il taglio scelto per la rivista, aperto a tutti i livelli scolastici, permette di poter ragionare in continuità analizzando l'insegnamento/apprendimento della matematica dalla scuola dell'infanzia al mondo universitario, passando da ciascun grado scolastico e ragionando sugli aspetti salienti che caratterizzano tutto il percorso formativo.

Il successo della rivista, e della sua struttura, è testimoniato dai numeri degli utenti che hanno visionato e scaricato il primo numero: 3475 utenti (circa 2500 il primo mese) per un totale di 5246 visite (circa 3400 il primo mese d'uscita del numero).
Tra tutte le visite, 4338 si sono avute dalla vicina Italia, 838 dalla Svizzera e le altre sono risultate sparse per il mondo. Crediamo che, anche in questo caso, i numeri dicano molto nel mostrare quanto interesse ci sia per questo genere di pubblicazione, pensata per arricchire la professione dei ricercatori e dei docenti e per fornire, di conseguenza, proposte, spunti e riflessioni efficaci per gli studenti.

In questo numero, nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti due articoli rivolti al passaggio tra scuola media e medio-superiore. Nel primo viene presentato uno studio sui processi di formazione di significati relativi alla nozione di funzione e alla sua rappresentazione grafica in ambienti di geometria dinamica. Nell'articolo viene raccontata un'attività didattica sulle funzioni centrata sulla gestione di diverse rappresentazioni grafiche e verbali di funzioni reali di variabile reale, arricchita anche grazie a software di geometria dinamica. Nel secondo articolo vengono proposte alcune riflessioni di carattere didattico sui risultati forniti dagli studenti del secondo anno di scuola secondaria di secondo grado ad alcune prove INVALSI italiane. Dall'analisi dei risultati emergono diverse criticità legate a conoscenze e competenze fondamentali per una formazione matematica significativa. Si avanza l'ipotesi che una possibile causa delle difficoltà sia di carattere didattico e dipenda da un'eccessiva attenzione prestata agli aspetti finalizzati all'acquisizione di padronanza nel calcolo simbolico, con un addestramento fine a se stesso e non consapevole.
Nel terzo articolo viene messo in evidenza il ruolo cruciale assunto dal processo di comprensione nell'attività di risoluzione di un problema matematico espresso attraverso un testo. La comprensione risulta critica sia nel caso di un testo del problema molto sintetico, sia nel caso di un testo molto ricco, e questo vale indipendentemente dal livello scolastico. Nell'articolo viene proposta un'interpretazione di questo fenomeno, basata sull'interazione tra quelli che Bruner definisce modi di pensiero "narrativo" e "logico".

Nella seconda parte della rivista, legata alle *Esperienze didattiche*, il primo articolo riporta una sperimentazione, condotta con 19 allievi di prima elementare, volta a indagare quali rappresentazioni spontanee scelgono per comunicare a interlocutori diversi uno stimolo proposto in un problema numerico. I dati raccolti hanno offerto un singolare quadro sulla sensibilità dei bambini e sull'utilizzo spontaneo di diversi registri semiotici, tra cui il ricorso a grafici.
Nel secondo articolo vengono presentati i risultati di una sperimentazione condotta in due classi prime di due sedi di scuola media ticinesi incentrata sull'uso di alcuni strumenti di valutazione – basati sul paradigma della didattica per competenze – relativi ad un particolare processo cognitivo (matematizzare e modellizzare) previsto dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) per quanto concerne la matematica.
Nel terzo articolo, invece, sono riportati i risultati di un'indagine relativa alle strategie spontanee e alle difficoltà di allievi dell'anno obbligatorio 2 di scuola dell'infanzia, emerse da richieste relative alla corrispondenza biunivoca da realizzare "a tavolino". Viene inoltre mostrato come, grazie ad attività motorie presentate ai bambini sotto forma di gioco, sia possibile migliorare le prestazioni degli allievi sullo stesso tema.
Infine, nel quarto articolo viene presentato un percorso didattico sperimentato con bambini di 9-10 anni incentrato sulla manipolazione di sagome di carta colorata, aventi la forma di particolari triangoli rettangoli, e sulla loro giustapposizione per rappresentare altre figure geometriche.

L'intento è di continuare a far circolare una grande varietà di proposte e stimoli tra i ricercatori e i docenti che si occupano di didattica della matematica, così da rendere sempre più profonde, consapevoli ed efficaci queste due importanti professioni.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Editorial

The journal *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* was born to create a meeting point and a dialogue between the worlds of research and the class. It is in fact from the teaching and learning processes actually lived in classroom that many considerations and cues for the research are born and, at the same time, it is through research that educational praxis changes and evolves. It is precisely this continuous exchange between these two worlds that allows them to enrich each other, reinforcing and consolidating with one another.
At the same time, this journal represents an opportunity for Ticino to open up towards other experiences, sharing its own in the field of mathematics and its didactics and embracing those from other Countries, thereby supporting sharing and dialogue.
Besides, the style chosen for the journal, opened to all school's levels, allows for a cross-grade discussion analyzing the teaching/learning of the mathematics from kindergarten to higher education, passing through every school level and thinking about the key aspects which characterize the whole educational path.

The success of the journal and of its structure, is reflected by the number of users who viewed and downloaded the first issue: 3'475 users (about 2'500 the first month) for a total of 5'246 visits (about 3'400 the first month since the issue's release).
Of all visits, 4'338 were from the nearby Italy, 838 from Switzerland and the others scattered throughout the world. We believe, here again, that the numbers show clearly the interest for a publication of this kind, designed to enrich researchers' and teachers' profession and consequently to provide effective suggestions, ideas and reflections for the students.

In this issue, in section *Riflessione e ricerca* there are two papers addressing the transition from middle to high school. The first one presents a research on the processes of meaning formation relative to the concept of function and to its graphic representation in dynamic geometry environments. A didactic activity on functions is presented, which is focused on managing different graphic and verbal representations of real variable functions, enriched also thanks to dynamic geometry software. The second paper presents some reflections of didactic nature on the answers given by tenth-grade students to some INVALSI Italian tests. The analysis makes apparent several problematic issues tied to knowledge and fundamental competences for a significant mathematic education. An hypothesis about the cause of such difficulties is put forward: they come from a didactic issue and depend on the excessive attention given to mastery of symbolic calculations, as an end in itself and supported by unaware coaching.
In the third paper the authors highlight the crucial role assumed by the text comprehension process in the activity mathematical problem solving. Comprehension turns out to be critical in the case of both a very synthetic and rich problem text, independently from the school level. The paper proposes an interpretation of this phenomenon, based on the interaction between what Bruner defines forms of "narrative" and "logical" thinking.

In the second section of the journal, related to *Esperienze didattiche*, the first paper presents an experimentation, conducted with 19 first-grade students, aiming at inquiring which spontaneous representation they chose for communicating to different interlocutors a stimulus proposed in a numerical problem. The collected data offer a peculiar picture of children sensibility and of the spontaneous use of several semiotic registers, among which the use of graphics and drawings.
The second paper presents the results of an experimentation conducted in two sixth-grade classes from Ticino middle schools focused on the use of some assessment tools – based on the paradigm of "competence-based education" – related to a particular cognitive process (mathematizing and modelling) provided for in *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015).
The third paper instead reports the results of a study on children spontaneous strategies and difficulties in the last year of preschool, emerged from requests related to one-to-one correspondence to be realized at the drawing board. Moreover ,the paper shows how, thanks to motor activities presented to the children in terms of a game, it is possible to improve the children's performances on the same subject.
Finally, the fourth paper is about a didactic process tested with 9-10 year-old children, focused on the handling of colored papers' templates, having the shape of particular right triangles, and on their juxtaposing in order to describe other geometrical figures.

The intention is to keep on circulating a great variety of proposals and stimuli between researchers and teachers who are involved in mathematic teaching, so as to make these two important professions more and more profound, aware and effective.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento SUPSI

Riflessione e ricerca

DdM

Funzioni e grafici in ambienti digitali dinamici

Functions and graphs in dynamic digital environments

Giulia Colacicco[*], **Giulia Lisarelli**[▲] **e Samuele Antonini**[●]
[*]Centrum Wiskunde & Informatica – Amsterdam, Olanda
[▲]Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini" – Università di Firenze, Italia
[●]Dipartimento di Matematica "F. Casorati" – Università di Pavia, Italia

Sunto / In questo articolo riportiamo uno studio sui processi di formazione di significati relativi alla nozione di funzione e alla sua rappresentazione grafica in ambienti di geometria dinamica e presentiamo un'attività didattica sulle funzioni centrata sulla gestione di diverse rappresentazioni grafiche e verbali di funzioni reali di variabile reale. I software di geometria dinamica rendono possibile la realizzazione di grafici dinamici in cui la relazione di dipendenza funzionale si concretizza attraverso due tipi diversi di movimento, diretto e indiretto, dei punti che rappresentano rispettivamente le variabili indipendente e dipendente. Il continuo sforzo degli studenti di descrivere i grafici dinamici e le loro osservazioni durante il trascinamento ha portato all'uso di particolari termini e in generale di segni che sono stati condivisi nella classe e che sono stati messi tra loro in relazione per costruire espressioni via via più complesse e significati matematici sempre più evoluti.

Parole chiave: funzioni; grafici dinamici; ambienti di geometria dinamica; verbalizzazione.

Abstract / In this paper we present a study on the formation of meanings about the notion of mathematical function and graphic representations in dynamic geometrical environment; we also describe a didactic activity on functions centered on the management of different graphics and verbal representations of real functions of real variable. The dynamic geometry environments allow the construction of dynamic graphics (dynagraphs) and the realization of functional dependency by means of two different kinds of movement, direct and indirect, of points that represent independent and dependent variables. The continuous effort of students in describing the dynamic graphics and their observations during their dragging promoted the use of particular terms and, in general, of signs that were shared in the classroom and were linked to each other in order to formulate progressively more complex expressions and more advanced mathematical meanings.

Keywords: functions; dynagraphs; dynamic geometry environment; verbalization.

1 Introduzione

Uno dei concetti basilari della matematica moderna è quello di funzione, che negli ultimi secoli ha avuto un'importante e imponente evoluzione e ha permesso di rileggere conoscenze matematiche sotto una nuova luce e di aprire ricchi campi di ricerca dalle molteplici ed efficaci applicazioni in ogni area (scientifica, umanistica, socio-economica ecc.). Leggere un grafico e saperne ricavare informazioni, così come rappresentare informazioni attraverso un grafico, gestendo adeguatamente le variabili, la loro relazione e la relazione tra le variazioni, sono competenze essenziali per il cittadino, e sono parte degli obiettivi di quell'educazione matematica che, per usare la felice espressione del volume Matematica 2003 (UMI et al., 2003, p. 6) dedicato alla "matematica per il cittadino", contribuisce «alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica».

Nella scuola italiana le funzioni e i loro grafici vengono approfondite in matematica in modo particolare nell'ambito dell'analisi e le Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010), nelle linee generali e competenze, inseriscono le «funzioni elementari dell'analisi e le prime nozioni del calcolo differenziale e integrale» tra i «gruppi di concetti e metodi di cui lo studente saprà dominare attivamente» (MIUR, 2010, p. 22), dove non possiamo non richiamare l'attenzione sull'uso impegnativo del verbo "*dominare*" e dell'avverbio "*attivamente*". Già al primo biennio, è tra gli obiettivi specifici di apprendimento quello di saper usare il linguaggio degli insiemi e delle funzioni per "*rappresentare*" fenomeni e ottenere informazioni (MIUR, 2010, p. 24). Si richiede inoltre allo studente di essere «in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati» (MIUR, 2010, p. 24).
Sulla stessa linea la comunità scientifica, che nell'introduzione al documento Matematica 2003 (UMI et al., 2003) dichiara:

> «Uno dei maggiori obiettivi didattici di questo nucleo [relazioni e funzioni] è, infatti, l'acquisizione da parte degli alunni di un "pensiero funzionale".[1] 1
> Come lo si può favorire? Con una forte connessione fra il grafico di una funzione, l'interpretazione dell'andamento, il collegamento di questo con l'espressione algebrica della funzione, gli aspetti numerici, e l'analisi di momenti particolari di questo andamento che corrispondono agli zeri (cioè alle equazioni), al segno (cioè alle disequazioni) (…). Ciò non vuol dire che non si possa parlare di equazioni e sistemi indipendentemente dallo studio delle funzioni, ma che, laddove possibile, si cerchi di favorire l'interazione con la rappresentazione geometrica.
> Momenti particolari dell'andamento del grafico sono anche i massimi e i minimi, la crescenza e la decrescenza, il comportamento in prossimità di valori particolari; questa non è l'analisi matematica, perlomeno non è l'analisi matematica in senso classico. È lo studio qualitativo di un fenomeno. La considerazione dei fenomeni a livello qualitativo deve diventare un'abitudine mentale degli alunni e degli insegnanti, se si vuole fare in modo che le tecniche che l'alunno imparerà nel corso degli anni non siano mai oggetto di applicazione meccanica, ma frutto di riflessione sui significati nei diversi contesti proposti».
> (UMI et al., 2003, p. 206)

Dal punto di vista didattico è però opportuno tenere in considerazione che l'area concettuale inerente alle funzioni e alla loro rappresentazione presenta complessità cognitive significative che, se ignorate, possono contribuire a creare ostacoli di apprendimento tutt'altro che banali.

2 Quadro concettuale generale

Difficoltà molto comuni in analisi matematica possono essere interpretate con la nozione di *concept image* di funzione, che comprende l'idea stessa che un soggetto ha di

1. In nota del testo viene precisato che «questo termine fu usato da Felix Klein come parola d'ordine per la sua proposta di riforma curricolare europea degli inizi del '900».

funzione e che rischia a volte di rimanere schiacciata in una formula algebrica o nel suo grafico (Tall, 1991; Vinner, 1983). La conseguenza è che solo una parte ristretta delle funzioni viene presa in considerazione dagli studenti e restano escluse alcune funzioni non rappresentabili tramite espressioni algebriche o tramite curve del piano. Non è in gioco qui soltanto la costruzione di una galleria di esempi, comunque certamente decisiva, ma il nocciolo stesso del concetto matematico (si veda anche Antonini, 2011). Anche il grafico può essere visto come un'immagine in cui si perdono gli elementi essenziali della relazione funzionale. A questo proposito, Carlson e Oehrtman (2005) mostrano che il grafico rischia di essere pensato come un'immagine statica, un disegno che rappresenta una situazione fisica più che una mappatura tra due insiemi, e che questo porta seri ostacoli nell'analisi e nell'interpretazione delle informazioni che si possono trarre dai grafici.
L'aspetto su cui vogliamo soffermarci in questo articolo riguarda in particolare alcuni significati relativi alla nozione di funzione e alla loro rappresentazione tramite il grafico. Ed è proprio la distinzione tra funzione e rappresentazione che viene ad assumere un'importanza fondamentale. Scrive Duval:

> «Da un punto di vista epistemologico c'è una differenza basilare tra la matematica e altri ambiti della conoscenza scientifica. Gli oggetti matematici, a differenza dei fenomeni dell'astronomia, fisica, chimica, biologia ecc., non sono mai accessibili alla percezione né per mezzo di strumenti (microscopi, telescopi, strumenti di misura). L'unico modo per avere accesso agli oggetti matematici e per poterli gestire consiste nell'usare segni e rappresentazioni semiotiche. Questo significa che abbiamo un solo accesso alla conoscenza degli oggetti invece che uno doppio come nel caso di altri ambiti e che consiste in un accesso principale e non semiotico e un accesso secondario semiotico. Questa specifica situazione epistemologica della matematica cambia radicalmente l'uso cognitivo dei segni. Qualsiasi allievo si confronta con due esigenze opposte nell'addentrarsi nel pensiero matematico:
> – Per svolgere qualsiasi attività matematica è necessario avvalersi di rappresentazioni semiotiche, anche se c'è la possibilità di scegliere il tipo di rappresentazione.
> – L'oggetto matematico non deve mai essere confuso con le rappresentazioni semiotiche utilizzate».
>
> (Duval, 2006, p.107, traduzione degli autori)

Le implicazioni sono di portata notevole, in particolare:

> «Anche se l'uso di un unico registro di rappresentazione fosse sufficiente da un punto di vista matematico, da un punto di vista cognitivo l'attività matematica coinvolge la mobilitazione simultanea di almeno due registri di rappresentazione, o la possibilità di passare in ogni momento da un registro ad un altro. In altre parole, la comprensione concettuale in matematica comporta una sinergia di due registri, e talvolta una sinergia di tre registri».
>
> (Duval, 2006, p. 126, traduzione degli autori)

Ci concentreremo in questo articolo sulla gestione di due registri, il registro verbale e il registro grafico; a sua volta nel registro grafico prenderemo in considerazione diverse rappresentazioni delle funzioni, in particolare attraverso l'uso di strumenti digitali

che, come precisato in (MIUR, 2010, p. 23), si rivelano particolarmente adeguati per *rappresentare* e *manipolare* oggetti matematici. L'uso di strumenti è qui considerato in accordo con la *teoria della mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), secondo la quale, nel corso di attività con particolari artefatti relativamente ad una specifica consegna, i soggetti coinvolti producono *segni* (disegni, testi, parole, gesti, ecc.) che rivestono due funzioni cognitive: da una parte vengono prodotti proprio per perseguire l'obiettivo del compito, dall'altra parte per comunicare con gli altri individui che stanno collaborando. L'utilizzo di artefatti stimola dunque la produzione di segni che possono risultare legati sia all'artefatto sia al contenuto matematico e che si intende fare evolvere verso *segni matematici*. Centrali nel processo semiotico di evoluzione di tali segni sono la *verbalizzazione*, che nella concezione vygotskiana sul rapporto dialettico e sinergico tra pensiero e linguaggio è vista come un processo strettamente connesso al pensare, al comprendere e al costruire significati (Vygotskij, 1990) e la *discussione matematica* (Bartolini Bussi & Boni, 1995), che è, come scrive Bartolini Bussi (2010, p. 50) «il modello privilegiato di produzione collettiva di segni». In particolare, i segni prodotti individualmente dagli studenti impegnati in una discussione matematica diventano progressivamente segni matematici grazie all'orchestrazione del docente.
In questo articolo vogliamo descrivere un'attività didattica progettata allo scopo di promuovere la formazione e lo sviluppo di significati matematici relativi alla nozione di funzione e competenze relative all'interpretazione e alla produzione di grafici attraverso la gestione di diverse rappresentazioni grafiche e verbali.

3 La rappresentazione grafica delle funzioni reali di variabile reale

Le funzioni reali di variabile reale vengono comunemente rappresentate, in un piano cartesiano, attraverso un grafico, che è l'insieme dei punti di coordinate $(x, f(x))$ al variare di x nel dominio della funzione. Dunque un punto del grafico è un punto del piano le cui due coordinate assumono il ruolo della variabile indipendente, usualmente indicata con la x, e dipendente, indicata con la $f(x)$.
Il grafico di una funzione è una rappresentazione estremamente efficace e offre una visione immediata e molto ampia di quello che si indica comunemente con l'espressione "andamento della funzione", con cui solitamente si fa riferimento alla monotonia (intendendo anche una monotonia a tratti), periodicità, massimi e i minimi assoluti e locali, asintoti ecc. La lettura, l'interpretazione, la manipolazione di un grafico e la transizione tra la rappresentazione grafica e altre rappresentazioni delle funzioni coinvolgono processi particolarmente delicati da un punto di vista cognitivo. Se un grafico è un sottoinsieme del piano, la lettura di un grafico come rappresentazione di una funzione richiede la ricostruzione, a partire dall'insieme dei suoi punti P di coordinate (x, y), della relazione tra due variabili (che appartengono allo stesso insieme dei numeri reali): la variabile indipendente x e dipendente $f(x)$. Dunque UN punto P del grafico è un punto del piano che rappresenta la relazione funzionale tra DUE numeri (x e y) appartenenti allo stesso insieme dei numeri reali ma che corrispondono a DUE punti appartenenti a DUE rette diverse, rispettivamente all'asse delle ascisse e all'asse delle ordinate. I due assi rappresentano dunque lo stesso insieme numerico $\mathbb{R}$, ed è proprio il fatto che l'insieme dei numeri reali venga rappresentato due volte, sia per così

dire "sdoppiato", dall'asse delle ascisse e dall'asse delle ordinate, che risulta possibile tracciare il grafico.
Questa sottile complessità, se può passare inosservata a chiunque abbia dimestichezza con funzioni e grafici, per alcuni studenti rischia di mettere in ombra i significati matematici relativi alle funzioni. Ne mostriamo alcuni esempi nel prossimo paragrafo.

4 Tre episodi paradigmatici

Riportiamo in questo paragrafo tre episodi paradigmatici di alcune difficoltà degli studenti nell'interpretare e gestire il grafico di una funzione.

Episodio 1
Nel corso della prova orale per l'ammissione alla scuola di specializzazione per l'insegnamento secondario, Giulio, laureato in materie scientifiche, traccia il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ (vedi Figura 1) e sostiene che per x che tende all'infinito la funzione tenda all'infinito. Accompagna il suo discorso con un gesto della mano, mostrando che la funzione procede verso destra e "va sempre più lontano…"

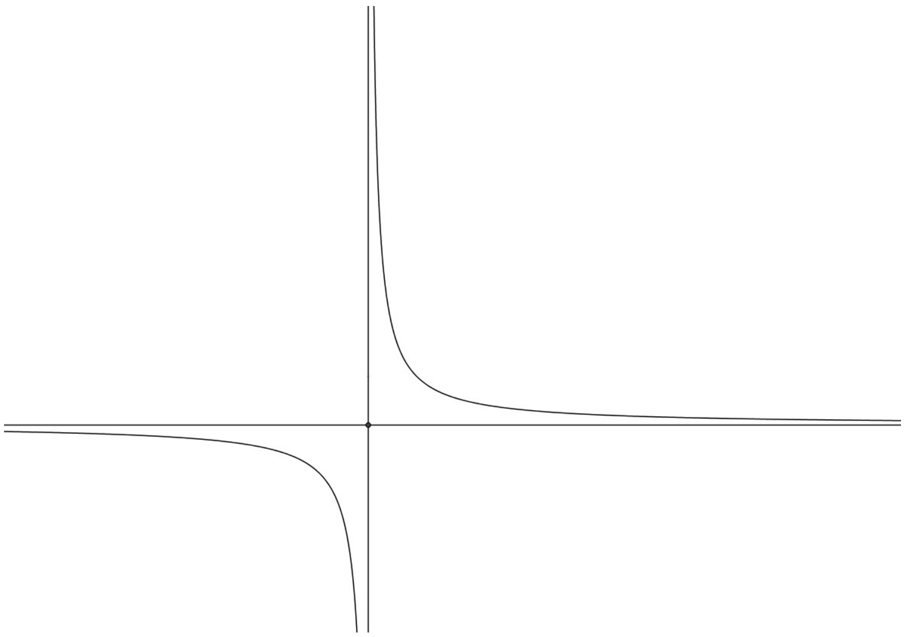


Figura 1
Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.

Episodio 2
Luisa, studentessa del corso di laurea in farmacia, ritiene che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ tende all'infinito quando x tende all'infinito. Indicando il grafico mostra con una successione di gesti che, quando x va all'infinito (e con la mano indica verso destra il ramo di iperbole per valori grandi della x) la $f(x)$ va all'infinito (e indica verso l'alto il ramo di iperbole che si avvicina all'asse delle ordinate).

Episodio 3
Alla richiesta dell'insegnante di individuare l'insieme dei numeri reali x per cui la funzione risulta positiva, alcuni studenti di una scuola media superiore evidenziano alcuni tratti del grafico, come in Figura 2.

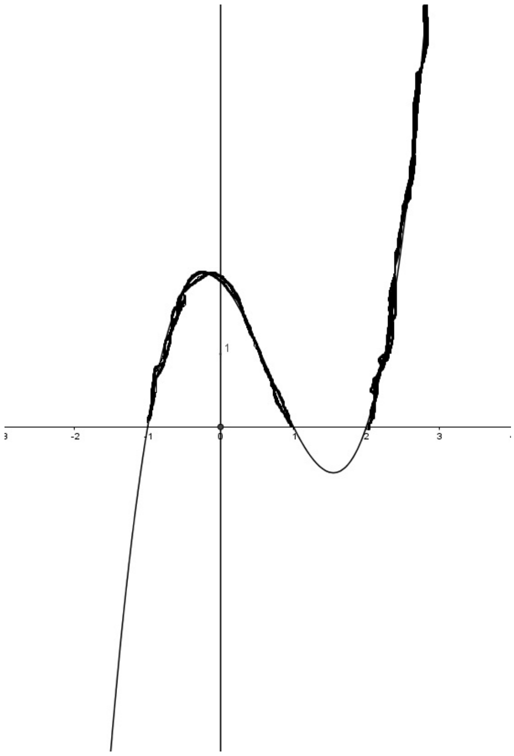


Figura 2
L'insieme dei punti x tali che $f(x)>0$ secondo uno studente.

Comportamenti come questi sono piuttosto comuni e sono stati osservati durante la pratica didattica dal terzo autore del presente articolo e da insegnanti con cui collabora. Con diverse variazioni, sono estremamente frequenti e molti insegnanti di matematica ne hanno esperienza. Per quello che ci interessa in queste pagine, le risposte di questi tre studenti evidenziano una cattiva gestione (che in molti casi potrebbe rimanere latente ma non per questo inattiva e priva di conseguenze) del grafico come rappresentazione della funzione e in particolare una confusione tra il grafico e la funzione, i punti del grafico, la variabile x e la variabile $f(x)$.

5 Rappresentazioni grafiche delle funzioni

L'idea centrale del percorso proposto in questo articolo è quella di far lavorare gli studenti con rappresentazioni diverse di funzioni, che mettano maggiormente a fuoco le due variabili e la presenza di una relazione funzionale di dipendenza, al fine di costruire significati relativi al concetto di funzione e di promuovere processi significativi ed efficaci per arrivare, nell'ultima parte dell'attività, alla rappresentazione grafica tradizionale. In sintesi, l'uso di diverse rappresentazioni ha un duplice obiettivo:
– promuovere la formazione e l'evoluzione del significato matematico di funzione;
– promuovere competenze relative alla gestione (interpretazione, manipolazione) di grafici.

Volendo dare maggior risalto alle due variabili, ricordiamo innanzitutto che stiamo trattando il caso di funzioni reali di variabile reale in cui il dominio e il codominio sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Se rappresentiamo $\mathbb{R}$ con una retta, sia x sia $f(x)$ possono essere rappresentati da punti appartenenti alla stessa retta.

Il problema diventa quello di rappresentare la funzione. L'idea di tracciare delle freccette che connettano ogni punto x al corrispondente $f(x)$ **(Figura 3)** è possibile solo per un numero molto ridotto di punti e questo pone dei limiti a questo tipo di rappresentazione.

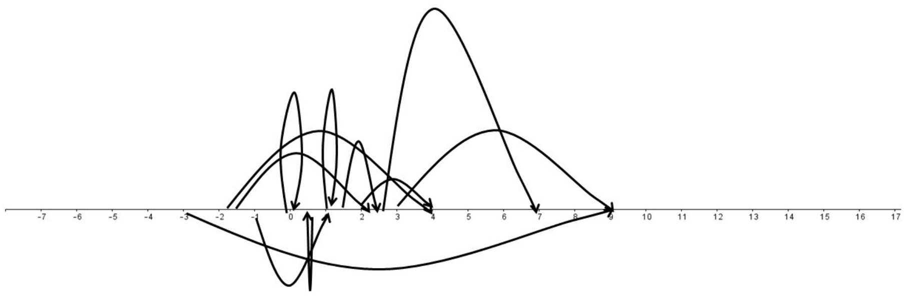


Figura 3
Una rappresentazione della funzione reale di variabile reale $f(x)=x^2$.

Un'alternativa interessante è quella dei *grafici dinamici*, più noti come *dynagraphs* (si veda Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992; Sinclair, Healy & Reis Sales, 2009; oltre che la sitografia in fondo all'articolo), in cui i due punti che rappresentano le variabili sono mobili ed è possibile spostare il punto rappresentante la variabile x e vedere di conseguenza lo spostamento del corrispondente $f(x)$. Questo tipo di rappresentazione non può essere realizzato con carta e penna e ci si deve ovviamente avvalere di opportuni supporti, come per esempio un software di geometria dinamica (vedi Hazzan & Goldenberg, 1997). In software come *Cabri* o *GeoGebra* la principale funzionalità che permette la costruzione dei grafici dinamici è il trascinamento (dragging) con il quale è possibile spostare gli oggetti geometrici costruiti, mantenendo invarianti le relazioni stabilite nella costruzione. In questi ambienti di geometria dinamica è possibile distinguere due tipi di movimento: diretto, quando è operato direttamente su un punto base, ossia un punto che dà origine alla costruzione; indiretto, se il movimento osservato è ottenuto in seguito allo spostamento di un punto base. Data una funzione reale di variabile reale f, negli ambienti di geometria dinamica è possibile costruire una retta e due punti P e Q su di essa in modo che il punto sia P un punto liberamente trascinabile sulla retta e il punto Q sia tale che, dette x_P e x_Q le coordinate di P e Q sulla retta, risulti $x_Q = f(x_P)$. Il punto P rappresenta la variabile indipendente ed è trascinabile direttamente, il punto Q non è trascinabile direttamente ma si muove sulla retta quando P è trascinato, in modo da mantenere invariata la relazione funzionale.
L'uso dello strumento di trascinamento permette dunque da un lato di visualizzare i due movimenti e la relazione tra i due movimenti, cioè la relazione tra le variazioni (la *covariazione*), dall'altro di sperimentare "fisicamente", tramite l'uso manuale del mouse (o di un dito nel caso di strumenti *touchscreen*), la dipendenza di un punto da quello del punto trascinato. Sempre nel quadro teorico della mediazione semiotica, questa relazione tra il tipo di movimento e il ruolo delle variabili è uno degli aspetti centrali del lavoro sulle funzioni di Falcade, Laborde e Mariotti (2007), in cui, a differenza di quanto stiamo trattando in queste pagine, si fa riferimento a funzioni in più variabili e in particolare a una funzione dal piano alla retta.

In molti software di geometria dinamica, tra cui quelli citati, è inoltre possibile attivare la traccia di un punto in modo da visualizzare la sua traiettoria durante il trascinamento. Attivando per esempio la traccia su Q quando P viene trascinato in un intervallo $[a,b]$ resteranno visualizzate le posizioni assunte da Q, in altri termini sarà marcato un sottoinsieme della retta che rappresenta l'insieme $f([a,b])$, che è l'immagine di $[a,b]$. Un'importante applicazione della traccia sarà, come vedremo, la costruzione dello stesso grafico.

6 Grafici dinamici

Nell'ipotesi, coerente con i risultati dei lavori di Goldenberg et al. (1992) e di Falcade et al. (2007), che l'ambiente dinamico possa favorire la costruzione di significati inerenti le funzioni e i loro grafici, abbiamo sviluppato un percorso per introdurre le funzioni a partire da una rappresentazione dinamica uno-dimensionale per arrivare al grafico usuale nel piano cartesiano. Vediamo nel dettaglio le rappresentazioni dinamiche utilizzate.

La rappresentazione più essenziale è quella sopra descritta, con due punti su un'unica retta, un punto trascinabile direttamente, l'altro in relazione funzionale con il primo e che si muove soltanto di moto indiretto **(Figura 4)**. Le due variabili sono dunque rappresentate da due punti che presentano, nella rappresentazione dinamica, un'asimmetria fondamentale in termini di movimento (diretto e indiretto), strettamente legata al loro ruolo rispettivamente di variabile indipendente e dipendente.

Figura 4
Grafico dinamico con una sola retta che rappresenta dominio e codominio.

La seconda rappresentazione **(Figura 5)** è fondamentalmente simile alla prima a parte il fatto che i due punti appartengono a due rette distinte e parallele. Entrambe le rette rappresentano l'insieme dei numeri reali. In questo modo può essere più comodo gestire alcune situazioni, per esempio quella in cui vi sono degli intervalli in cui $f(x)=x$ che, nella rappresentazione con un'unica retta potrebbe essere confusa con la situazione in cui $f(x)$ non esiste e dunque x non appartiene al dominio.

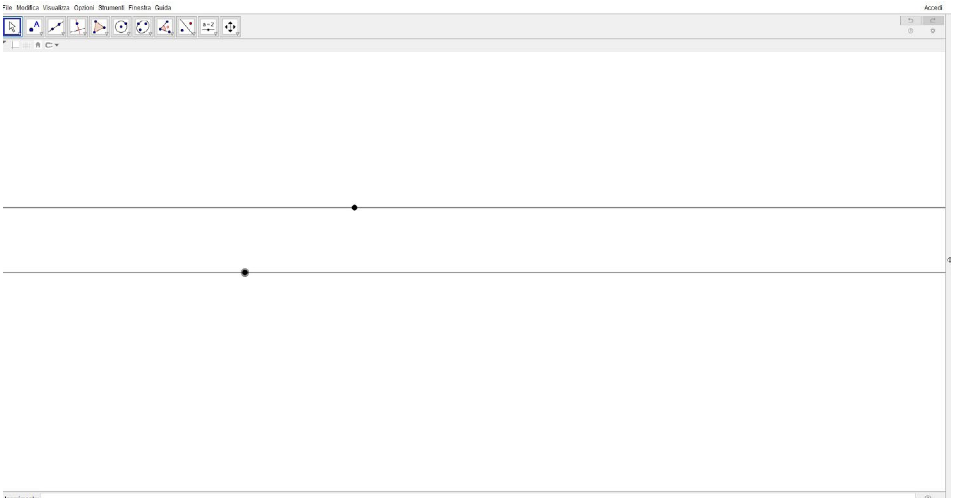


Figura 5
Grafico dinamico con rette parallele.

Nella terza rappresentazione (Figura 6) entrano gli aspetti quantitativi e sono stati aggiunti a questo scopo i riferimenti numerici e la possibilità di attivare una griglia.

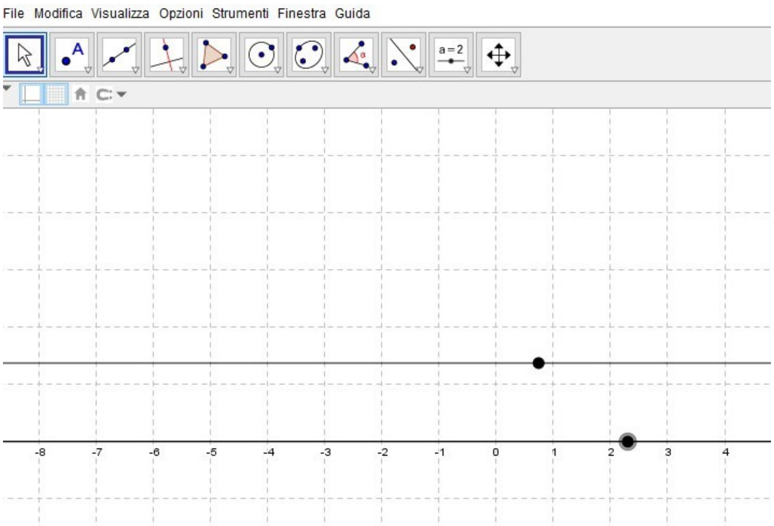


Figura 6
Grafico dinamico con rette parallele e graduate.

La rappresentazione successiva consiste nel porre le due rette ortogonali e con le origini in comune (Figura 7), con diverse varianti in cui possono essere presenti riferimenti numerici di una o di due rette e una griglia.

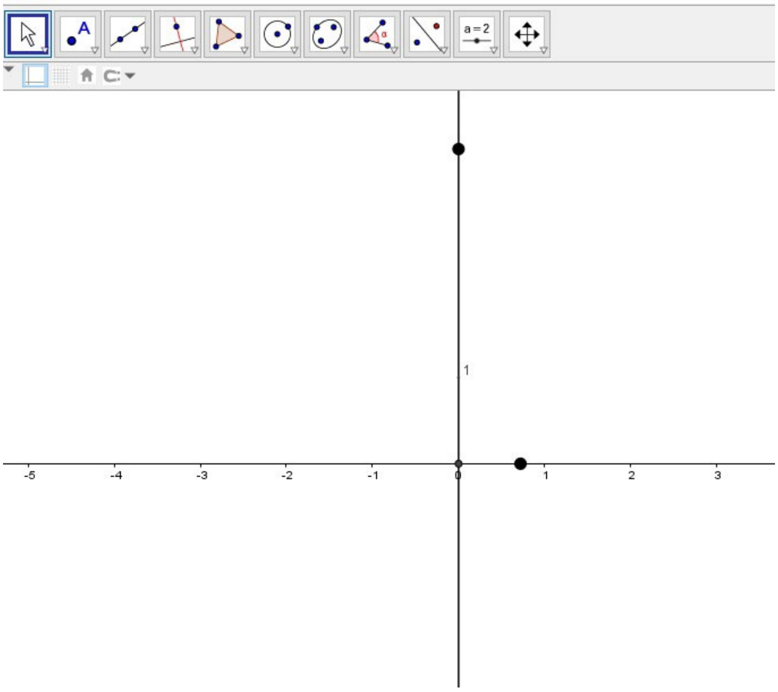


Figura 7
Rappresentazione dinamica con assi ortogonali.

Infine, costruendo il punto di coordinate $(x, f(x))$ (Figura 8) e attivando la traccia su tale punto è possibile visualizzare il grafico della funzione nel piano cartesiano, che si viene a tracciare in conseguenza del trascinamento del punto sull'asse x (Figura 9).

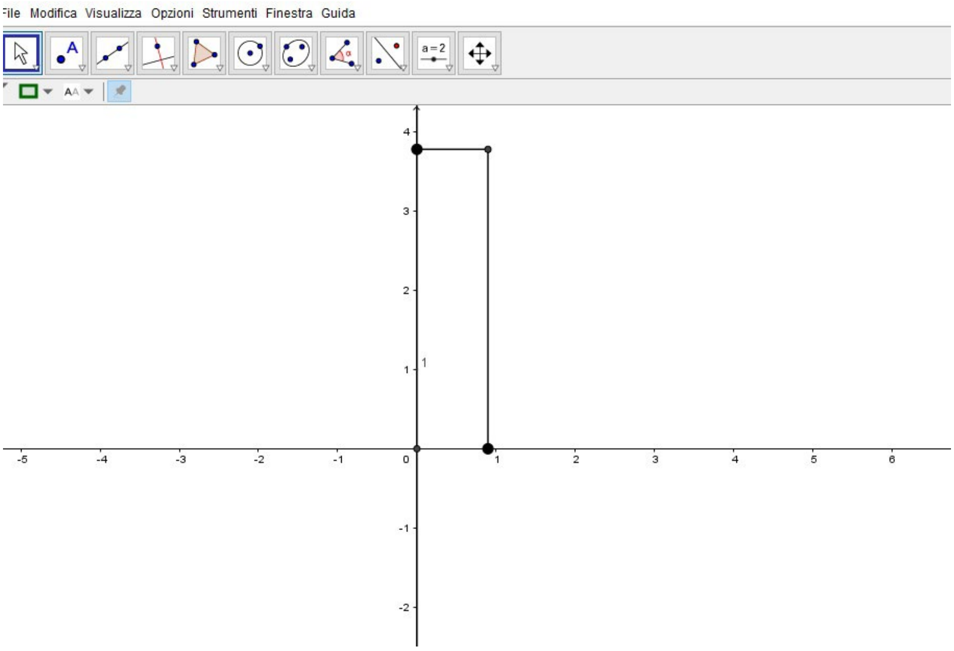


Figura 8
Grafico dinamico con il punto di coordinate $(x, f(x))$.

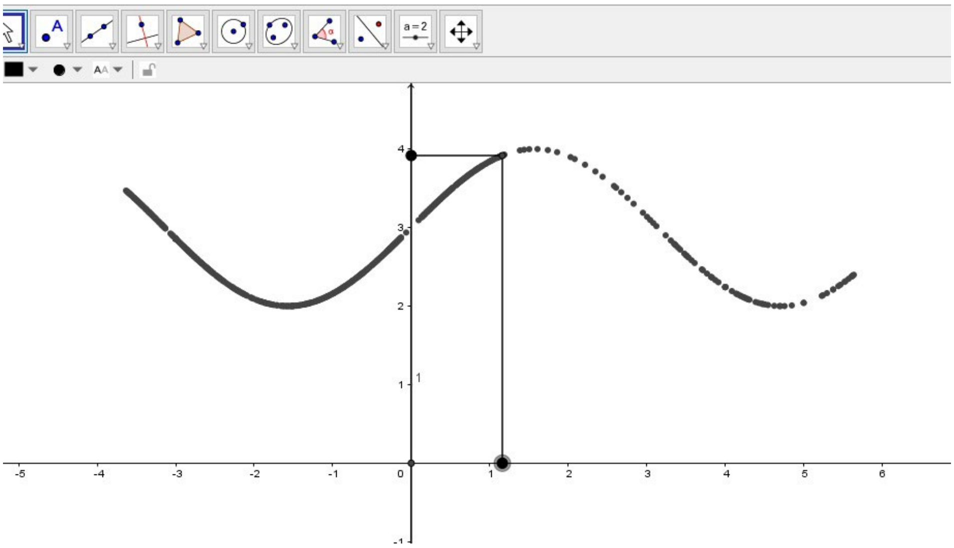


Figura 9
Grafico dinamico con traccia attiva nel punto di coordinate $(x, f(x))$ e in cui è stato trascinato il punto indipendente.

7 Una prima sperimentazione

Il lavoro che qui presentiamo, dal punto di vista della ricerca, è in fase esplorativa. Una prima sperimentazione è stata effettuata in occasione dello studio condotto per la tesi di laurea magistrale in matematica della prima autrice del presente articolo. L'attività è stata svolta in Italia nella primavera del 2016 in una classe seconda di un liceo scientifico con indirizzo ordinario, composta da 27 studenti. In classe non era stato trattato in modo esplicito il concetto di funzione, che rientrava tra gli obiettivi dell'attività, ma gli studenti avevano familiarità con il software *GeoGebra*, utilizzato nello studio della geometria analitica e per la costruzione di poligoni. Non avevano difficoltà a riconoscere una retta come rappresentazione dell'insieme dei numeri reali e avevano svolto attività con le equazioni delle rette nel piano cartesiano. Le lezioni si sono svolte nel laboratorio di informatica, in cui ogni studente aveva a disposizione un computer, secondo la seguente impostazione: dopo il lavoro in coppia, agli studenti era richiesto di produrre un testo scritto, infine il lavoro svolto veniva condiviso in una discussione collettiva guidata dall'insegnante.
Le attività, progettate e poi analizzate da tutti gli autori, sono state tutte condotte in classe sotto la guida delle due autrici. Sono state utilizzate due telecamere, una fissa e una mobile, per poter riprendere da vicino i dialoghi e le produzioni degli studenti durante le fasi di elaborazione e i lavori in gruppo. Inoltre, è stato raccolto del materiale in forma scritta, con le riflessioni e le risposte alle diverse consegne. I video e i testi scritti sono stati poi analizzati con particolare attenzione al linguaggio e ai segni prodotti dagli studenti.
Le attività sono state progettate per promuovere l'esplorazione da parte degli studenti delle rappresentazioni dinamiche e della transizione tra diverse rappresentazioni. Lo scopo principale era quello di promuovere la verbalizzazione degli studenti (e quindi una rappresentazione linguistica) per descrivere:

1. i punti sulla retta (o sulle rette) come variabili: il fatto che i punti possano essere trascinati e quindi le variabili possano assumere diversi valori;
2. la dipendenza della posizione di un punto dalla posizione dell'altro;
3. particolari e specifiche proprietà della relazione tra i movimenti dei due punti.

Agli studenti sono stati consegnati alcuni file con rappresentazioni dinamiche di alcune funzioni costruite dagli autori di questo articolo ma l'espressione algebrica e il fatto che si trattava di funzioni non era noto agli studenti. Al fine di promuovere la descrizione verbale da parte degli studenti, veniva loro richiesto di "Esplorare la situazione, individuare e descrivere i movimenti possibili attraverso il trascinamento e trascrivere sul quaderno le proprie osservazioni."

Alcune delle funzioni proposte hanno avuto obiettivi più specifici. Per esempio, le funzioni $|x|$ e $\sqrt{x}$ e avevano lo scopo di stimolare un confronto tra due situazioni in cui il punto dipendente, in alcune parti del dominio, non è più visibile, facendo sorgere il dubbio, discusso poi in classe, se i punti fossero sovrapposti (come nel primo caso per $x \geq 0$) oppure il punto dipendente scomparisse (come nel secondo caso per $x < 0$). Lo scopo era quello di sollecitare la necessità di una rappresentazione in cui i due punti non si confondessero e dunque fosse possibile distinguere il caso di due punti sovrapposti con il caso di un punto solo, e di giustificare in questo modo lo "sdoppiamento" della retta reale in due rette parallele (**Figura 5**) e la transizione alle successive rappresentazioni dinamiche.

Attraverso la rappresentazione dinamica con le rette graduate è stato possibile iniziare a descrivere il movimento dei punti anche con riferimenti numerici, continuando così a costruire ed approfondire il significato matematico di dominio, come insieme delle posizioni assunte dal punto indipendente. Successivamente è stata proposta la rappresentazione dinamica con le rette ortogonali. A questo punto gli alunni avevano fatto esperienza della dipendenza tra le due variabili e tra i loro movimenti e del legame che intercorre tra i valori da loro assunti. Attivando la traccia sul punto P di coordinate $(x, f(x))$ è stato possibile visualizzare il grafico della funzione, prodotto dal trascinamento del punto x lungo l'asse delle ascisse.

Di seguito riportiamo alcune osservazioni condotte in classe sulla formazione di alcuni significati matematici emersi durante il percorso.

8 Osservazioni

Obiettivo principale dell'attività era l'introduzione del concetto matematico di dipendenza funzionale attraverso un processo di raffinamento della descrizione verbale della relazione di movimento tra due punti legati da una relazione funzionale. Il linguaggio inizialmente impiegato dagli studenti appare legato a quello quotidiano, con descrizioni che richiamano riferimenti spaziali e temporali della posizione e velocità dei due punti con termini ricorrenti come "spostare/muovere", "destra/sinistra/sopra/sotto", "quando", "prima/dopo". Vediamo alcuni esempi (tra parentesi indicheremo la funzione di cui gli studenti stanno descrivendo il grafico e il tipo di rappresentazione dinamica):

"I due punti sulla retta si muovono in direzioni opposte. Si può spostare con il mouse solo un punto, però spostandolo si muove in direzione opposta anche l'altro". [$f(x) = 5 - x$; grafico dinamico con una retta].

"Date due rette e in ognuna un punto, il punto mobile si trova in quella sottostante. Al muovere del punto sottostante a destra e sinistra di un punto K non individuato, il punto soprastante può assumere due posizioni: a destra se il punto sottostante è a destra, a sinistra se il punto sottostante è a sinistra". [$f(x)=1$ se $x>0$, $f(x)=-1$ altrimenti; grafico dinamico con due rette parallele].

Un esempio di descrizione più complessa è il seguente:

"Una volta che si incontrano in questo punto, il punto che viaggia di più sarà sempre più lontano da questo punto rispetto al punto che viaggia di meno. Quello che va più veloce è sempre più lontano dal punto in cui si sovrappongono rispetto al punto che non si può muovere". [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

Riteniamo che i processi promossi dalla richiesta di descrivere verbalmente (oralmente e per iscritto) le rappresentazioni proposte siano stati particolarmente significativi nella costruzione di particolari significati. Vediamone i principali.

- Distinzione dei due punti: ben presto gli studenti realizzano che entrambi i punti si muovono (a parte il caso della funzione costante!), ma solo uno dei due può essere trascinato direttamente. L'asimmetria della situazione sollecita gli studenti alla ricerca di un linguaggio adeguato per distinguere i due punti nel momento in cui si deve descrivere il loro movimento. I due punti sono stati etichettati in vari modi: A e B, x e y, e alla fine del percorso, x e fx;

  "quello che posso muovere" e "quello che non posso muovere";
  "punto mobile (trascinante, indipendente)" e "punto fisso";
  "punto sottostante" e "punto soprastante" (nelle rappresentazioni con due rette parallele, la retta con il punto indipendente era generalmente in una zona più bassa dello schermo rispetto all'altra).

  La distinzione linguistica dei due punti è il primo passo nella formazione del significato di variabile dipendente e indipendente e di relazione funzionale e ha comunque richiesto un certo lavoro per passare dall'identificazione dei diversi comportamenti a una loro soddisfacente descrizione. Tale distinzione è stata resa necessaria dalla richiesta di descrivere il movimento dei punti ed è avvenuta in modi diversi: oltre ad una distinzione linguistica, come sopra riportato, gli studenti hanno autonomamente applicato delle modifiche con *GeoGebra*, provando a colorare, ingrandire o rinominare i due punti, per poterli meglio distinguere e in particolare per verificare se fossero sovrapposti o se uno dei due sparisse.

- Relazione tra i due punti: diventa ben presto fondamentale nella descrizione delle rappresentazioni esprimere che vi è una relazione tra un punto e l'altro e che questa relazione non è simmetrica. Gli studenti hanno descritto la relazione tra i due punti in termini di causalità, esprimendo il fatto che è il movimento di uno dei due punti a causare il movimento dell'altro e mai viceversa, utilizzando espressioni del tipo "quando…, allora…", "se... allora...". Il fatto che la retta su cui sono vincolati i due punti non sia inizialmente numerata contribuisce a portare l'attenzione sui movimenti possibili e ad evitare di concentrarsi sulla relazione numerica tra le variabili. Degno di nota il conflitto che è sorto nel momento in cui la variabile dipendente è stata chiamata il "punto fermo", quando è evidente che il punto non è fisso ed è possibile fare in modo che si muova (indirettamente). La discussione in

classe sull'uso delle parole ha stimolato gli studenti a prendere consapevolezza di cosa loro stessi intendessero con "punto fermo" e a rendere esplicito che la distinzione fondamentale è che uno dei due punti si muove "solo in conseguenza" del movimento dell'altro. Come scrive uno studente, "uno non si muove con il mouse, ma si muove quando muovo quell'altro".
Nei discorsi degli studenti, si osserva che nel tempo i riferimenti a quella che chiamiamo relazione di dipendenza sono via via più frequenti. Sotto ne verranno portati altri esempi.

– **Aspetti specifici della relazione funzionale**: Si tratta di alcune proprietà che sono specifiche della particolare funzione analizzata e che emergono dall'esplorazione delle rappresentazioni dinamiche e non sorprende che vengano quasi sempre espresse in termini di relazioni spaziali e temporali come per esempio le seguenti:

"Quando B si trova tra i numeri negativi A sta sopra al -1. Quando B si trova tra i numeri positivi, A sta sopra all'1". (B è la variabile indipendente) [$f(x)=1$ se $x>0$, $f(x)=-1$ altrimenti; grafico dinamico con due rette parallele graduate].

"Finché A è da 0 in poi B esiste, quando A diventa un numero negativo B scompare in quel momento". (A è la variabile indipendente) [$f(x)=\sqrt{x}$; grafico dinamico con due rette parallele].

"I due punti si muovono contemporaneamente nello stesso verso". [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

Un altro aspetto centrale nella definizione di funzione è quello di dominio. Per promuovere la formazione di significati relativi all'oggetto matematico "dominio di una funzione" sono state proposte funzioni con domini diversi. Nella costruzione del grafico dinamico di una funzione con dominio non coincidente con l'intero insieme dei numeri reali, il punto indipendente è libero di muoversi sull'intera retta e il punto dipendente scompare nel momento in cui il primo non appartiene al dominio. Questo comportamento è risultato del tutto inaspettato e anomalo agli occhi degli studenti, ed è stato utilizzato per sollecitare una discussione con lo scopo di preparare il terreno per la formazione del significato di dominio di una funzione.
A questo scopo sono state assegnate consegne con grafici dinamici di funzioni aventi come dominio una semiretta o degli intervalli o insiemi convessi con l'esclusione di alcuni punti, come la funzione $\frac{1}{x-4}$. L'esplorazione di queste rappresentazioni ha portato gli studenti a fare osservazioni come (la funzione è $f(x)=\sqrt{x}$ e B è il punto indipendente) "finché B è da 0 in poi A esiste, quando B diventa un numero negativo A scompare in quel momento" e a descrivere il dominio in base alla presenza del punto dipendente con espressioni come le seguenti:

"I valori di A per cui B esiste".
"Quello di sopra si muove solo in un certo arco di movimento del punto di sotto".
"Insieme di tutti i valori che permettono all'elemento di esistere".
"Gli elementi di B che esistono, A esiste a prescindere".

Oltre a queste, si ritrovano tracce di quelle che possiamo riconoscere come proprietà particolarmente interessanti delle funzioni reali di variabile reale. Molti esempi in que-

sto senso riguardano la crescenza, riconoscibile nell'utilizzo di parole come "destra, sinistra, cresce, rallenta" le quali, sia in termini di spazio che di velocità, descrivono il comportamento della funzione e il suo andamento. Spesso gli studenti usano espressioni che fanno riferimento alle direzioni, concordi e discordi, dei due punti e possiamo riconoscere la crescenza e la decrescenza negli intervalli in cui i punti hanno, rispettivamente, la stessa direzione oppure direzioni opposte.
Riportiamo, come esempio, alcune espressioni che gli studenti hanno utilizzato per descrivere il movimento dei due punti nel grafico dinamico della funzione $f(x)=2x$:

"I due punti si muovono contemporaneamente nello stesso verso". [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

"Quando il punto B si sposta il punto A lo segue nella stessa direzione". (B indipendente, A dipendente) [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

Entrambe le descrizioni fanno riferimento al movimento concorde dei due punti e dunque alla crescenza della funzione. Osserviamo che solo nella seconda affermazione i punti vengono distinti inserendo un riferimento alla dipendenza. Le frasi seguenti entrano ancora di più nel dettaglio e offrono una descrizione che potrebbe porre le premesse per la costruzione del significato di derivata.[2] Anche in questo caso si può notare il diverso trattamento linguistico dei due punti, omogeneo nel primo caso, di dipendenza nel secondo: 2

"Il punto A si muove più velocemente e quindi supera il punto B. Il punto A è sempre più lontano dal punto dove si incontrano rispetto al punto B". (B indipendente) [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

"Man mano che il punto B si muove, A accelera fino a sorpassarlo". (B indipendente) [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

Le funzioni decrescenti (come $f(x)=5-x$, oppure $f(x)=|x|$ nella semiretta dei reali negativi) sono descritte in termini di opposte direzioni e con la simmetria tra i punti, utilizzando come riferimento il punto d'incontro tra i due punti e descrivendo il loro movimento come simmetrico rispetto a questo punto:

"I due punti si muovono contemporaneamente lungo la retta in modo tale che, muovendosi in senso opposto, sono simmetrici rispetto al loro punto di incontro". [$f(x)=5-x$; grafico dinamico con una retta].

"Se si trascina B verso destra, A viaggia in senso opposto". (B indipendente) [$f(x)=5-x$; grafico dinamico con una retta].

Con espliciti riferimenti alla velocità, alcuni studenti arrivano a dare descrizioni fini dell'andamento delle funzioni:

2. Non essendo tra gli obiettivi della sperimentazione, questo aspetto non è stato approfondito.

"Se il punto B si sposta verso sinistra A si muove più lentamente invece verso destra più velocemente". (B indipendente) [$f(x)=\frac{1}{x-4}$, grafico dinamico con due rette parallele].

La funzione è $\frac{1}{x-4}$ e lo studente sta osservando il movimento dei punti quando la variabile indipendente si muove (nelle due direzioni) nella semiretta $(-\infty,4)$. Nella seguente espressione, la funzione è $f(x)=\sqrt{x}$ (il fatto che quanto affermato dallo studente sia vero solo per $x\geq 1$ non riduce l'importanza della sua osservazione):

"Al movimento di B verso destra, A ha una velocità costante minore rispetto a B". (B indipendente) [$f(x)=\sqrt{x}$; grafico dinamico con una retta].

Molto accurate le seguenti descrizioni di due studenti della rappresentazione dinamica della funzione $f(x)=2x$ in cui si valuta il rapporto tra le velocità dei due punti (nella seconda il rapporto tra velocità è stabilito numericamente):

"In questo caso il punto A ha una maggiore velocità quindi dopo che si sono sovrapposti 'supera' il punto B". (B indipendente) [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

"La velocità di A è il doppio di quella di B". (B indipendente) [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

In conclusione, le numerose e variegate descrizioni prodotte dagli studenti (*segni*, nel quadro della mediazione semiotica) possono diventare la base su cui costruire attività didattiche mirate alla costruzione di significati matematici relativi alle funzioni e alla gestione delle variabili nel grafico delle funzioni.

9 Attività da sperimentare

Attività da progettare in linea con le considerazioni teoriche e gli obiettivi sopra esplicitati sono numerose e possono riguardare diverse nozioni relative alle funzioni e ai loro grafici. Si tratta innanzitutto di andare a individuare come le proprietà classiche vengano rappresentate nelle diverse rappresentazioni.
Per esempio i massimi e i minimi locali, in un grafico dinamico con rette parallele (distinte o coincidenti) corrispondono a cambi di direzione durante il moto del punto rappresentante la variabile dipendente. Trascinando la variabile indipendente sull'asse x da sinistra a destra, se osserviamo che la variabile dipendente ha inizialmente lo stesso verso e a un certo punto "cambia verso", "torna indietro" o "mette la retromarcia" per usare alcune espressioni degli studenti, possiamo concludere che quello è un punto di massimo (da stabilire poi se relativo o assoluto).
L'iniettività di una funzione corrisponde al fatto che il punto dipendente non passa più di una volta da una stessa posizione al variare del punto trascinabile direttamente, mentre nel grafico statico è necessario osservare il numero dei punti di intersezione tra il grafico stesso e ogni retta parallela all'asse delle ascisse. Il passaggio tra queste due rappresentazioni dell'iniettività è estremamente interessante e richiede ulteriori ricerche e osservazioni.

Risulta particolarmente interessante anche la composizione di funzioni. Possiamo prendere in considerazione la rappresentazione di due funzioni (in una o più delle modalità qui riportate) e chiedere di anticipare verbalmente l'andamento della funzione che si ottiene andando a sostituire la variabile dipendente della prima al posto della variabile indipendente della seconda. Se ognuna delle due funzioni è rappresentata con grafico dinamico, lo studente dovrà con il mouse trascinare le due variabili indipendenti in modo opportuno per esplorare la relazione andando a considerare la variabile indipendente della seconda solidale con la variabile dipendente della prima.
Particolarmente efficaci potranno essere quelle consegne in cui si chiede di anticipare una certa situazione. Per esempio, dopo aver esplorato un grafico dinamico con le rette parallele o perpendicolari, si chiede di prevedere quale può essere l'effetto della traccia attivata in certi punti al variare di altri (potrebbero essere la variabile indipendente, dipendente o il punto con le due variabili come coordinate). Interessanti e attualmente in studio sono le consegne per promuovere la transizione tra due rappresentazioni diverse, come la seguente: uno studente ha accesso ad un grafico dinamico con due rette parallele e interagisce solo verbalmente con uno studente che deve costruire il grafico in un piano cartesiano. I due studenti possono parlare ma il secondo non può vedere il grafico dinamico così come il primo studente non vede il disegno grafico del secondo. Possiamo anche forzare gli studenti a non vedersi tra loro in modo da ridurre l'intera comunicazione al registro verbale e far diventare la rappresentazione verbale dei due grafici un mediatore per tradurre uno nell'altro.

10 Conclusioni

L'attività didattica qui presentata ha avuto lo scopo di stimolare la produzione di segni legati a un particolare compito[3] e di farli evolvere verso *segni matematici* relativi alle funzioni e alle loro rappresentazioni. Le scelte delle funzioni e delle consegne sono state ridiscusse e analizzate dopo ogni intervento in classe in modo da intrecciarle opportunamente al processo di evoluzione dei significati che via via emergevano nei testi degli studenti e nel corso delle discussioni in classe.
Le esplorazioni degli studenti hanno portato a descrizioni dettagliate molte delle quali, soltanto nella fase iniziale, si discostavano dagli aspetti matematici legati all'obiettivo, come per esempio il fatto che una certa retta non fosse trascinabile.
Come ci aspettavamo, gli studenti hanno in generale incontrato significative difficoltà ad esprimersi, dovute alla mancanza di termini specifici a loro disposizione e di strutture linguistiche adeguate. Alcuni studenti hanno poi identificato punti di riferimento dando anche delle etichette o costruendo nuovi oggetti geometrici con l'uso degli strumenti del software, al fine di rendere più efficace la comunicazione. Il continuo sforzo di verbalizzazione ha portato all'uso di particolari parole e in generale di segni che sono stati condivisi nella classe e che sono stati messi tra loro in relazione per costruire espressioni via via più complesse.
Certamente lo studio qui presentato è ancora a livello esplorativo e sono necessarie ulteriori ricerche su diversi fronti che sembrano suggerire potenzialità didattiche e di

3

3. Nella teoria della mediazione semiotica si indicano con il termine *segni situati*.

ricerca interessanti. In particolare dovremo analizzare gli effetti di un percorso didattico che a partire da quello presentato arrivi fino alla formulazione delle definizioni matematiche dei concetti in gioco. I risultati, al momento parziali, mostrano che gli studenti riportano tracce di pensiero dinamico nella formulazione e nell'interpretazione delle definizioni e sembrano essere particolarmente incoraggianti dal punto di vista dell'insegnamento-apprendimento.
Nonostante gli aspetti da chiarire e da approfondire, riteniamo che quanto presentato possa già essere fonte di un certo interesse (si veda anche Lisarelli, in stampa) e soprattutto possa essere utile agli insegnanti portando un punto di vista e un approccio da sperimentare e su cui riflettere.

Siti web di riferimento

NCTM: Teaching Students about Functions with Dynagraphs. http://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teaching-in-Middle-School/Blog/Teaching-Students-about-Functions-with-Dynagraphs/ (consultato il 25.09.2017).

Technologically Embodied Geometric Functions http://geometric-functions.org/curriculum/dynagraphs/introducing-dynagraphs/index.shtml (consultato il 25.09.2017).

Bibliografia

Antonini, S. (2011). Generating examples: focus on processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *43*(2), 205-217.

Bartolini Bussi, M. G. (2010). Quadro di riferimento. In F. Martignone (a cura di), *Scienze e tecnologie in Emilia-Romagna. Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna*, Napoli: Tecnodid Editrice, 40-55.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*(3), 221-256.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic Mediation in the mathematics classroom. Artifact and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 746-805.

Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Research Sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function. In *MAA Notes Online, Professional Development, Teaching and Learning, Research Sampler*. Disponibile in https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function (consultato il 25.09.2017).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 317-333.

Goldenberg, E. P., Lewis, P., & O'Keefe, J., (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington DC: MAA, 235-260.

Hazzan, O., & Goldenberg, E. P. (1997). Student's understanding of the notion of function. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(3), 263–290.

Lisarelli, G. (in stampa). Students' use of movement in the exploration of dynamic functions. In *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education*, Dublin, Ireland.

MIUR (2010). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali". Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf (consultato il 25.09.2017).

Sinclair, N., Healy, L., & Reis Sales, C., (2009). Time for telling stories: Narrative thinking with Dynamic Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *41*(4), 441–452.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers [Mathematics Education Library].

UMI, MIUR, SIS, & MATHESIS (2003). *Matematica 2003*. Lucca, Italia: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza [edizione critica a cura di L. Mecacci].

Autori / Giulia Colacicco[*], Giulia Lisarelli[▲] e Samuele Antonini[•]
[*]Centrum Wiskunde & Informatica – Amsterdam, Olanda
[▲]Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini" – Università di Firenze, Italia
[•]Dipartimento di Matematica "F. Casorati" - Università di Pavia, Italia
g.colacicco@cwi.nl, giulia.lisarelli@unifi.it, samuele.antonini@unipv.it

Riflessioni sulle risposte degli studenti ad alcune domande delle prove INVALSI

Reflections on students' answers to some items of INVALSI tests

Domingo Paola
Liceo "G. Bruno" – Albenga (Savona), Italia

Sunto / Si propongono alcune riflessioni di carattere didattico sulle risposte degli studenti del secondo anno di scuola secondaria di secondo grado ad alcune domande delle prove INVALSI italiane. Queste riflessioni riguardano anche pratiche piuttosto diffuse nell'insegnamento-apprendimento della matematica, in particolare nel segmento relativo al completamento dell'obbligo scolastico.
Dall'analisi dei risultati delle risposte degli studenti ad alcune domande delle prove emerge che esistono diverse criticità legate a conoscenze e competenze fondamentali per una formazione matematica significativa. Si avanza l'ipotesi che una possibile causa delle difficoltà dimostrate dagli studenti nel rispondere ad alcune domande delle prove INVALSI sia di carattere didattico e dipenda da un'eccessiva attenzione prestata agli aspetti finalizzati all'acquisizione di padronanza nel calcolo simbolico, con un addestramento fine a se stesso e non consapevole.

Parole chiave: variazioni percentuali; stime numeriche; pendenza di funzioni lineari; formulare; controesempio; soluzione di un'equazione.

Abstract / This article presents some didactic reflections on the answers of 9th grade students (second year in upper secondary school) to INVALSI tests in Italy. These reflections also concern common practices in Maths teaching, particularly regarding compulsory education. The analysis of the answers given by students to some items indeed reveals several criticalities related to basic knowledge and skills for meaningful Maths education. The paper suggests that a possible cause of students difficulties in answering to some INVALSI test items is of an educational nature and depends on an excessive attention devoted to mastery in symbolic calculation, leading to unaware training of merely mechanical skills.

Keywords: percentage variations; numerical estimates; slope of a linear function; formulate; counter-examples; solution to an equation.

1 Premessa

Il dibattito sull'utilità e sui rischi dei test standardizzati per misurare gli apprendimenti è molto acceso in Italia, probabilmente a causa della mancanza di una tradizione consolidata sulle problematiche della valutazione e della difficoltà ad accettare come ineludibile la richiesta che il sistema di formazione e istruzione renda conto dei suoi punti di forza e di debolezza al Paese. In alcuni casi, luoghi e momenti, la reazione alle prove INVALSI è stata addirittura di rifiuto e boicottaggio da parte di studenti, genitori, docenti.
Si ritiene che molte delle perplessità relative allo svolgimento dei test INVALSI potrebbero essere superate o discusse in modo più meditato e produttivo per il bene del sistema di formazione se si tenessero ben presenti alcuni limiti che i test standardizzati

inevitabilmente hanno (Sbaragli & Franchini, 2014). Conoscere meglio e più a fondo i punti di criticità molto probabilmente aiuterebbe a utilizzare in modo più proficuo le informazioni che le prove INVALSI possono fornire.
Sul notiziario dell'Unione Matematica Italiana del giugno 2017 (UMI, 2017), nella risposta che la Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) ha dato alla lettera della professoressa Rossella Latempa che, fra altre questioni, chiedeva un confronto sul rapporto tra personalizzazione dell'insegnamento e standardizzazione della valutazione, entrambe richieste dalla riforma, si legge:

> «Con una metafora (…) potremmo dire che le analisi mediche sono opportune per avere alcune informazioni, standardizzate, sul nostro stato di salute: queste informazioni, però, devono essere lette e analizzate da uno specialista che deve interpretarle alla luce di molte altre valutazioni, per nulla standardizzate, ma fondate su un'anamnesi che raccolga dirette informazioni sul paziente. Senza questa fase, soggettiva (ma non arbitraria) non è possibile effettuare una diagnosi significativa e accurata. Fuor di metafora, le informazioni fornite dalle valutazioni nazionali standardizzate sono utili per dare una visione d'insieme del sistema di formazione e istruzione, mentre costituiscono solo una piccola parte di quelle informazioni che devono essere acquisite per valutare uno studente e che solo l'insegnante può raccogliere, prendendo in considerazione aspetti che appartengono alla sfera cognitiva, ma anche a quella metacognitiva e non cognitiva.
> Le prove standardizzate hanno inevitabili limiti nella valutazione di alcune competenze: per esempio, non possono in alcun modo valutare il conseguimento di traguardi di competenza fondamentali per una buona formazione matematica come:
> – è in grado di produrre dimostrazioni all'interno delle teorie matematiche apprese;
> – è in grado di assumere un punto di vista storico-critico per leggere e interpretare i rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico che sono stati oggetto di indagine e studio negli anni di scuola media superiore;
> – ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.
>
> Attualmente non sono in grado di valutare il conseguimento del traguardo "Utilizza in modo pertinente gli strumenti tecnologici disponibili per effettuare esplorazioni, osservazioni e testare congetture" e difettano anche nel valutare la competenza di risolvere problemi di una certa complessità o di costruire modelli matematici che non siano elementari.
> Le prove standardizzate hanno quindi limiti che devono essere tenuti ben presenti, sia per quanto riguarda le competenze e le conoscenze che possono rilevare, sia per quel che riguarda le informazioni che possono essere ottenute solo attraverso altre forme di interazione con l'alunno».
>
> (UMI, 2017, p. 10)

La CIIM evidenzia con estrema precisione che il rapporto tra personalizzazione dell'insegnamento e standardizzazione della valutazione può essere risolto solo comprendendo che si tratta di due processi complementari, da portare avanti con equilibrio e sistematicità. La standardizzazione consente comparazioni altrimenti difficilmente

realizzabili, per esempio sui risultati di studenti appartenenti a contesti socio-economico-culturali simili, oppure riflessioni sul valore aggiunto del contesto scolastico. La personalizzazione dell'insegnamento e la conseguente personalizzazione della valutazione che, ricordiamolo, non ha solo la funzione di classificare in livelli la preparazione degli studenti, ma anche quella di promuovere competenze, è invece fondamentale per raggiungere gli obiettivi formativi prefissati.
In questo articolo si propongono alcune riflessioni di carattere didattico sulle risposte degli studenti ad alcune domande delle prove INVALSI. Considerazioni simili a quelle proposte, condotte dall'insegnante con i propri studenti, possono favorire l'apprendimento e aiutare l'azione di insegnamento (vedi Botta & Sbaragli, 2016).

2 Esempi di uso didattico delle prove INVALSI

In questo articolo si farà riferimento alle prove INVALSI di matematica del grado 10, cioè del secondo anno di scuola media superiore,[1] ma è chiaro che un lavoro simile può essere condotto per tutti gli altri gradi scolari. 1
Per considerazioni più ampie e generali, anche se meno dettagliate dell'uso didattico delle prove INVALSI, si rimanda alle guide che ogni anno l'istituto pubblica sul suo sito (INVALSI, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017).
Si sono classificati per temi gli esempi di domande che verranno discusse: si tratta di nodi cruciali dal punto di vista della formazione matematica di uno studente che completa l'obbligo scolastico e quindi particolarmente adatti a essere presentati agli studenti per favorire una riflessione sulla loro preparazione.

2.1 Variazioni percentuali

Le difficoltà degli studenti a operare con le percentuali sono note a tutti gli insegnanti. I test INVALSI confermano la presenza di queste difficoltà, in particolare per quel che riguarda il calcolo di variazioni percentuali. Si riportano, come esempi paradigmatici, due domande con risposta a scelta multipla somministrate in anni differenti. Non sono le uniche: in certi anni, in uno stesso fascicolo, è comparsa più di una domanda sulle variazioni percentuali. Il numero di risposte corrette a domande su questo argomento è in genere inferiore al 25% e solo nell'undicesima domanda del fascicolo 1 del 2016 raggiunge il 35%. Il numero di risposte mancanti è in genere elevato solo nel caso in cui la domanda preveda una risposta aperta. Le percentuali di risposte corrette, errate e mancanti o non valide che si riportano nella **Tabella 1**, tratte dall'archivio prove INVALSI (INVALSI, n.d.),[2] sono relative al campione italiano globale, cioè senza distinzione tra diverse tipologie di istituti (licei, istituti tecnici e istituti professionali), per la domanda 14 del 2012 (**Figura 1**). 2

1. Allievi di 15-16 anni.
2. L'archivio prove Invalsi è consultabile alla pagina web http://www.gestinv.it.

La seguente tabella riporta il numero di occupati in Italia in ciascuno degli anni dal 1995 al 2005.

Anni	Occupati (in migliaia)
1995	20240
1996	20326
1997	20384
1998	20591
1999	20847
2000	21210
2001	21604
2002	21913
2003	22241
2004	22404
2005	22563

a. Quale tra le seguenti espressioni dà come risultato l'aumento percentuale del numero di occupati nel 2001 rispetto al numero di occupati nel 2000?

A. ☐ $\frac{21604}{21210} \times 100$

B. ☐ $\frac{394}{21210} \times 100$

C. ☐ $\frac{21210}{21604} \times 100$

D. ☐ $\frac{394}{21604} \times 100$

Figura 1
Domanda 14 della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	20,8%
Percentuale di risposte errate	71,7%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	7,5%

Tabella 1
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 14 della prova del 2012.

Si osservi che agli studenti non veniva chiesto di calcolare un aumento percentuale, ma solo di scegliere, tra quattro espressioni, quella che consente di calcolare l'aumento percentuale richiesto. Uno studente che abbia ben compreso che cosa si intenda con aumento percentuale ha a disposizione almeno due procedure:

a) calcolare l'incremento assoluto del numero di occupati come differenza tra il dato del 2001 e quello del 2000; calcolare il rapporto tra l'incremento assoluto determinato e il dato del 2000; moltiplicare il risultato per 100;
b) calcolare il rapporto tra il dato del 2001 e quello del 2000; moltiplicare per 100 questo rapporto e sottrarre 100 al risultato ottenuto.

Dovrebbe essere abbastanza immediato osservare che le quattro espressioni proposte sembrano derivare da una procedura di tipo a); è inoltre possibile scartare immediatamente le opzioni A e C che al numeratore non presentano la differenza tra il dato del 2001 e quello del 2000. Ci si potrebbe attendere che le riposte quindi si concentrino sulle scelte B (corretta) e D (errata, perché prende come base di calcolo il dato del 2001 e non quello del 2000).
Invece la distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni è abbastanza uniforme (Tabella 2; non si riporta più il dato delle riposte mancati o non valide):

Tabella 2
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 14 della prova del 2012.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
29,3%	20,8%	23,8%	18,6%

Ciò può suggerire che molti studenti non abbiano idea di che cosa si intenda con aumento percentuale e di come possa essere calcolato.
La successiva domanda, proposta nella prova INVALSI del 2013 (**Figura 2**), conferma in parte questa supposizione, dato che le risposte corrette sono circa il 20%: un'analisi più puntuale su come si distribuiscono le riposte errate (**Tabella 3** e **Tabella 4**) consente però di avanzare un'ipotesi su possibili accorgimenti didattici che possano essere attuati per aiutare gli studenti ad affrontare le difficoltà relative al calcolo di variazioni percentuali.

Considera un quadrato di lato *a*.

a. **Se si aumenta il lato *a* del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato *b*. Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di *b*?**

A. ☐ 20 a

B. ☐ 1,20 a

C. ☐ $a + 20$

D. ☐ $a + 0{,}20$

b. **Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato *b* rispetto all'area del quadrato di lato *a*?**

A. ☐ Del 20%

B. ☐ Del 40%

C. ☐ Del 44%

D. ☐ Del 120%

Figura 2
Domanda 7 della prova del 2013.

Item a.

Tabella 3
Percentuali relative al tipo di risposte all'item a della Domanda 7 della prova del 2013.

Percentuale di risposte corrette	19,8%
Percentuale di risposte errate	75,5%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	4,7%

Item b.

Tabella 4
Percentuali relative al tipo di risposte all'item b della Domanda 7 della prova del 2013.

Percentuale di risposte corrette	14,9%
Percentuale di risposte errate	79,0%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	6,1%

Possiamo limitare l'analisi alle risposte fornite all'item a. È indubbio, infatti, che chi non sa rispondere all'item a difficilmente potrà fornire una risposta corretta all'item b, che richiede di determinare come un incremento percentuale sul lato di un quadrato influisce sull'incremento percentuale dell'area del quadrato stesso.
La distribuzione delle riposte sulle quattro opzioni dell'item a è la seguente (**Tabella 5**):

Tabella 5
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte all'item a della Domanda 7 della prova del 2013.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
10,7%	19,8%	18,8%	46%

È interessante osservare che l'opzione D è quella che raccoglie il maggior numero di consensi (quasi il 50%). Si tratta ovviamente di una risposta errata, ma gli studenti che hanno scelto questa opzione hanno compreso di dover addizionare al valore iniziale l'incremento e che la notazione 20% indica lo stesso numero indicato dalla rappresentazione decimale 0,20.
Il calcolo con le percentuali e in particolare la determinazione di variazioni percentuali comporta difficoltà per gli studenti, che molto probabilmente nascono già al momento di definire e comprendere che cosa si intenda con rapporto percentuale. In uno dei libri di testo a mio avviso più validi che siano mai stati scritti per il biennio della scuola media superiore, il rapporto percentuale viene così introdotto:

> «Siano a e b due grandezze omogenee, e sia k il loro rapporto; il numero $100k$ si chiama il loro rapporto percentuale. Se con K si denota il numero $100k$, allora il rapporto $\frac{a}{b}$ si può scrivere nella forma $\frac{a}{b}=\frac{K}{100}$. Com'è noto in luogo del rapporto $\frac{K}{100}$ si scrive anche $K\%$ (e si legge "K per cento"), onde si ha $\frac{a}{b}$ = $=K\%$».
>
> (Villani & Spotorno, 1979, p. 25)

È normale che uno studente si trovi in difficoltà a orientarsi in un concetto così complesso, a meno che non si pianifichi un intervento didattico sistematico e ricco di esempi significativi. Invece, spesso, ci si accontenta che gli studenti calcolino percentuali ricorrendo alle proporzioni e alla notazione additiva, tecniche e rappresentazioni poco adatte ad affrontare problemi di calcolo di variazioni percentuali.
La preferenza degli studenti per la notazione additiva si evidenzia in modo molto chiaro nel 46% di preferenze per l'opzione D.
Se il valore a aumenta del 20%, vuol dire che passa da a al valore $a+0{,}20a$.
Si ritiene che per aiutare gli studenti ad affrontare le difficoltà che incontrano con le variazioni percentuali sia molto importante investire tempo e risorse didattiche per passare dalla notazione additiva, $a \to a+0{,}20a$, a quella moltiplicativa, $a \to 1{,}20a$.
L'equivalenza delle due notazioni può essere dimostrata con la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.
Il passaggio alla notazione moltiplicativa risulta assai utile per risolvere problemi di calcolo di percentuali composte, come quello di montanti in regime di interesse composto o dell'inflazione su più anni.

2.2 Ordini di grandezza e stime

Valutare ordini di grandezza e stimare con almeno una o due cifre significative una grandezza sono competenze fondamentali per una partecipazione informata, consapevole e critica alla cittadinanza, visto che molte informazioni sono ormai ricche di dati espressi in forma quantitativa e che, per prendere decisioni meditate, il cittadino deve sapere valutare la sensatezza e l'affidabilità delle informazioni che riceve.
Le prove INVALSI suggeriscono che molti studenti abbiano diverse difficoltà nel valutare la plausibilità di dati quantitativi o nello stimare ordini di grandezza.
Come per le variazioni percentuali, vengono considerate solo due delle varie domande che sono state somministrate dal 2011 a oggi. La prima viene presentata nella **Figura 3**, mentre le relative percentuali di risposta nella **Tabella 6**.

Le dimensioni di una piazza rettangolare di una grande città sono circa 620 m × 120 m. Le stime comparse sui giornali sul numero di partecipanti a una manifestazione che ha riempito la piazza variano da 100 000 a oltre 1 000 000.

a. Sapendo che diverse fotografie scattate durante la manifestazione evidenziano una densità di circa 4 persone al metro quadro, che cosa si può concludere circa l'effettivo numero dei partecipanti?

☐ A. Le stime dei giornali sono tutte errate perché dalle informazioni disponibili i partecipanti non potevano essere più di 20 000.

☐ B. Una stima ragionevole è di circa 300 000 partecipanti.

☐ C. Ha ragione chi ha parlato di più di un milione di partecipanti.

☐ D. La piazza non può contenere molte persone più di uno stadio, quindi c'erano meno di 150 000 partecipanti.

b. Mostra i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.

....

....

Figura 3
Domanda 23 della prova del 2011.

Tabella 6
Percentuali relative al tipo di risposte all'item a della Domanda 23 della prova del 2011.

Percentuale di risposte corrette	46,3%
Percentuale di risposte errate	36%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	17,7%

La distribuzione delle riposte sulle quattro opzioni è la seguente (**Tabella 7** e **8**):

Tabella 7
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte all'item a della Domanda 23 della prova del 2011.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
18,9%	46,3%	7,1%	10%

Percentuale di risposte corrette	34,8%
Percentuale di risposte errate	21,6%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	43,6%

Tabella 8
Percentuali relative al tipo di risposte all'item b della Domanda 23 della prova del 2011.

I risultati possono sembrare a una prima analisi non del tutto sconfortanti: in fondo quasi il 50% degli studenti sceglie l'opzione corretta per quel che riguarda l'item a. Se però consideriamo la distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni e il dato relativo alle risposte non date o non valide, osserviamo che circa il 42% di studenti sceglie risposte errate per un ordine di grandezza o non risponde.
Per quel che riguarda l'item b aumentano considerevolmente le risposte non date, ma questa è una caratteristica tipica (e preoccupante) degli studenti italiani del secondo anno della scuola media superiore, già rilevata anche nelle indagini internazionali: gli studenti dimostrano una fortissima resistenza a fornire anche semplici e brevi descrizioni o giustificazioni delle strategie utilizzate per rispondere a una domanda.

Una domanda molto simile alla 6 del 2013 qui di seguito riportata con i suoi risultati (Figura 4 e Tabella 9) era stata proposta anche nella prova del 2011 e aveva ottenuto percentuali di risposte simili.

Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa m_p è all'incirca $2\cdot10^{-27}$ kg, e un elettrone la cui massa m_e è all'incirca $9\cdot10^{-31}$ kg.
Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè m_p+m_e)?

A. ☐ $2\cdot10^{-27}$ kg

B. ☐ $11\cdot10^{-31}$ kg

C. ☐ $11\cdot10^{-58}$ kg

D. ☐ $18\cdot10^{-58}$ kg

Figura 4
Domanda 6 della prova del 2013.

Percentuale di risposte corrette	18%
Percentuale di risposte errate	76%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	6%

Tabella 9
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 6 della prova del 2013.

La distribuzione delle riposte relativamente alle quattro opzioni è la seguente (Tabella 10):

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
18%	9,4%	33,3%	33,3%

Tabella 10
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 6 della prova del 2013.

In questo caso il contesto, ben poco familiare per gli studenti del secondo anno di scuola media superiore, non aiuta. Non si tratta solo del fatto che le misure si riferiscono a oggetti che non sempre sono studiati in questo segmento scolare: la difficoltà maggiore è probabilmente dovuta a misure che risultano del tutto avulse dall'esperienza. Non è facile dare un senso a potenze di 10 con esponenti negativi così grandi in valore assoluto. Se si osserva la distribuzione delle risposte rispetto alle opzioni possibili, emerge però chiaramente che la grande maggioranza degli studenti (67% circa) sceglie le risposte meno plausibili, cioè le opzioni C e D, in cui i dati disponibili vengono trattati senza alcuna logica: per determinare l'ordine di grandezza di una somma di masse, nell'opzione C si addizionano i fattori che moltiplicano le potenze di 10 e si moltiplicano le potenze di 10; nell'opzione D si moltiplicano sia i fattori sia le potenze di 10. Probabile che emergano anche difficoltà con le proprietà delle potenze, anche se ciò è piuttosto singolare, visto che le proprietà delle potenze sono uno degli argomenti a cui in genere si dedica più attenzione nella prassi didattica: basti pensare al numero di esercizi presenti sui libri di testo più adottati, sia nel calcolo numerico, sia in quello letterale.

2.3 Pendenza

Il concetto di pendenza di una funzione lineare è uno dei concetti più importanti dell'intero percorso scolastico nella scuola media superiore. Uno studente che non lo possieda completamente al termine del primo biennio avrà ben pochi strumenti concettuali per comprendere il concetto di pendenza locale di una funzione su cui si basa l'intero percorso di analisi matematica.

Nonostante ciò, le varie domande che riguardano il concetto di pendenza di una funzione lineare sono tra quelle che comportano maggiori difficoltà per gli studenti, come ad esempio quella mostrata nella **Figura 5** (percentuale di risposte nella **Tabella 11**).

Considera la funzione definita da: $y = 3x + 1$.

a. **Quale dei seguenti grafici può rappresentare questa funzione?**

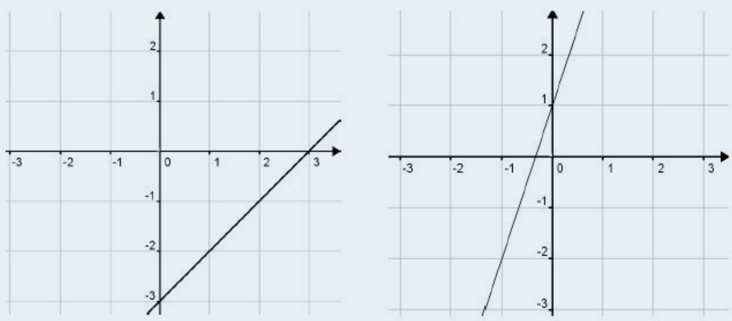


Grafico 1 **Grafico 2**

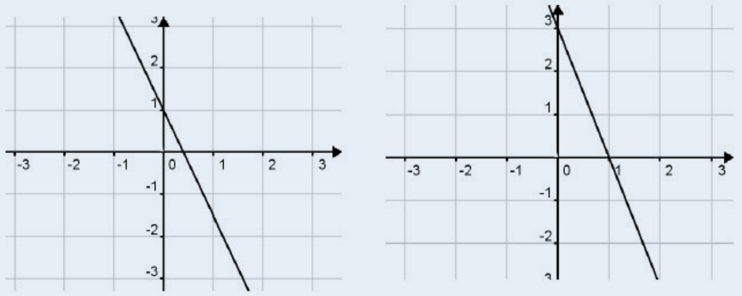


Grafico 3 Grafico 4

A. ☐ Il grafico 1

B. ☐ Il grafico 2

C. ☐ Il grafico 3

D. ☐ Il grafico 4

Figura 5
Domanda 8 (item a) della prova del 2013.

Tabella 11
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 8 (item a) della prova del 2013.

Percentuale di risposte corrette	31,1%
Percentuale di risposte errate	60,6%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	8,3%

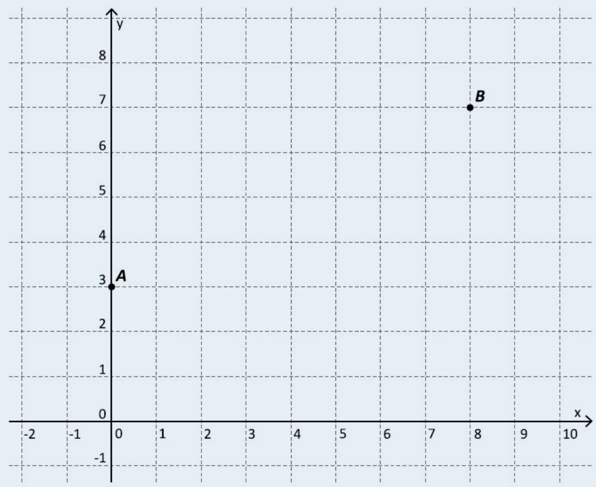
La distribuzione delle riposte sulle quattro opzioni è la seguente (**Tabella 12**):

Tabella 12
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 8 (item a) della prova del 2013.

Opzione A (Grafico 1)	Opzione B (Grafico 2)	Opzione C (Grafico 3)	Opzione D (Grafico 4)
8,2%	31,1%	12,5%	39,9%

Due delle opzioni possibili (C e D) potevano essere immediatamente scartate perché propongono grafici di funzioni lineari decrescenti, che quindi hanno pendenza negativa, a differenza della retta descritta dall'equazione fornita. Anche il Grafico 1 (opzione A) poteva essere scartato immediatamente da chi possiede il concetto di pendenza come rapporto di variazioni: appare evidente, infatti, che la pendenza della retta rappresentata nel Grafico 1 è uguale a 1. È interessante notare che l'opzione più scelta (anche rispetto alla risposta corretta, la B) è stata la D, in cui l'intersezione della retta con l'asse x ha ascissa 1 e quella con l'asse y ha ordinata 3, cioè gli stessi numeri che compaiono nell'equazione della retta. Ciò suggerisce che molti studenti non abbiano la minima idea di quello che è il concetto di pendenza di una funzione lineare o che comunque non riescano a metterlo in relazione con un'espressione algebrica.
Questa ipotesi è corroborata dalla seconda domanda che propongo sullo stesso argomento (**Figura 6** e **Tabella 13**).

Sul piano cartesiano in figura sono assegnati i punti *A* e *B* di coordinate intere.



Il coefficiente angolare della retta *AB* è ....

Figura 6
Domanda 17, fascicolo 1, della prova del 2016.

Tabella 13
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 17, fascicolo 1, della prova del 2016.

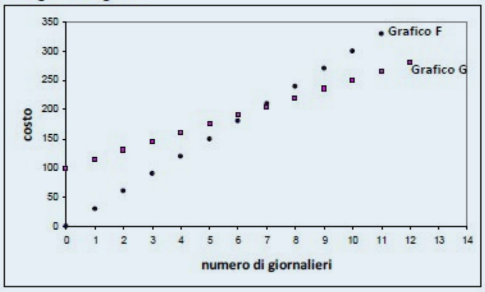
Percentuale di risposte corrette	18,4%
Percentuale di risposte errate	40%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	41,6%

In questo caso non vi sono distrattori che possano catturare l'attenzione degli studenti più deboli e il calcolo è particolarmente semplice; le espressioni $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{2}$, $0{,}5$ e altre scritture equivalenti (anche espresse in forma percentuale) sono tutte accettate. In questo caso è possibile affermare che risponde correttamente chi conosce come si calcola la pendenza di un segmento e risponde in modo errato o non risponde chi invece non lo sa. Tra l'altro in questa domanda è stata utilizzata l'espressione "coefficiente angolare", con cui in genere si parla della pendenza di una funzione lineare, anche se non sempre a proposito (viene utilizzato anche in sistemi non monometrici e talvolta addirittura quando le variabili sull'asse x e y non rappresentano grandezze omogenee). Più dell'80% degli studenti che completano la scuola dell'obbligo non è in grado di calcolare la pendenza di un segmento.

2.4 Mettere in formula

Una delle competenze matematiche più importanti dal punto di vista culturale e per il prosieguo degli studi è quella di padroneggiare diversi registri di rappresentazione e di effettuare conversioni dall'uno all'altro, cioè saper passare da un registro di rappresentazione a un altro (Duval, 1993; D'Amore, 1998). In particolare, è importante che uno studente sappia dare significato al linguaggio simbolico e che, per esempio, sia capace di descrivere con una formula semplici modelli lineari.
Nelle prove INVALSI sono state proposte diverse domande che richiedono di scrivere una formula che rappresenti una determinata situazione in cui esiste una relazione lineare tra due variabili. Se ne presentano qui due (Figure 7 e 8; Tabelle da 14 a 22) che sono particolarmente indicative delle difficoltà in genere incontrate da molti studenti.

Mario va in vacanza in una località sciistica. Per usufruire degli impianti di risalita (seggiovie, funivie ...), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale.
Offerta A: costo iniziale fisso di 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita).
Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.
Osserva la seguente figura.



a. Quale, fra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A?

A. ☐ Il grafico F

B. ☐ Il grafico G

b. Completa la seguente tabella, relativa all'offerta B.

Numero di giorni in cui Mario usufruisce degli impianti di risalita	Costo in euro
1	30
2	
3	

c. Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?

Risposta: ....

d. Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B, che esprimano il costo c al variare del numero di giornalieri g.

Offerta A: c = ...

Offerta B: c = ...

e. A partire da quale numero di giornalieri il costo dell'offerta B diventa una volta e mezza il costo dell'offerta A?

Risposta: ....

Figura 7
Domanda 2
della prova del 2012.

Tabella 14
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item a) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	82,4%
Percentuale di risposte errate	16,1%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	1,5%

Tabella 15
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item b) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	85,6%
Percentuale di risposte errate	10%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	4,4%

Tabella 16
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item c) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	83,1%
Percentuale di risposte errate	4,4%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	12,5%

Tabella 17
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item d) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	47,8%
Percentuale di risposte errate	19,4%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	32,8%

Tabella 18
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item e) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	12,9%
Percentuale di risposte errate	41%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	46,1%

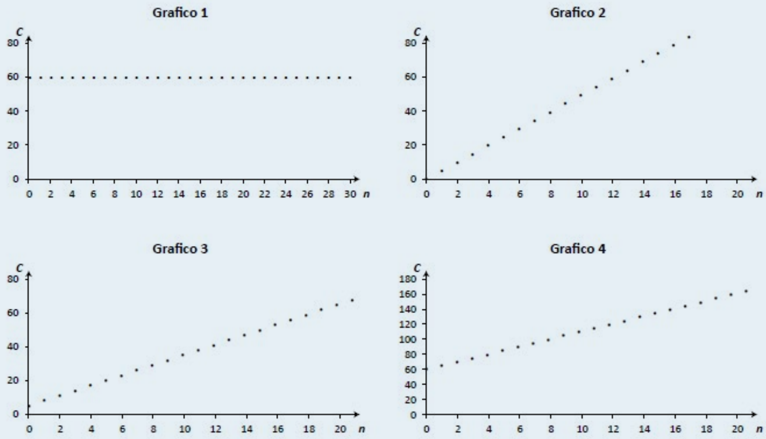
I primi due item (a, b) richiedevano di utilizzare competenze relative alla lettura di semplici grafici o tabelle, che gli studenti già possiedono dalla scuola secondaria di primo grado (scuola media). All'item è possibile rispondere aiutandosi con i grafici disponibili oppure eseguendo semplici calcoli numerici a partire dal testo. Come si può vedere dalle risposte fornite, più dell'80% degli studenti risponde correttamente ai primi tre item e la percentuale delle risposte mancate o non valide sono in tutti i casi molto contenute. Questo dimostra, tra l'altro, che gli studenti sono motivati a rispondere agli item.
Gli stessi studenti incontrano però forti difficoltà nell'affrontare l'item d, in cui si chiede di esprimere con una semplicissima formula quello che hanno dimostrato di aver compreso rispondendo ai primi tre item: si tratta solo di scrivere $c = 100 + 15g$ e $c = 30g$ (naturalmente si accettavano come corrette anche le risposte che utilizzavano un nome di variabile diverso da g o anche scritture del tipo $y = 30x$ e $y = 100 + 15x$, eventualmente espresse a parole e non in simboli).
La percentuale di risposte corrette crolla dai valori che superano l'80%, corrispondenti ai primi tre item, al 47,8% per il quarto item e la percentuale di risposte mancate o non date sale a circa il 33%.
La considerazione didattica che può essere fatta è che gli studenti incontrino notevoli difficoltà nel momento in cui si passi dalla richiesta di *calcolare* a quella di *scrivere formule*. Sembra di poter avanzare l'ipotesi che gli studenti che completano l'obbligo scolastico abbiano notevoli difficoltà a utilizzare il linguaggio simbolico per esprimere significati, anche quando la situazione da modellizzare sia chiara per loro. Questa ipotesi aiuterebbe a chiarire le varie difficoltà che la maggior parte degli studenti incontrano nel primo anno del secondo biennio di scuola media superiore quando affrontano il percorso di geometria analitica. Infatti in questo caso è opportuno, se non addirittura necessario, dare significato geometrico alle formule e, viceversa, saper esprimere con formule situazioni geometriche.
È piuttosto singolare che gli studenti incontrino difficoltà a utilizzare il linguaggio simbolico per esprimere semplici relazioni lineari dopo tutti gli esercizi che vengono svolti sulla trasformazione di formule nel percorso di algebra a cui in genere si dedica la maggior parte del percorso del primo biennio di scuola media superiore. In realtà

si sospetta che l'addestramento per acquisire padronanza nel calcolo simbolico rischi di essere non solo inutile, ma addirittura controproducente per la formazione matematica di molti studenti. Si ritornerà nelle conclusioni su questo punto assai delicato. Inutile prendere in considerazione l'item e, per rispondere al quale è necessario manipolare la formula richiesta nell'item precedente: ovvio che in questo caso il numero di risposte corrette si riduca ancora di più.

Considerazioni analoghe sono suggerite dalle risposte alla seguente domanda (**Figura 8**).

Per frequentare una palestra Paolo deve pagare quest'anno una quota fissa di 60 euro e 5 euro per ogni ingresso.

a. Quale fra i seguenti grafici descrive il costo *C* (in euro) della palestra in funzione del numero *n* di ingressi?



A. ☐ Grafico 1
B. ☐ Grafico 2
C. ☐ Grafico 3
D. ☐ Grafico 4

b. Paolo ha a disposizione 200 euro. Se si iscrive alla palestra, qual è il numero massimo di ingressi a cui ha diritto quest'anno?

Risposta: ....

c. Completa la formula che esprime il costo *C* della palestra in funzione del numero *n* di ingressi.

***C* =** ....

Figura 8
Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Tabella 19
Percentuali relative al tipo di risposte all'item a della Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Percentuale di risposte corrette	61,2%
Percentuale di risposte errate	36,7%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	2,1%

La distribuzione delle riposte sulle quattro opzioni è la seguente:

Tabella 20
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte all'item a della Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
16,8%	10,6%	9,3%	61,2%

Tabella 21
Percentuali relative al tipo di risposte all'item b della Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Percentuale di risposte corrette	58,1%
Percentuale di risposte errate	34,4%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	7,5%

Tabella 22
Percentuali relative al tipo di risposte all'item c della Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Percentuale di risposte corrette	32%
Percentuale di risposte errate	36,3%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	31,7%

In questo caso il numero di risposte corrette ai primi due item è inferiore alle risposte corrette fornite ai primi tre item della Domanda 2 del 2012 (**Figura 7**). Ciò si potrebbe spiegare con due considerazioni:

a) Il primo item è a scelta multipla e i distrattori tendono a catturare l'attenzione di alcuni studenti, diminuendo la percentuale di risposte corrette;
b) l'item b richiede un piccolo calcolo e non solo la lettura di grafici o tabelle come nel caso dei primi tre item della Domanda 2 della prova del 2012.

In ogni caso all'incirca il 60% degli studenti risponde correttamente ai primi due item, mentre il numero di risposte corrette all'item c diminuisce fortemente, arrivando al 32%. Eppure si chiedeva solo di scrivere l'espressione $60+5n$ (accettando anche l'uso di nomi di variabili diversi da n).

2.5 Logica del controesempio

La conoscenza matematica si esprime attraverso un linguaggio che richiede un uso di connettivi e quantificatori che non sempre è in completo accordo con quello praticato in contesti non matematici. Alla fine della scuola dell'obbligo, se lo studente desidera procedere nell'acquisizione di una formazione matematica sempre più solida e in grado di consentire la prosecuzione negli studi scientifici, è necessario che abbia conseguito una buona padronanza nell'uso di connettivi e quantificatori del linguaggio matematico.

In questo paragrafo ci si limita a prendere in considerazione le difficoltà che molti studenti hanno nel dimostrare la falsità di proposizioni quantificate universalmente, anche quando riguardano contenuti che dovrebbero essere familiari agli studenti fin dalla scuola primaria (scuola elementare).

Diverse domande delle prove INVALSI suggeriscono la presenza di questa difficoltà. Si propone, come esempio paradigmatico, una domanda della prova del 2011 (**Figura 9** e **Tabella 25**).

Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale n, $2^n + 1$ è un numero primo". Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.

....

....

....

Figura 9
Domanda 4 della prova del 2011.

Tabella 23
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 4 della prova del 2011.

Percentuale di risposte corrette	42,8%
Percentuale di risposte errate	18,3%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	38,9%

L'elevato numero di risposte mancanti o non valide può essere dovuto al fatto che, come già rilevato, gli studenti italiani sembrano essere piuttosto restii a fornire giustificazioni anche semplici. In questo caso, però, veniva esplicitamente richiesto di limitarsi a mostrare un semplice controesempio. Sarebbe bastato notare che per $n = 3$ si ottiene 9 che non è un numero primo. Il fatto che solo il 43% circa risponde correttamente suggerisce che gli studenti abbiano difficoltà ad accettare la cosiddetta "logica del controesempio", che afferma che in una proposizione quantificata universalmente è sufficiente esibire un caso che falsifichi la proposizione stessa per affermare la sua falsità.
Per esempio, è noto che di fronte alla proposizione "Tutti i numeri primi sono dispari" gli studenti preferiscano dire che l'enunciato è vero se si esclude 2, piuttosto che affermare la sua falsità. Gli studenti, in altri termini, preferiscono dire "tutta la verità", come per esempio è richiesto in un'aula di tribunale o è opportuno nelle usuali conversazioni, e non "solo la verità", come spesso avviene in matematica.
Si ritiene importante ribadire, però, che nel caso della Domanda 4 della prova del 2011 era esplicitamente richiesta solo la produzione di un semplice controesempio e la maggior parte degli studenti non sono riusciti a rispondere correttamente.

2.6 Soluzione di un'equazione

Il concetto di soluzione di un'equazione è uno di quelli che dovrebbero essere maggiormente trattati nel percorso dell'ultimo biennio della scuola dell'obbligo: basti pensare a quante e quali risorse vengano investite da insegnanti e studenti nella risoluzione di equazioni di primo o secondo grado o riconducibili al primo o secondo grado (ciò è spesso vero anche in quelle tipologie di scuole in cui le equazioni di secondo grado non sono previste dalle indicazioni curricolari nel primo biennio). Nonostante ciò, le prove INVALSI suggeriscono che gli studenti non abbiano idea di che cosa si intenda con *soluzione di un'equazione*. Si propone l'analisi delle risposte a tre domande (Figure 10, 11 e 12; Tabelle da 20 a 28).

L'equazione $x(x-1)=6$ ha fra le sue soluzioni

A. ☐ $\frac{1}{6}$

B. ☐ 3

C. ☐ 6

D. ☐ 7

Figura 10
Domanda 28 della prova del 2012.

Tabella 24
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 28 della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	49,7%
Percentuale di risposte errate	43,5%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	6,8%

La distribuzione delle riposte sulle quattro opzioni è la seguente:

Tabella 25
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 28 della prova del 2012.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
14,6%	49,7%	20,7%	8,2%

In questo caso, per verificare che l'opzione corretta è la B basta sostituire alla x i diversi valori proposti nelle alternative. È immediato verificare che la A non può essere l'opzione corretta, perché sostituendo $\frac{1}{6}$ alla x il primo membro è il prodotto fra un numero positivo e uno negativo e non può quindi essere uguale a 6. Se, invece, si sostituisce 3 alla x si ottiene $3 \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = 6$ e quindi si ottiene subito, al secondo passo, la risposta corretta.

Il fatto che meno del 50% di studenti sia riuscito a rispondere correttamente fa supporre che molti studenti non abbiano idea di che cosa si intenda con *soluzione di un'equazione*, anche se magari sanno risolvere alcune tipologie di equazioni.

È data l'equazione $(2k-3)x + 1 - k = 0$, in cui x è l'incognita e k è un numero reale.

La soluzione dell'equazione è 1 per k = ...

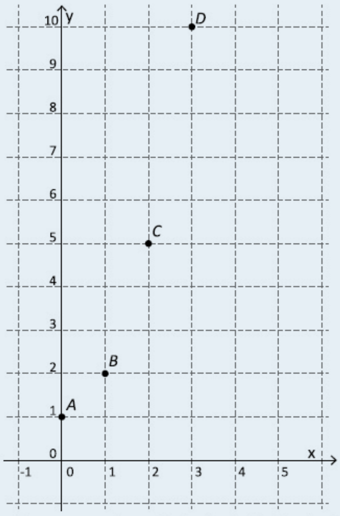
Figura 11
Domanda 17 della prova del 2014.

Tabella 26
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 17 della prova del 2014.

Percentuale di risposte corrette	31,8%
Percentuale di risposte errate	28,1%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	40,1%

Quanto ipotizzato in precedenza viene confermato dai risultati di risposta alla domanda: il 68% circa degli studenti sbaglia o non risponde. Eppure, se si facesse riferimento al concetto di *soluzione di un'equazione*, sarebbe immediato scrivere $2k-3+1-k=0$ da cui si ottiene $k=2$.

Sul seguente piano cartesiano sono rappresentati i punti *A* (0; 1), *B* (1; 2), *C* (2; 5), *D* (3; 10).



Il grafico della funzione *f* passa per i punti *A, B, C, D*. Quale tra le formule seguenti individua la funzione *f* ?

A. ☐ $f(x)=x^3+1$

B. ☐ $f(x)=2^x$

C. ☐ $f(x)=-x^2+1$

D. ☐ $f(x)=x^2+1$

Figura 12
Domanda 28, fascicolo 1, della prova del 2016.

Tabella 27
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 28, fascicolo 1, della prova del 2016.

Percentuale di risposte corrette	46%
Percentuale di risposte errate	41,7%
Percentuale di risposte mancate o non valide	12,3%

La distribuzione delle riposte sulle quattro opzioni è la seguente:

Tabella 28
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 28, fascicolo 1, della prova del 2016.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
18,1%	9,7%	13,9%	46%

Anche in questo caso il 54% circa degli studenti o sbaglia o non risponde; eppure, anche qui era abbastanza immediato scartare l'opzione A (se $x=2$ si ottiene $y=8$), l'opzione B (se $x=2$ si ottiene $y=4$) e l'opzione C (se $x=2$ si ottiene $y=-3$). Quindi l'opzione corretta è la D. Anche in questo caso il possesso del concetto di *soluzione di un'equazione* (qui in due variabili) avrebbe consentito di rispondere correttamente e in breve tempo.

3 Conclusioni

Le riflessioni proposte sulle risposte date dagli studenti italiani ad alcune domande delle prove INVALSI suggeriscono la presenza di diverse criticità, che riguardano conoscenze e competenze essenziali per la formazione matematica degli studenti che completano l'obbligo scolastico: percentuali e variazioni percentuali, concetto di pendenza, di soluzione di un'equazione, determinare ordini di grandezza ed effettuare stime, mettere in formula, gestire sul terreno logico-linguistico matematico l'uso dei connettivi e dei quantificatori.
Queste criticità mettono in evidenza la necessità di riequilibrare l'attenzione tra aspetti semantici e sintattici del lavoro in matematica che, nella prassi didattica, almeno se si guarda ai libri di testo più adottati nelle classi, sembra eccessivamente rivolta agli aspetti sintattici.
Non si vuole qui sostenere che la padronanza del linguaggio simbolico, la competenza di trattamento all'interno del registro simbolico siano secondarie nella formazione matematica: sembra però emergere dall'analisi delle risposte degli studenti ai test INVALSI che l'attenzione data, nella tradizionale prassi didattica, a questi aspetti non favorisca la costruzione di significato per gli oggetti di studio e l'acquisizione di competenze utili ad affrontare e risolvere quesiti anche molto elementari. Si potrebbe dire che *nonostante* le enormi risorse destinate all'acquisizione di padronanza nel calcolo simbolico il significato evapori dalle formule piuttosto che condensarsi in esse. È possibile che tutto ciò accada *soprattutto* per l'eccessiva attenzione data agli aspetti puramente sintattici, fini a se stessi.
L'addestramento fine a se stesso è uno strumento formidabile per la formazione di una buona cultura matematica quando si tratti di scelta autonoma e consapevole da parte dello studente; invece rischia di essere del tutto inutile e anzi di ostacolo al conseguimento di una buona formazione se viene semplicemente imposto dall'insegnante.
D'altra parte un grande matematico come Bruno de Finetti si era spesso espresso contro l'eccessiva attenzione della didattica tradizionale verso pratiche di addestramento fini a se stesse: erano altri tempi, ma richiamare oggi un suo intervento può ancora essere utile:

> «Posso credere una cosa senza capirla: è tutta questione di addestramento! Questa frase (…) mi torna sempre in mente, come una sensazione paurosa di sconforto, perché mi sembra esprima integralmente la fondamentale e chissà quanto eliminabile stortura che sta effettivamente, anche se non dichiaratamente, alla base di tutta l'imperversante concezione della didattica tradizionale: abituare a imparare e credere senza capire».
>
> (de Finetti, 1965, p. 568)

Bibliografia

Botta, E., & Sbaragli, S. (2016). Il caso dell'altezza. Un sapere fondante, *Nuova Secondaria, 1*, 112-116.

D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli, *L'educazione matematica*, *1*, 7-28.

De Finetti, B. (1965). La matematica e il profano, *Scuola e Città*, *9-10*, 566-573.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

INVALSI (2012). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado.* Disponibile in http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/guide/2012-2SUP-GUIDA-MATEMATICA.pdf (consultato il 15/07/2017).

INVALSI (2013). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/2013_II_Sec_Secondo_grado_GUIDA_MATEMATICA.pdf (consultato il 15.07.2017).

INVALSI (2014). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/10_GUIDA_MATEMATICA.pdf (consultato il 15.07.2017).

INVALSI (2015). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/attach/2015_GUIDA_L10_DICEMBRE.pdf (consultato il 15.07.2017).

INVALSI (2016). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2016-GUIDA-L10.pdf (consultato il 15.07.2017).

INVALSI (2017). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2017-GUIDA-L10.pdf (consultato il 15.07.2017).

INVALSI (n.d.), Gestinv 2.0, Archivio interattivo delle prove Invalsi. Disponibile in http://www.gestinv.it (consultato l'8.8.2017).

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Locarno: Dipartimento formazione e apprendimento.

UMI (2017). *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, *6*, 5-13.

Villani, V., & Spotorno, B. (1979). *Idee e Metodi*, vol. 1. Firenze: La Nuova Italia.

Autore / Domingo Paola
Liceo "G. Bruno" – Albenga (Savona), Italia
domingo.paola56@gmail.com

Il ruolo cruciale del pensiero narrativo nella comprensione dei problemi[1]

The crucial role of narrative thinking in understanding problems

Rosetta Zan
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa, Italia

Sunto / Nell'attività di soluzione di un problema matematico espresso attraverso un testo, è cruciale il processo preliminare di comprensione. Questo processo mostra criticità sia nel caso di un testo del problema molto sintetico, sia nel caso di un testo molto ricco, come dimostrano molte risposte date dagli studenti e riportate in letteratura, caratterizzate da un'apparente "sospensione di senso". In questo articolo proponiamo un'interpretazione di questo fenomeno, basata sull'interazione tra quelli che Bruner definisce modi di pensiero "narrativo" e "logico".

Parole chiave: word problem; story problem; rappresentazione; risoluzione; pensiero narrativo; pensiero logico; sense-making.

Abstract / Within the solution of a mathematical word problem, the preliminary understanding process is viewed as crucial. This process shows critical points both in the case of a rather poor problem text and in the case of a very rich text, as shown by many answers given by students and reported in the literature, characterized by an apparent 'suspension of sense-making'. In this communication, we propose an interpretation of this phenomenon, based upon the interplay between what Bruner calls the "narrative" and "logical" modes of thought.

Keywords: word problem; story problem; representation; solution; narrative thought; logical thought; sense-making.

1 Introduzione

I problemi matematici espressi attraverso un testo – in letteratura indicati come *word problems* – hanno un ruolo importante nell'insegnamento della matematica, soprattutto nella scuola elementare. Anche se *word problem* letteralmente significa 'problema verbale', nella didattica della matematica solitamente il termine sta per:

> «(…) un testo (tipicamente contenente informazioni quantitative) che descrive una situazione assunta familiare per il lettore e che pone una domanda quantitativa, alla quale si può dare una risposta attraverso operazioni matematiche eseguite a partire dai dati forniti nel testo o dedotti in altro modo».
>
> (Greer, Verschaffel & De Corte, 2002, p. 271)

1. Liberamente tradotto da Zan R. (2011), The crucial role of narrative thought in understanding story problems, in (Kirsti Kislenko Editor) *Current State Of Research On Mathematical Beliefs XVI*. Proceedings of MAVI 16 Conference. Tallinn, 26-29 June 2010, pp. 287-305. Il tema trattato nel presente articolo è stato successivamente approfondito dall'autrice nel volume *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo* (Zan, 2016).

La "situazione assunta familiare per il lettore" è spesso chiamata *contesto* o *storia*, e in effetti i termini *word problem* e *story problem* sono generalmente usati come sinonimi.[2]

2

La letteratura internazionale sui *word problem* offre diversi esempi di comportamento degli studenti che suggeriscono un'apparente "sospensione di senso" (Schoenfeld, 1991). Cercando di interpretare questi comportamenti la ricerca si è mossa in diverse direzioni. Gli studi condotti finora (per un'analisi si veda Verschaffel et al., 2000) da un lato hanno portato a riconoscere la responsabilità dello scarso realismo dei problemi, della natura stereotipata dei testi e delle norme implicite ed esplicite che regolano le attività di problem solving (il contratto didattico). Dall'altro, hanno evidenziato che molte delle difficoltà incontrate dagli studenti risiedono nella fase preliminare della costruzione di un'adeguata rappresentazione della situazione del problema, il che rende difficile individuare eventuali difficoltà nella fase di risoluzione.

2 La comprensione del problema

Nella letteratura, gli studi sulla natura dei problemi evidenziano in particolare che:

> «Anche se il compito matematico è inserito in un contesto, la natura stereotipata di questi contesti, **la mancanza di informazioni realistiche e interessanti sui contesti, e la tipologia delle domande poste alla fine dei *word problems*** contribuiscono congiuntamente a far sì che i bambini non vengano motivati e stimolati a prestare attenzione e a riflettere su (gli aspetti specifici di) quel contesto».
>
> (Verschaffel et al., 2000, pp. 68-69, enfasi aggiunta)

Nesher (1980) sottolinea:

> «Nella maggior parte dei casi (…) lo studente non è in grado, a causa dello stile conciso, di ricostruire il contesto da cui sono stati presi i dati. In breve, egli **non è in grado di immaginare il dominio degli oggetti e delle trasformazioni che l'autore aveva in mente**. Invece, sviluppa un'altra strategia. Prova a inferire direttamente dalla formulazione verbale del testo del problema l'operazione matematica necessaria».
>
> (Nesher, 1980, p. 46, enfasi aggiunta)

La ricerca delle operazioni matematiche da effettuare a partire dal testo del problema può avvenire in diversi modi, tra i quali Sowder (1989, p.104) identifica i seguenti: guardare i numeri (possono suggerire quale operazione utilizzare); provare tutte le operazioni e scegliere la risposta più ragionevole; cercare singole "parole chiave"; decidere se il numero nella risposta deve essere più piccolo o più grande dei numeri

2. Ad esempio Verschaffel et al. (2000, p. ix) scrivono: "*word problems* (or *verbal problems* or *story problems*)", e Gerofsky (1996, p.36): "*word problems*, or *story problems*".

dati (se più grande, provare sia l'addizione sia la moltiplicazione e decidere in base alla risposta più ragionevole; se più piccolo, provare sia la sottrazione sia la divisione scegliendo la più ragionevole). Pochi studenti, anche fra quelli capaci, dimostrano di utilizzare una strategia "matura": scegliere l'operazione in base al *significato* del testo, cioè alla situazione descritta, alla storia narrata. In altre parole, pochi studenti basano i loro processi di problem solving su una rappresentazione del problema.
Sowder (1989) osserva che gli studenti che usano le strategie sopra elencate riescono a risolvere correttamente molti, se non la maggior parte, dei problemi aritmetici a un'operazione. Anche Gerofsky (1996) afferma che spesso il processo di rappresentazione del problema non è essenziale per ottenere la soluzione corretta di un *word problem.* Guardando ai *word problems* come a un genere linguistico e letterario, l'autrice identifica una struttura basata su tre componenti:

1) una componente di "messa in scena", che definisce i personaggi e il luogo dov'è ambientata la storia;
2) una componente di "informazione", che dà le informazioni necessarie per risolvere il problema;
3) una domanda.

Gerofsky scrive:

> «...la componente 1) di un tipico *word problem* è semplicemente un alibi, l'unico legame con la 'storia' di uno *story problem.* Essa introduce una situazione con un gruppo di personaggi, luoghi e oggetti, che generalmente è irrilevante per la scrittura e la risoluzione del problema aritmetico o algebrico incorporato nella componente successiva. In effetti, **troppa attenzione alla storia distrae gli studenti dal compito di traduzione in questione, portandoli a considerare fattori "estranei" della storia** piuttosto che a concentrarsi sull'estrapolazione delle variabili e operazioni dalle componenti 2) e 3), matematicamente più salienti».
>
> (Gerofsky, 1996, p. 37, enfasi aggiunta)

Verschaffel et al. (2000) osservano che la descrizione fatta da Gerofsky sulla risoluzione dei *word problems* è

> «(…) una descrizione di un approccio sbagliato alla risoluzione di un *word problem* – che (…) elude il modello della situazione e passa direttamente dal testo al modello matematico attraverso alcuni indicatori superficiali».
>
> (Verschaffel et al., 2000, p.147)

De Corte e Verschaffel (1985), facendo riferimento all'enorme quantità di dati raccolti nel loro lavoro con allievi all'inizio della prima elementare, sostengono che la mancanza di costruzione di un'appropriata rappresentazione mentale di un *word problem* è in realtà un ostacolo per processi risolutivi corretti, e in quanto tale permette ai ricercatori di capire alcune risposte apparentemente assurde date dagli studenti. Secondo lo psicologo americano Richard Mayer (1982) uno dei maggiori contributi della psicologia cognitiva è proprio la distinzione del problem solving in due fasi: *rappresentazione* (comprensione del problema) e *soluzione*. La distinzione tra queste due fasi, osserva Mayer, non sempre è possibile, tuttavia ci suggerisce che le difficoltà osservate in attività di problem solving possono derivare da una inadeguata rappresentazione.

In definitiva, la fase di rappresentazione di un problema viene riconosciuta come momento essenziale ma allo stesso tempo critico del problem solving. I ricercatori da una parte sottolineano che il processo di rappresentazione può essere ostacolato da un testo eccessivamente conciso (che favorisce piuttosto l'attivazione di scorciatoie cognitive, come quelle descritte da Sowder), dall'altra sostengono che una storia troppo ricca può "distrarre" lo studente (Gerofsky, 1996).

I seguenti esempi, tratti da studi di ricerca italiani, sembrano confermare l'effetto distrattore:

1. All'interno di uno studio condotto da ricercatori dell'università di Modena sulle intuizioni probabilistiche di bambini del secondo e terzo anno di scuola elementare viene proposto il seguente problema (Zan, 2007, p.103):

   Ogni volta che va a trovare i nipotini Elisa e Matteo, nonna Adele porta un sacchetto di caramelle di frutta e ne offre ai bambini, richiedendo però che essi prendano le caramelle senza guardare nel pacco.
   Oggi è arrivata con un sacchetto contenente 3 caramelle al gusto di arancia e 2 al gusto di limone.
   Se Matteo prende la caramella per primo, è più facile che gli capiti al gusto di arancia o di limone?
   Perché?

Alcuni bambini rispondono "arancia" con giustificazioni di questo tipo: "Perché gli piacciono di più"; "Perché ha guardato nel sacchetto"; "Se Matteo prendeva quella al limone, ne rimaneva una sola e invece è meglio prenderla all'arancia".

2. Il seguente problema è stato sottoposto a studenti dalla seconda classe della scuola media alla quarta classe di scuola media superiore (Ferrari, 2003):

   In una casa è stato rotto un vaso cinese. In quel momento si trovano in casa in 4 ragazzi: Angelo, Bruna, Chiara e Daniele. Al ritorno, la padrona di casa vuol sapere chi ha rotto il vaso e interroga i 4, uno alla volta. Ecco le dichiarazioni di ciascuno:
   Angelo: «Non è stata Bruna»
   Bruna: «È stato un ragazzo»
   Chiara: «Non è stato Daniele»
   Daniele: «Non sono stato io».
   Sai scoprire chi è il colpevole? Attenzione, però: delle 4 testimonianze, 3 corrispondono alla verità mentre 1 è falsa.
   Chi ha rotto il vaso cinese? Spiega come hai fatto a trovare la risposta.

Queste sono alcune delle risposte raccolte da Ferrari: "è stato Angelo perché non è discolpato da nessuno"; "è stata Chiara: non è nominata da nessuno perché vogliono coprirla"; "è stato Daniele perché si discolpa, quindi probabilmente è stato lui".

Questi e altri studi riguardanti i *word problems* suggeriscono in definitiva che quando il contesto è molto povero (come generalmente è il caso di quelli citati in letteratura) gli studenti tendono a ignorare la storia e a inferire direttamente dal testo le operazioni da utilizzare. Invece, quando il contesto è molto ricco (com'è il caso dei problemi di nonna Adele e del vaso cinese), gli studenti si confondono con fattori "estranei" (Gerofsky,1996), e si "perdono" nella storia.

A questo proposito, Toom (1999, p. 38) osserva che il testo di un *word problem* dovrebbe essere "pulito da tutti i dati irrilevanti".[3]

3 Gli story problems come problemi formulati da altri

Le considerazioni fatte fin qui sul ruolo della rappresentazione della situazione di un problema nel processo di risoluzione, ci portano a sottolineare una caratteristica nella risoluzione di un *word problem* che, a nostro parere, ha una grande rilevanza per comprendere il comportamento degli studenti.
La presenza di un testo, tipica di un *word problem*, è collegata a una caratteristica dei *word problems* che li rende profondamente diversi dai *problemi della vita reale*: colui che deve risolvere il problema (lo studente) è diverso da colui che lo propone (l'insegnante o il libro di testo). In altre parole, i problemi su cui gli studenti lavorano a scuola sono "proposti, e formulati, da un'altra persona" (Kilpatrick, 1987), e il testo (scritto) è il modo consueto in cui sono *posti.*
Dal fatto che i problemi scolastici sono *eteroposti* (cioè posti da altri) seguono alcune implicazioni importanti per il processo di comprensione di un problema.
La prima implicazione è la presenza di una domanda esplicita, con la funzione di comunicare a colui che risolve il problema quale deve essere il suo obiettivo: quando il problema è *autoposto* (cioè posto dalla stessa persona che lo deve risolvere) chi lo pone non ha bisogno di esplicitare il proprio obiettivo a chi lo risolve.
La seconda implicazione riguarda il particolare obiettivo che caratterizza coloro che pongono un *word problem.* Nesher (1980) sottolineando la natura stereotipata dei *word problems* aritmetici, evidenzia il ruolo giocato dalle intenzioni dell'autore del testo del problema:

> «per ragioni di semplicità, le considerazioni qualitative e quantitative per un dato problema reale (*real problem*) sono già state fatte dall'autore del testo. (…) Egli ha in mente un'operazione matematica, o una struttura matematica con le cui applicazioni nella vita reale vorrebbe che gli studenti familiarizzassero. L'autore quindi sceglie uno dei contesti della vita reale e immagina una situazione (…) che richiederà l'applicazione della data struttura matematica (…). Per semplificarla per gli studenti, egli in seguito aggiunge, nella maniera più concisa, tutte le informazioni qualitative e quantitative necessarie per risolvere il problema, e giunge a una sorta di problema scolastico che possiede tutte le caratteristiche stereotipate già descritte».
>
> (Nesher, 1980, p. 45)

Ad esempio, se l'autore ha in mente il problema:

> Per coprire una distanza *s* a una velocità v_1 è necessario un tempo *t*. Quanto tempo ci vuole per percorrere lo stesso spazio a una velocità v_2?

3. Toom si riferisce qui a ciò che lui chiama problemi *non del mondo reale* (e che distingue dai problemi *realistici*), in cui il riferimento a oggetti concreti è finalizzato a rappresentare e introdurre nozioni matematiche astratte (Toom, 1999, p. 37).

può contestualizzarlo in una situazione di vita reale come:

> John impiega 20 minuti per andare da casa al lavoro, viaggiando a 40km/h. Oggi è in ritardo e viaggia a una velocità di 50 km/h. Quanto tempo impiegherà?

In definitiva l'obiettivo sia del docente sia dell'autore del testo è *interno* alla matematica. Tuttavia, come afferma Cobb (1986):

> «(…) c'è una grande discrepanza tra gli obiettivi che il docente pensa di porre agli studenti e quelli che gli studenti effettivamente cercano di raggiungere. In altre parole, il docente crede che gli studenti operino in un contesto matematico mentre i loro obiettivi generali sono di natura principalmente sociale anziché matematica».[4]
>
> (Cobb, 1986, p. 8)

Cobb fa esplicito riferimento a un contesto "sociale", intendendo che l'attività degli studenti «è diretta verso l'obiettivo di ottenere o evitare determinate risposte dal docente» (Cobb, 1986, p. 8). Più in generale, egli afferma che «il contesto psicologico entro il quale si dà significato a una situazione può influenzare radicalmente i comportamenti successivi» (p. 2).
Nel caso di uno *story problem* il contesto psicologico coinvolto nella fase di rappresentazione richiede di «penetrare nella struttura profonda pragmatica» (Nesher, 1980, p. 46) della storia. La comprensione delle storie delle persone, delle loro ragioni, intenzioni, sentimenti è collegata a una forma di pensiero che Bruner (1986) definisce come *narrativo*, e che lo studioso giustappone al pensiero *paradigmatico* o *logico-scientifico*:

> «La mia tesi è questa: ci sono due tipi di funzionamento cognitivo, due modi di pensare, ognuno dei quali fornisce un proprio metodo particolare di ordinamento dell'esperienza e di costruzione della realtà. Questi due modi di pensare, pur essendo complementari, sono irriducibili l'uno all'altro. (…) Il primo, quello paradigmatico o logico-scientifico, persegue l'ideale di un sistema descrittivo ed esplicativo formale e matematico. Esso ricorre alla categorizzazione o concettualizzazione, nonché alle operazioni mediante le quali le categorie si costituiscono, vengono elevate a simboli, idealizzate e poste in relazione tra loro in modo da costituire un sistema. (…) L'uso creativo dell'altro modo di pensare, quello narrativo, produce invece buoni racconti, drammi avvincenti e quadri storici credibili, sebbene non necessariamente «veri». Il pensiero narrativo si occupa delle intenzioni e delle azioni proprie dell'uomo o a lui affini, nonché delle vicissitudini e dei risultati che ne contrassegnano il corso».
>
> (Bruner, 1986, trad. it., pp. 15-18)

La rappresentazione della situazione descritta nel *word problem* – la "storia" – richiede dunque allo studente di entrare in un contesto (nel senso di Cobb) che possiamo chiamare *narrativo*. In seguito, sulla rappresentazione di tale situazione dev'essere costruito il processo di risoluzione (e quindi la risposta), e in questo gioca un ruolo cruciale il pensiero logico.

4. Questa discrepanza emerge chiaramente dalle risposte date da alcuni bambini alla domanda "Cos'è per te un problema?" (Zan, 2007): "Un esempio di problema può essere quello di un problema matematico che non riesco a risolvere" [Simone, V primaria].

La distinzione tra le due fasi di *rappresentazione* e *risoluzione* così come anche il ruolo giocato dal pensiero narrativo e logico in queste fasi ci portano a distinguere tra le informazioni rilevanti per la rappresentazione (che potremmo chiamare *narrativamente rilevanti*), e le informazioni rilevanti per la risoluzione, ovvero per rispondere alla domanda (*logicamente rilevanti*). Il punto è che le informazioni di cui l'allievo ha bisogno per rappresentarsi il problema non sono necessariamente quelle che gli servono per risolverlo.
Ad esempio nel problema del vaso cinese il fatto che l'oggetto rotto fosse un vaso cinese è rilevante per la storia e quindi per il processo di rappresentazione (se invece di un vaso cinese si fosse rotto un semplice bicchiere la storia perderebbe di senso), anche se non è necessario per la soluzione.
L'importanza d'informazioni narrativamente rilevanti per risolvere il problema emerge chiaramente da uno studio condotto da D'Amore et al. (1995). Alunni tra la seconda elementare e la prima media dovevano riformulare il seguente problema: "Tre operai impiegano 6 giorni per completare un certo lavoro. Quanto ci impiegherebbero 2 operai per completare lo stesso lavoro?". Tutti i bambini hanno aggiunto un'informazione riguardante *la ragione per la quale* gli operai si riducevano da 3 a 2 (per esempio: "uno si è ammalato e *perciò* sono rimasti in 2"). Questa informazione era evidentemente rilevante per comprendere la storia, in particolare per cogliere la sua natura problematica e (di conseguenza) la sua relazione con la domanda. In uno studio successivo, che ho seguito per una tesi di laurea, alcuni bambini hanno commentato esplicitamente il testo originale come segue: "Non riesco a immaginare la scena perché non so qual è il loro lavoro", "Non capisco come rispondere alla domanda perché gli operai sono inizialmente in tre e poi diventano due, non è spiegato molto bene".
Il bisogno di collegare con una storia i due pezzi d'informazione ("3 operai fanno un certo lavoro" e "2 operai fanno lo *stesso* lavoro") emerge anche da molti disegni fatti dai bambini per rappresentare il problema:

Fra le informazioni rilevanti per la soluzione un ruolo fondamentale è svolto dalla domanda: per risolvere il problema, un bambino deve rappresentare la situazione ma *anche* comprendere il senso della domanda. Perciò, più la rappresentazione della situazione descritta evoca nel bambino la domanda, più la rappresentazione promuoverà la comprensione della domanda, necessaria per raggiungere la soluzione.

Figura 1
Rappresentazione del problema dei 3 operai.

Particolarmente significativo da un punto di vista narrativo è dunque quel pezzo di informazione che consente al bambino di afferrare la natura problematica della storia e di cogliere il nesso esistente tra la storia stessa e la domanda posta.

Può anche accadere che i pezzi d'informazione necessari per risolvere il problema non siano consistenti dal punto di vista narrativo, e se sono inconsistenti, verranno probabilmente ignorati dagli allievi che leggono in modo narrativo.
Ad esempio, nel problema di nonna Adele la domanda finale ("È più semplice pescare una caramella all'arancia o al limone?") non è realistica da un punto di vista narrativo: si tratta di una domanda artificiosa, senza nessi significativi con la storia narrata. In effetti le risposte rilevate dimostrano che i bambini rispondono a una domanda differente,[5] oppure semplicemente completano la storia. Analogamente, nel problema del vaso cinese – che richiama la struttura narrativa di un "giallo" – il pezzo di informazione "Attenzione: delle 4 frasi, 3 sono vere mentre 1 è falsa" non è consistente da un punto di vista narrativo (chi può saperlo?) e tuttavia è un'informazione fondamentale per rispondere alla domanda.
In definitiva, affinché il pensiero narrativo possa sostenere, attraverso il processo di rappresentazione della storia, il pensiero logico, necessario per il processo di risoluzione, è importante che le informazioni necessarie per la risoluzione siano consistenti da un punto di vista narrativo e che le informazioni necessarie per la rappresentazione siano consistenti dal punto di vista logico, in particolare consistenti con la domanda posta.

In realtà la formulazione standard di *story problems* generalmente pone poca attenzione a questi aspetti.
Quando il contesto è estremamente povero, non ci sono sufficienti informazioni per rappresentare la storia: si potrebbe anche dire che a volte manca una storia vera e propria, dato che una dimensione essenziale delle storie è quella del tempo (Bruner, 1986). In particolare la domanda non segue in modo narrativo *dal* contesto, ma è piuttosto una domanda artificiosa *sul* contesto. Il ruolo del contesto in tal caso è ridotto a quello di contenitore dei dati necessari (e generalmente sufficienti) per poter rispondere alla domanda. Non può allora sorprendere che lo studente si concentri sulla domanda, mentre il contesto viene letto in relazione a quella domanda (in particolare selezionando parole chiave e dati numerici).
Un tipico esempio di una formulazione standard è il seguente:

> Carlo compra un quaderno e due penne. Spende 2 €. Una penna costa 0,6 €.
> Quanto costa il quaderno?

Il contesto non è problematico, e non suggerisce una domanda "naturale". La domanda posta ("Quanto costa il quaderno?") è una domanda artificiosa *sul* contesto, e non una domanda che emerge in modo naturale *dal* contesto.

Al contrario quando il contesto è ricco, la ricchezza della storia promuove la messa in atto del pensiero narrativo, necessario per comprenderla. Non è però scontato che questa comprensione sostenga il processo di risoluzione, e in particolare la comprensione del senso della domanda. Se la domanda posta non è narrativamente coerente

5. Margaret Donaldson (1978) propone la stessa interpretazione, quando discute le risposte scorrette date dai bambini nelle prove tipiche di Piaget. Donaldson critica la struttura di quei test, in particolare indicando che la domanda ha poco 'significato' nel contesto sperimentale. La studiosa ipotizza che il fallimento di un bambino nel completare alcuni test tipici (riguardo il punto di vista, la conservazione, le sotto-classi) possa essere attribuito al fatto che il bambino risponde in realtà a una domanda diversa, più coerente con il contesto. In effetti, alcuni cambiamenti del contesto sperimentale finalizzati a far sì che la domanda diventi 'significativa' portano a un notevole aumento delle risposte corrette.

con la storia narrata, o se la storia contiene informazioni essenziali dal punto di vista logico ma incoerenti dal punto di vista narrativo, il pensiero narrativo attivato dalla storia non supporterà lo studente nella risoluzione del problema. Potrebbe addirittura essere un ostacolo nel processo di risoluzione, portando il bambino a rispondere a una domanda più adatta alla narrazione, o comunque a perdersi nel "bosco narrativo" (secondo la metafora di Umberto Eco (1994)) che abbiamo costruito per lui.
Nella nostra ipotesi questo è ciò che succede nel problema di nonna Adele così come in quello del vaso cinese. Infatti le risposte rilevate mostrano che gli allievi completano la storia in modo narrativo, indipendentemente dalla domanda posta o dai vincoli forniti: la storia della nonna con i nipoti, il "giallo" del vaso cinese. In questi casi sembra che si verifichi il fenomeno descritto da Cobb: il bambino lavora in un contesto – quello narrativo in questo caso – che si differenzia da quello logico matematico, atteso dall'insegnante. Se assumiamo questo punto di vista le risposte riportate sono pienamente legittime e non ha senso parlare di errore o addirittura di "mancanza di pensiero logico".
A nostro parere questo è anche quello che può accadere con la formulazione del problema di John ("John impiega 20 minuti per andare da casa al lavoro, viaggiando a 40 km/h. Oggi è in ritardo e viaggia a una velocità di 50 km/h. Quanto tempo impiegherà?"). Alcuni studenti di scuola media superiore trovano questo problema difficile, perché "non ci sono dati sufficienti per rispondere". Il fatto è che in questo caso il contesto rappresenta una situazione effettivamente problematica (John è in ritardo e deve andare al lavoro) che suggerisce una domanda "naturale": "Ce la farà ad arrivare in orario?". E per rispondere a tale domanda non ci sono dati sufficienti.

4 Conclusioni

La fase di comprensione di un problema è un momento cruciale e critico per il processo di risoluzione. La ricerca sui *word problems*, in particolare, evidenzia che da una parte il processo di comprensione può essere ostacolato da un testo troppo conciso, dall'altra che una storia descritta con molti dettagli può "distrarre" i bambini. Le nostre osservazioni suggeriscono una possibile interpretazione di questo fenomeno, che richiede ulteriori ricerche: le difficoltà evidenziate nei due casi sono dovute alla mancanza di coerenza tra le informazioni narrativamente rilevanti e quelle logicamente rilevanti, più che dalle caratteristiche del testo considerato come tale (conciso/ricco). Nel caso di un testo ricco che manca di questa coerenza, il pensiero narrativo attivato dal contesto non supporta il pensiero logico, necessario per dare la risposta: una conseguenza di questo è che il pensiero narrativo prevale e il bambino si perde in un "bosco narrativo". Al contrario, in un problema "ben formulato" la storia descritta supporta e non ostacola la soluzione del problema stesso. Il seguente è l'esempio di una "buona formulazione" (in questo senso) del problema di Carlo:

> Andrea deve comprare un quaderno ma non può andare in cartoleria. Chiede allora al suo amico Carlo di comprarlo per lui. Carlo oltre al quaderno per Andrea compra due penne, ognuna delle quali costa 0,6 €. In tutto spende 2 €.
> Quando Carlo dà il quaderno ad Andrea, Andrea gli chiede: «Quanto ti devo dare per il mio quaderno?»
> Come può fare Carlo a saperlo?

Date le finalità delle attività in classe con i *word problems*, l'insegnante (o l'autore del problema) pone la massima attenzione al processo di risoluzione e quindi alla domanda e alle informazioni necessarie per rispondere. Non dedica invece la stessa attenzione alla fase di rappresentazione e quindi alle informazioni di cui l'allievo ha bisogno per rappresentare il problema: le informazioni riguardanti la storia sono spesso considerate "dettagli irrilevanti", fonte di confusione piuttosto che di aiuto. In altre parole, l'attenzione di coloro che pongono il problema è tutta sulla struttura logica del problema, mentre la struttura narrativa non è sufficientemente considerata. Quindi, ciò che accade generalmente è che c'è una "frattura narrativa" nel testo del problema, cioè la domanda e le informazioni necessarie per la risoluzione non sono coerenti dal punto di vista della storia narrata.
Negli esempi che abbiamo esaminato questa frattura narrativa per lo più si verifica fra contesto e domanda (nonna Adele, il ritardo di John, il problema di Carlo), ma in generale può verificarsi anche all'interno del contesto stesso (come nel problema del vaso cinese).
L'analisi proposta in questo articolo si riferisce a *word problems* caratterizzati da una storia. Le nostre osservazioni suggeriscono anche che la ricerca sui *word problems* dovrebbe distinguere fra *word problems* e *story problems*, considerando questi ultimi come un caso particolare di *word problems* che merita una specifica attenzione. Sono quindi necessari studi mirati sugli *story problems*: in particolare, è possibile che il processo di comprensione sia favorito dalla presenza di una storia. Ad esempio, la dimensione temporale che caratterizza una storia è anche la principale differenza tra i problemi *statici* e *dinamici*, in cui si verifica un cambiamento, e la ricerca ha sottolineato che i problemi dinamici risultano essere più facili per i bambini rispetto a quelli statici (Nesher, 1980).

Un'altra implicazione delle nostre osservazioni è che due problemi logicamente equivalenti possono essere molto diversi da un punto di vista narrativo. Essere in grado di riconoscere la stessa struttura matematica in diversi *story problems* è un'abilità importante in matematica, che coinvolge il pensiero logico e che non può essere considerato come un prerequisito. È piuttosto un traguardo dell'educazione matematica, che richiede tempo e attenzione ai punti critici che abbiamo sottolineato. Il legame tra contesti e modalità di pensiero (logico/narrativo) da un lato, e tra contesti e obiettivi, dall'altro, come sottolineato da Cobb (1986), evidenzia un altro importante obiettivo per l'educazione matematica, a livello metacognitivo: educare gli studenti a riconoscere contesti in cui il pensiero logico è più adeguato ai propri scopi. Ma, ancora con Cobb, gli obiettivi di un individuo sono a loro volta collegati alle sue convinzioni, che «possono essere considerate come ipotesi sulla natura della realtà che sono alla base di un'attività orientata verso un obiettivo» (Cobb, 1986, p. 4). Questo collegamento mette in evidenza il ruolo delle convinzioni costruite dagli studenti attraverso l'interpretazione della propria esperienza.

Un'ultima osservazione. Anche se un compito di un'insegnante di matematica è quello di sviluppare il pensiero logico, a mio avviso il pensiero narrativo non deve essere considerato come un ostacolo al pensiero logico o in ogni caso come una mancanza di pensiero razionale. Può funzionare in contesti in cui il pensiero logico fallisce.
Ad esempio, il pensiero narrativo può dare senso a un problema logicamente assurdo. Nel problema conosciuto come "l'età del capitano" ("Ci sono 26 pecore e 10 capre su una nave. Quanti anni ha il capitano?") alcuni bambini rispondono sommando i nu-

meri trovati nel testo, e giustificano questo procedimento con argomenti come "forse il capitano ha ricevuto un animale come regalo di compleanno" (IREM de Grenoble, 1980), cioè costruiscono una *storia* grazie alla quale la risposta (e quindi la domanda) acquista un senso.
Analogamente, davanti al problema "In un prato ci sono 20 pecore, 7 capre e 2 cani. Quanti anni ha il pastore?" (logicamente, ma non narrativamente equivalente al precedente) un bambino risponde:

"Ho fatto un ragionamento particolare: se il pastore ha due cani per così pochi animali, forse uno dei due cani gli serve perché è cieco. Quindi deduco che potrebbe avere circa 70-76 anni".

Possiamo davvero definire *irrazionale* questa risposta, frutto di un pensiero di tipo narrativo?

Bibliografia

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge: Harvard University Press (tr. it. *La mente a più dimensioni*, 2003, Bari, Laterza).

Cobb, P. (1986). Contexts, Goals, Beliefs, and Learning Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6*(2)*, 2-9.

D'Amore, B., Franchini, D., Gabellini, G., Mancini, M., Masi, F., Pascucci, N., & Sandri P. (1995), La riformulazione dei testi dei problemi scolastici standard, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A, 2, 131-146.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

Donaldson, M. (1978). *Children's minds*. London: Fontana Press (tr. it. *Come ragionano i bambini*, 2010, Milano, Springer).

Eco, U. (1994). *Six walks in the fictional woods*. Cambridge, MA: Harvard University Press (tr. it. *Sei passeggiate nei boschi narrativi*, 2000, Milano, Bompiani).

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *26*A, *4*, 469-496.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For The Learning of Mathematics*, *16*(2), 36-45.

Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 271- 292.

IREM de Grenoble (1980). *Bulletin de l'Association des professours de Mathématiques de l'Enseignement Public*, 323, 235-243.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In Schoenfeld, A. (ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 123-147.

Mayer, R. (1982) The Psychology of Mathematical Problem Solving. In F.L. Lester & J. Garofalo (Eds.) *Mathematical Problem Solving. Issues in Research*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Nesher, P. (1980). The Stereotyped Nature of Word Problems. *For the Learning of Mathematics*, *1*, 41-48.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J.F. Voss, D.N. Perkins, & J.W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, L. (1989). Searching for affect in the solution of story problems in mathematics. In McLeod & Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 104-113). New York: Springer.

Toom, A. (1999). Word problems: Applications or mental manipulatives. *For the Learning of Mathematics*, *19 (1)*, 36-38.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci.

Traduzione di Romina Casamassa.

Autore / Rosetta Zan
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa, Italia
rosetta.zan@unipi.it

Esperienze didattiche

DdM

Te lo voglio far capire! Le rappresentazioni spontanee degli allievi di prima elementare per comunicare una situazione numerica[1]

1

ESPERIENZA DIDATTICA

I want to help you understand it! The spontaneous representations of primary school children to communicate a numerical situation

Michela Bettoni
Istituto Scolastico Comunale della Città di Lugano – Sede di Cassarate, Svizzera

Sunto / Questa sperimentazione ha coinvolto 19 allievi di prima elementare con lo scopo di indagare quali rappresentazioni spontanee scelgono per comunicare a interlocutori diversi uno stimolo proposto in un problema numerico. I dati raccolti hanno offerto un singolare quadro sulla sensibilità dei bambini e sull'utilizzo spontaneo di diversi registri semiotici, tra cui il ricorso a grafici.

Parole chiave: comunicazione; rappresentazione; messaggio; concezione; grafico.

Abstract / This research involved 19 primary school students to investigate which representations they choose in order to communicate to different audiences a stimulus proposed in a numerical problem. The collected data provided a unique picture of children's sensitivity and spontaneous use of several semiotic registers, including graphs.

Keywords: communication; representation; message; conception; graph.

1 Introduzione

Lo scopo di questa ricerca è di capire come un allievo di prima elementare elabora e rappresenta spontaneamente un messaggio per comunicare dati numerici, nel modo che ritiene più adatto ed efficace per destinatari di età inferiore, uguale o maggiore della sua. Si vogliono inoltre osservare le motivazioni che lo spingono a scegliere determinate rappresentazioni, indagando l'intenzionalità comunicativa derivante da uno stimolo di un problema numerico.

Attraverso l'esame dei protocolli e delle interviste individuali, è stato possibile saggiare le idee e le opinioni di 19 allievi di prima elementare relative alle scelte alla base delle differenti rappresentazioni usate. Tale indagine ha offerto un singolare quadro sulla sensibilità dei bambini nel considerare le possibili disparità di conoscenze che intercorrono tra i diversi interlocutori. Inoltre, sono emersi molti spunti interessanti sul tema dell'utilizzo spontaneo di diversi registri semiotici, in particolare sul ricorso a grafici nella produzione di un messaggio contenente dati numerici.

1. Questo articolo rappresenta una sintesi del lavoro di diploma Bachelor of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello elementare di Michela Bettoni (2017), relatrice Silvia Sbaragli.

Il lavoro vuole essere un possibile spunto di riflessione per gli interessati al tema delle rappresentazioni dei bambini, e soprattutto sulla loro capacità e volontà di decentrarsi, considerando che allievi più piccoli o più grandi possano possedere capacità diverse dalle loro, e sia quindi necessario adattare un ipotetico messaggio matematico per l'interlocutore. La ricerca vuole anche essere un possibile punto di partenza per l'apertura di un dialogo sulla matematizzazione e la modellizzazione attraverso l'uso spontaneo di grafici dei bambini di prima elementare e sulle motivazioni che stanno alla base delle loro scelte.

2 Quadro teorico

2.1 Il ruolo delle rappresentazioni

Già dai primi anni di vita, i bambini si dimostrano curiosi verso l'esterno, iniziano a indagare e a interpretare la realtà che li circonda: cercano di tradurla, capirla e spiegarla ricorrendo alle prime forme di rappresentazioni, mentali e scritte. L'atto del rappresentare sembrerebbe quindi essere un bisogno naturale per i bambini. Eppure, nonostante rappresentare sia un termine di uso quotidiano e un'azione ricorrente dell'uomo, è di difficile definizione. Questo vasto tema ha suscitato nel tempo l'interesse di diversi autori ed è tuttora particolarmente indagato. Per quanto riguarda la matematica, la rappresentazione assume un ruolo molto importante; in questo lavoro ci riferiremo principalmente agli studi di Raymond Duval.

Uno dei passaggi cruciali per la didattica della matematica, messo in luce proprio da Duval, è l'inseparabile legame esistente tra l'acquisizione di un concetto e l'attività di rappresentazione soggiacente (Duval, 1993, pp. 39-40). Come afferma anche Iori, «(...) gli oggetti matematici non possono essere visti, mostrati, e tanto meno manipolati (...) ciò che è possibile vedere, manipolare, trasformare e interpretare sono soltanto le loro rappresentazioni semiotichei» (Iori, 2015, p. 18). Se si prende come esempio la quantità 2, già solo scrivendo questo carattere, viene utilizzata una sua rappresentazione simbolica per mezzo del registro semiotico aritmetico. Allo stesso modo Duval sostiene che non c'è noetica, acquisizione concettuale di un oggetto, senza semiotica, rappresentazione realizzata per mezzo di segni (citato in Sbaragli, 2005, p. 69). Come precisa anche D'Amore (2001), questo significa che ogni conoscenza è inseparabile da un'attività di rappresentazione.

Duval (1993) definisce l'atto del rappresentare come l'azione di tradurre un oggetto matematico in segni, notazioni, scrittura, simboli o semplicemente traccia. Afferma, inoltre, che: «(...) gli oggetti matematici non devono mai essere confusi con la rappresentazione che ne viene fatta» (Duval, 1993, p. 37). Si tratta di un aspetto molto delicato del processo di insegnamento/apprendimento della matematica: la comprensione dei suoi oggetti non può che essere un apprendimento concettuale, ma allo stesso tempo l'attività su di essi è possibile solo per mezzo di una rappresentazione semiotica (Duval, 1993). Come docenti viene spontaneo chiedersi come sia quindi possibile tener presente nelle proprie pratiche la differenza tra rappresentazione e oggetto matematico. Spesso, infatti, entrambe le parti coinvolte in un'azione didattica (insegnante e studente), credono di confrontarsi direttamente con il sapere e non semplicemente con una sua rappresentazione.

Duval (1993) sottolinea che le rappresentazioni semiotiche hanno un ruolo fondamentale almeno su tre aspetti dell'attività cognitiva: nello sviluppo delle rappresentazioni mentali, che dipendono dall'interiorizzazione delle rappresentazioni semiotiche; nel raggiungimento di alcune funzioni cognitive (funzione di comunicazione privata o per altri) e nella produzione di conoscenza. È quindi necessario che, a scuola, i bambini possano sperimentare e provare, venendo inseriti in contesti e situazioni che richiedono la realizzazione, l'utilizzo, l'interpretazione e la lettura di diverse rappresentazioni, anche spontanee. Sarebbe auspicabile che gli allievi entrino in contatto con diverse rappresentazioni dello stesso oggetto: come ricorda Duval (1993), una competenza fondamentale che i bambini devono sviluppare è la capacità di utilizzare registri semiotici diversi (grafici, simboli, figure ecc.). Quest'attitudine favorisce la presa di coscienza della distinzione tra oggetto matematico e sua rappresentazione, limitando il formarsi di eventuali misconcezioni.

2.2 Comunicazione e apprendimento

In didattica della matematica diverse e contrastanti sono le idee attorno al binomio apprendimento-comunicazione. In questo lavoro ci si riferisce anche per questo tema a Raymond Duval, che abbraccia principalmente un approccio semio-cognitivo, e alle idee di Luis Radford che segue invece un approccio semio-culturale. I due approcci si distanziano soprattutto per il modo di interpretare il termine "oggettivazione".
Il senso di questa parola, per Duval, equivale a una sorta di scatto, d'intuizione che uno ha per se stesso, un modo di riconoscere gli oggetti matematici o il tipo di trattamento da compiere nel registro più adatto. Secondo l'autore l'oggettivazione non equivale all'apprendimento: ammette che sia una condizione necessaria per la conoscenza, ma la considera non sufficiente. Duval, inoltre, spiega come l'oggettivazione non abbia alcun legame con la funzione di comunicazione e come sia possibile produrre rappresentazioni semiotiche soddisfacenti alla funzione comunicativa e allo stesso tempo insufficienti alla funzione dell'oggettivazione e viceversa (Iori, 2015).
Radford, invece, fa combaciare l'oggettivazione con l'apprendimento. L'autore sostiene, come ripreso da Sbaragli (2006, p. 47), che l'apprendimento è il processo di trasformazione attiva degli oggetti concettuali culturali in oggetti di coscienza e che tale trasformazione avviene tramite il processo di oggettivazione, inteso etimologicamente come "far mettere qualche cosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire". Per Radford i mezzi semiotici di oggettivazione sono «oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si usano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione» (Radford, 2005, p. 203). Inoltre, Radford ritiene che comunicazione e apprendimento abbiano un legame molto stretto, in quanto: «l'apprendimento umano si fonda in modo cruciale sui meccanismi di riflessione attiva offerti dalla lingua» (Radford & Demers, 2006, p. 13).

2.3 Comunicazione e Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese

L'importanza della competenza comunicativa è un aspetto attualmente molto considerato nell'educazione matematica (National Council of Teachers of Mathematics) e nei diversi Piani di studio. In particolare, in Canton Ticino si è accentuata tale importanza con la recente uscita del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015). Nel documento questa competenza trasversale è così definita: «saper attivare le informazioni e le risorse che permettono di esprimersi utilizzando diversi tipi di linguaggio a seconda del contesto» (DECS, 2015, p. 34). L'utilizzo della locuzione "tipi di linguaggio" mette in luce il fatto che non ci si riferisce solo alla lingua, ma a una pluralità di linguaggi come la gestualità, il disegno, la musica ecc.

Un aspetto centrale di questa competenza è la capacità di riconoscere l'intenzionalità comunicativa, ovvero l'abilità di identificare lo scopo di una comunicazione e di considerare il destinatario. Infatti, il messaggio che un bambino produce può essere diverso se prodotto per un coetaneo o per qualcun'altro. Questo è determinato sia dall'età,[2] sia dalla sensibilità al contesto (considerato nella voce "atteggiamento comunicativo" nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo*), cioè la capacità di tenere conto di alcuni vincoli dati dalla situazione (tempo a disposizione, strumenti, dinamiche relazionali ecc.).

Nell'area matematica del Piano di studio il tema della comunicazione viene considerato con forza più volte, essendo considerata come un processo cognitivo legato a tutti gli aspetti e gli ambiti di competenza. In particolare, viene posto l'accento sui processi comunicativi e argomentativi attivati dagli allievi per esporre conoscenze, per spiegare ragionamenti e per motivare scelte. Le abilità comunicative risultano inoltre cruciali nel processo di matematizzazione e modellizzazione, che consiste nell' «individuare e applicare procedimenti attraverso i quali si utilizzano oggetti della matematica per modellizzare situazioni, ossia descriverle e rappresentarle utilizzando in modo consapevole il linguaggio specifico della matematica» (DECS, 2015, p. 146). Si capisce quindi, ancora una volta, quanto risulta importante la comunicazione attraverso diverse forme (verbali, scritte, grafiche ecc.) per l'insegnamento/apprendimento della matematica (DECS, 2015, p. 151).

3 Campione e domande di ricerca

Il campione di riferimento è una prima elementare dell'Istituto di Lugano. La classe è composta da 19 allievi (8 maschi e 11 femmine), di cui 12 hanno fratelli e si relazionano in modo continuo con bambini di un grado scolastico diverso dal loro.

Le domande che hanno guidato questa analisi sono le seguenti:

D1. Quale rappresentazione scelgono questi allievi di prima elementare per produrre un messaggio matematico rivolto a bambini più piccoli (scuola dell'infanzia)? Quali sono i motivi di tale scelta?

D2. Come questi alunni di prima elementare adattano un messaggio precedentemente prodotto per allievi di scuola dell'infanzia a interlocutori coetanei o più grandi di loro (quarta elementare)? Su quali motivazioni si basano le proprie scelte comunicative?

2. La capacità di decentrarsi e di considerare che gli altri sono diversi e possono quindi avere conoscenze diverse dalle proprie è un'abilità che, secondo Piaget, è strettamente legata all'età e deve essere sviluppata nei bambini.

3.1 Raccolta dati

Per la raccolta dati si è deciso di somministrare individualmente a tutti i 19 bambini, una situazione-problema in cui è richiesta la realizzazione di un messaggio volto alla trasmissione di dati numerici, destinato a una specifica classe. Terminato il lavoro, si è proposto a ciascun bambino un'intervista semi-strutturata al fine di indagare le sue intenzioni comunicative, chiedendogli di indicare anche vantaggi e svantaggi del tipo di messaggio prodotto. Questa procedura è stata effettuata con ogni allievo tre volte, mantenendo invariato il contenuto del messaggio da produrre, ma cambiando ogni volta i destinatari del messaggio: una sezione di scuola dell'infanzia, una classe di prima elementare e una classe di quarta elementare. Infine, è stata fatta ad ogni allievo un'altra intervista individuale semi-strutturata allo scopo di indagare se il bambino riteneva possibile (vantaggioso o svantaggioso) inviare una delle tre produzioni pensata per determinati destinatari (per esempio per una sezione di scuola dell'infanzia) ad altri interlocutori tra quelli già considerati (per esempio a una quarta elementare).
I dati sono stati raccolti sull'arco di due giornate consecutive.
Segue il testo del problema proposto ai singoli allievi:

> Nella stagione autunnale ci sono stati 93 giorni: 20 di pioggia, 40 di sole, 30 di vento e 3 di neve. Come potresti fare per far capire ai bambini della scuola dell'infanzia/di prima elementare/di quarta elementare cos'è successo in questa stagione? Puoi usare tutto il materiale che desideri, se non c'è quello di cui hai bisogno me lo puoi chiedere o puoi alzarti e andare a prenderlo.

Si è deciso di utilizzare l'intervista semi-strutturata come strumento di raccolta dati in quanto permette di cogliere la prospettiva del singolo allievo e di indagare sugli aspetti qualitativi, facendo emergere le riflessioni personali.
Va precisato che il presente lavoro non vuole indagare lo scarto che c'è tra l'intenzione del bambino e la reale rappresentazione, ma le motivazioni che spingono il bambino a compiere una determinata scelta; non vengono quindi considerati nelle analisi eventuali errori di conteggio commessi. Per esempio, se un bambino afferma di aver disegnato venti pallini, e sul foglio ve ne è una quantità leggermente superiore o inferiore, il dato è interpretato come errore dovuto alla sua inesperienza nel conteggio, e la produzione viene considerata in base a ciò che il bambino ha dichiarato.

4 Analisi dei dati

4.1 Forme di rappresentazione e destinatari

Le produzioni dei bambini sono state analizzate e suddivise in base alla forma di rappresentazione usata: *pittorica*, ossia la riproduzione figurativa degli oggetti; *iconica*, segni grafici rappresentanti oggetti; *simbolica*, numeri indo-arabi e *proposizionale*, ossia uso della lingua italiana (Lucangeli & Tressoldi, 2002). I dati raccolti sono stati riassunti all'interno dei grafici in **Figura 1**.

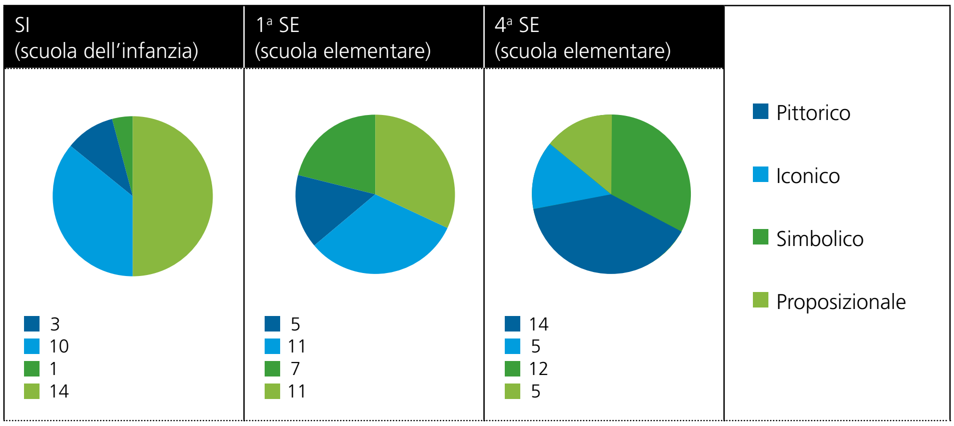


Figura 1
Tipologie di rappresentazioni usate per i tre differenti destinatari (scuola dell'infanzia, 1ª e 4ª elementare).

Per ogni forma di rappresentazione considerata, si riporta il numero di elaborati che vi fa ricorso con almeno un suo elemento. Come si evince dai valori numerici, alcune produzioni rientrano in più categorie.
Dai grafici si riscontra una diminuzione progressiva dell'uso della forma pittorica e iconica a vantaggio di quelle simboliche e proposizionali al crescere dell'età dei destinatari: per comunicare con la sezione di scuola dell'infanzia i bambini hanno utilizzato prevalentemente le forme pittorica e iconica, mentre per la classe di quarta elementare la maggioranza dei bambini ha fatto ricorso alle forme simbolico e proposizionale. Dalle interviste emerge che questa tendenza è dovuta alle credenze degli allievi che hanno prodotto i messaggi sulle conoscenze e sulle abilità sia dei loro coetanei, sia dei bambini più piccoli o più grsandi di loro. Inoltre, il cambiamento della tipologia di rappresentazione è dovuto anche alla volontà di rispettare una sorta di convenzione sociale che si basa sulla convinzione che le rappresentazioni pittoriche e iconiche appartengano al mondo dei bambini piccoli e non si prestino bene a una comunicazione con allievi più grandi. A riassumere bene questa idea e questa progressione è A9: "Io non manderei lo stesso messaggio in quarta, ci sono troppi disegni e pensano che siamo un po' [ride] pazzerelli perché loro sanno già i numeri e le lettere". A9 produce i messaggi in **Figura 2**.

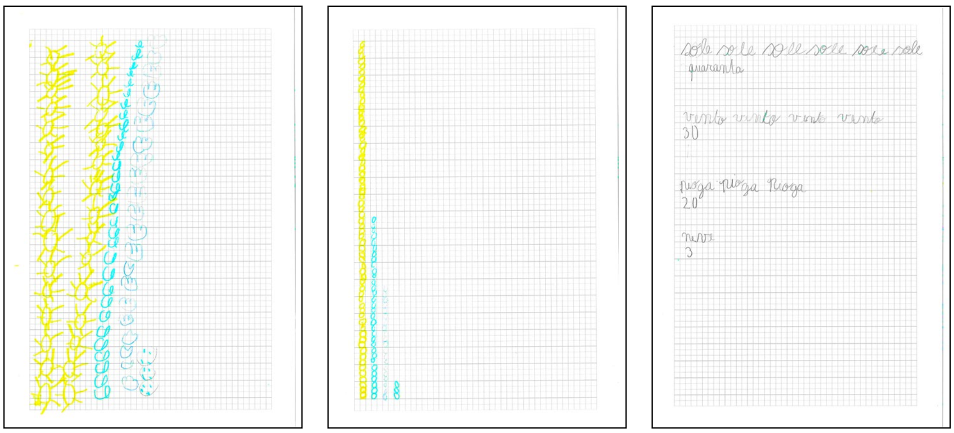


Figura 2
Da sinistra verso destra, produzioni di A9 destinate alla scuola dell'infanzia, alla prima elementare e alla quarta elementare, rispettivamente.

Osservando i messaggi prodotti dai bambini di prima elementare per loro coetanei, si notano immediatamente alcune differenze rispetto a quelli realizzati per la scuola

dell'infanzia. Si rileva, infatti, come 9 alunni su 19 abbiano dichiarato che per produrre una comunicazione efficace per una prima fosse necessaria o consigliabile la presenza di numeri o lettere. Ad esempio, A7 racconta: "Ho fatto un nuovo messaggio con anche i numeri per farlo capire ai bambini di IA"; mentre A3 dice: "Io mando un nuovo messaggio, con almeno i numeri, perché in prima li sanno leggere".
Per soddisfare questo requisito, 6 alunni hanno deciso di cambiare il messaggio da spedire, mentre 3 allievi hanno osservato come il loro messaggio, prodotto in modo differenziato per i diversi livelli della scuola dell'infanzia, presentasse già questa prerogativa e non fosse quindi necessaria una modifica.
Interessanti sono le motivazioni che hanno spinto 6 di questi allievi a introdurre i numeri o le lettere nei loro elaborati. Questi allievi hanno dichiarato che non sarebbe stato possibile comprendere il messaggio solo attraverso i disegni, dato che gli allievi di prima devono sempre contare o riconoscere numeri se si fa matematica. A19 riassume bene il pensiero di questo gruppo di allievi, "I numeri, quando vai a scuola, ci devono sempre essere, dappertutto, altrimenti, se non ci sono, sono cose per l'asilo (...)".
Questo allievo rafforza attraverso le sue affermazioni la convinzione, a cui si è accennato sopra, dell'esistenza di una sorta di contratto didattico che vede le lezioni di matematica come momenti in cui si lavora costantemente sui numeri, come ribadisce nuovamente A19 durante l'intervista: "I numeri c'entrano sempre, in un modo o nell'altro, con la matematica".
Questo divario si accentua ancora di più quando si confrontano questi dati con quelli relativi alla classe quarta. Si può infatti notare come le forme di rappresentazione predominanti diventino quelle proposizionali e simboliche: 14 allievi su 19 (72%: 39% proposizionale + 33% simbolico) hanno usato una forma di rappresentazione simbolica o proposizionale (o entrambe).
Questo dato, se esaminato anche alla luce di quanto viene espresso dai bambini nelle interviste, permette di capire quanto vengano considerate le conoscenze e le abilità degli allievi di una classe superiore. Infatti, come si evince dall'estratto del colloquio di seguito riportato, gli allievi di prima attribuiscono una buona conoscenza dei numeri e dell'italiano ai ragazzi di quarta. A tal proposito A7 afferma: "Ho usato numeri e lettere perché i bambini di quarta li conoscono e li devono usare sempre, come faremo anche noi".

4.2 Modifiche al messaggio a seconda dei destinatari

Dopo la produzione del messaggio destinato alla scuola dell'infanzia, i bambini si sono dovuti confrontare con una scelta: mantenere lo stesso messaggio per tutti gli ordini scolastici oppure modificarlo per prima e per la quarta.
7 alunni su 19 hanno deciso di voler spedire il messaggio realizzato per gli allievi più piccoli anche a tutti gli altri, esplicitando che, se il messaggio poteva essere compreso da alunni della scuola dell'infanzia, allora poteva esserlo anche da allievi più grandi. 12 allievi su 19 hanno invece scelto di modificare o cambiare il proprio messaggio: 6 allievi hanno creato un messaggio diverso per ogni ordine scolastico, 5 hanno modificato il messaggio solo per la quarta e un allievo ha modificato la sua produzione già per la prima, mantenendola poi invariata per la quarta. Si può quindi notare una ripartizione abbastanza equa tra gli allievi che hanno cambiato il loro messaggio 0, 1 o 2 volte.
Un dato interessante emerge dall'incrocio di queste informazioni con quelle relative alla composizione delle famiglie di appartenenza dei bambini che hanno realizzato i messaggi.

Ciascuno dei 6 allievi con fratelli maggiori, infatti, si è sentito costretto a modificare il messaggio per adattarlo ai nuovi destinatari di quarta, mentre dei restanti 13 lo hanno fatto solo in 6. Questo è probabilmente dovuto al fatto che i bambini con fratelli più grandi, facendo costantemente esperienze dirette con ragazzi di maggiore età, hanno osservato come le forme pittoriche vengano usate sempre di meno e le ritengono perciò non adeguate a interlocutori di quarta elementare.
Durante le interviste, invece, di fronte alla domanda circa la possibilità di mandare un messaggio pensato per una classe a una classe di ordine diverso, la quasi totalità dei bambini crede che un messaggio ideato per la scuola dell'infanzia sia fruibile anche da destinatari più grandi. A sostegno di questa scelta si ritrovano le stesse motivazioni che hanno spinto alcuni compagni a produrre un solo messaggio per tutti e tre i tipi di destinatari, come ben evidenzia A10: "Se un bambino dell'asilo capisce il messaggio è ovvio che uno più grande lo capisce anche lui". 7 bambini (tra cui tutti quelli con un fratello più grande), però, hanno dichiarato di trovare quasi bizzarra l'idea di mandare un messaggio con disegni e colori in una quarta e hanno quindi esplicitato che preferirebbero non inviare a questa classe messaggi prodotti per la scuola dell'infanzia. Trova consenso unanime, invece, l'impossibilità di inviare alla scuola dell'infanzia un messaggio realizzato appositamente per la quarta: per tutti gli allievi questo risulterebbe incomprensibile a causa della presenza di forme simboliche e letterarie.

4.3 Ordinamento dei dati numerici

Un dato interessante che emerge dall'analisi delle produzioni è la scelta di rappresentare i dati numerici ordinati dal maggiore al minore o viceversa. Circa il 70% delle produzioni, infatti, presenta i dati numerici in ordine crescente o in ordine decrescente, sebbene nel problema somministrato oralmente questi fossero in ordine sparso. Questa scelta probabilmente è dovuta all'esperienza scolastica degli allievi. Indagando sulle motivazioni soggiacenti, infatti, è emersa l'idea diffusa che, se si scrivono dei numeri su un foglio, è doveroso farlo seguendo uno specifico ordine (crescente o decrescete), come esprime A19: "Quando ci sono dei numeri sparsi bisogna sempre riordinarli dal più grande al più piccolo, si fa così nelle schede".

4.4 Il grafico come forma di rappresentazione

Durante l'analisi delle produzioni dei bambini si è notato come molte di esse presentino una rappresentazione in forma di grafico. In particolare, all'interno delle rappresentazioni destinate ai bambini della scuola dell'infanzia, si è scoperto con stupore che 16 bambini su 19 (circa l'84%) hanno rappresentato i dati attraverso un grafico spontaneo, che richiama in 13 casi un istogramma e in 3 un areogramma.

Tabella 1
Tabella riassuntiva della forma usata nella produzione dei messaggi destinati ai vari ordini scolastici.

Destinatari	Grafico		Numeri indo-arabi accompagnati da		Disegni pittorici nelle quantità o relativi alle quantità indicate nella situazione problema
	Istogramma	Areogramma	Disegno	Parola	
SI	13	3	-	-	3
I SE	11	3	3	1	1
IV SE	5	2	-	11	1

Questi grafici sono stati ritenuti appropriati e funzionali alla comunicazione con gli allievi della scuola dell'infanzia. I bambini, infatti, hanno avuto modo di esplicitare durante le interviste le motivazioni che li hanno spinti a scegliere questo tipo di rappresentazione. Riportiamo di seguito un estratto significativo:

A13: "Questo messaggio è più semplice perché si può sia contare i quadretti, che vedere subito l'altezza delle torri di lego, e anche se non sai contare puoi capire quale tempo [condizione meteorologica] c'è stato di più".

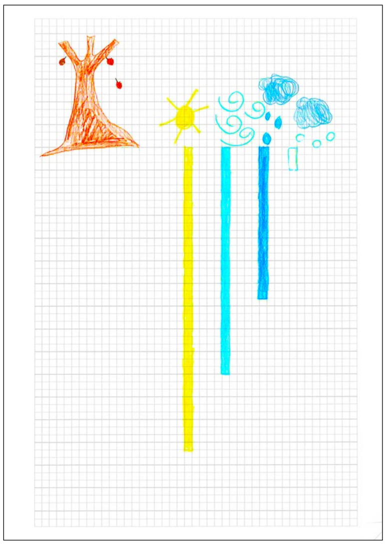
La totalità dei bambini che ha usato un grafico giustifica questa scelta come vantaggiosa perché permetterebbe più letture e garantirebbe un buon grado di comprensione del messaggio. Gli allievi ritengono che il grafico si adatti bene a un contesto differenziato come quello di una sezione di scuola dell'infanzia o di una classe di prima elementare, nella quale non tutti possiedono le stesse conoscenze. Come dice A12: "Ci possono essere dei bambini che è ancora troppo difficile per loro leggere i numeri".

4.5 Forma iconica e forma pittorica nei grafici per la scuola dell'infanzia

Dei 16 allievi che sono ricorsi a una rappresentazione grafica per comunicare con i bambini della scuola dell'infanzia, 9 hanno preferito una forma iconica per raffigurare i giorni e hanno espresso il referente mediante il colore, un disegno pittorico o l'uso delle parole. Questo, come dichiarato da loro nelle interviste riportate di seguito, permette agli alunni della scuola dell'infanzia di capire subito:

A8: "(...) capisce che un quadretto è un giorno perché sono tanti in fila e poi perché c'è disegnato un sole in cima, solo uno in cima [indica il sole disegnato in cima alla torre], perché è uno: vuol dire che tutti i quadretti sotto sono giorni [indica la strisca di quadretti] di sole [indica il sole alla base]";

A10: "(...) legge così: un giorno [indica il primo pallino] di sole [indica il sole alla sinistra della striscia], due giorni [indica il secondo pallino] di sole [indica il sole], tre giorni [indica il terzo pallino] di sole [indica il sole] (...), quindi un pallino è un giorno, e di sole è il tempo che ha fatto in quel giorno".



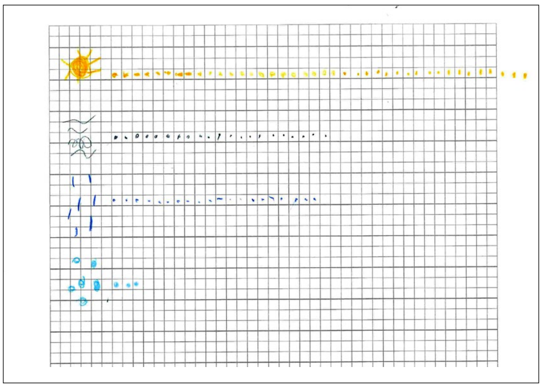


Figura 3
Produzioni di A8 (sinistra) e A10 (destra).

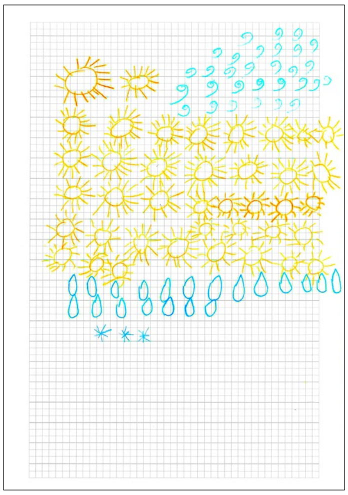
6 allievi su 16 hanno invece preferito una forma pittorica che delinea sia il referente, sia il numero di giorni, e hanno quindi disegnato un determinato numero di raffigurazioni che rappresentano ognuna gli elementi "giorno/i di sole", "giorno/i vento", "giorno/i pioggia", "giorno/i neve", come afferma questo allievo:

A4: "(...) ho disegnato quaranta soli, perché un sole è un giorno di sole, quindi quaranta soli sono quaranta giorni di sole".

Di questi 6 allievi, 2 hanno optato per un areogramma e hanno scelto di disegnare molto vicini il numero esatto di soli, gocce, soffi di vento e fiocchi di neve (Figura 4). Si precisa che la classificazione delle produzioni in figura come aerogramma è sostenuta delle affermazioni dei loro autori durante l'intervista:

A1: "I piccoli, che non sanno contare, guardano che il foglio è più giallo e si capisce che sono di più, occupano più foglio ";

A18: "Un bambino della scuola dell'infanzia che non sa leggere può vedere che il gruppo di soli è più grande e tiene più foglio, e capisce che ci sono stati più giorni con il sole (...)".



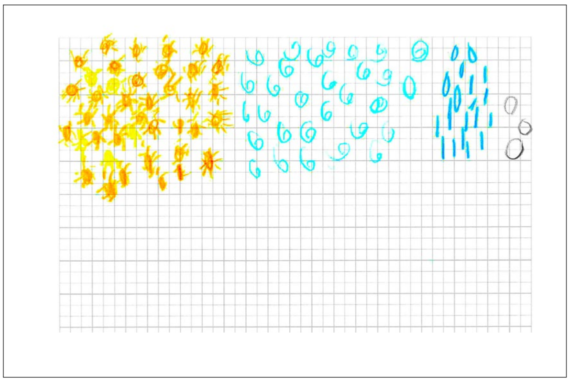


Figura 4
Produzioni di A1 (sinistra) e A18 (destra).

Infine, A6, l'ultimo dei 3 bambini che hanno utilizzato un areogramma, è ricorso in modo diverso alla forma pittorica: ha colorato delle porzioni di foglio con colori differenti associati alle varie condizioni meteorologiche (giallo per i giorni di sole, grigio per i giorni di vento, blu scuro per la pioggia e azzurro per la neve), ricercando nell'estensione della parte di piano occupata da ogni colore un rapporto con le quantità contenute nel problema (**Figura 5**). Durante l'intervista ha dichiarato che un bambino della scuola dell'infanzia avrebbe potuto guardare la quantità di colore sul foglio, e inferire che più "spazio" esso occupa, più la condizione meteorologica si era presentata di frequente.

Figura 5
Produzioni di A6.

Si rimarca che, tra i 16 alunni che sono ricorsi a una rappresentazione tramite un grafico, 13 hanno esplicitato durante l'intervista la volontà di disegnare in forma iconica o pittorica il numero esatto di giorni in cui si è verificata una certa condizione meteorologica: questo per dare l'opportunità, ai bambini già capaci di contare, di sapere il numero esatto di giorni in cui c'è stata quella condizione meteorologica. Questi 13 bambini ammettono quindi la possibilità che alcuni allievi della scuola dell'infanzia sappiano contare, pur essendo convinti nella grande maggioranza dei casi (12 su 13) che non sappiano riconoscere numeri scritti in forma indo-araba. A10 riassume bene il pensiero di questo gruppo di allievi: "(...) Non ho scritto io il 40 perché non lo possono leggere, non lo conoscono, ma magari sanno contare fino a 40, che è più facile".
Inoltre, molti alunni hanno supposto che il grafico permetta agli allievi della scuola dell'infanzia che non sanno contare di fare buone inferenze, esplicitando nelle interviste la possibilità di ricorrere al fattore percettivo dell'altezza della torre o dell'estensione delle parti di piano occupate dai disegni. Di seguito alcune affermazioni in merito a questo aspetto:

A6: "Allora, qui, tipo se un bambino lo guarda veloce, apre e chiude gli occhi, capisce subito che di sole, che è giallo, ci sono stati più di giorni. Perché il foglio è più giallo…";

A16: "(...) sole vuol dire che è un giorno di sole, quindi o li conti o, se non sei capace perché magari a quaranta non arrivi, lo vedi dalla lunghezza della striscia che ci sono stati più giorni di sole che di pioggia".

Il grafico, che è una forma di rappresentazione a cui gli allievi hanno fatto ricorso spontaneamente, viene quindi considerato dalla maggior parte di loro come un veicolo immediato di informazione, accessibile ai bambini della scuola dell'infanzia, e che permette inoltre letture differenziate a seconda dei livelli cognitivi eterogenei presenti in questo contesto.

4.6 Ricorso al grafico e destinatari

In **Figura 6** si riprendono i dati sui numeri degli allievi che hanno utilizzato un grafico, un areogramma o un istogramma, nelle loro produzioni destinate ai diversi interlocutori. Si evince con chiarezza una graduale diminuzione nel ricorso al grafico man mano che gli interlocutori diventano più grandi di età.

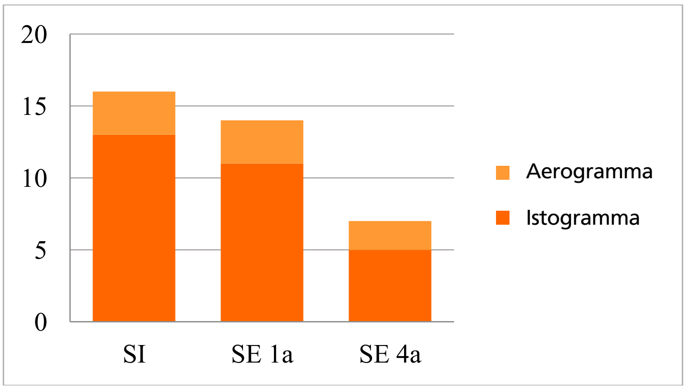


Figura 6
Numero di allievi che hanno fatto ricorso al grafico (aerogramma e istogramma) a seconda dei destinatari del messaggio.

Dei 16 allievi che nel messaggio per la scuola dell'infanzia avevano optato per una rappresentazione grafica, 14 hanno mantenuto la tipologia di rappresentazione per la prima elementare. Solo 2 bambini hanno infatti preferito cambiare rappresentazione, limitandosi entrambi a scrivere il numero di giorni in forma indo-araba e mettendo un referente pittorico per esprimere la condizione meteorologica verificatasi nei giorni indicati. Questi allievi rientrano nel gruppo di bambini che ha affermato che un messaggio, per bambini di prima, deve necessariamente contenere numeri.

Soltanto 7 bambini hanno invece proposto un grafico anche per i destinatari di quarta elementare, motivando la loro scelta dichiarando che le capacità degli allievi più grandi non richiedono una semplificazione del messaggio. I bambini che hanno invece deciso di mantenere una rappresentazione mediante l'uso di un grafico anche in quarta sono gli stessi che l'hanno mantenuta invariata sin dalla scuola dell'infanzia. Sono però cambiate le motivazioni: se prima si utilizzava una forma di grafico per favorire la comprensione di tutti, ora l'uso del grafico è giustificato per l'immediatezza di lettura. Ad esempio, A8 dice: "I bambini di quarta vedono subito qual è la striscia più lunga e capiscono velocissimo che ci sono stati più giorni di sole".

Alcuni allievi hanno individuato, come vantaggio di una rappresentazione mediante un grafico, l'immediatezza della sua lettura, come spiega A6: "Allora qui tipo se un bambino lo guarda veloce, apre e chiude gli occhi, capisce subito che di sole, che è giallo, ci sono stati più di giorni. Perché il foglio è più giallo (...). Fai subito veloce a capirlo".
È risultato inatteso e sorprendente come alcuni bambini di prima elementare abbiano già intravisto le potenzialità di questo tipo di rappresentazione, che gli adulti utilizzano proprio per le caratteristiche di immediatezza e facilità di lettura individuate anche dagli allievi.

Anche in questo caso si è voluto indagare se poteva esserci una relazione tra l'utilizzo dei grafici e la presenza di fratelli maggiori o minori nelle famiglie di chi vi faceva ricorso. I dati sono stati riassunti nella **Figura 7**.

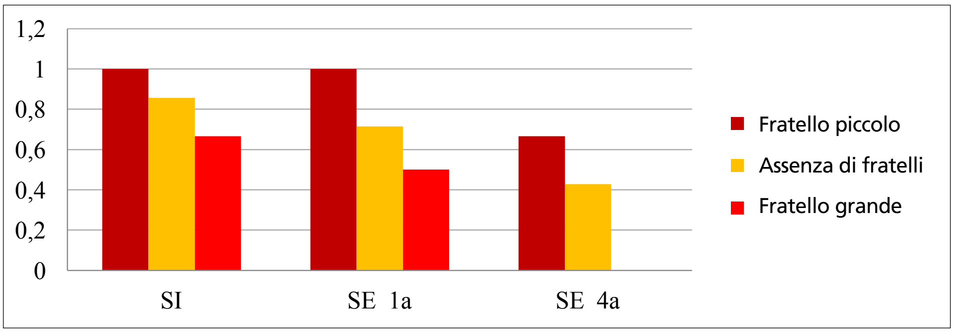


Figura 7
Numero di grafici pro capite (usati dagli allievi) vs. presenza/assenza di fratelli.

Dal grafico emerge che la presenza di un fratello minore fa sì che gli allievi tendano a mantenere la rappresentazione a grafico anche per gli allievi più grandi, rispetto alla media di chi non ha fratelli. La situazione è esattamente inversa per chi ha fratelli più grandi: essi tendono a non considerare il grafico come una soluzione valida.

4.7 Accorgimento dei messaggi diretti a bambini con difficoltà

Gli allievi sono stati particolarmente attenti a produrre messaggi semplici in modo da essere compresi anche dai bambini più piccoli della scuola dell'infanzia o dagli allievi con difficoltà della prima elementare. Questa intenzione è emersa nei ragionamenti di alcuni allievi, che hanno affermato di saper produrre un messaggio più difficile e adeguato ai loro compagni di classe, ma hanno preferito considerare la possibilità che non tutti i bambini di prima possedessero il loro livello di conoscenza. L'affermazione di A2, riassume bene questo pensiero: "(...) io so scrivere sole, pioggia e vento ma poi non so se loro lo sanno leggere, allora io faccio dei disegni così capiscono che sono 40 giorni di sole (...)".
Queste attenzioni particolari sono probabilmente fortemente legate al contesto specifico della classe, all'interno della quale vi sono tre allievi che, oltre ad essere presi a carico dalla docente di sostegno pedagogico, seguono anche un programma differenziato. I compagni sono quindi a contatto costante con questa realtà, soprattutto quando lavorano in gruppo o in coppia. Grazie al buon clima di aiuto reciproco che si è instaurato in classe, gli alunni hanno presumibilmente sviluppato una coscienza maggiore verso il fatto che non tutti possiedono lo stesso livello di conoscenza.
14 alunni su 19 hanno dichiarato esplicitamente nelle interviste di aver creato un messaggio per la scuola dell'infanzia che permette diversi livelli di lettura, tenendo conto sia degli allievi più grandi, già capaci di leggere e contare, sia dei più piccoli. A16: "I grandi possono leggere la parola scritta e contare e dire ai più piccoli cosa dice il messaggio. Ma se i piccoli vogliono guardare da soli il messaggio, possono comunque capirlo perché ci sono i disegni. (...) guardano la lunghezza della torre, senza contare, e vedono quella che è più alta (...)". Da qui il ricorso a disegni pittorici per definire la condizione meteorologica e garantire la comprensione agli allievi della scuola dell'in-

fanzia, che non sanno leggere. Di seguito sono riportati alcuni estratti delle interviste che testimoniano le ragioni di questa scelta.

A11: "I bambini, all'asilo non possono leggere da soli, non sono capaci, con loro bisogna usare dei disegni";

A4: "All'asilo si fanno i disegni e non i numeri e lettere, il messaggio deve essere così".

La disponibilità ad accogliere le differenze è probabilmente dovuta al ricordo risalente all'anno precedente delle diversità cognitive presenti nella propria sezione di scuola dell'infanzia. Spesso, inoltre, le docenti di questo livello scolastico richiedono ai più grandi una maggiore attenzione nei confronti dei più piccoli (un bambino più grande aiuta uno più piccolo, lo prende per mano ecc.), e questo potrebbe quindi aver favorito un'accortezza particolare verso gli allievi di scuola dell'infanzia. Per rivolgersi ai bambini di prima sono invece solo 10 gli allievi che ricorrono alle forme pittoriche. 6 di questi bambini hanno motivato la propria scelta affermando che, non essendo sicuri delle conoscenze dei bambini di prima ricevitori del messaggio, sarebbe stato più prudente realizzarne uno semplice per favorire la comprensione di tutti. Ecco alcuni momenti delle interviste a sostegno di quanto appena affermato:

A2: "(...) Io non so se gli altri bambini di I hanno già imparato come noi tutte le lettere, io so scrivere sole, pioggia e vento ma poi non so se loro lo sanno leggere, allora io faccio dei disegni, così capiscono che sono 40 giorni di sole, (...). I numeri sono più facili, tutti in I li conoscono perché si imparano prima delle lettere";

A19: "I numeri devono esserci perché li sanno tutti in I dopo una o due settimane, ma poi metto "di", che tutti lo sanno leggere, e poi il disegno del sole, vento, pioggia, e neve, ma non scrivo perché non so se sanno leggere. Poi a me piace di più".

L'idea che i bambini potrebbero non conoscere tutte le lettere potrebbe essere riconducibile all'apprendimento dell'italiano che hanno vissuto gli allievi della classe di riferimento. Essi hanno infatti appreso le lettere una dopo l'altra, in sequenza. I destinatari di prima potrebbero però non avere le stesse conoscenze. Gli allievi hanno ragionato tenendo conto di questo aspetto, mostrando ancora una volta una grande sensibilità, coscienza e attenzione verso il possibile destinatario del messaggio: 13 allievi hanno inserito la possibilità di leggere il messaggio in diversi modi, cercando di favorire la comprensione autonoma di bambini con possibili difficoltà. Ecco alcuni estratti significativi delle interviste.

A16: "Uso i disegni (...) magari ci sono bambini come A. che non sa ancora leggere, così lo capisce anche lui";

A18: "Se non sai contare bene come A. guardi e vedi che c'è più giallo, (...) e capisci anche se non sai contare".

È curioso notare come molti alunni di prima (17) accettino che un loro coetaneo possa avere difficoltà scolastiche, mentre un compagno di quarta elementare no: nessun bambino si è infatti interrogato sulla possibilità che anche in una classe superiore potessero esserci allievi con difficoltà. L'affermazione di A7 riassume bene questa

convinzione: "In I e II puoi non capire delle cose, poi in IV le devi sapere se no non ci puoi stare [Maestra: e dove vai?] rimani in III finché non lo sai". Si evince quindi che la quasi totalità dei bambini (17 su 19) riconosce l'eterogeneità dei livelli cognitivi nei contesti di scuola dell'infanzia ed elementare, mentre fatica a ritrovarla nelle classi superiori.
Di conseguenza, l'esigenza di realizzare un messaggio differenziato si riscontra per lo più nelle comunicazioni destinate a bambini appartenenti al primo ciclo. Gli allievi che hanno esplicitato di voler produrre questo genere di messaggio sono ricorsi tutti a una rappresentazione mediante una forma di grafico. A17 mostra in modo esemplare questo ragionamento:

"(...) In questo lo possono leggere tutti da soli e non devono chiedere alla maestra. Ci sono le parole per dire che tempo ha fatto e i numeri per chi li sa leggere. Ma se uno non sa leggere le parole, guarda i colori delle strisce e capisce il tempo, se sa leggere il numero dice: Ah ci sono 20 giorni di pioggia, ma se non sai neanche leggere i numeri come A. [nome del compagno di classe], allora conti i quadretti che è più facile, tanto sono sempre 20. E poi, tipo se non sai contare, allora guardi le strisce, vedi quella gialla è più lunga e allora sai che ci sono stati più giorni di sole che di pioggia, perché la striscia [indica la striscia della pioggia] è più corta". (Figura 8).

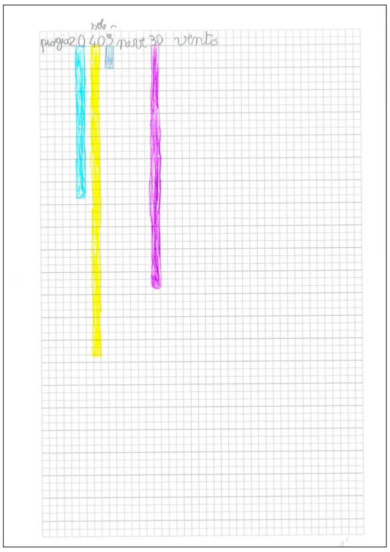


Figura 8
Produzione di A17.

4.8 Convinzioni sulle conoscenze numeriche degli allievi di scuola dell'infanzia ed elementare

I dati raccolti in questo capitolo permettono di capire alcune convinzioni che i bambini di prima elementare hanno rispetto alle conoscenze numeriche dei bambini della scuola dell'infanzia e dei propri coetanei.
Un primo dato curioso emerge dall'analisi dei messaggi prodotti e dalle interviste associate di 4 alunni (A2, A3, A6, A14). Questi hanno dichiarato che i numeri della situazione problema presentata fossero troppo elevati e, di conseguenza, incomprensibili per i bambini della scuola dell'infanzia.
Come possibile soluzione al problema, 2 di questi allievi (A2 e A14, Figura 9) hanno individuato numeri alternativi, minori di 10, ma in un certo senso "proporzionali" alle

quantità effettive (40, 30, 20), in modo che i dati fossero comprensibili e conteggiabili anche dai bambini della scuola dell'infanzia.

A14: "Non uso i numeri veri perché i bambini non sanno contare così tanto, uso dei numeri più piccoli di dieci che magari i grandi conoscono, ma altrimenti possono guardare che sono meno o più i disegni e capire se c'è stato più vento, pioggia, sole, ...";

A2:"Ho messo sole 1 così lo contano, ma l'ho disegnato grande, che vuol dire tanto [si ferma a pensare e guarda la produzione per un po']. Il vento lo faccio piccolo e ne ho messi 6 per dire meno di sole che è grande e vuol dire 10, poi la pioggia ho messo 4 gocce invece di 20 e neve 1 fiocco per dire poco poco. Così sono numeri piccoli che i grandi sanno contare. Io sapevo numeri anche più grandi, ma ero l'unico".

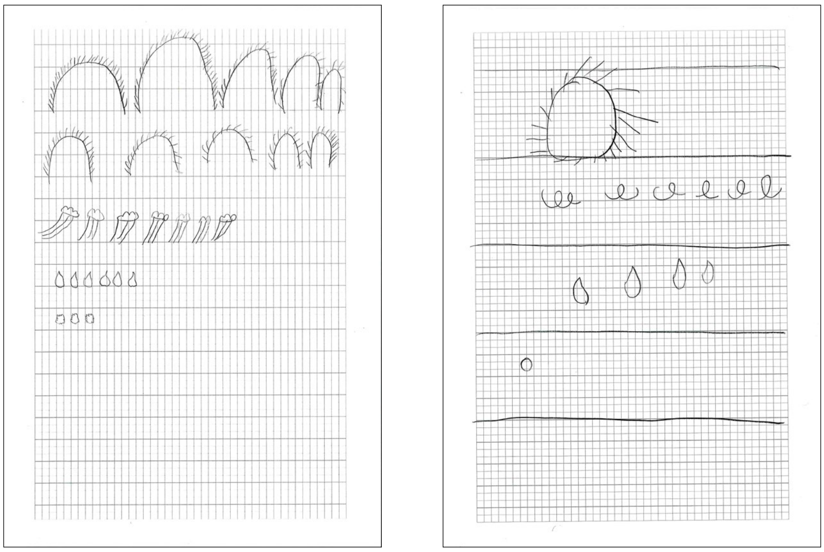


Figura 9
Produzioni di A14 (sinistra) e A2 (destra).

A3 ha invece pensato di risolvere il problema proposto producendo un istogramma in cui le torri, di diversa altezza, rappresentano orientativamente il numero di giorni in cui si è verificata una certa condizione meteorologica (specificata dal disegno posto sopra a ciascuna di esse). Secondo quanto dichiarato dall'allievo, il rapporto tra le altezze delle torri mette in evidenza quale condizione meteorologica si è presentata più di altre nella stagione autunnale. L'allievo ha esplicitato che, pur non sapendo contare o leggere, i bambini avrebbero potuto inferire il dato appena citato. Ecco ciò che afferma A3: "I bambini non sanno contare all'asilo, vedono che una [striscia] è più corta e capiscono che vuol dire meno, e più lunga più" (Figura 10).

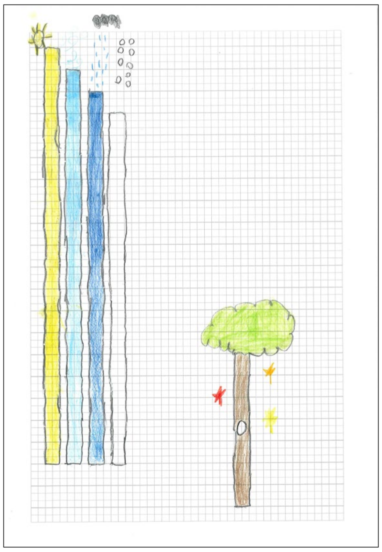


Figura 10
Produzioni di A3.

4.9 Dualismo: tra egocentrismo e capacità di decentramento

Durante questa ricerca si è riscontrato un forte dualismo tra un egocentrismo infantile e una capacità più matura di decentrarsi e di tener conto delle difficoltà altrui. Da un lato si nota come la quasi totalità degli allievi abbia la convinzione che il messaggio realizzato non possa generare fraintendimenti, perché ritenuto chiaro e univoco. Dall'altro lato, come ampiamente mostrato, si contrappongono le riflessioni e i ragionamenti degli alunni attorno alla possibilità che allievi diversi, più piccoli ma anche anche coetanei, possano possedere abilità differenti dalle proprie.
Il primo dato risulta in linea con gli studi classici di Piaget: il bambino di questo livello scolastico si trova, infatti, in una fase egocentrica, dove «non ha gli strumenti operatori che gli permettono di decentrarsi e di osservare da un altro punto di vista che non sia il suo» (Piaget, 1928, p. 537), e quindi è convinto che il messaggio che ha pensato e prodotto sia inequivocabile e non permetta fraintendimenti da parte del destinatario. Questa carenza emerge con evidenza in ambito comunicativo, dove il bambino non tiene conto che un possibile interlocutore può avere conoscenze e convinzioni che possono essere diverse dalle sue e che possano interferire sulla comprensione di un messaggio da lui prodotto (Piaget, 1928; 1967).
Il secondo elemento messo in luce risulta invece particolare, soprattutto se ci si riferisce alla teoria di Piaget sopraccitata. Infatti, molti degli allievi facenti parte del campione della sperimentazione, hanno espresso, e ribadito più volte, la loro volontà di tenere conto che altri bambini possano avere competenze diverse dalle proprie.

5 Risultati della sperimentazione

Grazie all'analisi delle produzioni e delle risposte degli allievi, è ora possibile riassumere i risultati più interessanti ottenuti dalla sperimentazione.

Per un messaggio destinato ai bambini della scuola dell'infanzia, come si era ipotizzato, la maggior parte degli allievi (14 su 19) ha orientato la propria scelta verso una rappresentazione in forma pittorica. La decisione è stata giustificata ricorrendo alla credenza secondo cui allievi di questo livello scolastico non sanno leggere numeri e lettere: ciò rende il disegno una scelta sensata e ammissibile per poter comunicare questo tipo d'informazioni. Si è inoltre notato come la forma iconica sia stata considerata vantaggiosa perché, grazie all'elemento colore associato alla condizione meteorologica, risulta efficace e di facile lettura. Invece, a differenza di quanto ipotizzato, vi è un numero considerevole di alunni (16) che sono ricorsi a una rappresentazione utilizzando un grafico (istogramma o areogramma). L'immediatezza di questa forma di rappresentazione e la possibilità di fruirne in modi diversi (ad esempio, un istogramma può essere letto in maniera qualitativa per confrontare due grandezze, oppure può fornire precisi valori numerici) sono le motivazioni, evidenziate dagli stessi allievi, che hanno portato a questa scelta comunicativa.

Solo 2 bambini su 19 hanno considerato, sia indicandolo nel messaggio sia esplicitandolo nell'intervista, il contesto di riferimento dei dati, cioè la stagione autunnale. Probabilmente, i bambini erano cognitivamente impegnati nella scelta delle possibili rappresentazioni dei numeri e non hanno preso in considerazione il dato sul contesto, perché non era un elemento numerico. Questa tendenza a non considerare dati non numerici nella risoluzione di problemi matematici è ripresa anche da D'Amore (1999). Inoltre, si potrebbe pensare che, come affermato da Piaget (1967), sia difficile per un bambino di sei anni considerare più elementi contemporaneamente.

La sperimentazione ha mostrato inoltre che gli allievi di prima, per la scelta della rappresentazione, si basano sulle convinzioni che possiedono rispetto alle conoscenze matematiche dei destinatari del messaggio. Non tutti gli alunni, però, hanno modificato le proprie produzioni al variare degli interlocutori. Emerge a questo proposito un legame tra il cambiamento o meno delle rappresentazioni e la composizione familiare di chi realizza il messaggio. Gli allievi con fratelli più grandi hanno fatto registrare un'inclinazione maggiore a cambiare il messaggio per le classi superiori, rendendola più complessa grazie al ricorso della scrittura di numeri e parole.
Se è evidente il ricorso all'uso delle forme simboliche e proposizionali nei messaggi destinati a bambini di quarta elementare, lo stesso fenomeno non è altrettanto diffuso nelle produzioni destinate alla prima. Nonostante il fatto che molti allievi abbiano dichiarato nelle interviste di voler ricorrere a questa forma di rappresentazione per i messaggi rivolti ai loro coetanei, in fase di realizzazione molti hanno optato per una forma pittorico/iconica, mettendo in evidenza come essa permetta anche ai bambini in difficoltà di leggere il messaggio. Si trova quindi conferma di quanto espresso da Duval, che invita a non considerare meno abile un bambino perché non ha ancora abbandonato la fase pittorica o quella iconica (**Paragrafo 2.1.3**): non va infatti sottovalutato l'aspetto di intenzionalità comunicativa.
In ultimo, la rappresentazione mediante forme più intuitive di tipo grafico è diminuita progressivamente, perché ritenuta troppo semplice. È curioso, però, notare come chi ha mantenuto questa tipologia di rappresentazione per la classe quarta abbia modificato il suo intento comunicativo. Se prima il ricorso all'uso del grafico veniva motivato mediante la possibilità di comprendere il messaggio indipendentemente dalle abilità di conteggio, ora la scelta viene giustificata ricorrendo alla caratteristica vantaggiosa riguardo all'immediatezza di lettura che offre questo strumento.
In generale, si può affermare che quasi tutti i bambini si sono dimostrati consapevoli del fatto che un messaggio è efficace nel momento in cui il registro di rappresentazioni

utilizzato è condiviso da tutti gli interlocutori. Quest'ultimo aspetto è stato teorizzato anche nei lavori di De Saussure (1915) e D'Amore (2001).
Si evidenzia, inoltre, come per un insegnante sia importante permettere ai bambini di esprimersi spontaneamente, al fine di favorire l'utilizzo di diversi registri e indagare sulle competenze rappresentative degli allievi, le quali potranno poi essere utilizzate come punto di partenza per la costruzione di nuovo sapere. Soprattutto in considerazione a quanto afferma Duval (1993) rispetto alla capacità di distinguere oggetto matematico e rappresentazione, risulta interessante notare come gli alunni di prima elementare inizino a prendere coscienza del concetto di quantità numerica e come riescano, in modo cosciente e spontaneo, a rappresentarlo ricorrendo a diversi registri semiotici.

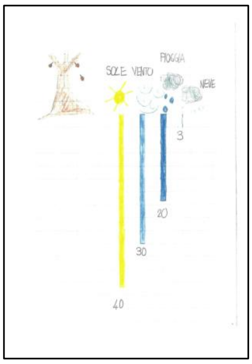
6 Conclusioni

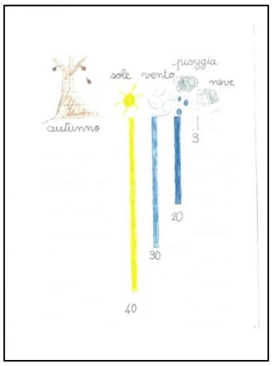
Riflettendo sul percorso svolto è stato possibile identificare alcuni limiti di questa sperimentazione, che riguardano principalmente la sua durata, l'influenzabilità dei dati e il numero ristretto del campione di riferimento. Il primo fattore limitante, infatti, è stato il tempo a disposizione, che ha permesso di considerare soltanto l'intenzione comunicativa degli allievi di prima elementare, mentre non ha consentito una valutazione dell'efficacia del messaggio prodotto. Non è stato inoltre possibile analizzare un'eventuale evoluzione nella produzione dei messaggi in seguito a momenti di messa in comune e attività specifiche. Va anche considerato che i dati potrebbero aver subito delle influenze esterne: nonostante si sia cercato di condurre l'indagine (raccolta delle produzioni e interviste) all'interno del minor numero di giorni possibile e in un ambiente differente dall'aula, non si può escludere che gli allievi coinvolti possano essersi parzialmente influenzati tra loro. Infatti, sebbene sia stato chiesto agli allievi di non parlare del lavoro svolto, è possibile che qualcuno abbia comunque condiviso la sua esperienza con i compagni. Infine, a causa del ristretto numero di allievi del campione di riferimento, i risultati di questa sperimentazione non sono generalizzabili. Sono tuttavia un punto di partenza interessante per una riflessione, soprattutto se considerati in relazione a quanto è citato nel nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015). Dall'analisi dei dati traspare infatti come i bambini siano in grado già in prima elementare di tener conto del destinatario, seppur in maniera un po' ingenua e basandosi a volte su convinzioni erronee, mostrandosi sensibili alle possibili differenze che sussistono fra le proprie conoscenze e quelle dell'interlocutore.
Dal punto di vista del docente, quest'ultima costatazione diventa stimolante, perché aggiunge un'ulteriore conferma dell'importanza di cominciare sin dai primi anni di scolarizzazione a riflettere sulla tipologia di comunicazione in funzione del destinatario. Inoltre, come ricordato da Radford (2006), la comunicazione e l'apprendimento hanno un legame molto stretto ed è quindi necessario coltivarlo nella pratica didattica: uno scopo comunicativo dichiarato (necessità o volontà di comunicare dei dati, delle indicazioni o altro) appare come qualcosa di estremamente avvincente e coinvolgente per i bambini, soprattutto quando è tangibile il legame con situazioni di vita reale, come ricordato da Fandiño Pinilla (2011).
Passando dalla competenza trasversale della comunicazione al campo più specifico delle competenze matematiche, si ritiene importante riflettere sulla rappresentazione

grafica, che sovente è presentata nel secondo ciclo come qualcosa di avanzato il cui utilizzo pone non pochi problemi agli allievi. Alla luce di questa piccola esperienza sembrerebbe invece uno strumento molto intuitivo già per i bambini del primo ciclo tanto che, se proposto in situazioni cariche di senso, potrebbe essere affrontato prima del secondo ciclo. Sarebbe interessante poter approfondire quanto emerso con un campione di riferimento più esteso e considerare una possibile generalizzazione dei risultati. Sarebbe inoltre altrettanto utile osservare e analizzare, attraverso una ricerca verticale su tutti gli anni scolastici, come evolve la percezione del grafico come strumento di rappresentazione di dati numerici da parte degli allievi.
In seguito a questo lavoro rimangono ancora aperti alcuni interrogativi riguardanti l'efficacia dei prodotti degli allievi. Una naturale evoluzione dell'esperimento prevedrebbe di consegnare effettivamente i messaggi degli allievi ai vari destinatari, in modo che essi possano valutarne l'efficacia e restituire un feedback riguardo alla loro comprensibilità. Sarebbe in particolare interessante indagare i seguenti aspetti:

- Grazie a quali elementi i destinatari dei messaggi riescono a capire le informazioni contenute nella comunicazione? Per quali motivi un messaggio risulta chiaro/non chiaro? Quale tipologia di rappresentazione è reputata dai destinatari come la più efficace? Perché?
- Gli allievi di prima elementare, di fronte al feedback ricevuto sulla comprensibilità dei propri messaggi, sono in grado di elaborare una nuova produzione più efficace?

Tutte queste domande potrebbero essere oggetto di un futuro lavoro di ricerca. Tuttavia, allo scopo di dare agli allievi un riscontro su quanto hanno svolto, si è ritenuto importante organizzare al termine dell'esperienza un momento collettivo di messa in comune, all'interno del quale è stato discusso e valutato quale fosse il messaggio più efficace. In quest'occasione ogni allievo ha avuto modo di presentare il proprio operato, argomentando le proprie scelte e le proprie intenzioni comunicative davanti ai compagni. Gli alunni hanno così avuto modo di riflettere ancora e prendere coscienza dell'efficacia del proprio messaggio.
In seguito a questo momento, gli alunni hanno identificato alcuni parametri fondamentali che ogni messaggio doveva contenere affinché fosse funzionale e comprensibile ai bambini dei diversi ordini scolastici.
Gli allievi hanno deciso di scegliere per la scuola dell'infanzia e la prima elementare un messaggio realizzato durante la sperimentazione, facendo però degli accorgimenti; per la quarta invece ne è stato scelto uno diverso tra quelli realizzati in precedenza ed è stato mantenuto invariato.





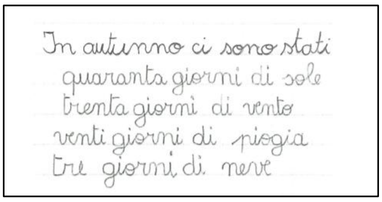


Figura 11
Scuola dell'infanzia,
1ª elementare,
4ª elementare.

Come primo presupposto, gli allievi hanno subito definito come in tutti i messaggi doveva essere presente il dato riguardante la stagione di riferimento: l'autunno, assente in quasi tutte le rappresentazioni precedenti. Questa informazione doveva essere rappresentata in forma pittorica per la scuola dell'infanzia, pittorica e proposizionale per la prima elementare e proposizionale per la quarta: questo avrebbe consentito la comprensione da parte di tutti.
Per quanto riguarda i disegni rivolti ai bambini della scuola dell'infanzia e di prima elementare, le quantità indicanti i giorni in cui una certa condizione meteorologica si era sviluppata dovevano essere scritte sia in forma iconica sia in forma indo-araba, garantendo così una lettura da parte di allievi con livelli cognitivi diversi. Per quelli di quarta, invece, considerati ormai "grandi", si è optato per la sola forma proposizionale. Per le stesse motivazioni, il referente (pioggia, sole, vento o neve) doveva essere rappresentato in forma pittorica e in forma proposizionale per la scuola dell'infanzia e per la prima,[3] e in forma proposizionale per la quarta. 3
Si può inoltre notare come il messaggio destinato alla scuola dell'infanzia e alla prima elementare sia sostanzialmente istogramma. Le quattro torri di quadretti, secondo gli allievi di prima elementare, avrebbero permesso l'inferenza della condizione meteorologica sviluppatasi maggiormente, da parte di chi non sa contare o non conosce la scrittura indo-araba dei numeri.
Da questi dati traspare ancora una volta la sensibilità degli allievi di prima elementare riguardo alle diverse conoscenze dei destinatari, e alla loro volontà di creare messaggi differenziati che permettono la comprensione autonoma da parte di bambini con possibili livelli di conoscenza diversi tra loro.

Bibliografia

Bettoni, M. (2017). *Te lo voglio far capire! Le rappresentazioni spontanee degli allievi di prima elementare per comunicare una situazione numerica* (Tesi di Bachelor, Dipartimento formazione e apprendimento, Supsi di Locarno). Disponibile in http://tesi.supsi.ch/1565/1/MICHELA_BETTONI_-_Tesi_di_bachlor%2C_Te_lo_voglio_far_capire.pdf

3. Per la scuola dell'infanzia i bambini sono ricorsi all'uso dello stampato maiuscolo mentre per la prima al corsivo.

Cambiano, G., & Mori, M. (2011). *Le Stelle di Talete*. Bari: Editori Laterza.

Coggi, C., & Ricchiardi, P. (2005). *Progettare la ricerca empirica in educazione*. Roma: Carocci editore.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150–173.

De Saussure, F. (1915). *Cours de linguistique générale*. Paris et Lausanne: Payot.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.

Duval, R. (1995). S*emiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Fandiño Pinilla, M. I. (2011). Numeri e problemi nella vita quotidiana. *Vita Scolastica*, 65, 14–16.

Iori, M, (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo). Disponibile in http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Tesi%20PhD%20Maura%20Iori.pdf (consultato il 2.12.2017).

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 275–291.

Jakobson, R. (1966). *Saggi di linguistica generale*. Milano: Feltrinelli.

Kant, I. (1967). *Critica della ragion pura*. (P. Chiodi, A cura di) Torino: Utet.

Lucangeli, D., & Tressoldi, P. (2002). Lo sviluppo della conoscenza numerica: alle origini del "capire i numeri". *Giornale italiano della psicologia*, *4*, 701–723.

Luquet, G. (1969). *Il disegno infantile*. Roma: Armando Editore.

Milani, P., & Pegoraro, E. (2011). *L'intervista nei contesti socio-educativi: una guida pratica*. Roma: Carocci.

Moreno Armella, L. (1999). Epistemologia ed Educazione Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 43-59.

Piaget, J. (1967). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel: Paris: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1928). Les trois systèmes de la pensée de l'enfant : études sur les rapports de la pensée rationnelle et de l'intelligence motrice. *Bulletin de la Société française de philosophie*, 4, 97–141.

Poretti, C., & Sbaragli, S. (2014). Rappresentazioni spontanee di risoluzioni di problemi in continuità tra scuola dell'infanzia e scuola primaria. In B. D'Amore e S. Sbaragli, *Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica*, Bologna: Pitagora.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 2, 191–213.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61* (1–2), 39–65.

Radford, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e Apprendimento*. Bologna: Pitagora.

Sbaragli, S. (2006). Diverse chiavi di lettura delle "misconcezioni". *Rassegna*. Istituto Pedagogico di Bolzano. XIV, 29, 47–52.

Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei docenti di matematica*, 50, 69–76.

Vygotskij, L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press.

Autore / Michela Bettoni
Istituto Scolastico Comunale della Città di Lugano – Sede di Cassarate, Svizzera
michela.bettoni@scuole.lugano.ch

Valutare per competenze in matematica: il caso del processo cognitivo matematizzare e modellizzare

Competence-based evaluation in mathematics: the case of the cognitive process mathematization and modelling

ESPERIENZA DIDATTICA

Athos Borioli*, Alberto Piatti° e Igor Tamagni˙

*Scuola media di Castione – Svizzera

°Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Svizzera

˙Scuola media di Cadenazzo – Svizzera

Sunto / Nel 2015, in Canton Ticino, è stato introdotto un nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo basato sul paradigma della didattica per competenze. Il Piano di studio fornisce un quadro chiaro e completo delle competenze attese, ma fornisce pochi elementi relativi alle modalità di progettazione didattica adeguate per perseguire questi scopi e poche indicazioni rispetto alle modalità di valutazione che andrebbero attuate. Lo scopo del lavoro di ricerca presentato sinteticamente in questo articolo è stato di adottare un quadro teorico relativo alla valutazione per competenze (Castoldi, 2016) e di trasporlo in pratica per sviluppare strumenti di progettazione e valutazione per competenze che permettessero di perseguire efficacemente gli scopi espressi nel Piano di studio. In particolare, i lavori si sono concentrati sulla valutazione di un particolare processo cognitivo (matematizzare e modellizzare) previsto dal Piano di studio per la matematica. Sono state coinvolte due classi di I media di due sedi di scuola media ticinesi. Nonostante il presente lavoro si sia limitato a una classe, a un singolo processo cognitivo di una singola disciplina e a un preciso Piano di studio, riteniamo che i risultati ottenuti siano, con dovuti accorgimenti, generalizzabili a qualsiasi disciplina e classe e forniscano ai docenti elementi utili per una trasposizione in pratica di un qualsiasi Piano di studio basato sulle competenze.

Parole chiave: valutazione per competenze; rubrica valutativa; modellizzazione matematica.

Abstract / The curriculum of pre-primary, primary and lower secondary school of Canton Ticino has been completely revised in 2015. The new program clearly illustrates the competences that should be developed by the pupils during the compulsory school, but, unfortunately, it does not explain in detail how a teacher can design and realize competence-based teaching and learning activities and, in particular, how and through which instruments these competences could be assessed. The aim of the research project summarized in this paper was to apply a theoretical framework on competence assessment (Castoldi 2016) to the new curriculum, in order to develop a practical and suitable approach for competence assessment. The assessment approach that is being presented was tested in two lower secondary school classes and was focused exclusively on the assessment of the mathematical modelling skills of pupils. Although our work is limited to a single year, a single discipline and a single cognitive process, we argue that its results could be adapted to any discipline, cognitive process and year in the context of a competence-based curriculum.

Keywords: skills assessment; assessment rubric; mathematical modelling.

1 Introduzione

Con l'entrata in vigore del concordato Harmos, ogni regione linguistica della Svizzera si è dotata di un nuovo Piano di studio per l'intera scuola dell'obbligo: il Lehrplan 21 per la regione di lingua tedesca (www.lehrplan.ch), il Plan d'études romand per la regione di lingua francese (www.plandetudes.ch) e il Piano di studio della scuola dell'obbligo per il Canton Ticino (DECS, 2015, www.pianodistudio.ch).
Tutti e tre i piani di studio sono formulati in termini di traguardi di competenza attesi alla fine dei tre cicli di scuola dell'obbligo. In particolare, il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (in seguito denominato Piano di studio) specifica le competenze che dovrebbero essere sviluppate dagli allievi, nell'ambito delle diverse discipline scolastiche previste, in diversi ambiti di formazione generale e a livello trasversale, al termine del quarto, settimo e undicesimo anno di scolarità obbligatoria. Per quanto riguarda la matematica, il Piano di studio definisce un modello di competenza sotto forma di tabella a doppia entrata, dove le colonne rappresentano i cinque ambiti di competenza (Numeri e calcolo, Grandezze e misure, Geometria, Funzioni, Probabilità e statistica) e le righe le risorse e i processi cognitivi previsti (risorse cognitive: Sapere e riconoscere, Eseguire e applicare; processi cognitivi: Esplorare e provare, Matematizzare e modellizzare, Interpretare e riflettere sui risultati, Comunicare e argomentare).
Il Piano di studio fornisce un quadro chiaro e completo delle competenze attese, ma fornisce pochi elementi relativi alle modalità di progettazione didattica adeguate per perseguire questi scopi e ancora meno fornisce indicazioni rispetto alle modalità di valutazione che andrebbero attuate. Esso si limita a indicare il bisogno di passare da una *valutazione dell'apprendimento* a una *valutazione per l'apprendimento*, e a definire in maniera generale la valutazione per competenze. In particolare, viene indicato che:

> «(...) la valutazione delle competenze differisce dalla sola verifica di conoscenze e/o capacità/abilità. Valutare le competenze è un processo complesso in quanto esse si sviluppano e si valutano in situazione. Infatti, un allievo è da ritenersi competente quando sa affrontare situazioni-problema in un contesto (possibilmente dotato di significato e adeguatamente complesso) analogo ma diverso da quello di apprendimento. È quindi necessario che sappia utilizzare in situazioni definite "complesse" le diverse conoscenze, capacità/abilità e atteggiamenti che ha appreso (a volte anche separatamente). Le situazioni d'integrazione non sono semplici esercizi (che possono essere utili per attivare risorse parziali in fase di apprendimento), ma situazioni nelle quali gli apprendimenti sono messi in uso in contesti ritenuti adeguatamente complessi in riferimento alla competenza mirata».
>
> (DECS, 2015, p. 24)

Lo scopo del lavoro di ricerca presentato sinteticamente in questo articolo è stato di adottare un quadro teorico relativo alla valutazione per competenze (Castoldi, 2016) e di trasporlo in pratica per sviluppare strumenti di progettazione e valutazione per competenze che permettessero di perseguire efficacemente gli scopi espressi nel Piano di studio. Si è deciso di lavorare su un solo anno scolastico (la prima media, corrispondente in Ticino all'ottavo anno di scolarità) e su un particolare processo cognitivo relativo alla disciplina matematica (Matematizzare e modellizzare).

In particolare, è stata elaborata una rubrica valutativa relativa alla modellizzazione che è servita da base per la progettazione di due situazioni problema che sono state svolte in due classi di scuola media. Con la stessa ottica sono stati sviluppati degli strumenti di valutazione che sono stati applicati per valutare le competenze di modellizzazione degli allievi in base a quanto osservato durante lo svolgimento delle attività. I risultati ottenuti hanno confermato l'efficacia degli strumenti adottati e, in particolare, l'utilità e l'importanza, ai fini dell'adozione di un approccio basato sulle competenze, di impostare la progettazione didattica e la valutazione su una rubrica valutativa. Una descrizione dettagliata del lavoro svolto è presente in Borioli (2017) e Tamagni (2017).
Nonostante il presente lavoro si sia limitato a una classe, a un singolo processo cognitivo di una singola disciplina e a un preciso Piano di studio, riteniamo che i risultati ottenuti siano, con i dovuti accorgimenti, generalizzabili a qualsiasi disciplina e classe e forniscano ai docenti elementi utili per una trasposizione in pratica di un qualsiasi Piano di studio basato sulle competenze.

2 Valutazione per competenze e rubriche valutative

Come indicato dal Piano di studio, la valutazione per competenze non si limita a una verifica delle conoscenze e abilità acquisite dall'allievo, ma si focalizza piuttosto sulla capacità di un allievo di affrontare situazioni-problema proposte in contesti tendenzialmente diversi da quelli conosciuti durante l'apprendimento. Questi contesti sono pensati per rappresentare una difficoltà adeguata alla situazione nella quale si fa uso della competenza richiesta. Inoltre, la valutazione per competenze opera su una prospettiva globale e ricollega il prodotto dell'apprendimento al suo processo di costruzione.
La valutazione per competenze si dimostra essere molto complessa, poiché la competenza va vista sotto più dimensioni. In questo senso, Pellerey (2004) propone di adottare «(…) un ideale triangolo di osservazione che assuma come baricentro l'idea stessa di competenza su cui si basano i differenti punti di vista» (Castoldi, 2016, p. 81).

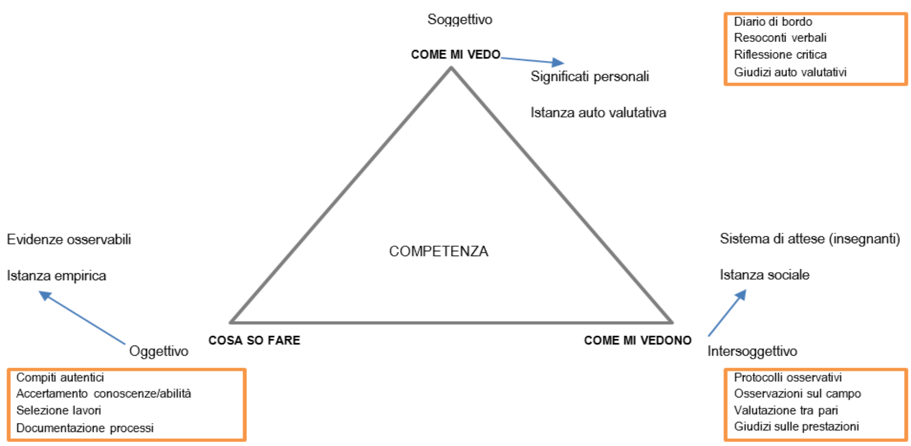


Figura 1
Prospettiva trifocale (dimensione oggettiva, soggettiva e intersoggettiva), con al centro la rubrica di competenza.

> «La dimensione oggettiva richiama le evidenze osservabili che attestino la prestazione del soggetto e i suoi risultati, in rapporto al compito affidato e, in particolare, alle conoscenze e alle abilità che la manifestazione della competenza richiede».
>
> (Castoldi, 2016, p. 81)

La dimensione oggettiva riguarda quindi ciò che un allievo è in grado di fare, ovvero le conoscenze e le capacità possedute. Strumenti tipici per la valutazione di questa dimensione sono le prove scritte e lo svolgimento di compiti autentici.

> «La dimensione soggettiva richiama i significati personali attribuiti dal soggetto alla sua esperienza di apprendimento: il senso assegnato al compito operativo su cui manifestare la propria competenza e la percezione della propria adeguatezza nell'affrontarlo, delle risorse da mettere in campo e dagli schemi di pensiero da attivare».
>
> (Castoldi, 2016, p. 82)

La dimensione soggettiva riguarda quindi la consapevolezza dell'allievo nell'affrontare i compiti proposti. Questa dimensione è spesso resa tangibile attraverso forme di autovalutazione.

> «La dimensione intersoggettiva richiama il sistema di attese, implicito o esplicito, che il contesto sociale esprime in rapporto alla capacità del soggetto di rispondere adeguatamente al compito richiesto».
>
> (Castoldi, 2016, p. 82)

La dimensione intersoggettiva riguarda quindi le aspettative delle persone coinvolte (compagni, docenti, famiglie ecc.) rispetto alle prestazioni dell'allievo. Per poter valutare quest'ultima dimensione si possono utilizzare ad esempio la valutazione tra pari e diversi protocolli di osservazione.
Al centro dei tre punti di vista descritti si trova la competenza con il rispettivo strumento di valutazione: la rubrica valutativa. Essa «(...) richiama il momento di definizione dei criteri di giudizio sulla cui base arrivare a formare il giudizio valutativo» (Castoldi, 2016, p. 87) ed è definita come

> «uno strumento generale di valutazione impiegato per valutare la qualità dei prodotti e delle prestazioni di un determinato ambito. La rubrica consiste in una scala di punteggi prefissati e in una lista di criteri che definiscono le caratteristiche di ogni punteggio della scala. Le rubriche sono frequentemente accompagnate da esempi di prodotti o prestazioni che hanno lo scopo di illustrare ciascuno dei punteggi».
>
> (McTighe & Ferrara, 1996, p. 8)

Le rubriche valutative non rappresentano unicamente uno strumento utile per valutare l'apprendimento ma anche per creare e progettare a ritroso dei percorsi didattici. Secondo Wiggins e McTighe (2007) è possibile infatti partire dalla definizione dei criteri di valutazione utilizzati per risalire alla progettazione di un percorso didattico. Esistono diversi tipi di rubrica valutativa e ognuna di esse è definita in base alle sue caratteristiche. Partendo dal grado di analiticità di una rubrica si possono individuarne due tipi:

- **olistiche**: utili per l'osservazione complessiva di una competenza, senza un'analisi dettagliata dei diversi aspetti specifici;
- **analitiche**: basate sull'analisi dettagliata di uno o più aspetti specifici di una data competenza.

In base alla contestualizzazione delle stesse, possiamo definire altri due tipi di rubrica:

- **specifiche**: le quali rappresentano un insieme di criteri utili per valutare una determinata prestazione;
- **generali**: utili per valutare un livello di padronanza raggiunto rispetto ad un traguardo di competenza.

Vanno inoltre menzionate le rubriche ponderate, nelle quali si assegnano pesi differenti a determinate dimensioni in base all'importanza della manifestazione di ognuna di esse.
La rubrica che funge da base al presente lavoro è classificabile come analitica, poiché le diverse dimensioni del modellizzare vengono elencate in dettaglio, e generale, poiché essa è adeguata alla valutazione di numerose situazioni di modellizzazione e non è stata specificamente creata per la valutazione di una data situazione. In generale riteniamo che questo tipo di rubrica sia la più adeguata ai fini della progettazione didattica, in quanto permette di avere sempre sotto controllo tutte le dimensioni che devono essere sviluppate, sia in sede di progettazione a priori, sia in sede di valutazione durante e al termine dei diversi percorsi didattici.
In sintesi si possono riassumere le caratteristiche di una rubrica attraverso le parole di Castoldi (2016), il quale specifica che una rubrica dev'essere composta essenzialmente da:

- **dimensioni**: indicanti le caratteristiche che contraddistinguono un determinato oggetto di valutazione. Le dimensioni rispondono alla domanda: "Quali aspetti o processi chiave che descrivono la manifestazione della competenza considero?";
- **indicatori:** attraverso i quali possiamo riconoscere o meno la presenza di una dimensione. Gli indicatori rispondono alla domanda: "Attraverso che cosa riconosco la presenza della dimensione?";
- **livelli di padronanza**: i quali descrivono l'intensità con cui una dimensione è presente. In genere si definiscono quattro livelli di padronanza, dove il livello di sufficienza e quello di eccellenza assumono un'importanza centrale. Le descrizioni dei livelli vanno espresse in modo inequivocabile e non devono essere di tipo comparativo ma devono esprimersi in modo assoluto rispetto alla manifestazione di una competenza in modo che ogni cella abbia un significato anche se presa in considerazione da sola. Per definire i livelli di padronanza si fa riferimento al grado di autonomia dell'allievo, al grado di rielaborazione richiesto e al livello di familiarità e complessità dei contesti di azione e possono essere espressi attraverso lettere (A, B, C, D), numeri (1, 2, 3, 4) oppure parole (base, iniziale, intermedio, avanzato);
- **ancore:** che danno degli esempi concreti per identificare i vari livelli di padronanza della rubrica.

La rubrica adottata nel presente lavoro contempla tutti gli elementi ad eccezione delle ancore. La specifica di ancore non è stata ritenuta necessaria, in quanto esse sono utili

soprattutto se l'utilizzatore della rubrica non corrisponde al suo creatore. In quest'ultimo caso, infatti, è facile che l'intenzione iniziale dell'estensore non venga adeguatamente compresa dall'utilizzatore e quindi la specifica di ancore (ancora meglio se svolta in comune tra estensore e utilizzatori) può facilitare la comprensione reciproca. Nel nostro caso il problema non si pone, poiché gli estensori della rubrica sono le stesse persone che l'hanno applicata.
Sono stati adottati quattro livelli di padronanza: iniziale (corrispondente a un livello ritenuto non adeguato), base, intermedio e avanzato (corrispondenti a livelli ritenuti adeguati).
Prima di procedere con la descrizione in dettaglio della rubrica adottata, è ora necessario specificare brevemente cosa s'intenda con modellizzazione in matematica.

3 Modellizzazione in matematica

Il Piano di studio definisce la modellizzazione come l'approccio basato su

> «introdurre e utilizzare concetti, principi e metodi specifici della matematica per comprendere, spiegare, esaminare un dominio reale o ideale; individuare e applicare procedimenti attraverso i quali si utilizzano oggetti della matematica per modellizzare situazioni, ossia descriverle e rappresentarle utilizzando in modo consapevole il linguaggio specifico della matematica. La matematica può così modellizzare oggetti, situazioni e strutture del mondo reale o ideale tramite diversi tipi di rappresentazioni».
>
> (DECS, 2015, p. 146)

Come spiegato nella definizione, con modellizzare s'intende quindi il saper rappresentare una situazione reale utilizzando un linguaggio matematico al fine di spiegarne e comprenderne i vari aspetti. Il Piano di studio dà la giusta importanza all'aspetto didattico del concetto di modello, il quale al di fuori dal contesto scolastico viene definito come «la rappresentazione di un fenomeno. Tale rappresentazione non è descrittiva, discorsiva o a parole, ma formale, cioè espressa in un linguaggio matematico» (Malinvaud, 1964).
Il processo di modellizzazione può essere rappresentato con il seguente schema ciclico, dove realtà e modello matematico vengono messi in relazione:

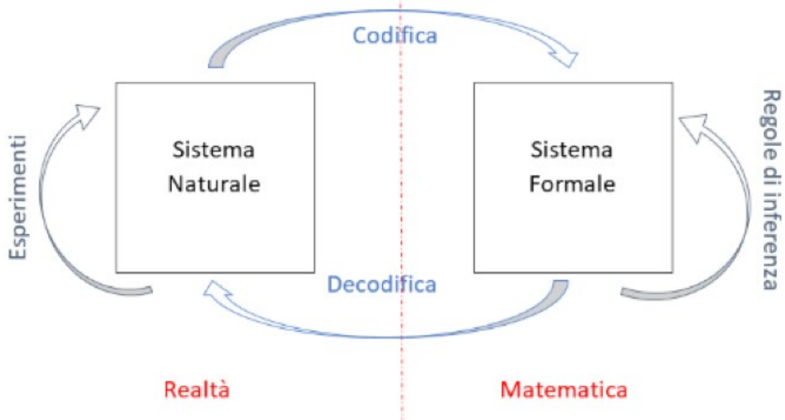


Figura 2
Schema che illustra il processo di matematizzazione e modellizzazione.

Nello schema si nota come un fenomeno presente in natura (si pensi ad esempio il movimento di un oggetto nello spazio) venga codificato in un sistema formale; bisognerà quindi chiedersi: "quali sono gli aspetti che ritengo utili per l'analisi del fenomeno e come intendo modellizzarli?" Una volta che la realtà è descritta in un sistema formale, allora si possono effettuare le analisi che permettono di comprendere al meglio il fenomeno studiato per poi ritornare al sistema naturale nel quale l'oggetto si situa verificando l'attendibilità dei risultati ottenuti; nel caso in cui i dati non siano verosimili si opera sul modello per effettuare le giuste calibrazioni. La modellizzazione è dunque strettamente legata al mondo reale e si presta molto bene ad affrontare situazioni autentiche in quanto «la realtà è comunque sempre presente: si prende spunto dalla realtà, si indaga nella realtà, si traggono, dopo aver matematizzato, regole di comportamento per la realtà» (Castelnuovo & Barra, 1974). Un modello matematico non può naturalmente sostituire la realtà in maniera esaustiva, ma è utile per descrivere in modo verosimile singoli aspetti che interessa analizzare, infatti:

> «il modello non esprime necessariamente l'intima e reale essenza del problema (la realtà è spesso così complessa da non lasciarsi rappresentare in modo esaustivo con formule matematiche), ma deve fornire una sintesi utile. I matematici hanno un ruolo particolare in tale contesto. Essi sanno vedere e capire la natura intrinseca di un problema, determinare quali caratteristiche sono rilevanti e quali non lo sono, e, di conseguenza sviluppare una rappresentazione matematica che contiene l'essenza del problema stesso».
>
> (Quarteroni, 1998)

Il processo di modellizzazione assume un'importanza fondamentale nel legame tra matematica e realtà, sia in ambito scolastico per la creazione e la risoluzione di situazioni problema autentiche e stimolanti tratte dalla realtà, sia in ambito professionale e nella vita di tutti i giorni.

4 Una rubrica valutativa per la modellizzazione

Per creare la rubrica valutativa descritta nel presente lavoro, abbiamo seguito le seguenti fasi:

- definire le dimensioni che descrivono la competenza;
- definire gli indicatori che permettono di riconoscere la presenza di ogni dimensione;
- definire i livelli di padronanza;
- descrivere i vari livelli.

Le dimensioni rispondono alla domanda: "quali sono gli aspetti o i processi chiave che descrivono la manifestazione della competenza che considero?". Riconducendosi allo schema di modellizzazione si possono riconoscere nel processo cognitivo le seguenti dimensioni:

- **processo di modellizzazione:** riguarda l'individuazione delle caratteristiche utili alla risoluzione della situazione-problema proposta;
- **registri:** considera il linguaggio matematico con cui le caratteristiche utili sono descritte (registri algebrici, testuali, figurali ecc.);
- **raccolta dati e informazioni:** vengono considerati tutti i processi che permettono la raccolta delle informazioni utili alla risoluzione della situazione affrontata. I dati e le informazioni possono essere raccolti direttamente da fonti fornite dal docente (tabelle, grafici e testi) oppure possono essere ricavati in modo diretto dagli allievi stessi;
- **stima:** riguarda la capacità di stima dei risultati da parte degli allievi;
- **controllo e regolazione:** vengono considerati i processi che gli allievi mettono in atto per valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti e le capacità di correzione delle proprie soluzioni in caso di errore.

Il lavoro di ricerca si è concentrato su dimensioni di tipo prettamente matematico: per questo motivo nella rubrica si è deciso di tralasciare le dimensioni che condizionano le modalità con cui l'allievo agisce, quali la relazione con se stesso, la relazione con gli altri, la relazione con il compito e la relazione con il contesto. Gli indicatori di ogni dimensione sono stati quindi definiti in relazione alle varie dimensioni:

- **Processo di modellizzazione:**
  - è in grado di capire quali sono le caratteristiche utili per la modellizzazione di una situazione reale;
  - date le caratteristiche è in grado di utilizzare un linguaggio adeguato.
- **Registri:**
  - scelta e utilizzo del registro;
  - capacità di passare da un registro all'altro.
- **Raccolta dati e informazioni:**
  - capacità di individuare informazioni pertinenti da una situazione data;
  - ricavare dati da tabelle e grafici e testi;
  - scelta dello strumento di misura adeguato;
  - misurare.
- **Stima:**
  - stimare e approssimare i risultati attesi.

- **Controllo e regolazione:**
  - valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti;
  - capacità di correzione e regolazione.

La scelta dei livelli di padronanza è stata elaborata in base ai seguenti parametri:

- **il grado di rielaborazione richiesto:**
  risposte riproduttive → risposte originali;
- **il livello di famigliarità dei contesti di azione:**
  famigliare, conosciuto e/o semplice →inedito, non famigliare e complesso;
- **difficoltà del compito:**
  semplice → complesso;
- **il grado di autonomia:**
  riesce con aiuto → è autonomo.

Livelli di padronanza e parametri sono stati combinati come segue:

	Iniziale	Base	Intermedio	Avanzato
Risposta	Riproduttiva	Riproduttiva	Riproduttiva	Originale
Contesti	Conosciuto	Conosciuto	Inedito	Inedito
	Famigliare	Famigliare	Non famigliare	Non famigliare
	Semplice	Semplice	Complesso	Complesso
Difficoltà del compito	Semplice	Semplice	Complesso	Complesso
Autonomia	Aiuto	Autonomo	Autonomo	Autonomo

Tabella 1
Distinzione dei livelli di padronanza in base ai parametri scelti.

Una volta definite le dimensioni, gli indicatori e i livelli di padronanza, si può riempire il "telaio" della rubrica valutativa. È importante precisare che si parte dall'idea che ogni allievo sia in grado di fare qualcosa, anche se aiutato dal docente o dal compagno, in un contesto semplice e conosciuto, limitandosi a fornire una risposta riproduttiva. Per questo motivo, nella rubrica non appaiono frasi come: "L'allievo non sa fare…, L'allievo non è in grado di… ecc." ma il livello base riporta delle considerazioni di tipo positivo. La parte più delicata è quella di fissare il grado della cosiddetta sufficienza (la quale corrisponde al livello base nella rubrica). Nel nostro caso, tale livello corrisponde alla capacità di muoversi autonomamente nelle varie dimensioni almeno in contesti e situazioni di tipo semplice e conosciuto.
La rubrica valutativa ottenuta è la seguente, dove in grassetto sono state indicate le parole chiave caratterizzanti i diversi livelli di padronanza.

	Dimensioni	Indicatori	Iniziale	Base	Intermedio	Avanzato
REALTÀ	PROCESSO DI MODELLIZZAZIONE	**È in grado di capire quali sono le caratteristiche utili per la modellizzazione di una situazione reale.**	Identifica le caratteristiche utili con ***l'ausilio di una guida***.	Identifica le caratteristiche utili autonomamente in ***contesti semplici e famigliari.***	Identifica ***autonomamente*** le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***.	Identifica le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***, capendo in maniera ***autonoma*** quali possono essere declinate.
		Date le caratteristiche è in grado di utilizzare un linguaggio adeguato.	Utilizza il linguaggio adeguato se ***aiutato***.	Utilizza ***autonomamente*** il linguaggio adeguato in ***situazioni semplici e conosciute.***	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse***.	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse*** fornendo delle ***proposte originali***.
MODELLO	REGISTRI	**Scelta e utilizzo del registro**	***Necessita di aiuti*** per scegliere un registro adeguato ed utilizzarlo correttamente in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato anche in ***situazioni inedite e complesse***.	Fa uso di un registro in maniera corretta, proponendo ***soluzioni originali*** in ogni situazione.
		Capacità di passare da un registro all'altro.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** con ***l'ausilio di aiuti***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici e conosciute*** in maniera ***autonoma***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma*** fornendo ***proposte originali***.
	RACCOLTA DATI E INFORMAZIONI	**Capacità di individuare informazioni pertinenti da una situazione data.**	Individua quali sono le informazioni per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** se ***guidato***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici e conosciute autonomamente***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni inedite e complesse***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema trovando ***nuovi metodi***.
		Ricavare dati da tabelle e grafici e testi.	Ricava i dati corretti in ***situazioni conosciute*** e ***semplici*** se ***aiutato***.	Ricava i dati utili in maniera ***autonoma*** da tabelle e grafici ***semplici*** e ***conosciuti***.	È in grado di ricavare dati corretti anche da tabelle e grafici più ***complessi***.	È in grado di ricavare dati corretti da tabelle e ***grafici nuovi e complessi*** in ***maniera autonoma***.
		Scelta dello strumento di misura adeguato.	Sceglie lo strumento adeguato in ***situazioni conosciute con aiuti***.	Sceglie in maniera ***autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni semplici*** e ***conosciute***.	Sceglie in maniera autonoma lo strumento adeguato in ***situazioni complesse***.	Sceglie in ***maniera autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni inedite.***
		Misurare	Effettua misure precise in ***situazioni semplici con l'ausilio di aiuti.***	Effettua misure precise in ***situazioni semplici.***	Effettua misure precise in ***situazioni complesse***.	Effettua misure precise anche in ***situazioni non convenzionali.***
	STIMA	**Stimare e approssimare i risultati attesi.**	È in grado di stimare i risultati in modo realistico con ***l'utilizzo di aiuti.***	È in grado di stimare i risultati in modo realistico ***autonomamente*** in ***situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso ***autonomamente in situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso in ***situazioni nuove***.
REALTÀ	CONTROLLO E REGOLAZIONE	**Valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti.**	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione ***con l'aiuto*** del docente.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in verifiche ***semplici*** e ***conosciute***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni complesse***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni nuove***.
		Capacità di correzione e regolazione.	Corregge ***con l'aiuto*** del docente.	Corregge in maniera ***autonoma***.	È in grado di correggere in ***situazioni più complicate***.	È in grado di correggere in ***situazioni mai viste***.

Figura 3
Rubrica valutativa per il processo Matematizzare e modellizzare in prima media.

5 Due situazioni problema sulla modellizzazione

Per testare la rubrica valutativa creata, sono state elaborate e proposte a due classi di prima media (delle sedi di Castione e Cadenazzo) due situazioni problema di modellizzazione. La rubrica è stata utilizzata sia in sede di progettazione delle attività, sia in sede di valutazione delle stesse. Per testare in maniera completa la rubrica come strumento per la valutazione degli apprendimenti, sarebbe stato necessario proporre più situazioni problema sull'arco dell'intero anno scolastico, in modo da valutare più volte e a distanza di tempo le diverse dimensioni, ma i limiti di tempo imposti dal presente progetto di ricerca non hanno permesso di svolgere più di due attività.
La prima situazione proposta riguardava la pianificazione del trasporto degli allievi a scuola. Entrambe le sedi coinvolte servono diversi comuni e buona parte degli allievi, per recarsi a scuola, fa capo a un servizio di trasporto dedicato tramite torpedoni fornito da una ditta privata. La situazione proposta richiedeva di pianificare il trasporto degli allievi a scuola tramite i normali mezzi pubblici e di selezionare le offerte più convenienti per minimizzare il costo complessivo del trasporto degli allievi. Per la preparazione e la risoluzione della situazione, agli allievi sono stati forniti diversi materiali originali: mappa dei comuni, lista degli allievi con provenienza, calendari scolastici, piano dei trasporti pubblici (si veda www.arcobaleno.ch) e relativi opuscoli. Per i dettagli si veda Borioli (2017) e Tamagni (2017). La situazione proposta non richiedeva di mobilitare tutte le dimensioni presenti nella rubrica. In particolare, la parte di rubrica coperta dalla situazione è quella interna al bordo tratteggiato nella **Figura 4**:

	Dimensioni	Indicatori	Iniziale	Base	Intermedio	Avanzato
REALTÀ	PROCESSO DI MODELLIZZAZIONE	**È in grado di capire quali sono le caratteristiche utili per la modellizzazione di una situazione reale.**	Identifica le caratteristiche utili con ***l'ausilio di una guida***.	Identifica le caratteristiche utili autonomamente in ***contesti semplici e famigliari.***	Identifica ***autonomamente*** le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***.	Identifica le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***, capendo in maniera ***autonoma*** quali possono essere declinate.
		Date le caratteristiche è in grado di utilizzare un linguaggio adeguato.	Utilizza il linguaggio adeguato se ***aiutato***.	Utilizza ***autonomamente*** il linguaggio adeguato in ***situazioni semplici e conosciute.***	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse***.	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse*** fornendo delle ***proposte originali***.
MODELLO	REGISTRI	**Scelta e utilizzo del registro**	***Necessita di aiuti*** per scegliere un registro adeguato ed utilizzarlo correttamente in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato anche in ***situazioni inedite e complesse***.	Fa uso di un registro in maniera corretta, proponendo ***soluzioni originali*** in ogni situazione.
		Capacità di passare da un registro all'altro.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** con ***l'ausilio di aiuti***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici e conosciute*** in maniera ***autonoma.***	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma*** fornendo ***proposte originali***.
	RACCOLTA DATI E INFORMAZIONI	**Capacità di individuare informazioni pertinenti da una situazione data.**	Individua quali sono le informazioni per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** se ***guidato***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici e conosciute autonomamente.***	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni inedite e complesse***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema trovando ***nuovi metodi***.
		Ricavare dati da tabelle e grafici e testi.	Ricava i dati corretti in ***situazioni conosciute*** e ***semplici*** se ***aiutato***.	Ricava i dati utili in maniera ***autonoma*** da tabelle e grafici ***semplici*** e ***conosciuti***.	È in grado di ricavare dati corretti anche da tabelle e grafici più ***complessi***.	È in grado di ricavare dati corretti da tabelle e ***grafici nuovi e complessi*** in ***maniera autonoma***.
		Scelta dello strumento di misura adeguato.	Sceglie lo strumento adeguato in ***situazioni conosciute con aiuti***.	Sceglie in maniera ***autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni semplici*** e ***conosciute***.	Sceglie in maniera autonoma lo strumento adeguato in ***situazioni complesse***.	Sceglie in ***maniera autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni inedite.***
		Misurare	Effettua misure precise in ***situazioni semplici con l'ausilio di aiuti.***	Effettua misure precise in ***situazioni semplici***.	Effettua misure precise in ***situazioni complesse***.	Effettua misure precise anche in ***situazioni non convenzionali***.
	STIMA	**Stimare e approssimare i risultati attesi.**	È in grado di stimare i risultati in modo realistico con ***l'utilizzo di aiuti.***	È in grado di stimare i risultati in modo realistico ***autonomamente*** in ***situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso ***autonomamente in situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso in ***situazioni nuove***.
REALTÀ	CONTROLLO E REGOLAZIONE	**Valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti.**	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione ***con l'aiuto*** del docente.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in verifiche ***semplici*** e ***conosciute***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni complesse***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni nuove***.
		Capacità di correzione e regolazione.	Corregge ***con l'aiuto*** del docente.	Corregge in maniera ***autonoma***.	È in grado di correggere in ***situazioni più complicate***.	È in grado di correggere in ***situazioni mai viste***.

Figura 4
Livelli di padronanza considerati per le varie dimensioni nell'attività sugli abbonamenti Arcobaleno.

Si può notare che la situazione proposta non richiedeva di svolgere una misura e nemmeno una stima. Inoltre, per alcune dimensioni, il compito proposto non permetteva di verificare la presenza di un livello avanzato.
Per poter verificare anche le dimensioni non considerate nella prima situazione problema, è stata proposta agli allievi una seconda situazione in cui si chiedeva di determinare il numero di barattoli di vernice necessari per verniciare una panchina di cemento presente nel cortile della scuola.

Figura 5
Immagine delle panchine presenti nel cortile della scuola media di Cadenazzo.

Inizialmente agli allievi è stato chiesto di stimare il risultato senza misurare, in seguito è stata data la possibilità di misurare. L'attività ha avuto luogo sia in aula, sia direttamente nel cortile. Per i dettagli si veda Borioli (2017) e Tamagni (2017).
Questa seconda situazione ha permesso di valutare le seguenti dimensioni:

	Dimensioni	Indicatori	Iniziale	Base	Intermedio	Avanzato
REALTÀ	PROCESSO DI MODELLIZZAZIONE	**È in grado di capire quali sono le caratteristiche utili per la modellizzazione di una situazione reale.**	Identifica le caratteristiche utili con ***l'ausilio di una guida***.	Identifica le caratteristiche utili autonomamente in ***contesti semplici e famigliari.***	Identifica ***autonomamente*** le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***.	Identifica le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***, capendo in maniera ***autonoma*** quali possono essere declinate.
		Date le caratteristiche è in grado di utilizzare un linguaggio adeguato.	Utilizza il linguaggio adeguato se ***aiutato***.	Utilizza ***autonomamente*** il linguaggio adeguato in ***situazioni semplici e conosciute.***	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse***.	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse*** fornendo delle ***proposte originali***.
MODELLO	REGISTRI	**Scelta e utilizzo del registro**	***Necessita di aiuti*** per scegliere un registro adeguato ed utilizzarlo correttamente in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato anche in ***situazioni inedite e complesse***.	Fa uso di un registro in maniera corretta, proponendo ***soluzioni originali*** in ogni situazione.
		Capacità di passare da un registro all'altro.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** con ***l'ausilio di aiuti***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici e conosciute*** in maniera ***autonoma.***	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma*** fornendo ***proposte originali.***
	RACCOLTA DATI E INFORMAZIONI	**Capacità di individuare informazioni pertinenti da una situazione data.**	Individua quali sono le informazioni per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** se ***guidato.***	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici e conosciute autonomamente.***	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni inedite e complesse***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema trovando ***nuovi metodi***.
		Ricavare dati da tabelle e grafici e testi.	Ricava i dati corretti in ***situazioni conosciute*** e ***semplici*** se ***aiutato***.	Ricava i dati utili in maniera ***autonoma*** da tabelle e grafici ***semplici*** e ***conosciuti***.	È in grado di ricavare dati corretti anche da tabelle e grafici più ***complessi.***	È in grado di ricavare dati corretti da tabelle e ***grafici nuovi e complessi*** in ***maniera autonoma***.
		Scelta dello strumento di misura adeguato.	Sceglie lo strumento adeguato in ***situazioni conosciute con aiuti***.	Sceglie in maniera ***autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni semplici*** e ***conosciute***.	Sceglie in maniera autonoma lo strumento adeguato in ***situazioni complesse***.	Sceglie in ***maniera autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni inedite.***
		Misurare	Effettua misure precise in ***situazioni semplici con l'ausilio di aiuti.***	Effettua misure precise in ***situazioni semplici***.	Effettua misure precise in ***situazioni complesse***.	Effettua misure precise anche in ***situazioni non convenzionali***.
	STIMA	**Stimare e approssimare i risultati attesi.**	È in grado di stimare i risultati in modo realistico con ***l'utilizzo di aiuti.***	È in grado di stimare i risultati in modo realistico ***autonomamente*** in ***situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso ***autonomamente in situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso in ***situazioni nuove***.
REALTÀ	CONTROLLO E REGOLAZIONE	**Valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti.**	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione ***con l'aiuto*** del docente.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in verifiche ***semplici*** e ***conosciute.***	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni complesse***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni nuove***.
		Capacità di correzione e regolazione.	Corregge ***con l'aiuto*** del docente.	Corregge in maniera ***autonoma***.	È in grado di correggere in ***situazioni più complicate***.	È in grado di correggere in ***situazioni mai viste***.

Figura 6
Livelli di padronanza considerati per le varie dimensioni nell'attività sulle panchine.

Sovrapponendo le due tabelle, si può constatare che l'insieme delle due situazioni ha permesso di valutare almeno una volta tutte le dimensioni del modellizzare:

	Dimensioni	Indicatori	Iniziale	Base	Intermedio	Avanzato
REALTÀ	PROCESSO DI MODELLIZZAZIONE	**È in grado di capire quali sono le caratteristiche utili per la modellizzazione di una situazione reale.**	Identifica le caratteristiche utili con ***l'ausilio di una guida***.	Identifica le caratteristiche utili autonomamente in ***contesti semplici e famigliari.***	Identifica ***autonomamente*** le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***.	Identifica le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***, capendo in maniera ***autonoma*** quali possono essere declinate.
		Date le caratteristiche è in grado di utilizzare un linguaggio adeguato.	Utilizza il linguaggio adeguato se ***aiutato***.	Utilizza ***autonomamente*** il linguaggio adeguato in ***situazioni semplici e conosciute.***	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse***.	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse*** fornendo delle ***proposte originali***.
MODELLO	REGISTRI	**Scelta e utilizzo del registro**	***Necessita di aiuti*** per scegliere un registro adeguato ed utilizzarlo correttamente in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato anche in ***situazioni inedite e complesse***.	Fa uso di un registro in maniera corretta, proponendo ***soluzioni originali*** in ogni situazione.
		Capacità di passare da un registro all'altro.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** con ***l'ausilio di aiuti***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici e conosciute*** in maniera ***autonoma.***	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma*** fornendo ***proposte originali.***
	RACCOLTA DATI E INFORMAZIONI	**Capacità di individuare informazioni pertinenti da una situazione data.**	Individua quali sono le informazioni per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** se ***guidato.***	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici e conosciute autonomamente.***	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni inedite e complesse***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema trovando ***nuovi metodi***.
		Ricavare dati da tabelle e grafici e testi.	Ricava i dati corretti in ***situazioni conosciute*** e ***semplici*** se ***aiutato.***	Ricava i dati utili in maniera ***autonoma*** da tabelle e grafici ***semplici*** e ***conosciuti***.	È in grado di ricavare dati corretti anche da tabelle e grafici più ***complessi.***	È in grado di ricavare dati corretti da tabelle e ***grafici nuovi e complessi*** in ***maniera autonoma.***
		Scelta dello strumento di misura adeguato.	Sceglie lo strumento adeguato in ***situazioni conosciute con aiuti***.	Sceglie in maniera ***autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni semplici*** e ***conosciute***.	Sceglie in maniera autonoma lo strumento adeguato in ***situazioni complesse***.	Sceglie in ***maniera autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni inedite.***
		Misurare	Effettua misure precise in ***situazioni semplici con l'ausilio di aiuti.***	Effettua misure precise in ***situazioni semplici***.	Effettua misure precise in ***situazioni complesse***.	Effettua misure precise anche in ***situazioni non convenzionali***.
	STIMA	**Stimare e approssimare i risultati attesi.**	È in grado di stimare i risultati in modo realistico con ***l'utilizzo di aiuti.***	È in grado di stimare i risultati in modo realistico ***autonomamente*** in ***situazioni conosciute.***	È in grado di stimare i risultati in modo preciso ***autonomamente in situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso in ***situazioni nuove***.
REALTÀ	CONTROLLO E REGOLAZIONE	**Valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti.**	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione ***con l'aiuto*** del docente.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in verifiche ***semplici*** e ***conosciute***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni complesse***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni nuove***.
		Capacità di correzione e regolazione.	Corregge ***con l'aiuto*** del docente.	Corregge in maniera ***autonoma***.	È in grado di correggere in ***situazioni più complicate***.	È in grado di correggere in ***situazioni mai viste***.

Figura 7
Livelli di padronanza considerati per le varie dimensioni nell'attività sugli abbonamenti Arcobaleno e nell'attività sulle panchine (scuola media di Castione).

In questo senso, la presenza della rubrica ha permesso, in sede di progettazione, di tener conto esplicitamente di tutte le dimensioni del processo cognitivo mirato e di elaborare di conseguenza situazioni che permettessero complessivamente di toccarle tutte.

6 Utilizzo della rubrica

La complessità della rubrica non permette di regola al docente di utilizzarla direttamente durante l'attività come strumento di raccolta dei dati. Per poterla utilizzare è necessario agire in asincrono (ad esempio valutando una produzione scritta di un allievo) oppure elaborando e utilizzando degli strumenti, prevedendo eventualmente un contributo degli allievi, che consentano di situare i diversi allievi all'interno della rubrica.
Nel caso della prima situazione, la compilazione della rubrica si è basata su un sistema di aiuti messi a disposizione dei diversi allievi in diversi momenti della risoluzione della situazione. Gli aiuti sono stati elaborati in modo da permettere a ogni allievo di proporre una soluzione per la situazione proposta. Gli aiuti erano messi a disposizione degli allievi nel caso in cui, dopo un certo tempo, non fossero riusciti a superare autonomamente una certa fase della risoluzione del problema. Ad esempio, a chi non riusciva a determinare il numero di allievi per comune sulla base dell'elenco dettagliato degli allievi, veniva fornita direttamente una tabella con il numero di allievi per comune. Ogni allievo doveva prendere nota degli aiuti utilizzati e inserirli in uno schema ad albero che fungeva da autovalutazione e da stimolo per un ulteriore apprendimento:

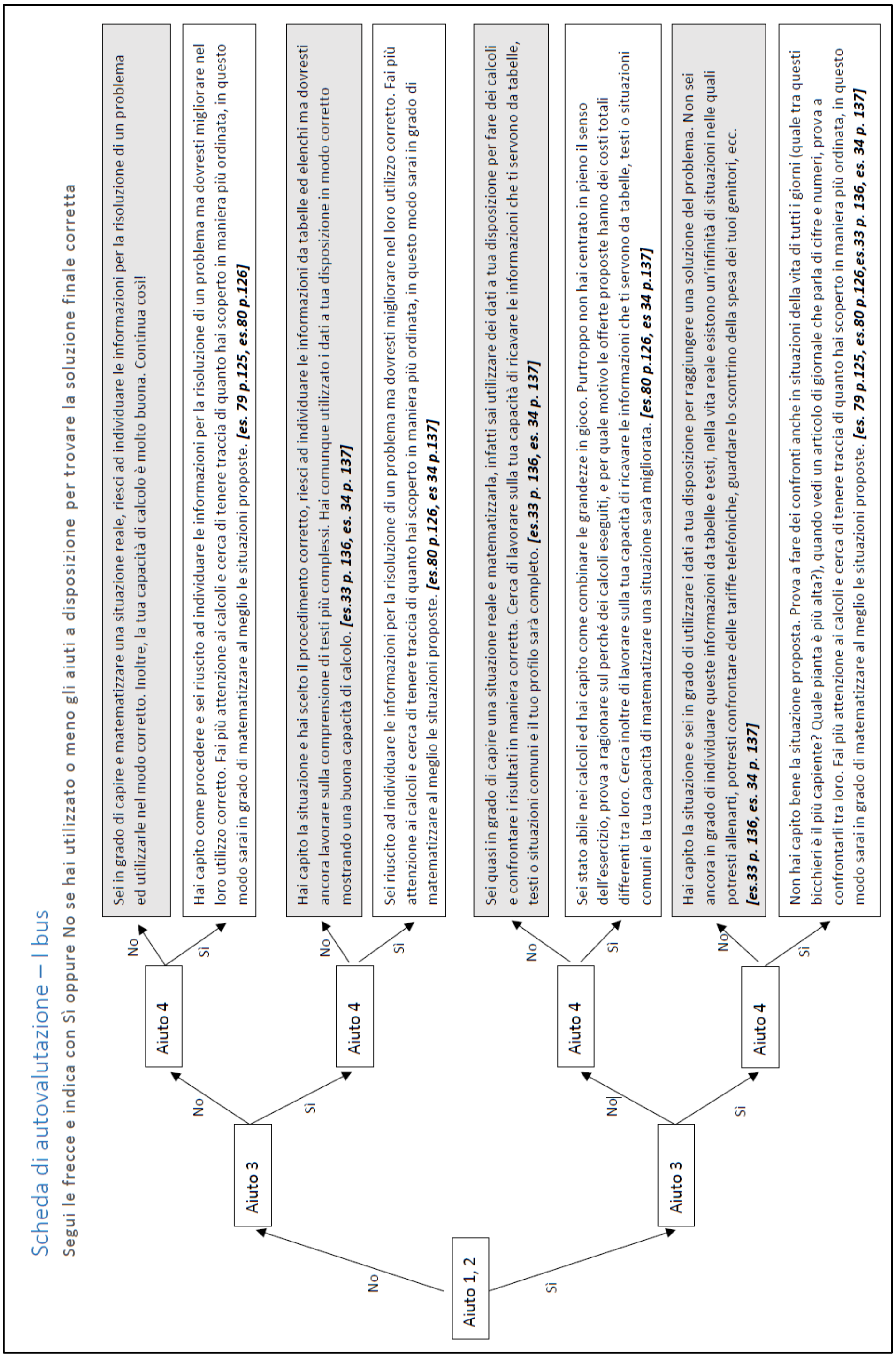


Figura 8
Schema valutativo (in funzione degli aiuti) dell'attività sugli abbonamenti Arcobaleno.

Gli aiuti utilizzati o meno dagli allievi hanno inoltre permesso al docente, a posteriori, di situare ogni allievo all'interno della rubrica tramite una corrispondenza tra aiuti utilizzati o meno e livelli di padronanza.

Nella seconda situazione, agli allievi è stato chiesto di riportare su carta le proprie stime e la scelta dello strumento di misura, in modo da poter valutare a posteriori le due dimensioni. Altre dimensioni sono state invece osservate direttamente dal docente durante l'attività e riportate in apposite tabelle.

7 Risultati

Al termine delle due situazioni, per ogni allievo era stato osservato almeno una volta il livello di padronanza in ciascuna dimensione della rubrica. Le seguenti rappresentazioni mostrano la rubrica nel suo intero e distribuiscono secondo la tonalità del riempimento il numero di allievi (in percentuale) che ha raggiunto un determinato livello di padronanza per la corrispondente dimensione in ciascuna classe considerata. Questo strumento dà al docente una visione immediata della distribuzione della classe e permette di effettuare paragoni tra un singolo allievo e il resto dei compagni.

	Dimensioni	Indicatori	Iniziale	Base	Intermedio	Avanzato
REALTÀ	PROCESSO DI MODELLIZZAZIONE	**È in grado di capire quali sono le caratteristiche utili per la modellizzazione di una situazione reale.**	Identifica le caratteristiche utili con ***l'ausilio di una guida***.	Identifica le caratteristiche utili autonomamente in ***contesti semplici e famigliari.***	Identifica ***autonomamente*** le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***.	Identifica le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***, capendo in maniera ***autonoma*** quali possono essere declinate.
		Date le caratteristiche è in grado di utilizzare un linguaggio adeguato.	Utilizza il linguaggio adeguato se ***aiutato***.	Utilizza ***autonomamente*** il linguaggio adeguato in ***situazioni semplici e conosciute.***	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse***.	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse*** fornendo delle ***proposte originali***.
MODELLO	REGISTRI	**Scelta e utilizzo del registro**	***Necessita di aiuti*** per scegliere un registro adeguato ed utilizzarlo correttamente in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato anche in ***situazioni inedite e complesse***.	Fa uso di un registro in maniera corretta, proponendo ***soluzioni originali*** in ogni situazione.
		Capacità di passare da un registro all'altro.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** con ***l'ausilio di aiuti***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici e conosciute*** in maniera ***autonoma.***	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma*** fornendo ***proposte originali***.
	RACCOLTA DATI E INFORMAZIONI	**Capacità di individuare informazioni pertinenti da una situazione data.**	Individua quali sono le informazioni per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** se ***guidato***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici e conosciute autonomamente.***	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni inedite e complesse***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema trovando ***nuovi metodi***.
		Ricavare dati da tabelle e grafici e testi.	Ricava i dati corretti in ***situazioni conosciute*** e ***semplici*** se ***aiutato***.	Ricava i dati utili in maniera ***autonoma*** da tabelle e grafici ***semplici*** e ***conosciuti***.	È in grado di ricavare dati corretti anche da tabelle e grafici più ***complessi.***	È in grado di ricavare dati corretti da tabelle e ***grafici nuovi e complessi*** in ***maniera autonoma.***
		Scelta dello strumento di misura adeguato.	Sceglie lo strumento adeguato in ***situazioni conosciute con aiuti***.	Sceglie in maniera ***autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni semplici*** e ***conosciute***.	Sceglie in maniera autonoma lo strumento adeguato in ***situazioni complesse***.	Sceglie in ***maniera autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni inedite.***
		Misurare	Effettua misure precise in ***situazioni semplici con l'ausilio di aiuti.***	Effettua misure precise in ***situazioni semplici***.	Effettua misure precise in ***situazioni complesse***.	Effettua misure precise anche in ***situazioni non convenzionali***.
	STIMA	**Stimare e approssimare i risultati attesi.**	È in grado di stimare i risultati in modo realistico con ***l'utilizzo di aiuti.***	È in grado di stimare i risultati in modo realistico ***autonomamente*** in ***situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso ***autonomamente in situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso in ***situazioni nuove***.
REALTÀ	CONTROLLO E REGOLAZIONE	**Valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti.**	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione ***con l'aiuto*** del docente.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in verifiche ***semplici*** e ***conosciute***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni complesse***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni nuove***.
		Capacità di correzione e regolazione.	Corregge ***con l'aiuto*** del docente.	Corregge in maniera ***autonoma***.	È in grado di correggere in ***situazioni più complicate***.	È in grado di correggere in ***situazioni mai viste***.

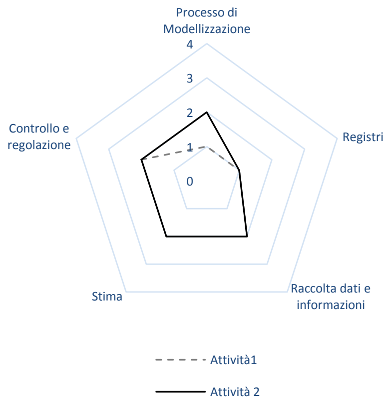
Figura 9
Distribuzione dei livelli di competenza della classe per scala di grigi (allievi di 1a della scuola media di Castione).

	Dimensioni	Indicatori	Iniziale	Base	Intermedio	Avanzato
REALTÀ	PROCESSO DI MODELLIZZAZIONE	**È in grado di capire quali sono le caratteristiche utili per la modellizzazione di una situazione reale.**	Identifica le caratteristiche utili con ***l'ausilio di una guida***.	Identifica le caratteristiche utili autonomamente in ***contesti semplici e famigliari.***	Identifica ***autonomamente*** le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***.	Identifica le caratteristiche utili in ***contesti non famigliari e complessi***, capendo in maniera ***autonoma*** quali possono essere declinate.
		Date le caratteristiche è in grado di utilizzare un linguaggio adeguato.	Utilizza il linguaggio adeguato se ***aiutato***.	Utilizza ***autonomamente*** il linguaggio adeguato in ***situazioni semplici e conosciute.***	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse***.	Utilizza il linguaggio adeguato in ***situazioni complesse*** fornendo delle ***proposte originali***.
MODELLO	REGISTRI	**Scelta e utilizzo del registro**	***Necessita di aiuti*** per scegliere un registro adeguato ed utilizzarlo correttamente in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato in ***situazioni semplici e conosciute***.	Sceglie e utilizza in maniera ***autonoma*** un registro adeguato anche in ***situazioni inedite e complesse***.	Fa uso di un registro in maniera corretta, proponendo ***soluzioni originali*** in ogni situazione.
		Capacità di passare da un registro all'altro.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** con ***l'ausilio di aiuti***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***situazioni semplici e conosciute*** in maniera ***autonoma.***	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma***.	È in grado di muoversi tra vari registri in ***maniera autonoma*** fornendo ***proposte originali***.
	RACCOLTA DATI E INFORMAZIONI	**Capacità di individuare informazioni pertinenti da una situazione data.**	Individua quali sono le informazioni per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici*** e ***conosciute*** se ***guidato***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni semplici e conosciute autonomamente.***	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema in ***situazioni inedite e complesse***.	Individua quali sono le informazioni utili per la risoluzione del problema trovando ***nuovi metodi***.
		Ricavare dati da tabelle e grafici e testi.	Ricava i dati corretti in ***situazioni conosciute*** e ***semplici*** se ***aiutato***.	Ricava i dati utili in maniera ***autonoma*** da tabelle e grafici ***semplici*** e ***conosciuti***.	È in grado di ricavare dati corretti anche da tabelle e grafici più ***complessi.***	È in grado di ricavare dati corretti da tabelle e ***grafici nuovi e complessi*** in ***maniera autonoma.***
		Scelta dello strumento di misura adeguato.	Sceglie lo strumento adeguato in ***situazioni conosciute con aiuti***.	Sceglie in maniera ***autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni semplici*** e ***conosciute***.	Sceglie in maniera autonoma lo strumento adeguato in ***situazioni complesse***.	Sceglie in ***maniera autonoma*** lo strumento adeguato in ***situazioni inedite.***
		Misurare	Effettua misure precise in ***situazioni semplici con l'ausilio di aiuti.***	Effettua misure precise in ***situazioni semplici***.	Effettua misure precise in ***situazioni complesse***.	Effettua misure precise anche in ***situazioni non convenzionali***.
	STIMA	**Stimare e approssimare i risultati attesi.**	È in grado di stimare i risultati in modo realistico con ***l'utilizzo di aiuti.***	È in grado di stimare i risultati in modo realistico ***autonomamente*** in ***situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso ***autonomamente in situazioni conosciute***.	È in grado di stimare i risultati in modo preciso in ***situazioni nuove***.
REALTÀ	CONTROLLO E REGOLAZIONE	**Valutare la verosimiglianza dei risultati ottenuti.**	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione ***con l'aiuto*** del docente.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in verifiche ***semplici*** e ***conosciute***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni complesse***.	È in grado di interpretare la validità della propria soluzione in ***situazioni nuove***.
		Capacità di correzione e regolazione.	Corregge ***con l'aiuto*** del docente.	Corregge in maniera ***autonoma***.	È in grado di correggere in ***situazioni più complicate***.	È in grado di correggere in ***situazioni mai viste***.

Figura 10
Distribuzione dei livelli di competenza della classe per scala di grigi (allievi della scuola media di Cadenazzo).

Evidentemente la tabella da sola non permette di dare le informazioni necessarie al docente per valutare in maniera efficace la manifestazione di competenza per un determinato processo cognitivo di ogni singolo allievo, per questo motivo è necessario confrontarsi con dei piccoli report, che permetteranno di tenere traccia del processo di apprendimento degli allievi e possono fornire dati utili per capirne la situazione attuale. Per ogni allievo sono stati riportati i livelli di padronanza in relazione ad una determinata dimensione, accompagnati da brevi annotazioni, il che permetterà di contestualizzare la valutazione in un secondo momento. Riportiamo quattro esempi di report prodotti per quattro allievi con livelli di padronanza diversi.

7.1 Risultati di Augusto



Note

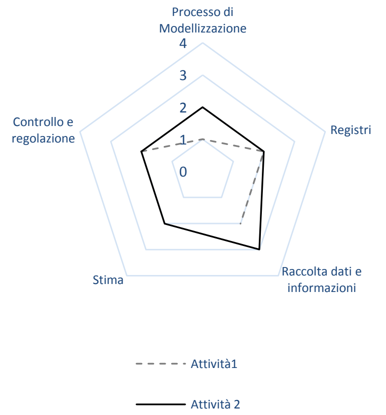
Attività1 – I bus
- Fatica a scegliere e utilizzare un registro corretto, deve chiedere ai compagni
- Ha faticato nella raccolta dati, anche in un'attività semplice come quella di individuare il numero di allievi provenienti da determinati comuni scegliendo da una lista
- Effettua le correzioni in maniera autonoma

Attività 2 – Le panchine
- Ha stimato in maniera non realistica (1 barattolo di vernice anziché 4)
- Non ha capito come rappresentare la panchina
- Sceglie lo strumento giusto e misura in maniera adeguata solo situazioni semplici

Tabella 2
Profilo personale di Augusto.

Il caso preso in esame rappresenta un allievo che si muove generalmente con fatica nelle varie situazioni di apprendimento mostrando una scarsa autonomia. Va detto che l'allievo si scoraggia facilmente e a volte non affronta i problemi con la dovuta concentrazione. I dati emersi in queste due attività rispecchiano l'andamento riscontrato anche in altri aspetti di competenza. In futuro bisognerà prevedere delle attività che possano consolidare le competenze base nelle varie dimensioni per poi cercare una progressione formativa in seguito.

7.2 Risultati di Barbara



Note

Attività1 – I bus
- Fatica a scegliere e utilizzare un registro corretto, deve chiedere ai compagni
- Ha faticato nella raccolta dati, ha saputo individuare il numero di allievi provenienti da determinati comuni scegliendo da una lista

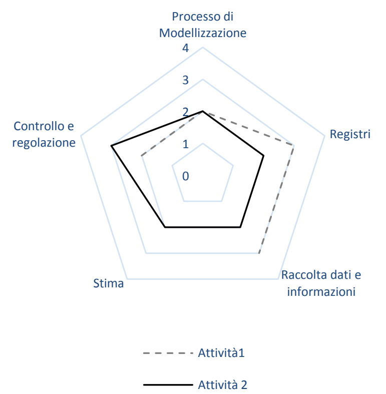
Non è richiesta una stima

Attività 2 – Le panchine
- Ha stimato in maniera non realistica (25 barattoli di vernice anziché 4)
- Ha scelto gli strumenti giusti e ha misurato in maniera quasi precisa

Tabella 3
Profilo personale di Barbara.

Questo profilo descrive il comportamento nelle due attività di un'allieva che raggiunge la sufficienza anche se con una continua ricerca di conferme e aiuti da parte del docente o dei compagni. La prima attività ha messo in difficoltà l'allieva a causa della struttura molto articolata della stessa, mentre nella seconda attività ha mostrato un miglioramento globale sia nella manifestazione di competenza nella disciplina che nella sicurezza in se stessa. Il passo successivo sarà rappresentato da un momento di lavoro individuale, dove si potranno testare le capacità dell'allieva di approcciarsi alle situazioni in modo autonomo.

7.3 Risultati di Claudio



Note

Attività1 – I bus
- Ha capito bene le consegne
- Incontra problemi nel combinare nuove informazioni testuali con le tabelle
- Fatica ad identificare le caratteristiche utili quando la situazione diventa più complessa (numero di corse durante un anno scolastico)

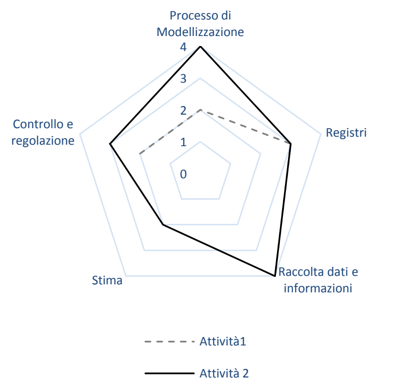
Non è richiesta una stima

Attività 2 – Le panchine
- Fatica a passare da un registro all'altro
- Stima in maniera realistica ma non precisa

Tabella 4
Profilo personale di Claudio.

L'allievo dimostra di saper lavorare autonomamente ma è più adatto a situazioni da affrontare su carta. La praticità della seconda situazione e la sua scarsa attitudine a lavorare con ordine nei materiali l'hanno messo in difficoltà. Le attività che seguiranno saranno progettate in modo da porre maggior accento sull'organizzazione del lavoro, favorendo lo sviluppo di un'attitudine in attività pratiche.

7.4 Risultati di Daniela



Note

Attività1 – I bus
- Ha capito bene le consegne
- Incontra problemi nel combinare nuove informazioni testuali con le tabelle

Non è richiesta una stima

Attività 2 – Le panchine
- Molto bene in tutte le situazioni
- Stima in maniera realistica ma non precisa

Tabella 5
Profilo personale di Daniela.

L'allieva ha un profilo molto buono in tutti gli aspetti di competenza della matematica. Anche nelle attività di modellizzazione ha mostrato una buona attitudine anche se di fronte a situazioni complesse ha faticato ad individuare informazioni da un testo. La seconda attività ha messo in evidenza una capacità di stima realistica ma non precisa. Le attività che seguiranno dovranno essere strutturate in modo da poter dare la possibilità all'allieva di districarsi in contesti sempre più inediti e complessi.

7.5 Visione generale

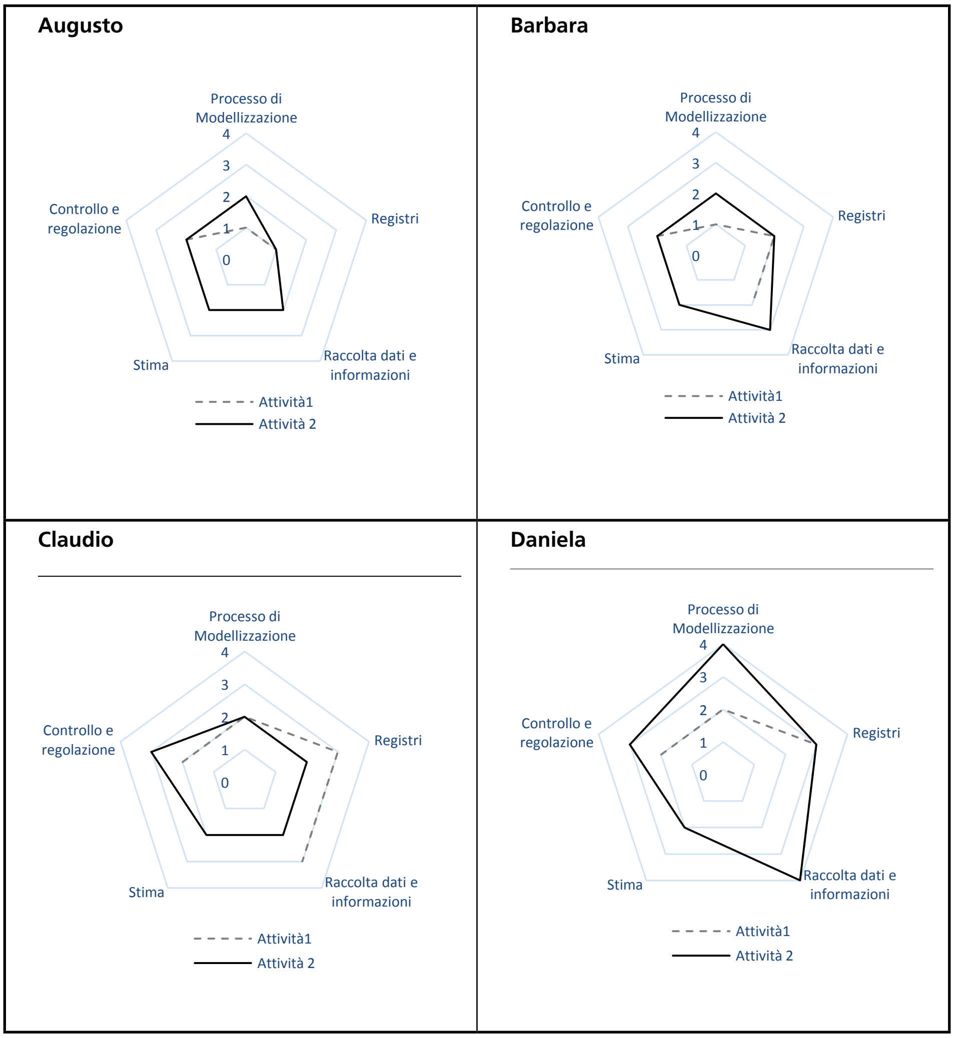


Tabella 6
Rappresentazione grafica della situazione di quattro allievi.

La tabella proposta mostra una visione generale delle quattro valutazioni fornite nelle pagine precedenti. In questa rappresentazione dei risultati si possono vedere in maniera immediata le varie situazioni in modo da poter capire dove un allievo è più carente rispetto ad altri o viceversa; in tal modo si fornisce al docente un ulteriore strumento per un'eventuale formazione di gruppi di lavoro in base ai vari criteri di scelta. Dai vari grafici si possono notare quelle dimensioni dove si sono verificati miglioramenti da parte degli allievi.

8 Qualità della rubrica

Castoldi (2016) definisce i seguenti criteri di qualità per una rubrica valutativa:

– **Validità:** la validità della rubrica aumenta in funzione della presenza di tutte le dimensioni delle competenze che si vogliono valutare.

Nel nostro caso, riteniamo che siano state esplorate tutte le dimensioni principali della modellizzazione, almeno per quanto riguarda le situazioni di modellizzazione che possono essere proposte nella scuola dell'obbligo.

– **Articolazione:** l'articolazione di una rubrica si caratterizza per la misura in cui gli indicatori sviluppano gli aspetti più importanti delle dimensioni. La presenza di ogni dimensione è rappresentata da più indicatori, ciò permette di descrivere in modo flessibile i diversi aspetti che si attivano nel momento di una modellizzazione.
  La nostra rubrica è stata testata su più situazioni e in ogni occasione gli indicatori hanno permesso di evidenziare gli aspetti salienti delle dimensioni.
– **Fattibilità:** una rubrica risulta essere fattibile se i livelli di competenza sono adeguati alle caratteristiche degli allievi.
  Data la generalità della nostra rubrica, i livelli di competenza si sono dimostrati adeguati alle caratteristiche degli allievi. Naturalmente ciò è valido solo a condizione che il docente progetti percorsi didattici adeguati alla classe.
– **Attendibilità:** se la rubrica fornisce punti di riferimento che permettono omogeneità nella valutazione da parte di più docenti si dice che allora è attendibile.
  La creazione della nostra rubrica è stata impostata sulla base delle competenze espresse nel Piano di studio, per questo motivo fornisce importanti punti di riferimento che permettono maggior uniformità nella valutazione da parte di docenti diversi. Per aumentare l'attendibilità della rubrica, come indicato in precedenza, sarebbe però opportuno specificare delle ancore.
– **Promozionalità:** la promozionalità di una rubrica si definisce in base alla capacità di evidenziare i progressi di un allievo, nel caso specifico si può vedere l'avanzamento di un allievo anche grazie alle rappresentazioni grafiche.
  I livelli di padronanza della nostra rubrica sono stati distribuiti in maniera omogenea e graduale, per questo motivo, se un allievo migliora in un aspetto, viene di regola posizionato in una cella più avanzata rispetto a quella precedente.

In generale, riteniamo dunque che la rubrica proposta soddisfi i criteri di qualità.

9 Conclusioni e prospettive

La realizzazione concreta di un Piano di studio basato sul paradigma delle competenze non è possibile senza l'adozione di modalità di progettazione e valutazione basate sullo stesso paradigma. In questo lavoro abbiamo proposto un esempio di creazione e utilizzo di una rubrica valutativa come strumento di progettazione e valutazione di situazioni problema nell'ambito della modellizzazione matematica. L'applicazione concreta degli strumenti sviluppati in due classi di prima media di due scuole medie del Canton Ticino ha dimostrato l'applicabilità e il valore aggiunto dell'approccio proposto e ha permesso di quantificare l'importante impegno richiesto al docente per l'implementazione di una valutazione per competenze. Speriamo che questa proposta possa ispirare e incitare altri docenti a sviluppare e sperimentare con consapevolezza i propri strumenti di progettazione e valutazione per competenze.

I limiti del presente lavoro sono dati dalla focalizzazione su un unico processo cognitivo in una particolare disciplina e su un'unica classe, sul numero ridotto di situazioni problema e sull'utilizzo della rubrica da parte dei creatori stessi.
In futuro sarà importante testare la rubrica su tempi più lunghi, con un numero maggiore di situazioni problema e sviluppare nuove rubriche per altre risorse o processi cognitivi e/o in altre discipline e/o contesti di formazione generale. In particolare, sarà interessante valutare l'impegno richiesto per definire una rubrica corredata di ancore e la sua effettiva utilizzabilità su larga scala, anche da parte di docenti che non hanno partecipato direttamente alla sua stesura.
Infine, considerando le specificità del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015), sarà importante studiare come la procedura adottata in questo lavoro sia effettivamente applicabile, con eventuali adattamenti, per strutturare un dispositivo di valutazione direttamente a partire dai traguardi di competenza esplicitati per la fine del terzo ciclo.

Bibliografia

Borioli, A. (2017). *Valutare per competenze in matematica. Il caso del processo cognitivo matematizzare e modellizzare* (Tesi di Bachelor, Dipartimento formazione e apprendimento, Supsi di Locarno). Disponibile in http://tesi.supsi.ch/1625/1/LD_borioli_athos.pdf

Castelnuovo, E. & Barra, M. (1977). *Matematica nella realtà.* Bollati Boringhieri editore, Torino.

Castoldi, M. (2016). *Valutare e certificare le competenze*. Carocci editore, Roma.

DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Dipartimento Educazione Cultura Sport, Repubblica e Cantone Ticino.

Malinvaud, E. (1964). *Méthodes statistiques de l'économetrie*, Paris: Dunod.

McTighe, J., & Ferrara, S. (1996). Performance-based Assessment in the Classroom; A Planning Framework. In R. E. Blum, J.A. Arter (eds.), *A Handbook for Student Performance Assessment in an Era of Restructuring*, Alexandra, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il "Portfolio"*. Firenze: La Nuova Italia.

Quarteroni, A. (1998). *La modellistica matematica e la fluidodinamica: una sintesi fra teoremi e mondo reale*. Politecnico di Milano.

Tamagni, I. (2017). *Valutare per competenze in matematica. Il caso del processo cognitivo matematizzare e modellizzare* (Tesi di Bachelor, Dipartimento formazione e apprendimento, Supsi di Locarno). Disponibile in http://tesi.supsi.ch/1670/1/12912_Igor_Tamagni_Valutare_per_competenze_in_matematica_291161_1224034873.pdf

Wiggins, G., & McTighe, J. (2007). *Fare progettazione. La pratica di un percorso didattico per la comprensione significativa*. Roma: LAS [ed. or. 1998].

Autori/ Athos Borioli*, Alberto Piatti°, Igor Tamagni˙

*Scuola Media di Castione – Svizzera

°Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Svizzera

˙Scuola Media di Cadenazzo – Svizzera

athos.borioli@edu.ti.ch, alberto.piatti@supsi.ch, igor.tamagni@edu.ti.ch

Corrispondenza biunivoca “a tavolino” e nell’attività motoria. Sviluppo di abilità matematiche legate al movimento corporeo[1]

Biunivocal correspondence and motor activity. Development of mathematical abilities related to body movement

Sofia Franscella
Scuola dell’infanzia di Monte Carasso, Svizzera

Sunto / In questo lavoro vengono mostrati i risultati di un’indagine sulle strategie spontanee e le difficoltà mostrate da allievi dell’anno obbligatorio 2 di scuola dell’infanzia durante lo svolgimento di compiti di corrispondenza biunivoca realizzati “a tavolino” con diverse modalità. In particolare, si rileva come attraverso attività motorie mirate, presentate alla classe sotto forma di gioco, sia possibile migliorare le prestazioni degli allievi in attività di corrispondenza biunivoca anche “a tavolino”.

Parole chiave: corrispondenza biunivoca; strategie risolutive; difficoltà; collezioni 3D - non allineate - mobili e fisse; attività motoria.

Abstract / This work shows the results of a survey on spontaneous strategies and the difficulties shown by pupils of pre-school carrying out biunivocal correspondence tasks in different ways. In particular, it is noted that through targeted motor activities, presented to the classroom as a game, it is possible to improve the performance of the pupils in biunivoca matching activities also “at the table”.

Keywords: biunivocal correspondence; solving strategies; difficulty; collections 3D – not aligned - movable and fixed; motor activity.

1 Introduzione

Già a partire dalla scuola dell’infanzia gli allievi dovrebbero acquisire diverse competenze matematiche in continuità con la scuola elementare che permettono loro di svolgere attività numeriche, come: la conta orale, l’enumerazione, la corrispondenza biunivoca, il conteggio e la rappresentazione delle cifre ecc. Nella scuola dell’infanzia, così come in altri ordini scolastici, ci sono però dei bambini che hanno delle difficoltà a sviluppare determinate competenze matematiche (Santinelli & Sbaragli, 2017).
Nello specifico, nella sezione oggetto della sperimentazione, durante la conta mattutina alcuni bambini non facevano corrispondere ad ogni bambino una sola parola-numero, non riuscendo a coordinare la parola-numero con il gesto (toccare la testa)

1. Lavoro di Diploma Franscella, S. (2016/2017). Corrispondenza biunivoca “a tavolino” e nell’attività motoria. Bachelor of Arts in pre-primary education. Dipartimento formazione e apprendimento. Relatrici: Sbaragli, S., & Santinelli, L.

e, di conseguenza, la quantità di bambini contati non corrispondeva con il numero effettivo. Oppure quando dovevano contare una serie di oggetti, faticavano a separare gli oggetti contati da quelli non ancora contati. Queste loro difficoltà potevano essere ricondotte all’incapacità di effettuare correttamente una corrispondenza biunivoca tra bambino/oggetto e parola/numero.
Recenti ricerche si sono focalizzate sul ruolo primario e decisivo delle azioni del corpo e dei gesti, come fonte diretta per l’acquisizione di competenze matematiche. Attraverso le attività motorie il bambino stimola alcune aree del cervello che favoriscono migliori prestazioni a livello dell’attenzione e della concentrazione, necessarie per affrontare i compiti scolastici (Ricchiardi & Coggi, 2011, citato da Nota, 2015, p. 34).

> «Un allievo che non riesce a organizzarsi, pianificare, aggiornare la memoria di lavoro, passare da un compito all’altro e inibire comportamenti impulsivi, non è in grado di mantenere l’attenzione su un compito in classe e riuscire a livello accademico».
>
> (St Clair-Thompson & Gathercole, 2006, citato da Santinelli & Andreazzi, 2011, p. 3)

Le esperienze che coinvolgono il movimento migliorano la capacità del cervello di elaborare l’informazione, di potenziare il ricordo in relazione alle esperienze e di incrementare la comprensione dei concetti (Ricchiardi & Coggi, 2011).
Partendo da tale assunto, gli obiettivi della sperimentazione sono principalmente due:

- verificare quali sono le strategie che adottano 7 bambini dell’anno obbligatorio 2 (5-6 anni) per risolvere due situazioni di corrispondenza biunivoca “a tavolino”, formate da due collezioni di oggetti in 3D (pecore e ciuffi d’erba) – non allineate – mobili e successivamente fisse e le eventuali difficoltà che emergono (prima fase);
- indagare se, dopo aver esercitato delle attività motorie sulla corrispondenza biunivoca (seconda fase), i bambini che hanno riscontrato delle difficoltà nelle attività “a tavolino” migliorano le loro prestazioni nella riproposta della stessa situazione (terza fase).

2 Quadro teorico

2.1 Corpo e numeri

«Come affermano le scienze corpo e mente sono strettamente connessi e l’intelligenza non ha sede solo nella testa, ma anche nelle mani, nei sensi, nella corporeità, nell’emozionalità e nel movimento» (Ravelli, 2010, p. 12).
Tuttavia, fino al secolo scorso, le azioni del corpo (come i gesti), l’uso di oggetti e l’attività linguistica non sono stati considerati come fonte diretta per l’acquisizione di competenze matematiche. Solamente recenti ricerche si sono focalizzate sul ruolo primario e decisivo delle azioni del corpo, dei gesti, della lingua, degli strumenti tecnologici nella costruzione del sapere elementare e astratto degli allievi (Arzarello & Robutti, 2001; Nemirovsky, 2003; Nemirovsky & Borba, 2004; Radford, 2005, citato da Bardini et al., 2005, p. 255).

Tra queste attuali teorie vi è quella dell'*embodiment cognition* (Lakoff & Núnez, 2005) e quella *dell'oggettivazione della conoscenza* (Radford, 2008). *L'embodiment cognition* è una prospettiva teorica che riconsidera il corpo all'interno della cognizione ed ha evidenziato come «i nostri processi cognitivi (idee, pensieri) dipendano dall'interazione tra la mente e il nostro corpo» (Faschilli, 2011).

Nell'esempio aritmetico Lakoff e Núnez «ipotizzano che ci siano delle relazioni regolari a livello neurale tra operazioni fisiche senso-motorie, come il togliere oggetti da una collezione, e operazioni aritmetiche, come la sottrazione di un numero da un altro» (Lakoff & Núnez, 2005, citato da Robutti, 2006, p. 169) e pensano che i bambini apprendano in età precoce concetti derivanti da esperienze aritmetiche senso-motorie, prima di qualsiasi esperienza nell'aritmetica formale.

Anche la teoria dell'*oggettivazione della conoscenza* (Radford, 2008) evidenzia l'importanza dell'apprendimento percettivo-motorio, e coinvolge il contesto (situazioni in classe) e la cultura nel definire lo sviluppo delle competenze matematiche. La teoria dell'oggettivazione parte dall'idea che, appena nasciamo, siamo confrontati sin da subito con un mondo pieno di oggetti concreti e ideali. In questa teoria, la conoscenza viene concettualizzata come il processo di riflessioni e di azioni (ad es. contare usando le parti del corpo). Diversamente dagli approcci mentali cognitivi, questa teoria considera il pensiero non come qualcosa che si costruisce soltanto "nella testa", ma come composto «dal linguaggio (interno ed esterno), dalle forme oggettivate di immaginazione sensoriale, dai gesti, dalla tattilità e dalle nostre azioni effettive con artefatti culturali» (Radford, 2011, p. 33).

In queste prospettive teoriche la componente motoria e la sua coordinazione con le altre componenti acquisisce un ruolo estremamente importante.

Si supera quindi quella visione in cui mente e corpo sono disgiunti, dove quello che si fa con il proprio corpo è ritenuto meno speciale rispetto alla risoluzione di problemi che si eseguono principalmente attraverso l'utilizzo della mente, del linguaggio o di un qualsiasi sistema simbolico astratto.

L'attività di movimento permette di trarre beneficio a livello fisico, sociale, mentale e presenta anche un investimento per quel che riguarda il rendimento scolastico e il funzionamento cognitivo (Santinelli & Andreazzi, 2011, p. 2). Gli stessi autori affermano che se si lavora sul corpo si ottengono prestazioni migliori a livello delle funzioni esecutive (FE).[2] Il fatto di riuscire ad incrementare le FE porta a migliorare le capacità di ragionamento (Diamond, 2012; Karbach & Kray, 2009; Kray, Eber & Karbach, 2008) e porta ad un miglioramento anche in queste aree: matematica, scienze, materie letterarie e comprensione del testo, a prescindere anche dal QI (Holmes, Adams & Hamilton, 2008; St Clair-Thompson & Gathercole, 2006; Gathercole & Alloway, 2008; Blair & Razza, 2007; Bull & Scerif, 2001).

2.2 Corrispondenza biunivoca

In questo lavoro la corrispondenza biunivoca è stata scelta come argomento matematico da indagare; si tratta di un'operazione di pre-calcolo con la quale il bambino si trova confrontato quotidianamente. Ad esempio, nel ballo *c'è un maschio per ogni femmina*, quando si apparecchia la tavola *c'è un piatto per ogni tovagliolo* ecc.

2. Le FE abbracciano una vasta gamma di funzioni della mente e regolano i processi di pianificazione, di controllo e coordinazione del sistema cognitivo. Le FE sono allenabili e responsabili di inibire pensieri e comportamenti di routine, adattando, pianificando, attraverso delle strategie, le proprie azioni in base alla situazione.

La corrispondenza biunivoca consiste quindi nel saper associare ad ogni elemento di un insieme A uno e un solo elemento di un altro insieme B e viceversa (**Figura 1**). Si tratta di una pratica che risale a quando l’uomo ha sentito il bisogno di usare i numeri per esigenze di contabilità, concrete e utilitaristiche (ad esempio per gli scambi commerciali), in una forma non astratta come la nostra attuale.

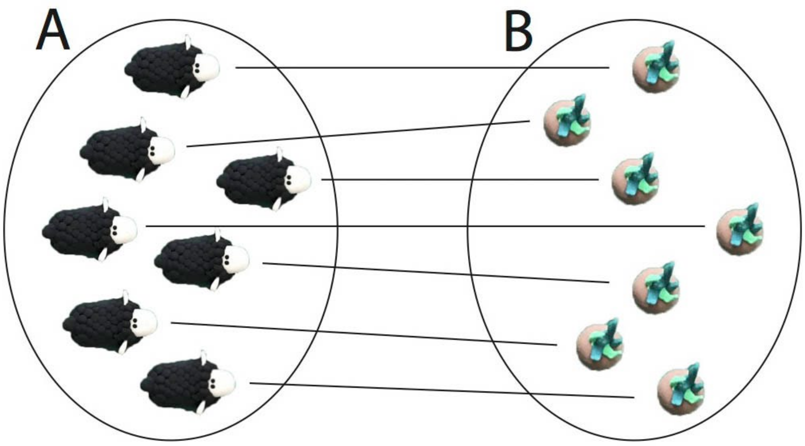


Figura 1
Esempio di corrispondenza biunivoca.

Per quanto riguarda il bambino e il suo approccio con i numeri, Piaget si sofferma sul concetto di conservazione della quantità. Egli sostiene che i bambini fino a 6 e 7 anni possono avere delle difficoltà di fronte al compito di mettere in corrispondenza biunivoca due insiemi. In particolare, nell’esperimento che riportiamo, egli prende in considerazione oggetti eterogenei, ma complementari (uovo-portauovo) (Vergnaud, 1994, p. 96). Dinanzi a queste due collezioni poste una di fronte all’altra (**Figura 2**), in cui non vi è alcuna difficoltà per stabilire visivamente la corrispondenza biunivoca, egli ha preso come campione dei bambini di 5 e 6 anni, i quali non hanno riscontrato alcuna difficoltà nel rispondere che “ce n’è la stessa quantità”. La loro risposta è basata apparentemente sulla corrispondenza tra gli elementi delle due file.

Figura 2
Due collezioni: uova e portauovo messe una di fronte all’altra.

Se, invece, vengono distanziati gli oggetti di una delle due collezioni sotto gli occhi del bambino (**Figura 3**), quest’ultimo si trova in difficoltà, non rendendosi conto che «la quantità di una certa sostanza non cambia al cambiare della sua forma» (Gray, 1998, citato da Miceli, 2003/04), poiché non si è ancora appropriato del principio della conservazione. Secondo Piaget, solo dopo i 6 o 7 anni il bambino si accorge che non è stato né aggiunto né tolto nulla dalle due collezioni.
Questo esperimento evidenzia che mettere in corrispondenza biunivoca due insiemi non sia così scontato per un bambino di 5 o 6 anni e questa difficoltà nel riconoscere il principio di conservazione gli impedisce di «considerare la grandezza di un insieme

indipendentemente dalla configurazione spaziale assunta dall'insieme» (Vergnaud, 1994, p. 97).

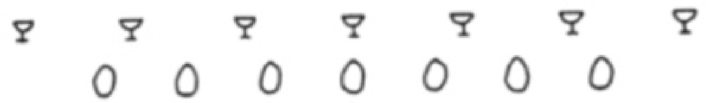


Figura 3
Oggetti distanziati di una delle due collezioni.

Di fronte a due insiemi disposti in modo non allineato subentra un'ulteriore difficoltà «quella dell'esplorazione completa e senza ripetizione degli elementi di ciascun insieme, esplorazione che presuppone una regola sistematica di cui i bambini piccoli sono incapaci» (Vergnaud, 1994, p. 97). L'equivalenza quantitativa di due insiemi costituiti dallo stesso numero di elementi è un concetto che il bambino costruisce progressivamente, grazie al suo sviluppo intellettuale.
La teoria di Piaget sullo sviluppo intellettuale (che coinvolge anche gli esperimenti sulla conservazione della quantità) ha sollecitato notevole interesse a livello mondiale, ed è stata il punto di partenza di numerose ricerche, molte delle quali finalizzate a confermare o a mettere in discussione le sue idee. I lavori di diversi autori, come Donaldson, McGarrigle, Melher e Bever, e Dehane, creano vie alternative in merito agli studi riguardanti l'apprendimento del concetto di conservazione della quantità. Ad esempio, gli psicologi Donaldson e McGarrigle (1974) mettono in luce alcune contraddizioni della teoria di Piaget, sostenendo che quest'ultimo nei suoi esperimenti trascuri il ruolo del linguaggio e della familiarità del contesto (vedi l'utilizzo del materiale nella sperimentazione), elementi importanti che favoriscono il bambino a interpretare la domanda nel modo inteso dallo sperimentatore, aiutandolo a trovare la soluzione giusta al problema. I due autori hanno infatti riscontrato che «i bambini possono sbagliare a causa di incompetenze conversazionali, dal momento che le domande presentate nei diversi compiti richiedono di focalizzare l'attenzione sia su informazioni quantitative che percettive e spaziali» (Siegal, 1991a, 1991b; McGarrigle & Donaldson, 1975, citato da Lucangeli & Patrizio, 2002, p. 703).
«L'errore nelle risposte può dunque essere dovuto non soltanto alla mancata comprensione degli aspetti quantitativi, ma anche ad ambiguità percettive e spaziali» (Lucangeli et al., 2002, p. 703). Anche Mehler e Bever (1967) affermano che, semplificando la domanda e utilizzando un materiale più familiare e stimolante (M&Ms al posto delle biglie), i bambini sono in grado di quantificare gli elementi presenti nei due insiemi, indipendentemente dalla loro disposizione spaziale. Mehler e Bever pongono inoltre l'accento sull'importanza di non ripetere due volte la stessa domanda, poiché la ripetizione da parte dell'intervistatore potrebbe indurre il bambino a cambiare la propria risposta.
Queste critiche alle idee di Piaget sono sostenute anche da ricerche nell'ambito delle neuroscienze. Dehaene (2000, p. 45), nei suoi studi, dimostra che «il cervello del bambino possiede un meccanismo di comprensione delle quantità numeriche che lo guida nell'apprendimento della matematica. Il bambino sarebbe in grado di comprendere certi aspetti dell'aritmetica sin dal primo anno di vita».
Questi studi potrebbero indicare che anche il concetto di corrispondenza biunivoca è presente nei bambini già molto presto, a prescindere dall'acquisizione della sequenza verbale delle parole che esprimono i numeri (Gelman & Gallistel, 1978). Il

bambino all’età di 2 anni inizia già spontaneamente ad applicare la corrispondenza biunivoca di fronte a collezioni di oggetti tridimensionali complementari, come ad esempio abbinare l’animale alla sua casa, distribuire un giocattolo ad ogni persona ecc. Da uno studio di Alibali e DiRusso (1999) è risultato che il gesto aiuta i bambini a realizzare la corrispondenza biunivoca: da un lato li aiuta nell’associare un elemento dell’insieme alla parola-numero e dall’altro li aiuta nel tener traccia degli elementi contati. I bambini in età prescolare contano con più precisione se usano il gesto e se quest’ultimo tocca l’oggetto (Fuson & Hall, 1983; Gelman & Meek, 1983; Saxe & Kaplan, 1981; Shaeffer, Eggleston & Scott, 1974). Per far ciò entrano quindi in gioco competenze visuo-spaziali, visuo-motorie, esecutive e di coordinazione.

3 Domande di ricerca

Le domande che hanno indirizzato la sperimentazione sono le seguenti:
D1. Quali strategie adottano i bambini dell’anno obbligatorio 2 (5-6 anni) per effettuare una corrispondenza biunivoca di due collezioni differenti (pecore e ciuffi d’erba): non allineate – 3D – mobile (fase 1A) e non allineate – 3D – fisse (fase 1B)?
D2. Emergono difficoltà nella risoluzione delle fasi 1A e 1B? Di che tipo sono? I bambini che hanno difficoltà individuano strategie diverse rispetto a coloro che non le hanno?
D3. Allenare la corrispondenza biunivoca attraverso il corpo (fase 2) può essere d’aiuto per quei bambini che hanno riscontrato delle difficoltà di fronte a situazioni di corrispondenza biunivoca “a tavolino”?

4 Metodologia di ricerca

Questo lavoro è basato su una ricerca empirica qualitativa che fonda le sue conclusioni sull’osservazione diretta o indiretta dei fatti.
La sperimentazione è stata effettuata tra febbraio ed aprile 2017 nella sezione di scuola dell’infanzia di Monte Carasso (Canton Ticino, Svizzera), che conta un totale di 20 bambini.

4.1 Fasi della sperimentazione

Prima di mettere in pratica la sperimentazione, è stato svolto un pre-test in un’altra sezione della stessa scuola per verificare la fattibilità dell’intervento, permettendo di apportare utili modifiche alla progettazione. Questa fase preliminare è risultata molto importante, in quanto ha permesso di capire come la formulazione delle domande poste, la scelta delle caratteristiche delle due collezioni e l’orientamento di quest’ultime sulla plancia possono influenzare notevolmente la risoluzione del compito.

La sperimentazione ha previsto le seguenti tre fasi:

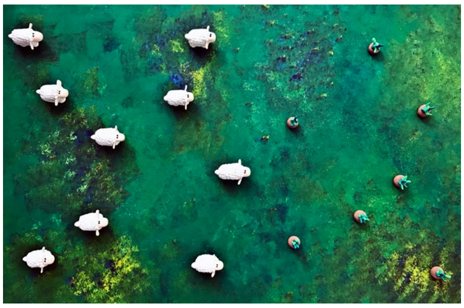
– Fase 1: due attività a “tavolino” sulla corrispondenza biunivoca che si differenziano per le variabili riportate in **Tabella 1**.

Nella fase “a tavolino” (fase 1) sono stati coinvolti solamente i 7 bambini dell’anno obbligatorio 2. Infatti, le abilità richieste per il primo tipo di attività si discostano dalle competenze dei bambini dell’anno facoltativo, mentre dei 5 bambini dell’anno obbligatorio 2 ben 3 non conoscevano bene la lingua italiana e avrebbero potuto riscontrare delle difficoltà nella comprensione del compito. I bambini dell’anno obbligatorio 2 non avevano mai svolto delle attività strutturate sulla corrispondenza biunivoca, quindi le strategie che hanno messo in atto nella prima fase sono state il frutto delle loro esperienze personali.

3

Tabella 1
Variabili sperimentali fase 1A e fase 1B.

VARIABILI	FASE 1A (**Figura 4**)	FASE 1B[3] (**Figura 5**)
Mobilità	Collezione 3D mobile	Collezione 3D fissa
Distribuzione spaziale	Non allineata	Non allineata e in modo diverso rispetto alla fase 1A
Colore	Pecore bianche	Pecore nere
Numero	9 pecore e 7 ciuffi d’erba	7 pecore e 9 ciuffi d’erba



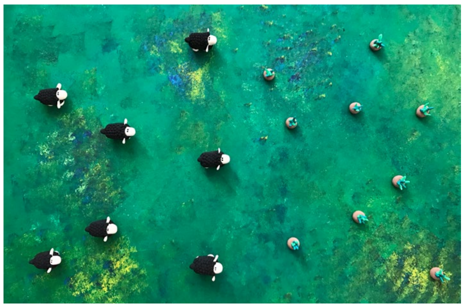


Figura 4
Configurazione fase 1A.

Figura 5
Configurazione fase 1B.

Le diverse variabili scelte in questa fase hanno permesso non solo di differenziare le due sperimentazioni agli occhi del bambino, ma anche di far attivare strategie risolutive diverse.

– Fase 2: attività motorie (**Figura 6**). Terminata la fase “a tavolino”, viene chiesto ai bambini di svolgere, per almeno due volte a settimana durante i mesi di marzo e aprile, delle attività sulla corrispondenza biunivoca in cui è coinvolto l’uso del corpo.
– La fase motoria (fase 2) è stata estesa a tutta la sezione e l’attenzione si è focalizzata principalmente sui bambini che hanno riscontrato delle difficoltà nella fase 1.

3. Nella fase 1B viene cambiato il colore delle pecore e viene invertito il numero tra pecore e ciuffi d’erba, in quanto si vuole rendere evidente ai bambini il cambiamento di situazione.

Figura 6
Attività di movimento.

– Fase 3: a conclusione della sperimentazione, vengono riproposte le attività "a tavolino" solamente ai bambini che hanno riscontrato delle difficoltà nelle due situazioni iniziali (fase 1A, fase 1B o in entrambe), in modo tale da identificare se ci sono stati degli sviluppi, anche solo nella scelta delle strategie adottate.

4.2 Strumenti di raccolta dati

Per la raccolta dei dati sono stati utilizzati una videocamera, una griglia osservativa (Allegato 1), una macchina fotografica e un diario di bordo.

Fasi 1 e 3: attività "a tavolino"
Grazie alla videocamera è stato possibile per la sperimentatrice dedicarsi all'osservazione dei bambini in fase d'esecuzione, senza doversi interrompere per annotare le strategie messe in atto. Le videoregistrazioni hanno permesso, inoltre, di cogliere in un secondo momento i tipi di difficoltà emersi e gli aspetti verbali e non verbali (movimenti e gesti).
La griglia osservativa è stata utile per osservare, sulla base di precisi indicatori, quali strategie hanno adottato i bambini e quali difficoltà sono emerse.
La macchina fotografica ha permesso di scattare le immagini del risultato finale del lavoro di ogni bambino. Le immagini ottenute sono state molto utili nella fase di analisi dei dati.

Fase 2: attività motoria
Anche in questa fase è stata utilizzata una videocamera e una macchina fotografica. Inoltre, è stato stilato giornalmente un diario di bordo, che ha permesso di raccogliere liberamente informazioni sulle strategie d'azione dei bambini e sulle loro difficoltà. Grazie a questo strumento è stato possibile registrare comportamenti ripetuti, eventuali difficoltà e sviluppi nelle strategie adottate.

5 Realizzazione dell'intervento

Introduzione
La prima fase "a tavolino" (fase 1) è stata introdotta attraverso la lettura *Bubal e le sue pecore*, storia tratta dal libro *La grande invenzione di Bubal* di Anna Cerasoli (2012) e adattata al contesto della scuola dell'infanzia. La storia è servita a riportare

i bambini nell’ambientazione primitiva degli uomini delle caverne, che non conoscevano i numeri e non sapevano contare. In questa prima fase i bambini sono potuti entrare in contatto con gli oggetti delle due collezioni (pecore e ciuffi d’erba) che poi hanno ritrovato nelle fasi 1 e 3 (**Figura 7**). In questo modo essi hanno potuto familiarizzare anticipatamente con gli oggetti.

Figura 7
Sperimentazione del materiale.

Fase 1A
Ogni allievo, all’inizio della fase 1, indossa la fascia del “bambino primitivo” e, così come il personaggio Bubal, non potrà fare ricorso ai numeri e al conteggio durante la risoluzione del compito. La maestra comunica al bambino qual è l’impresa che deve svolgere: aiutare Bubal a scoprire se ogni pecora ha un ciuffo d’erba da mangiare.
Una volta seduto di fronte alla plancia (75 cm × 50 cm) con sopra disposti le pecore e i ciuffi d’erba, vengono poste al bambino tre domande per coinvolgerlo in un’attività di previsione: “Secondo te ogni pecora ha un suo ciuffo d’erba da mangiare?”, “Sarà facile o difficile scoprirlo?”, “Come faremo a scoprirlo?”.
Far formulare delle ipotesi prima di agire, infatti, è utile per sviluppare il pensiero creativo (inventiva, flessibilità nell’affrontare situazioni problematiche) e per «identificare almeno una possibile ipotesi risolutiva» (DECS, 2015, p. 39).

Il bambino, dopo aver fatto le sue previsioni, riceve le seguenti raccomandazioni: “Ricordati che indossi la fascetta quindi non conosci i numeri e non sai contare. Sulla plancia puoi fare quello che vuoi e le pecore e i ciuffi d’erba non sono attaccati, puoi usare tutto quel materiale (viene indicato il tavolo sul quale sono presenti: fogli, penne, cannucce, cotton fioc, fili con forbici, pietre, pennarelli, legnetti, materiali delle costruzioni) o puoi trovare un modo che preferisci tu!”.
A questo punto il bambino è libero di agire come meglio crede. Durante questa fase la docente assume il ruolo di osservatrice partecipante, nel senso che se il bambino è bloccato (ad esempio si guarda attorno) prova a stimolarlo, riproponendo la domanda in esame e riformulando le indicazioni iniziali. L’intento della sperimentatrice è quello di intervenire il meno possibile nella fase d’azione e di stare in disparte, in modo tale da non influenzare attraverso lo sguardo, i gesti e le espressioni facciali l’operato del bambino.

Quando l'allievo ha concluso il suo intervento viene riproposta la domanda iniziale: "Allora ogni pecora ha un suo ciuffo d'erba da mangiare?".

Fase 1B
La fase 1B è stata svolta il giorno successivo. Essa è strutturata in maniera analoga alla fase 1A, ma questa volta è stato fatto notare ai bambini che le pecore e i ciuffi d'erba erano attaccati e che quindi la situazione era diversa dalla precedente.

Fase 2
In questa fase sono state proposte 9 attività motorie finalizzate a favorire lo sviluppo delle competenze legate alla corrispondenza biunivoca. Qui di seguito (**Tabella 2**) vengono riportati i titoli delle attività proposte con le variabili implicate. La descrizione di ogni attività è riportata nella **Tabella 3** dell'**Allegato 2**.
Ciascuna di esse è stata ripetuta almeno due volte. Ogni attività ha previsto una o più varianti, utili ad aumentare progressivamente la difficoltà dell'esperienza. Sono inoltre state riproposte anche delle situazioni analoghe alla fase 1 (ripetute almeno una volta da ogni allievo). Ulteriori attività che sono state svolte una volta soltanto sono riportate nella **Tabella 4** dell'**Allegato 2**.
Le attività proposte considerano le seguenti variabili: mobilità degli oggetti degli insiemi considerati (collezione 3D mobile, o mobile/fissa, o fissa), distribuzione spaziale delle collezioni (non allineate, salvo un caso), colore o figure (associare elementi dello stesso colore o della stessa figura, associare elementi non dello stesso colore o della stessa figura), numero di bambini coinvolti e loro suddivisione in gruppi.
Gli allievi sono stati invitati a realizzare corrispondenze biunivoche bambino-bambino, bambino-cerchio, bambino-palla oppure utilizzando diversi oggetti (cerchio-palla, cerchio-palla dello stesso colore, cerchio-cerchio e figura-figura).

ATTIVITÀ	COLLEZIONI
1. Pastore, pecore e ciuffi d'erba	NON ALLINEATE-3D-MOBILI CB*: bambino-bambino; figura-figura
2. Pecore e ciuffi d'erba: attività analoga alla fase 1A	NON ALLINEATE-3D-MOBILI CB: bambino-bambino; figura-figura
3. Le pecore stanche	NON ALLINEATE-3D-MOBILI CB: bambino-cerchio
4. Leoni e tigri	NON ALLINEATE-3D-MOBILI CB: bambino-bambino
5. Conigli e uova	NON ALLINEATE-3D-MOBILI CB: palla-cerchio; palla-cerchio dello stesso colore
6. Bruchi e scimmie	NON ALLINEATE-3D-MOBILI/FISSE CB: bambino-bambino e bambino-cerchio; figura-figura
7. Le pecore danzanti	NON ALLINEATE-3D-MOBILI/FISSE CB: bambino-bambino; figura-figura
8. Giraffe e formiche	NON ALLINEATE-3D-FISSE CB: palla-cerchio e bambino-bambino; cerchio-cerchio
9. Pecore e ciuffi d'erba incollati al suolo: attività analoga alla fase 1B	NON ALLINEATE-3D-FISSE CB: bambino-bambino
*CB: corrispondenza biunivoca	

Tabella 2
Attività motorie.

Fase 3

In base alle difficoltà emerse nella fase 1 e dopo aver svolto la fase 2:

– 2 bambini su 7 sono stati nuovamente sottoposti a svolgere l’attività della fase 1A;
– 5 bambini su 7 hanno svolto ancora l’attività della fase 1B.

La ripetizione delle proposte delle fasi 1A e 1B verranno chiamate fase 3A e fase 3B, rispettivamente.

6 Risultati e risposte alle domande di ricerca

Nella tabella sottostante (Tabella 3) si evidenzia la/le strategia/e usata/e dai bambini per risolvere le fasi 1 o 3, la riuscita del compito e il tipo di difficoltà. È stata inoltre aggiunta una colonna sull’uso o meno della voce durante gli spostamenti delle due collezioni, in quanto anche quest’ultima può essere un mezzo che aiuta nella risoluzione del compito. Grazie a questa tabella è stato possibile classificare e quantificare le strategie adottate per singolo allievo.

La prima caratteristica che emerge è che, di fronte al compito che ha coinvolto le due collezioni mobili (fase 1A), 5 bambini su 7 hanno svolto il compito correttamente e che la strategia A (spostare solo una delle due collezioni) è quella usata con più ricorrenza (4 bambini su 7). Tutti e 4 hanno utilizzato la sottocategoria “mettere un elemento vicino all’altro” ed hanno svolto il compito correttamente.

C’è stato solamente un bambino (Ja.) che ha usato due strategie diverse per risolvere il compito (“spostare le due collezioni” (B) e “indicare gli elementi senza toccarli” (D)), riuscendo con successo nella risoluzione. Spicca anche un dato interessante durante lo spostamento delle due collezioni: 4 bambini su 7 hanno utilizzato la voce come mezzo esplicativo delle loro azioni e 3 di loro hanno risolto il compito correttamente. In questa fase non vi sono state particolari difficoltà, se non quella di Y. che ha associato gli elementi in maniera corretta ma ha risposto alla domanda del compito in maniera sbagliata (D5) e W. che invece non ha trovato alcuna strategia. Inoltre 3 bambini su 7 sono caduti nella tentazione di contare gli elementi per confrontare le quantità (D7), ma 2 di loro hanno comunque svolto il compito correttamente trovando una strategia confacente alla richiesta.

NOME	STRATEGIA USATA					RIUSCITA DEL COMPITO		USO DELLA VOCE (durante sposta-mento oggetti)		TIPO DI DIFFICOLTÀ	
	A	B	D	H	I	SI	NO	SI	NO	D5	D7
Jo.	X					X			X		
Gi.	X				X	X			X		X
M.	X				X	X		X			X
Ga.	X					X		X			
W.				X	X		X		X		X
Ja.		X	X			X		X			
Y.		X					X	X		X	
TOT.	4	2	1	1	3	5	2	4	3	1	3

Tabella 3
Fase 1A.

A. SPOSTA SOLO UNA DELLE DUE COLLEZIONI
B. SPOSTA LE DUE COLLEZIONI
D. INDICA GLI ELEMENTI MA NON LI TOCCA
H. NON USA UNA STRATEGIA
I. CONTA PER CONFRONTARE LE QUANTITÀ
D5: ASSOCIA GLI ELEMENTI IN MANIERA CORRETTA MA RISPONDE ALLA DOMANDA IN MANIERA SBAGLIATA
D7: CONTA LE PECORE E I CIUFFI D’ERBA

Di fronte alle due collezioni fisse (**Tabella 4** - fase 1B), la prima caratteristica che emerge è che solamente 2 bambini su 7 hanno svolto il compito correttamente e che la strategia G (“utilizzare un mezzo esterno per segnare gli elementi”) è quella usata con più frequenza (6 bambini su 7). Di questa strategia sono emerse tre sottocategorie: (a) quella di utilizzare vari materiali per realizzare delle stradine che uniscono pecora e ciuffo d’erba, usata da 2 bambini e solamente 1 di loro ha risolto il compito correttamente (Ga.); (b) quella di utilizzare un materiale aggiuntivo per segnare gli elementi (creare un insieme che coinvolge due elementi delle due collezioni), adottata solamente da 1 bambino (Ja.), il quale ha svolto il compito correttamente e (c) quella di appoggiare i materiali sulla plancia senza capirne lo scopo, usata da 3 bambini (Jo., Gi. e W.), i quali non sono riusciti a risolvere il compito. Senza considerare i bambini che non hanno usato una strategia (H) o che hanno contato le due collezioni per confrontare le quantità (strategia I), c’è stato solamente un bambino (Y.) che ha usato due strategie diverse per risolvere il compito (“toccare gli elementi” (C) e “utilizzare un mezzo esterno per segnare gli elementi” (G)), non riuscendo comunque nella sua risoluzione. Egli ha usato una modalità di impiego di materiale aggiuntivo di cui non è rimasta traccia sulla plancia. Un dato interessante è quello dell’uso della voce, in quanto i 2 bambini (Ja. e Ga.) che risolvono correttamente il compito hanno utilizzato la voce come mezzo esplicativo delle loro azioni.

Tabella 4
Fase 1B.

NOME	STRATEGIA USATA				RIUSCITA DEL COMPITO		USO DELLA VOCE (durante sposta-mento oggetti)		TIPO DI DIFFICOLTÀ			
	C	G	H	I	SI	NO	SI	NO	D2	D3	D6	D7
Jo.		X	X	X		X		X				X
Gi.		X	X	X		X		X				X
M.		X		X		X	X		X	X	X	X
Ga.		X			X		X					
W.			X			X		X				
Ja.		X			X		X					X
Y.	X	X				X	X		X	X	X	
TOT.	1	6	3	4	2	5	4	3	2	2	2	4

C. TOCCA GLI ELEMENTI

G. UTILIZZA UN MEZZO ESTERNO PER SEGNARE GLI ELEMENTI

H. NON USA UNA STRATEGIA

I. CONTA PER CONFRONTARE LE QUANTITÀ

D2: DIMENTICA DI CONSIDERARE UNO O PIÙ ELEMENTI DELLA COLLEZIONE

D3: ASSOCIA PIÙ DI UN ELEMENTO DELLA STESSA COLLEZIONE A UN ELEMENTO DELL’ALTRA COLLEZIONE

D6: ASSOCIA GLI ELEMENTI IN MANIERA SBAGLIATA MA RISPONDE ALLA DOMANDA IN MANIERA CORRETTA

D7: CONTA LE PECORE E I CIUFFI D’ERBA

Dopo la proposta di 12 interventi dedicati alle attività motorie, Y. e W. hanno nuovamente svolto il compito della fase 1A (da ora chiamata 3A). Dalla **Tabella 5** si nota che entrambi hanno utilizzato la strategia A (“spostare solo una delle due collezioni”) e la stessa sottocategoria (mettere un elemento vicino all’altro, **Allegato 3**, **Tabella 5**), riuscendo a risolvere il compito con efficacia. Anche i 4 compagni che nella fase 1A hanno adottato questa strategia e questa sottocategoria, hanno svolto il compito in maniera corretta. Y., in questa fase, non utilizza più la voce come mezzo esplicativo per accompagnare il gesto.

Tabella 5
Fase 3A.

NOME	STRATEGIA USATA						RIUSCITA DEL COMPITO		USO DELLA VOCE (durante sposta-mento oggetti)		TIPO DI DIFFICOLTÀ	
	A	B	D	G	H	I	SI	NO	SI	NO		
W.	X						X			X		
Y.	X						X			X		
TOT.	2						2			2		

A. SPOSTA SOLO UNA DELLE DUE COLLEZIONI

5 bambini su 7 hanno svolto la fase 3B (**Tabella 6**). Tutti (5 su 5) hanno adottato la strategia G (“utilizzare un mezzo esterno per segnare gli elementi”) e 2 di loro sono riusciti in questa occasione nella risoluzione del compito (Jo. e Gi.).
Sono emerse due sottocategorie della strategia G: (a)[4] quella di utilizzare vario ma- 4

4. Sottocategoria già rilevata nella fase 1B.

teriale per realizzare delle stradine che uniscono pecora e ciuffo d’erba, usata da 4 bambini e solamente 1 di loro ha risolto il compito correttamente (Gi.) e (b) quella di contrassegnare 2 elementi con lo stesso materiale (es. cannuccia rosa davanti alla pecora e cannuccia rosa davanti al ciuffo d’erba), adottata solamente da 1 bambino (Jo.), il quale ha svolto il compito correttamente.

Tabella 6
Fase 3B.

NOME	STRATEGIA USATA			RIUSCITA DEL COMPITO		USO DELLA VOCE (durante spostamento oggetti)		TIPO DI DIFFICOLTÀ		
	D	G	I	SI	NO	SI	NO	D2	D3	D6
Jo.		X	X	X			X			
Gi.		X		X			X			
M.		X			X	X			X	X
W.		X			X		X		X	X
Y.	X	X			X	X		X	X	
TOT.	1	5	1	2	3	2	3	1	3	2

D. INDICA GLI ELEMENTI MA NON LI TOCCA

G. UTILIZZA UN MEZZO ESTERNO PER SEGNARE GLI ELEMENTI

I. CONTA PER CONFRONTARE LE QUANTITÀ

D2: DIMENTICA DI CONSIDERARE UNO O PIÙ ELEMENTI DELLA COLLEZIONE

D3: ASSOCIA PIÙ DI UN ELEMENTO DELLA STESSA COLLEZIONE A UN ELEMENTO DELL’ALTRA COLLEZIONE

D6: ASSOCIA GLI ELEMENTI IN MANIERA SBAGLIATA MA RISPONDE ALLA DOMANDA IN MANIERA CORRETTA

In sintesi l’analisi dei risultati evidenzia che le strategie maggiormente adottate dai bambini nella fase “a tavolino” (fase 1) sono state le strategie di “mettere un elemento vicino all’altro” (strategia A) e di “utilizzare un materiale esterno per realizzare dei percorsi o realizzare con i materiali un insieme di due elementi” (strategia G). Gli allievi hanno adottato con meno frequenza le strategie di “spostare le due collezioni” (strategia B) e “toccare gli elementi” (strategia C) (**Figure 8 – 11**).
I bambini hanno adottato anche altre strategie, ad esempio: “indicare gli elementi senza toccarli partendo sempre dalla stessa collezione” (strategia D), “contare gli elementi delle due collezioni per confrontare le quantità” (strategia I) e “non trovare alcuna strategia” (strategia H). Inoltre, vi sono stati alcuni bambini che, nelle fasi 1A e B, hanno usato due strategie (prima una e poi l’altra) per risolvere il compito.

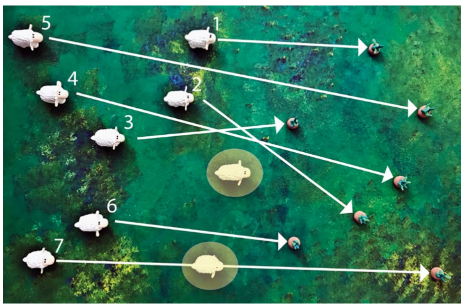


Figura 8
Collezioni mobili: avvicinare le pecore ai ciuffi d’erba.

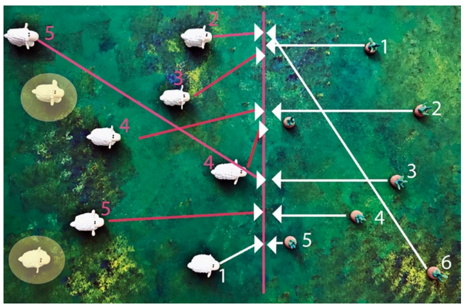


Figura 9
Collezioni mobili: allineare dapprima i ciuffi su un’ipotetica linea e poi spostare le pecore verso i ciuffi d’erba.

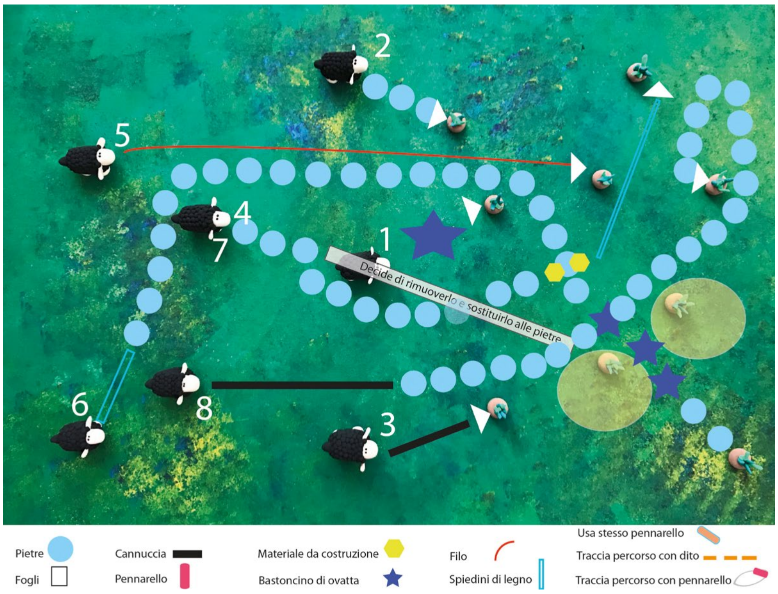


Figura 10
Collezioni fisse: utilizzare materiali esterni per realizzare dei percorsi.

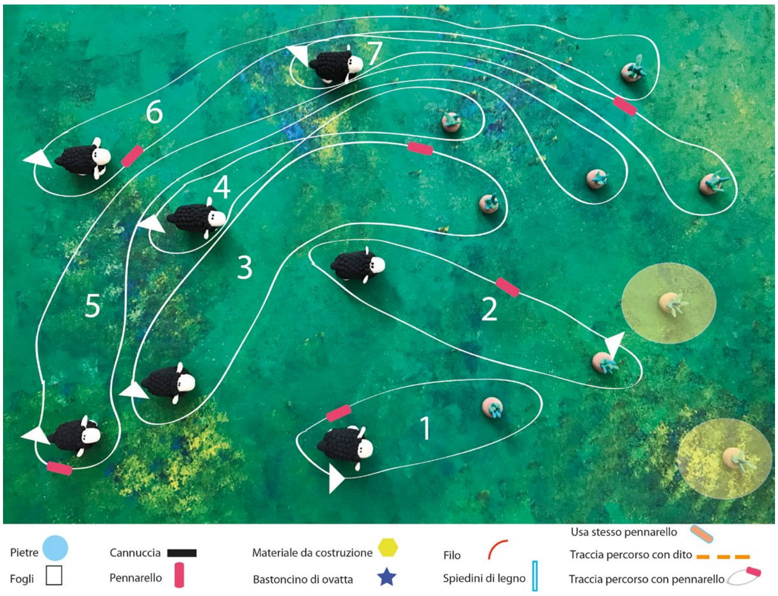


Figura 11
Collezioni fisse: creare un “recinto” per ogni coppia “pecora-ciuffo”.

6.1 Difficoltà emerse nelle attività “a tavolino”

Le difficoltà emerse sono le seguenti: dimenticarsi di considerare uno o più elementi della collezione (**Figura 12**) o di associare più di un elemento della stessa collezione a un elemento dell’altra collezione (**Figura 13**). Queste difficoltà possono riallacciarsi all’incapacità del bambino nel discriminare gli oggetti già associati dagli oggetti ancora da associare (Gelman et al., 1978), o all’utilizzo di materiali poco pertinenti, o alla scelta di una strategia difficile (ad es. non lasciare un percorso visibile), o alla scarsa motivazione e alla poca concentrazione mentre si svolge il compito.

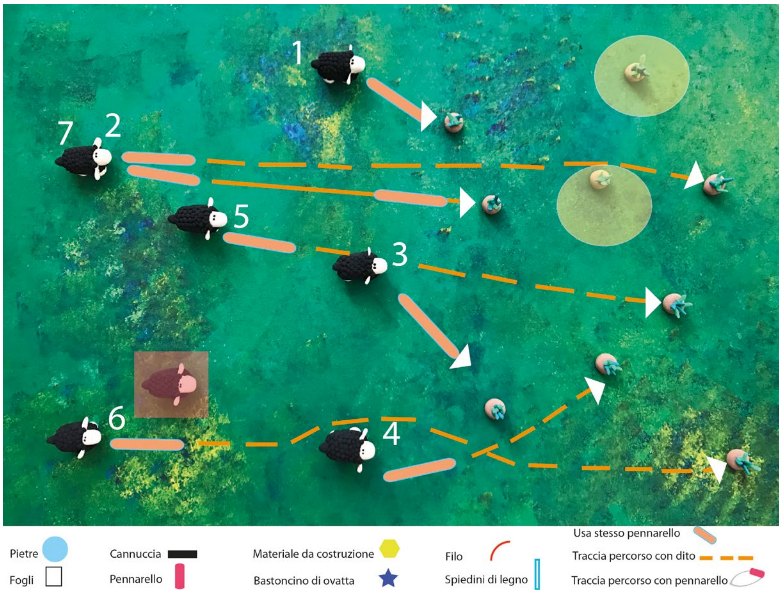


Figura 12
Dimenticarsi di considerare uno o più elementi della collezione (vedi pecora nel riquadro rosso).

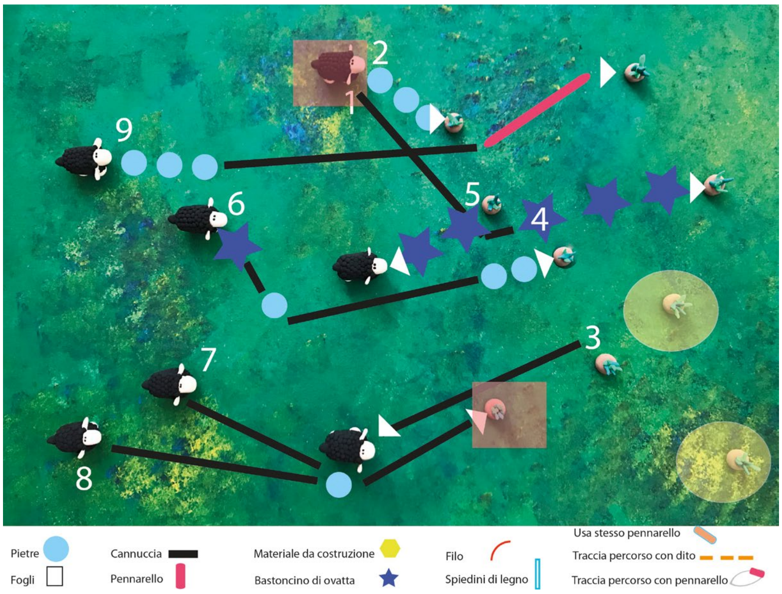


Figura 13
Associare più di un elemento della stessa collezione a un elemento dell’altra collezione (es. pecore 7 e 8 associate allo stesso ciuffo d’erba).

Sono inoltre emerse altre due difficoltà, ovvero associare gli elementi in maniera corretta, ma rispondere alla domanda in maniera sbagliata e associare gli elementi in maniera sbagliata, ma rispondere alla domanda in maniera corretta. Tali errori possono essere riconducibili principalmente a quattro fattori: difficoltà nel comprendere la domanda, poca attenzione nell’osservare la plancia ad opera conclusa, poca attenzione nell’osservare il proprio operato non accorgendosi dei propri errori di associazione (che coinvolge il processo *Interpretare e riflettere sui risultati*), risposta condizionata dal fatto di aver contato le due collezioni e quindi di essere a conoscenza della cardinalità dei due insiemi.
Diversi bambini sono caduti nella tentazione di contare le due collezioni per confrontare le quantità, soprattutto quando nella fase più complessa non sono riusciti a trovare un’altra strategia (fase 1B).

I bambini che hanno riscontrato delle difficoltà nella fase “a tavolino” (fase 1A e B), senza considerare coloro che non hanno trovato nessuna strategia, hanno adottato una strategia (“toccare gli elementi”) o sottocategoria (“realizzare percorsi non visibili”) diversa rispetto ai compagni che hanno svolto le fasi 1A e B in maniera corretta.

6.2 L’allenamento attraverso l’attività motoria

Attraverso le attività motorie i bambini hanno potuto confrontarsi con sé stessi, con gli altri e con l’ambiente fisico, sperimentando e sviluppando, in maniera ludica, competenze legate alla corrispondenza biunivoca. La ripetuta esperienza svolta in prima persona e la proposta di situazioni innovative (es. varianti dei giochi), hanno permesso ai bambini da un lato di migliorare, consolidare ed affinare i comportamenti motori e dall’altro di ricercare nuove soluzioni e strategie con “rinnovato impegno mentale” (Pesce et al., 2002). La “ricerca di nuove soluzioni”, apre la strada al concetto di “creatività”: per riuscire a generare un prodotto creativo «occorre inibire i pensieri e i comportamenti routinari, combinare in modo nuovo e originale le informazioni in memoria ed essere capaci di esplorare flessibilmente nuovi modi di pensare e di agire» (Pesce et al., 2002, p. 408). I bambini hanno dimostrato, anche nelle due attività motorie analoghe alla fase 1, di essere in grado di adottare sottocategorie diversificate delle strategie di “spostare solo una delle due collezioni” e di “utilizzare un materiale esterno per realizzare dei percorsi”; alcune delle quali sono state riprese anche nella fase 3.

L’allenamento attraverso l’attività corporea è risultato, quindi, per la maggior parte dei bambini (4 su 7) di aiuto per superare le difficoltà riscontrate nella fase “a tavolino” (fase 1).

In particolar modo per quanto riguarda la fase 3A, ai 5 bambini che avevano svolto il compito correttamente già nella fase 1A, si sono aggiunti anche Y. e W.; entrambi hanno utilizzato la strategia A (“spostare solo una delle due collezioni”) e la stessa sottocategoria (“mettere un elemento vicino all’altro”). Y. è passato dalla strategia B (“spostare le due collezioni” nella fase 1A) alla strategia A (“spostare solo una delle due collezioni” nella fase 3A), non riscontrando più la difficoltà emersa nella fase 1A (D5: rispondere alla domanda in maniera errata, malgrado aver associato le due collezioni in maniera corretta) (**Figure 14 – 15**). W. dalle strategie I e H (“contare le due collezioni senza trovare un’altra strategia”) è passato anch’egli alla strategia A (**Figure 16 – 17**).

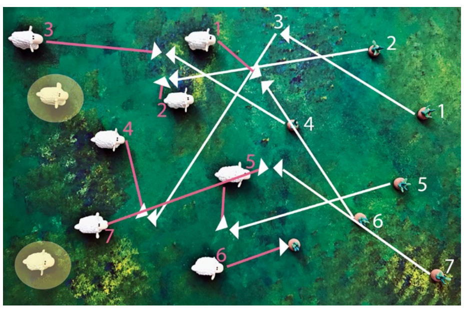


Figura 14
Prima dell’attività motoria (fase 1A - collezioni mobili): Y. sposta prima i ciuffi d’erba verso le pecore e poi le pecore verso i ciuffi (B). Associa correttamente, ma alla fine non si accorge che due pecore restano senza ciuffo d’erba.

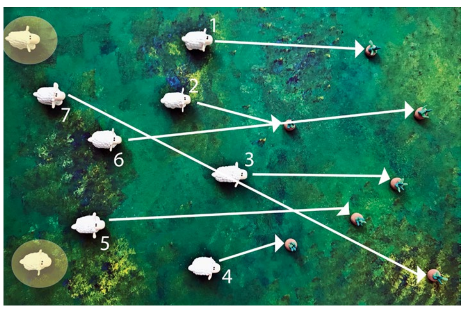


Figura 15
Dopo l’attività motoria (fase 3A): Y. sposta le pecore verso i ciuffi d’erba (A).

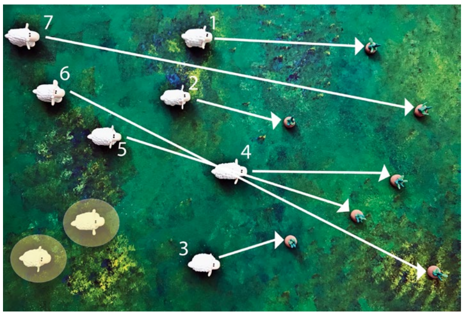


Figura 16
Prima dell’attività motoria (fase 1A): W. non usa una strategia (H).

Figura 17
Dopo l’attività motoria (fase 3A) W. sposta solo una delle due collezioni (A).

Nella fase 3B, 2 bambini (Gi. e Jo.) su 5 hanno svolto il compito correttamente, aggiungendosi ai 2 bambini (Ja. e Ga.) che l’avevano già svolto con successo nella fase 1B. 3 bambini non hanno risolto correttamente la fase 3B (W., M. e Y.); malgrado ciò, hanno comunque adottato nuove scelte strategiche.
Gi., W. e Jo., che nella fase 1B non avevano trovato alcuna strategia, nella fase 3B hanno trovato un modo sensato per risolvere il compito. In particolare Jo. e Gi. sono passate dal non sapere cosa fare (strategia H), alla risoluzione corretta del compito adottando la strategia G (“utilizzare un mezzo esterno per segnare gli elementi”). Jo., che nella fase 1B si era soffermata semplicemente a posizionare davanti ad ogni pecora un materiale diverso (es. cannuccia, pietra ecc.), nella fase 3B ha sviluppato questa strategia contrassegnando 2 elementi con lo stesso materiale (es. pietra verde davanti alla pecora e pietra verde davanti al ciuffo d’erba) (**Figure 18–19**). Gi. nella fase 3B non ha più sentito la necessità di dover contare le 2 collezioni per confrontare le 2 quantità, ma ha trovato un metodo alternativo utilizzando vario materiale per realizzare delle stradine che uniscono pecora e ciuffo d’erba (**Figure 20–21**).

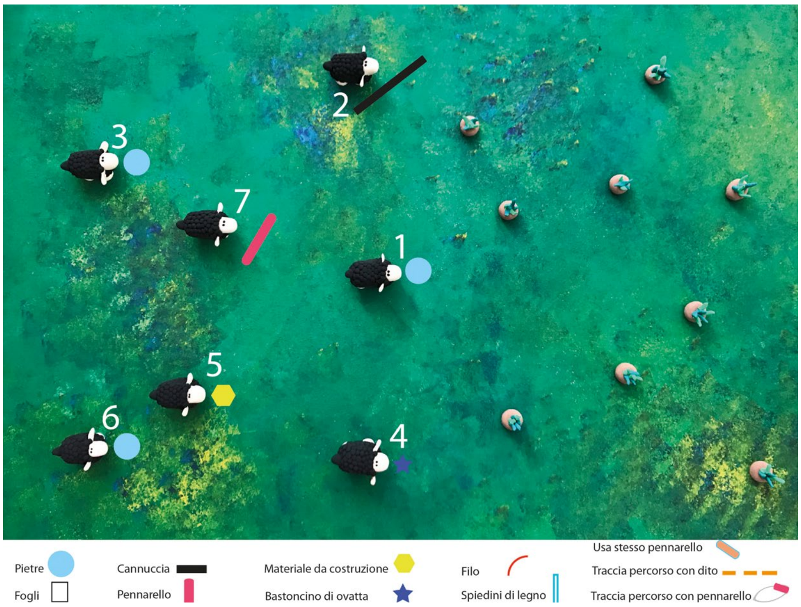


Figura 18
Prima dell’attività motoria (fase 3A) Jo. posiziona dei materiali davanti alle pecore, ma non fa correlazione con i ciuffi d’erba.

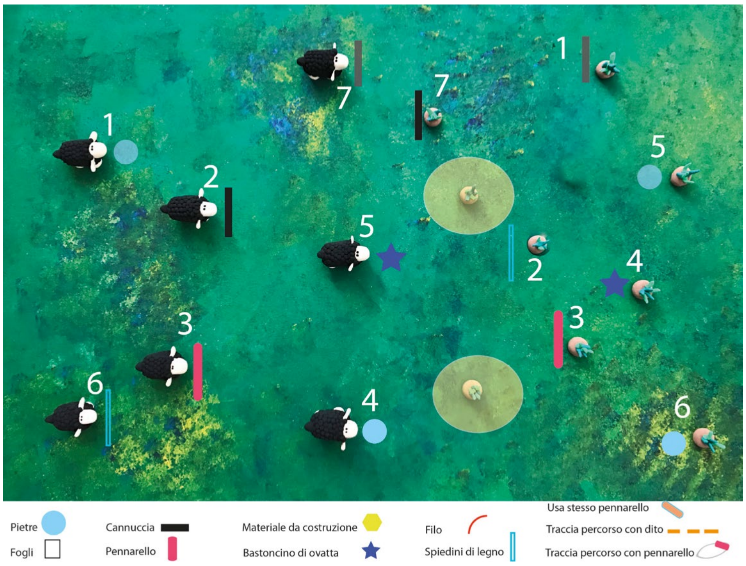


Figura 19
Dopo l'attività motoria (fase 3B) Jo. contrassegna due elementi con lo stesso materiale e svolge il compito in maniera corretta.

Figura 20
Prima dell'attività motoria (fase 1B) Gi. crea un aereo per poter spostare le pecore verso i ciuffi d'erba, non trovando una strategia per risolvere la corrispondenza biunivoca.

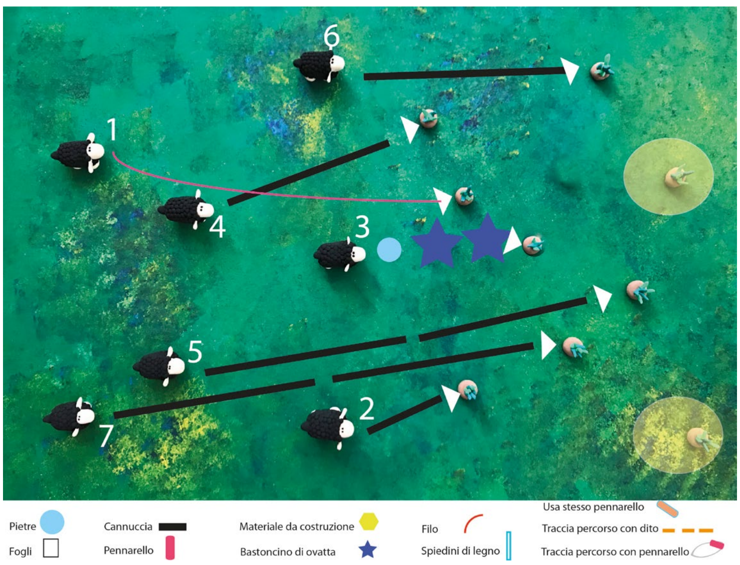


Figura 21
Dopo l'attività motoria (fase 3B) Gi. usa vari materiali per realizzare delle stradine che uniscono pecora e ciuffo d'erba.

Coloro che nella fase 3B hanno avuto ancora delle difficoltà[5] hanno comunque usufruito di nuove scelte strategiche, dimostrando uno sviluppo in questo senso.
M. ha utilizzato sempre la strategia G, passando dalla realizzazione di percorsi non visibili usando solo un elemento esterno alla realizzazione di percorsi visibili (**Figure 22–23**).

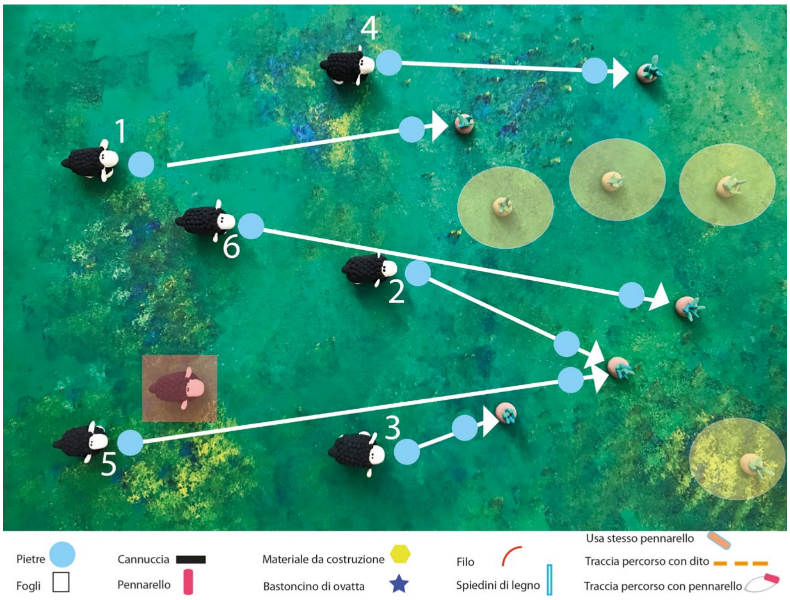


Figura 22
Prima dell’attività motoria (fase 1B): M. usa sempre la stessa pietra e la fa scivolare da una pecora a un ciuffo d’erba, ma dimentica di considerare la stessa pecora e attribuisce a due pecore diverse lo stesso ciuffo d’erba.

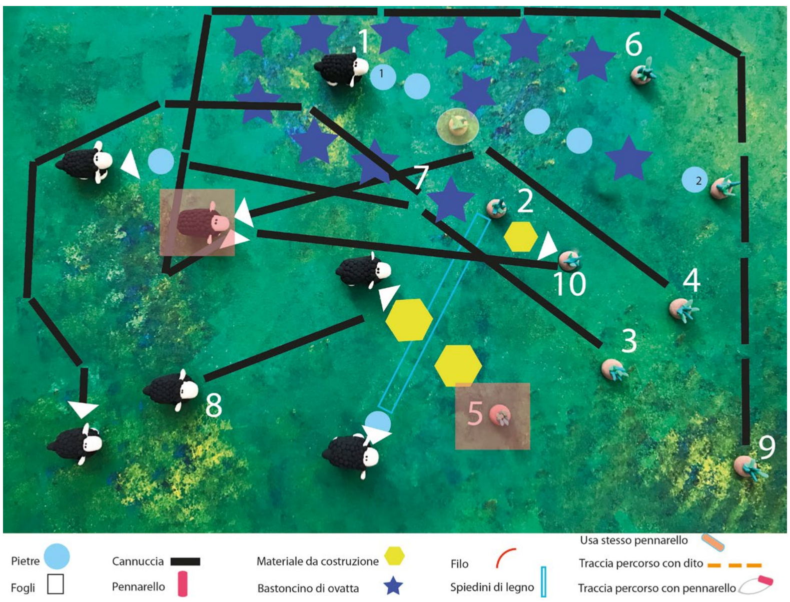


Figura 23
Dopo l’attività motoria (fase 3B): M. realizza stradine visibili, utilizza però dei materiali poco pertinenti (cannucce che rotolano e materiali da costruzione ingombranti).

5. Difficoltà che possono riallacciarsi all’utilizzo di una strategia copiata da un compagno, ad un periodo di allenamento motorio troppo breve, o alle difficoltà già descritte nel par. 6.1.

Y. è passato dal posizionare sulla plancia materiali esterni senza capirne lo scopo, alla realizzazione di stradine tra pecora e ciuffo d’erba, utilizzando 2 strategie (D: “indicare gli elementi senza toccarli”, G: “utilizzare un mezzo esterno per segnare gli elementi”) (**Figure 24 – 25**).

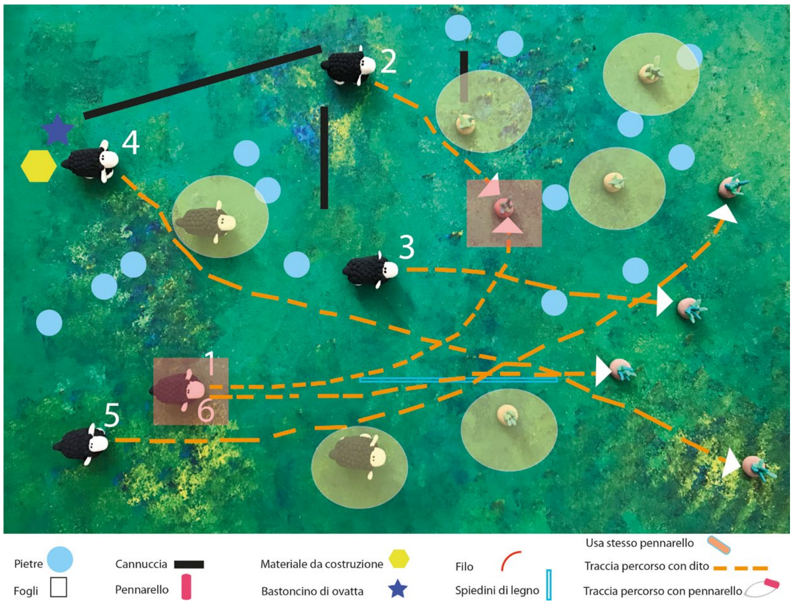


Figura 24
Prima dell’attività motoria (fase 1B): Y. dispone gli oggetti sulla plancia in ordine casuale e tocca con il dito un elemento alla volta (pecora e poi ciuffo d’erba).

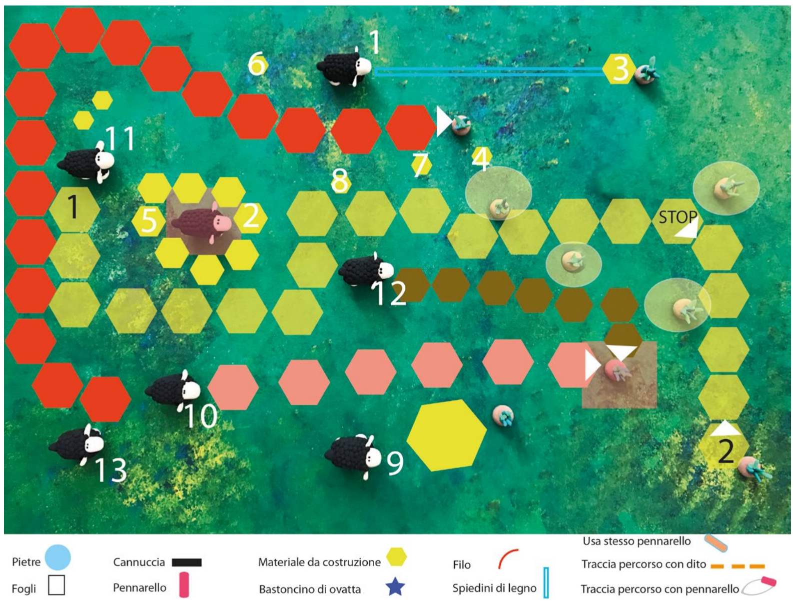


Figura 25
Dopo l’attività motoria (fase 3B): Y. utilizza prevalentemente materiali da costruzione e realizza anche una casetta e una torre.

W., invece, è passato addirittura dall’assenza di interazione con i materiali (plancia, collezioni, materiali esterni) alla realizzazione di stradine molto precise tra pecore e ciuffi d’erba; malgrado ciò, ha associato più di un elemento della stessa collezione a un elemento dell’altra collezione (**Figure 26 – 27**).

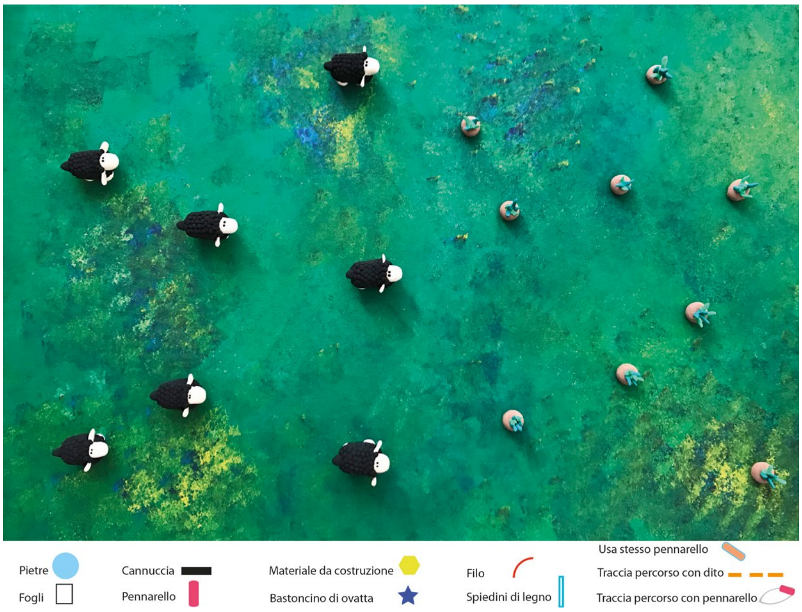


Figura 26
Prima dell'attività motoria (fase 1B): W. non usa una strategia (H).

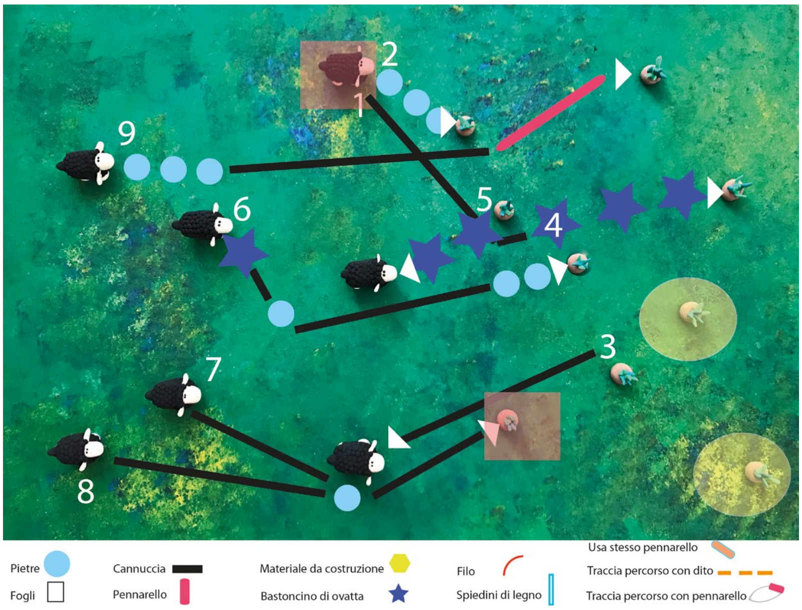


Figura 27
Dopo l'attività motoria (fase 3B): W. usa un mezzo esterno per realizzare delle stradine.

W. e M., benché non abbiano associato correttamente tutte le pecore con i ciuffi d'erba, hanno comunque risposto correttamente alla domanda (D6), ingannati, molto probabilmente, dal fatto che da ogni pecora effettivamente partiva una stradina. M. e Y. hanno ancora avuto delle difficoltà legate all'associazione di più elementi della stessa collezione a un elemento dell'altra collezione (D3). Y. ha anche dimenticato di considerare 2 elementi della collezione (D2), dicendo che una pecora "stava dormendo quindi non aveva fame" e che "non c'era più spazio sulla plancia per creare un'ulteriore strada". Egli ha quindi risposto in maniera errata alla domanda. Queste loro difficoltà potrebbero essere riconducibili principalmente a due fattori: utilizzo di un materiale poco pertinente (es. Y. ha usato materiali da costruzione molto ingombranti e M. delle cannucce che rotolano facilmente) e dalla poca concentrazione durante l'esecuzione del compito (Y. ha costruito delle torri e delle casette sulla plancia, mentre M. parlava di altro). L'utilizzo della voce come mezzo esplicativo è rimasto invariato nelle fasi 1B e 3B.

6.3 Ulteriori riflessioni

Per quel che concerne la fase motoria (fase 2), dai dati rilevati nel diario di bordo, risulta evidente il progresso da parte di tutti i bambini (compresi quelli dell’anno obbligatorio 1) nell’effettuare corrispondenze biunivoche bambino-bambino e oggetto-bambino (Figura 28). Anche i bambini dell’anno facoltativo sono riusciti, con la ripetizione, ad effettuare delle corrispondenze in maniera corretta. Questo miglioramento delle prestazioni può essere riconducibile alla ripetizione delle attività, che ha permesso di consolidare il comportamento motorio associato al concetto di corrispondenza “uno a uno”, all’ascolto dei consigli/suggerimenti dei compagni (ad es. “Ja. Non puoi scambiare la palla anche con D. se l’hai già scambiata con me”), alla possibilità di usare il proprio corpo per sperimentare e mettere in gioco le proprie abilità, all’opportunità di apprendere nuove strategie e modalità d’esecuzione dai compagni, alla condivisione e alla riflessione a grande gruppo sugli errori commessi e sulle strategie adottate. Focalizzando l’attenzione sui 5 bambini che hanno riscontrato delle difficoltà nella fase “a tavolino” (fase 1), si può affermare che, in generale, essi sono riusciti a svolgere le attività motorie con più facilità rispetto all’attività “a tavolino” e che solamente uno di loro ha avuto ancora delle difficoltà iniziali,[6] migliorate però nel corso della sperimentazione.

Figura 28
Attività motoria analoga alla fase “a tavolino”.

È stato interessante osservare come un bambino, che nella fase 1 non aveva minimamente interagito con le due collezioni, nelle varie attività motorie ha partecipato con entusiasmo, trovando strategie risolutive confacenti alla proposta didattica, riprendendole anche nella fase 3. Vediamo quindi che, come affermano Donaldson e McGariggle (1974), anche il contesto gioca un ruolo fondamentale nella comprensione e quindi nella riuscita del compito.

6. Difficoltà a comprendere le regole del gioco, il cambio di ruolo, l’orientamento spaziale per trovare il compagno con cui mettersi in corrispondenza e a inibire delle azioni di routine per affrontarne delle nuove (difficoltà riscontrate anche in alcuni bambini dell’anno obbligatorio 1).

7 Conclusioni

I risultati ottenuti, considerando il numero esiguo di bambini, non sono statisticamente significativi; mettono comunque in evidenza che coloro che hanno avuto difficoltà nella fase iniziale sono migliorati nelle prestazioni "a tavolino" grazie alle attività motorie proposte. A tal proposito si può quindi affermare che le attività motorie sulla corrispondenza biunivoca hanno contribuito a far comprendere meglio il concetto di corrispondenza "uno a uno", a stimolare l'uso di nuove sottocategorie delle strategie di "spostare solo una delle due collezioni", mettendo un elemento vicino all'altro e di "utilizzare un materiale esterno per segnare gli elementi".
Esse, inoltre, hanno allenato la flessibilità cognitiva, l'inibizione e la memoria di lavoro, che portano ad un miglioramento anche nell'area matematica (Holmes et al., 2008; St Clair-Thompson et al., 2006; Gathercole & Alloway, 2008; Blair & Razza, 2007; Bull & Scerif, 2001).
Si ritiene perciò auspicabile attivare percorsi di insegnamento in ambito matematico creando collegamenti con altri ambiti, come quello motorio e percettivo psico-corporeo, in modo tale da offrire la possibilità ai bambini di sviluppare le proprie competenze in un modo più ricco e di vivere esperienze profonde di apprendimento, con un atteggiamento positivo e creativo.

Ringraziamenti

Per questo lavoro desidero innanzitutto ringraziare le relatrici Silvia Sbaragli e Lietta Santinelli, per i loro consigli preziosi e per la loro disponibilità. Un sentito ringraziamento va anche ai bambini della scuola dell'infanzia di Monte Carasso per aver partecipato alle attività con molto entusiasmo. Desidero inoltre ringraziare Silvia Sbaragli e Gemma Carotenuto per la lettura critica dell'articolo.

Bibliografia

Alibali, M., & Di Russo, A. (1999). The function of gesture in learning to count: more than keeping track. *Cognitive Development*, *14*, 37-56.

Associazione Svizzera degli Ergoterapisti. *Documentazione Ergoterapia*. Disponibile in http://www.ergoterapia.ch/Documentazione-Ergoterapia-9979ae00 (consultato il 10.02.2017).

Bardini, C., Sabena, C., & Radford, L. (2005). Corps, symbole et artefact : trois dimensions de l'objectivation du savoir. *Scientia Paedagogica Experimentalis, XLII*, *2*, 255-272.

Bermejo, V., Morales, S., & De Osuna, JG. (2004). Supporting children's development of cardinality understanding. *Learning and Instruction, 14* (4), 381–398.

Bever, T., & Mehler, J. (1967). Cognitive Capacity of very young children. *Science, 158*, 141–142.

Blair, C., & Razza, R. P. (2007) Relating Effortful Control, Executive Function, and False Belif Understanding to Emerging Math and Literacy Ability in Kindergarten. *Child Development. 78*(2), 647-663.

Bruno, L. (2015). *Un passaggio nell'eternità.* Calibre.

Bull, R., & Scerif, G. (2001). Executive Functioning as a Predictor of Children's Mathematics Ability: Inhibition, Switching, and Working Memory. *Developmental Neuropsychology, 19*(3), 273-293.

Cerasoli, A. (2012). *La grande invenzione di Bubal.* Trieste: Emme Edizioni.

Coggi, C., & Ricchiardi, P. (2005). *Progettare la ricerca empirica in educazione*. Roma: Carocci Editore.

DECS (2015). *Piani di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Lugano: Società d'arti grafiche già Veladini & co SA. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch (consultato il 01.01.2017).

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene., S. (2000). *Il pallino della matematica*. Milano: Mondadori. Tit. orig. La bosse des maths.

Diamond, A. (2012). Activities and Programs That Improve Children's Executive Funtions. *Current Directions in Psychological Science, 21*(5), 335-341.

Donaldson, M. (2010). *Come ragionano i bambini*. Milano: Springer.

Faschilli, C. (2011). *Il significato incorporato (1): la Embodied Cognition e la teoria simulativa.* Disponibile in https://linguaggionaturale.wordpress.com/2011/04/23/significato-incorporato-embodied-cognition/ (consultato il 4.02.2017).

Franscella, S. (2017). *Corrispondenza biunivoca "a tavolino" e nell'attività motoria. Abilità matematiche in relazione al movimento corporeo* (Tesi di Bachelor, Dipartimento formazione e apprendimento, Supsi di Locarno). Disponibile in http://tesi.supsi.ch/1582/1/PDF-DEF-TESI-SOFIA%20FRANSCELLA.pdf

Fuson, K., & Hall, J. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press, 49-107.

Galgano, A. (2008/2009). *Il matematico inaspettato. Le intuizioni matematiche nei bambini dai 12 mesi ai 5 anni*. Facoltà di Lettere e Filosofia. Università degli Studi di Siena.

Gathercole, S. E., & Alloway, T. P. (2008). *Working memory and learning: A teacher's guide*. London: Sage Pubblications.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschooler's counting: Principles before skill. *Cognition, 13*, 343-359.

Holmes, J., Adams, J. W., & Hamilton, C. J. (2008). The relationship between visuospatial sketchpad capacity and children's mathematical skills. *European Journal of Cognitive Psychology, 20*(2), 272-289.

Karbach, J., & Kray, J. (2009). How useful is executive control training? Age differences in near and far transfer of task-switching training. *Developmental Science, 12*(6), 978-990.

Kray, J., Eber, J., & Karbach, J. (2008). Verbal self-instructions in task switching: a compensatory tool for action-control deficits in childhood and old age? *Developmental Science, 11*, 223–236.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2005). *Da dove viene la matematica.* Torino: Bollati Boringhieri.

Lucangeli, D., & Tressoldi, P. (2002). Lo sviluppo della conoscenza numerica: alle origini del "capire i numeri". *Giornale italiano di psicologia*, a. XXIX, n. 4, 701-723.

Lucangeli, D., Ianitti, A., & Vettore, M. (2008). *Lo sviluppo dell'intelligenza numerica.* Roma: Carocci Editore.

McGarrigle, J., & Donaldson, M. (1974). Conservation Accidents. *Cognition, 3*, 341–350.

Miceli, S. S. (2001/2002). *Matematica e informatica*. Facoltà Scienze della Formazione. Università degli studi di Palermo.

Miceli, S. S. (2003/2004). *Il bambino e l’apprendimento del numero.* Corso di Laurea Scienze della Formazione. Università degli studi di Palermo.

Milanese, A., & Anemone, I. (2016). *Come valutare le funzioni esecutive: i test utilizzati*. Disponibile in http://www.trainingcognitivo.it/come-valutare-le-funzioni-esecutive-i-test-utilizzati/ (consultato il 2.02.2017).

Missiuana, C., Pollock, N., Levac, D., Campbell, W., Sahagian Whalen, S., Bennett, S., Hecimovich, C., Robin Gaines, B., Cariney, J., & Russell, D. (2012). Partnering for Change: An innovative school-based occupational therapy service delivery model for children with developmental coordination disorder. *Canadian Journal of Occupational Therapy, 79*, 41-50.

Nota, E. (2015). *Il progetto Palestra Didattica al Sermig. Sperimentazione di un percorso ludico per il recupero degli apprendimenti in matematica.* Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria. Università degli studi di Torino.

Pedrini, R., & De Luca, F. (2015). *Contando gli animali.* Documentario “Il giardino di Albert”.

Pesce, C., Marchetti, R., Motta, A., & Bellucci, M. (2015). *Joy of moving.* Spello: Calzetti Mariucci Editori.

Potter, M. C., & Levy, E. I. (1968). Spatial enumeration without counting. *Child Development, 39*(1), 265–272.

Radford L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.). *Semiotics in mathematics education*, 215-234.

Radford, L. (2011). Sullo sviluppo del pensiero matematico nei giovani studenti: la graduale armonizzazione di percezione, gesti e simboli. In D’Amore, B. & Sbaragli, S. (Eds.). *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora, 33-39.

Ravelli, G. (2010). *Pratiche di educazione alla corporeità nella scuola dell’infanzia*. Milano: EDUCatt.

Ricchiardi, P., & Coggi, C. (2011). *Gioco e potenziamento cognitivo nell'infanzia*, Trento: Erickson.

Riggio, S. (2005). *L’attività motoria nella scuola dell’infanzia: dal movimento al corpo*. Disponibile in http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:jRVWdeez1z0J:www.provincia.bz.it/intendenza-scolastica/progetti/progetti-pubblicazioni.asp%3Fprg_publ_action%3D300%26prg_publ_image_id%3D99502+&cd=1&hl=it&ct=clnk&gl=ch&client=safari (consultato il 6.02.2017).

Robutti, O. (2006). Embodied cognition e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, Anno 20, n. 2, 163-186.

Santinelli, L., & Andreazzi, P. (2011). Movimento e funzioni esecutive: il progetto pilota di Monte Carasso. *I disturbi dell’apprendimento a scuola, tra ricerca e didattica*. Locarno: atti del congresso, 1-11.

Santinelli, L., & Sbaragli, S. (2017). L’importanza della componente motoria nell’apprendimento numerico. *Scuola ticinese*, Anno XLV, Serie IV, n. 328.

Saxe, G. B., & Kaplan, R. G. (1981). Gesture in early counting: A developmental analysis. *Perceptual and Motor Skills, 53*, 851-854.

Scuola Provinciale Superiore di Sanità-Claudiana. *Terapia occupazionale prospettive per oggi e per il futuro*. Ministero del Lavoro e della Previdenza Sociale. Bolzano-Alto Adige. Disponibile in http://www.claudiana.bz.it/downloads/Ergo.pdf. (consultato il 3.01.2017).

Shaeffer, B., Eggleston, V. H., & Scott, J. L. (1974). Number development in young children. *Cognitive Psychology, 6*, 357-379.

St Clair-Thompson, H. L., & Gathercole, S. E. (2006). Executive functions and achievements in school: Shifting, updating, inhibition, and working memory. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 59*(4), 745-759.

Vergnaud, G. (1994). *Il bambino, la matematica, la realtà*. Armando Editore.

Vighi, P. (2011). Scoprire teoremi giocando. In B. D'Amore, & S. Sbaragli (A cura di). *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica. Convegno: Incontro con la matematica n. 25.* Bologna: Pitagora.

Allegati

1. Griglia osservativa usata per raccogliere i dati nelle fasi 1 e 3
2. Attività motorie della fase 2

Autore / Sofia Franscella
Scuola dell'infanzia di Monte Carasso, Svizzera
sofia.franscella@hotmail.it

Dalle sagome alle figure geometriche. Un itinerario didattico sui quadrilateri

From shapes to geometric figures. An educational itinerary on quadrilaterals

Paola Vighi
già Dipartimento di Matematica e Informatica – Università di Parma, Italia

A Clara Bozzolo
un'amica e una maestra

Sunto / Il presente lavoro è rivolto agli insegnanti di scuola elementare, allo scopo di fornire loro un esempio di un percorso didattico che, nato casualmente e sviluppato attraverso semplici attività, si è tuttavia rivelato ricco di spunti e potenzialità. L'itinerario didattico, sperimentato con bambini di 9-10 anni, è incentrato sulla manipolazione di sagome di carta colorata, aventi la forma di particolari triangoli rettangoli, e sulla loro giustapposizione per rappresentare altre figure geometriche, soprattutto triangoli e quadrilateri. Dopo aver descritto il quadro teorico, si illustrano le tappe seguite, commentando i compiti assegnati agli allievi ed i relativi risultati. Si allegano anche protocolli, esaminandoli dal punto di vista didattico.

Parole chiave: pensiero geometrico; visualizzazione; costruzione di figure; giustapposizione; quadrilatero.

Abstract / This paper is addressed to primary school teachers, in order to provide an example of a didactic path which, casually born and developed through simple activities, appeared rich of suggestions and potentiality. The didactic itinerary, experimented with 9-10 years old children, is focused on the manipulation of coloured templates, with the shape of particular right-angled triangles, and on their juxtaposition to represent other geometrical shapes, mainly triangles and quadrilaterals. After the description of the theoretical background, I illustrate its phases, with comments on the students' tasks and the related results.

Keywords: geometrical thought; visualization; construction of shapes; juxtaposition; quadrilateral.

1 Premessa

L'esperienza didattica qui descritta prende le mosse da un'osservazione sorta in occasione di un'attività di ricerca, svolta con bambini di 5-6 anni nella scuola dell'infanzia (Vighi, 2016a) e (Vighi, in corso di stampa). La consegna era quella di riprodurre un quadro di Kandinsky, intitolato *Soft Hard* (**Figura 1**), in cui compaiono 20 figure geometriche, collocando opportunamente su di un foglio le sagome di ciascuna di esse. La ricerca aveva lo scopo di indagare sul riconoscimento e sulla manipolazione delle forme, sulle preconcezioni relative alle trasformazioni geometriche e sul concetto di spazio nei bambini di quell'età. L'analisi dei risultati della sperimentazione ha mostrato incertezze e difficoltà soprattutto relativamente alla manipolazione dei triangoli rettangoli, indicati con i numeri 12, 13 e 14 nella **Figura 2**. In particolare, è risultata problematica l'attività dell'accostare i due triangoli n° 13 e n° 14 per ottenere un rettangolo. L'analisi dei video realizzati durante la sperimentazione ha mostrato che alcuni bambini hanno cercato tra le sagome fornite dall'insegnante un rettangolo 'bicolore', molti si sono limitati ad accostare i due triangoli senza verificare il risultato finale, altri hanno fatto numerosi tentativi, ma senza successo. Una spiegazione sta nel fatto che i triangoli con cui si lavora usualmente nella scuola dell'infanzia sono equilateri e di conseguenza 'reversibili', nel senso che comunque si presentino basta ruotarli per ottenere la configurazione richiesta. I triangoli in oggetto invece non sono 'reversibili', talvolta devono essere ribaltati e non solo ruotati. Questo costituisce una difficoltà, talvolta insormontabile, per alcuni bambini, che, per esempio, appoggiano sul foglio il triangolo n° 12 così come si presenta e se non è orientato correttamente non pensano di ribaltarlo. La ricerca documenta ampiamente questo problema (Grenier & Laborde, 1988; Bulf et al., 2013; 2014a; 2014b).

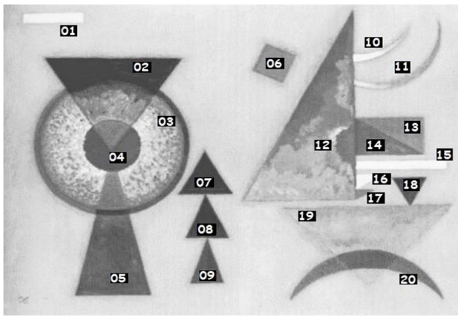


Figura 1
"Soft-Hard"
(Kandinsky, 1927).

Figura 2
Analisi ed organizzazione delle figure.

Proprio a partire dalla constatazione della difficoltà descritta sopra, si è pensato di proporre un'attività sui poligoni basata sulla giustapposizione di due triangoli aventi le stesse caratteristiche di quelli in oggetto. Si è così realizzata una sperimentazione focalizzata sui quadrilateri (per un approfondimento si veda il link), che è argomento del presente scritto. Non si tratta di un lavoro di ricerca, ma di un esempio di un'attività sperimentale che, originata dall'osservazione di una particolare difficoltà, prende sostegno dalle ricerche in didattica della matematica, sia relativamente ai temi trattati che alle modalità seguite.

2 Quadro teorico

Le ricerche condotte negli ultimi tempi sullo sviluppo del pensiero geometrico hanno modificato gli obiettivi dell'insegnamento della geometria nella scuola elementare: non più una "geometria euclidea in miniatura", ma una conoscenza dello spazio e delle situazioni spaziali, che prepari il terreno all'apprendimento della geometria che si realizzerà nei livelli scolastici successivi. In altre parole, si è compreso che il pensiero geometrico ha origine dal ragionamento spaziale, che consiste nel 'vedere' ed osservare oggetti dello spazio, immagini, relazioni tra di essi ed eventuali trasformazioni degli uni negli altri (Clements & Battista, 1992).

In questo contesto, una pietra miliare è costituita dalla teoria di van Hiele (1986), che organizza in diversi livelli la comprensione dei concetti geometrici. Descriviamo qui brevemente i primi tre livelli, che riguardano soprattutto la scuola elementare. Il livello iniziale è quello *visuale*, che costituisce un fondamentale passo verso lo sviluppo del pensiero spaziale: il bambino identifica le figure sulla base del loro aspetto, considerandole come un tutto e senza osservarne le proprietà; usa inoltre un linguaggio informale. Nel secondo livello, quello *descrittivo*, gli allievi sono in grado di riconoscere le figure e di caratterizzarle in base alle loro proprietà geometriche. Le relazioni tra le diverse proprietà di una figura nonché tra figure compaiono al livello successivo, quello *razionale*. Il passaggio da un livello all'altro è stato oggetto di ricerca: in particolare, Gutierrez et al. (1991) hanno studiato i "gradi di acquisizione" di un livello e le condizioni di passaggio al successivo. La teoria di van Hiele ha inciso notevolmente sia sulla ricerca relativa al pensiero geometrico che sui percorsi scolastici:

> «Il modello ha fortemente influenzato i curricula di geometria in tutto il mondo per l'enfasi sull'analisi delle proprietà e la classificazione delle figure nei livelli (per esempio, associato alla classificazione di triangoli o quadrilateri)».
>
> (Swoboda & Vighi, 2016, p. 9)

Secondo Duval (2005, p. 2), le figure di cui a scuola si richiede la conoscenza corrispondono «a forme che sono percettivamente notevoli e culturalmente familiari», ma in generale la principale caratteristica delle figure geometriche è quella di «(…) non essere iconiche, cioè di non assomigliare ad un oggetto visto e conosciuto nella realtà» (Duval, 2005, p. 3).

Secondo lo stesso autore, è necessario promuovere il passaggio dalla "visualizzazione iconica" a quella "non iconica" delle figure; quest'ultima, tipica della geometria, è un riconoscimento delle forme che comporta la loro decomposizione in "unità figurali". In altre parole, il modo naturale di vedere le figure consiste in un riconoscimento percettivo di oggetti bidimensionali (2D nella notazione di Duval), mentre il modo matematico si focalizza sulle rette e sui segmenti tracciati per disegnare la figura (1D, 'unidimensionale') e sulle loro intersezioni, i punti (0D, 'zero dimensionale'). Occorre dunque favorire un modo di vedere che, andando oltre la percezione visiva, conduca alla 'visualizzazione', che sta alla base della formazione dei concetti geometrici.

Un altro aspetto che Duval (2003) evidenzia è il fatto che gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili, ma possono essere conosciuti solo attraverso rappresentazioni. In particolare, gli oggetti geometrici sono rappresentati da oggetti concreti di cui osserviamo solo le caratteristiche spaziali o da disegni, ma una figura geometrica è, secondo Fischbein (1993), un'immagine visiva che «(…) include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali». Nella scuola elementare occorre dunque un «lavoro con materiali che favorisca lo sviluppo di immagini e rappresentazioni mentali» (Chamorro, 2006, p. 415), cominciando dalle 'forme' per arrivare poi alle 'figure'. Ma, che cos'è una forma? Una possibile risposta è la seguente:

> «Una forma è un contorno chiuso che si distacca dallo sfondo. Se lo sfondo è omogeneo, questo contorno è determinato da tratti o appare come il bordo di una macchia, cioè di una zona di colore diverso dallo sfondo. Il problema del riconoscimento visuale delle forme inizia quando non c'è una sola forma isolata, ma almeno due che possono essere separate, giustapposte, parzialmente sovrapposte, o una inscritta nell'altra».
>
> (Duval, 2016, p. 214)

Il presente lavoro prende le mosse proprio dalla giustapposizione (o 'accostamento') di coppie di 'forme' per costruire quelle che chiameremo 'sagome' di figure geometriche. L'uso della parola 'sagoma' è dettato dalla necessità di distinguere l'oggetto concreto dalla figura geometrica che esso rappresenta. Di fatto, durante l'attività in classe spesso si è parlato di 'figure', come si fa solitamente, allo scopo di semplificare il linguaggio e la trattazione.

3 Metodologia

Nell'ambito di un corso di formazione per insegnanti di scuola elementare tenutosi presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Parma, nell'a.a. 2016/2017 (la cui docente responsabile è l'autrice di questo articolo), è stato ideato e progettato un itinerario didattico sulla "famiglia dei quadrilateri". Si è pensato di organizzare un'attività basata sull'accostamento (o giustapposizione)[1] di coppie di triangoli rettangoli aventi le stesse caratteristiche di quelli utilizzati da Kandinsky nel dipinto *Soft Hard* (**Figura 1**) (per un approfondimento si veda link). Si è osservato che si tratta di triangoli rettangoli particolari, che, oltre all'angolo retto, hanno angoli di 30° e di 60°; i triangoli n° 13 e n° 14 sono congruenti, il triangolo n° 12 (**Figura 2**) è simile ad essi, nel senso matematico del termine; in altre parole, i triangoli n° 12, n°13 e n° 14 hanno angoli congruenti e lati in proporzione. Si sono ritagliati numerosi triangoli di colori diversi, con le stesse proprietà geometriche di quelli del dipinto, i cui lati avessero all'incirca le seguenti misure: ipotenusa di 10 cm, un cateto di 5 cm e l'altro di 8,66 cm circa. D'ora in poi, per intenderci, li chiameremo "triangoli-base".

Di seguito si presenta innanzitutto un'attività preliminare (paragrafo 4), sperimentata in diverse classi del secondo ciclo (allievi di 8-10 anni), i cui risultati hanno suggerito l'opportunità di proseguire nel lavoro. Si descrive poi dettagliatamente l'itinerario didattico (paragrafo 5) progettato e sperimentato nella classe IV A della scuola elementare "Padre Lino Maupas" di Vicofertile (PR), formata da 25 alunni, in presenza dell'insegnante G. Barantani e dell'autrice del presente articolo. L'attività in classe è stata svolta con cadenza quindicinale, dal mese di febbraio al mese di maggio. Tutte le sessioni di lavoro sono state videoregistrate. Quando è iniziata la sperimentazione, l'insegnante aveva già introdotto i poligoni, in particolare aveva trattato in modo approfondito i triangoli, e aveva appena introdotto alcuni tipi di quadrilatero.

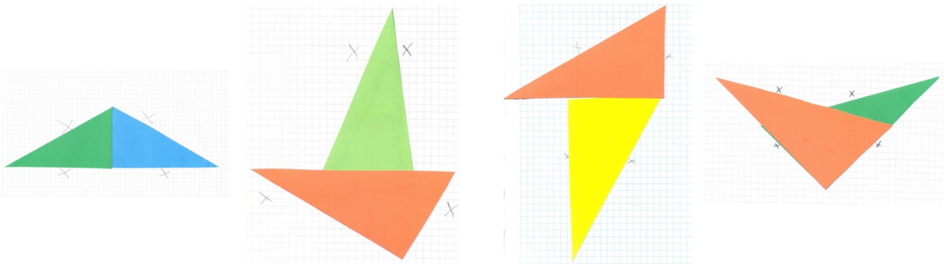
4 L'antefatto

L'idea iniziale è stata quella di fornire a ciascun allievo due triangoli-base di colori diversi ed un foglio di formato A4, chiedendo di costruire con essi una figura a pia-

1. Osserviamo, per inciso, che le prove standardizzate, come le Prove Invalsi, presentano spesso quesiti basati su figure ottenute accostando figure tradizionali e non.

cere, di incollarla sul foglio e di contare i suoi lati. L'attività è stata implementata in diverse classi di Parma e provincia, con allievi dagli 8 ai 10 anni. Qui si presenta la sperimentazione attuata nella classe terza dell'insegnante Rossana Ficini, I.C. "P.L. Belloni", di Colorno (PR).

Si è osservato che su 17 protocolli, 12 presentavano poligoni convessi e 5 poligoni concavi; 15 poligoni erano poi ottenuti per giustapposizione, 2 per sovrapposizione. Di seguito alcuni esempi:



a) b) c) d)

Figura 3
Giustapposizione di triangoli: alcuni esempi.

Il primo protocollo (**Figura 3a**) presenta la sagoma di un poligono convesso, gli altri (**Figure 3b, 3c, 3d**) di poligoni concavi. Nei primi tre protocolli i due triangoli-base sono stati giustapposti, mentre nel quarto si è fatto ricorso ad una sovrapposizione. Forse in **Figura 3b** si è voluto costruire un oggetto, una barca: come già detto, secondo Duval (1995) il primo modo di vedere le figure è la cosiddetta "visualizzazione iconica", che si realizza attraverso la percezione, mediante la somiglianza con un oggetto reale. Anche nella ricerca descritta nella premessa, si è notato che i bambini tendevano a denominare "barca" o "nave" la configurazione costituita dai triangoli n° 12 e n°19 (**Figura 2**). Infine il criterio usato per costruire la **Figura 3d** potrebbe essere la ricerca di simmetria (presente per altro anche in **Figura 3a**).

A una prima lettura, la richiesta di contare i lati potrebbe sembrare banale, ma le crocette usate per indicarli fanno riflettere. Se osserviamo le sagome con 'gli occhi della geometria', notiamo che in **Figura 3a**, i lati sono tre, ma l'allievo ne conta quattro, probabilmente perché vede due lati di due diversi colori; ciò non si verifica invece in **Figura 3d**, in cui il 'lato bicolore' è considerato come un unico lato. In **Figura 3b**, i lati sono sei, ma l'allievo ne conta quattro, così pure in **Figura 3c** i lati sono cinque, ma le crocette quattro. È interessante interrogarsi su questo comportamento, che conduce ad errato conteggio dei lati, e che si è riscontrato in quattro su cinque dei protocolli con rappresentazione di poligoni concavi. L'analisi dei protocolli impone inoltre una riflessione sul concetto di lato. Probabilmente il problema è insito nell'attività proposta: il bambino non esegue quel processo mentale di "fusione delle forme" che porta a vedere la sagoma nella sua globalità, proprio perché ha costruito la sagoma con le sue mani e sa che essa è composta da due triangoli, che per di più sono di colori diversi.

Nella tradizione scolastica spesso si usa la parola 'lato' senza darne una definizione, sottintendendo che si tratta del segmento congiungente due vertici consecutivi.[2] Si dice per esempio che "un triangolo ha tre lati" e nel contarli si indicano; ci si riferisce inoltre quasi sempre a poligoni convessi per i quali il conteggio dei lati è più semplice. Nel caso dei poligoni concavi, per poter contare i lati occorre individuare prima i vertici, è necessario cioè passare a quell'attività che Duval (2005) chiama "decomposizione in unità figurali" o "decostruzione dimensionale delle forme in unità 1D e 0D", che, come già detto, l'autore ritiene fondamentale per il passaggio al corretto modo di 'vedere' in geometria, cioè alla "visualizzazione non iconica". Nel caso della **Figura 3a**, il conteggio del numero dei lati può fornire risposte diverse a seconda che si osservino la 'sagoma' ed i suoi colori (visualizzazione iconica) oppure la 'figura geometrica' rappresentata da quella sagoma (visualizzazione non iconica), che è, con buona approssimazione, un triangolo isoscele. Alla fine della lezione, si è fatta chiarezza sul concetto di lato, tramite una discussione in classe relativa agli elaborati degli allievi.

5 Itinerario didattico

5.1 Consegna n° 1: costruzione libera di figure

L'insegnante fornisce a ciascun allievo due triangoli dello stesso colore, con la seguente consegna:

> *"Con questi due triangoli costruisci la figura che vuoi, incolla sul foglio i triangoli che la compongono e dai un titolo alla configurazione ottenuta".*

Commento: lo scopo dell'attività è quello di lasciare spazio alla fantasia ed alla creatività degli allievi e di motivare al lavoro successivo attraverso un approccio graduale. Nella sua 'Teoria del modello generico', Hejny (2004) pone come prima e irrinunciabile tappa verso l'apprendimento la motivazione, che descrive come la tensione che si crea nella mente come risultato del divario tra lo stato di conoscenza esistente e quello auspicato. La consegna data, né impegnativa né difficile, ha proprio lo scopo di essere motivante.

Analisi dei risultati: i 25 protocolli presentano sagome ottenute per giustapposizione dei due triangoli iniziali secondo le seguenti modalità: accostamento totale di lati (5 protocolli, tra cui 3 triangoli e 2 parallelogrammi), avvicinamento parziale di lati (11 protocolli), accostamento di vertici con lati (7 protocolli), accostamento di vertici (2 protocolli). Si osserva inoltre che 13 sagome presentano centri o assi di simmetria. Ecco alcuni esempi:

2. Forse si pensa che possa emergere in modo naturale dalla definizione introdotta precedentemente di 'linea poligonale' o 'linea spezzata'.

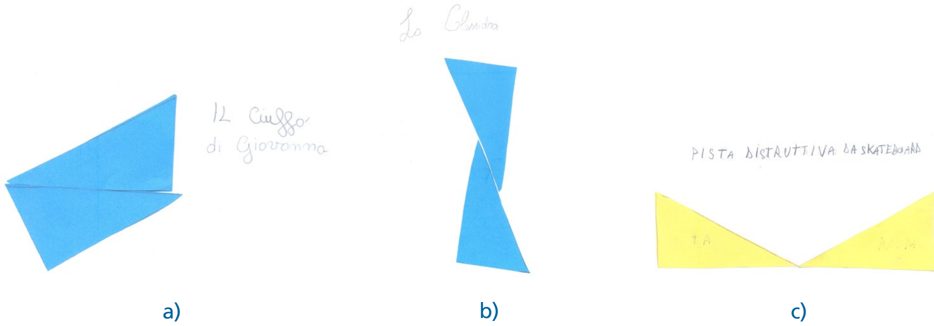


Figura 4
Giustapposizione di triangoli dello stesso colore: alcuni esempi.

Nella **Figura 4a**), intitolata "La barca stramba movimentata", sono accostati l'ipotenusa di un triangolo con il cateto maggiore di un altro; la giustapposizione è ovviamente parziale, anche se le lunghezze 'differiscono di poco'. Interessante è il titolo che, in un'altra classe, un allievo ha attribuito ad una composizione simile a questa: ha scritto infatti "Quasirettangolo", forse nell'intento di usare una nomenclatura il più possibile vicina a quella della geometria, rispettando nel contempo l'immagine suggerita dalla sagoma. Dalla discussione in classe è emerso che la sagoma di **Figura 4a** rappresenta un poligono concavo con 5 lati, anche se "un lato è molto piccolo". La **Figura 4b**, ottenuta accostando parzialmente le ipotenuse, è intitolata "La clessidra"; dal punto di vista teorico, rappresenta un poligono concavo con 6 lati, che ha un centro di simmetria. Infine la "Pista distruttiva di skateboard" (**Figura 4c**) pone un interessante quesito: si tratta di un poligono o dell'unione di due triangoli? Per una possibile risposta, si rimanda alla approfondita analisi della definizione di poligono fatta da Villani (2006, pp. 240-250), che è stata oggetto di lettura e di discussione con gli insegnanti durante la fase di analisi dei protocolli.

5.2 Consegna n° 2: costruzione di figure in base ad un criterio

La consegna è la seguente:

> "*Con questi due triangoli (dello stesso colore) costruisci una figura, facendo in modo che due lati si accostino perfettamente*".

Commento: lo scopo è quello di escludere i poligoni concavi e di promuovere la costruzione di poligoni convessi. Con la locuzione 'accostare perfettamente', scelta dall'insegnante per comunicare la consegna, si intende una giustapposizione di lati completa e non parziale. Si sarebbe potuto anche parlare di 'lati coincidenti', ma il concetto di coincidenza (così come quello di uguaglianza) in matematica è complesso, per questo si è preferito in questo caso evitarlo, non essendo gli allievi abituati all'uso di questo termine. Per maggiore chiarezza, la consegna è stata spiegata mostrando esempi di coppie di triangoli-base i cui lati sono "perfettamente accostati", e altri controesempi.

Analisi dei risultati: L'esame dei 22 protocolli raccolti ha fornito i seguenti risultati: 11 deltoidi (ottenuti accostando le ipotenuse) (**Figura 5a**, intitolata *Il tlu-tlu giallo con il fiocco* e **Figura 5e**, intitolata *L'aquilone disperso*), 7 triangoli equilateri (ottenuti accostando i cateti maggiori) (**Figura 5b**, intitolata *Il diamante*), 1 triangolo isoscele (ottenuto accostando i cateti minori dei due triangoli-base) (**Figura 5c**, intitolata *L'astronave azzurra*), 2 parallelogrammi (ottenuti accostando i cateti maggiori), (**Figura**

5d), e un poligono concavo e non rispettante la consegna, in quanto non presenta una completa giustapposizione di lati (**Figura 5f**, intitolata *Il razzo nello spazio*).

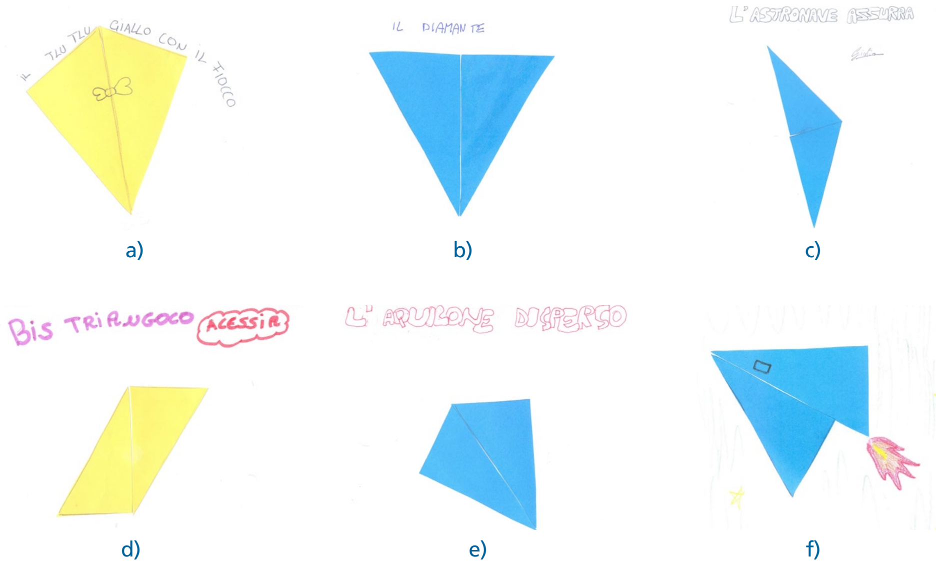


Figura 5
Giustapposizione di triangoli in modo che due lati 'coincidano': alcuni esempi.

Nessun allievo ha realizzato un rettangolo, come fatto da Kandinsky accostando in triangoli n° 13 e n° 14 (**Figura 2**); una possibile interpretazione, emersa da una conversazione con gli insegnanti, è la seguente: il rettangolo è una figura "usuale", "statica", "poco piacevole", "meno accattivante di figure con 'punte' o simmetrie evidenti". Non è un caso che, nonostante non fosse stato richiesto, i bambini abbiano dato un titolo alla propria creazione: è una conseguenza della consegna precedente, ma è anche testimonianza della volontà di realizzare una figura piacevole e per loro significativa.

5.2.1 Il problema della nomenclatura delle figure

L'insegnante ha raccolto i protocolli ed ha proposto di organizzarli in base alle forme. Si sono confrontate le sagome allo scopo di individuarne le tipologie e di classificarle. L'attività di confronto è risultata importante e significativa in quanto ha condotto all'osservazione di tutte le sagome prodotte dagli allievi e al riconoscimento della presenza di figure congruenti (o "uguali" come dicono i bambini), anche se diversamente orientate rispetto ai bordi del foglio.
L'attività di classificazione ha comportato l'uso di 'nomi per le figure' e ha promosso l'esigenza di una opportuna nomenclatura. In base alle conoscenze precedenti, le **Figure 5b** e **5c** sono state chiamate immediatamente "triangolo equilatero" e "triangolo isoscele". Significativo è l'uso della locuzione "Bis triangolo" per la **Figura 5d**, in assenza di un nome (l'altro parallelogramma realizzato, avente le stesse caratteristiche, è stato intitolato "Faccio geometria"). Per denominare i deltoidi si è fatto ricorso spesso alla parola 'aquilone', ma anche a 'piramide', 'lancia' o 'scudo'. Si è posto dunque il problema di come chiamare le figure con il linguaggio della geometria. Per quanto riguarda la **Figura 5d**, inizialmente l'insegnante ha fatto osservare che ha quattro lati e che, di conseguenza, è un quadrilatero; per introdurre la parola "parallelogrammo" si è poi fatto ricorso ad una esperienza realizzata con gli stessi allievi nel primo biennio di scuola elementare: in quella occasione, allo scopo di indagare

sul linguaggio spontaneo usato dagli allievi per descrivere relazioni geometriche, era stata proposta un'attività basata su artefatti costituiti da coppie di cannucce opportunamente disposte per introdurre parallelismo e perpendicolarità tra segmenti (Vighi & Marchini, 2014) e (Vighi, 2015). Alla fine della seconda classe, gli allievi hanno mostrato di saper riconoscere visivamente, e di saper utilizzare i suddetti concetti, pur non essendone stata fornita una definizione (Vighi, 2016b). È bastato far riferimento a quell'esperienza, indicando i lati opposti di un parallelogrammo perché i bambini dicessero che "sono paralleli". Dopo aver osservato che anche gli altri due lati opposti erano paralleli, si è introdotta la parola 'parallelogramma'. Il vocabolo 'deltoide', in riferimento alle Figure 5a e 5b, è stato suggerito dal docente, con richiesta di cercare di spiegare il suo significato. Ne è scaturita una discussione sull'etimologia della parola: "perché è a forma di delta, come il deltaplano" (qui è la forma che suggerisce un'immagine) o "L'ho già sentita … come il delta del Po" (qui è una parola che ne richiama un'altra). È stata poi aggiunta qualche osservazione sul 'muscolo deltoide' e si è precisato che talvolta un 'deltoide' viene anche chiamato 'aquilone'.

5.3 Consegna n° 3: un problema combinatorio

Nella lezione successiva è stato posto il seguente problema:

> "*In quanti modi è possibile accostare i due triangoli rispettando la condizione che due lati 'si accostino perfettamente'? In altre parole, le figure che avete costruito durante l'incontro precedente, hanno tutte le forme possibili?*"

Commento: lo scopo è quello di individuare tutti i tipi di poligoni convessi che rispettano la consegna. Ovviamente la risposta è sei: si è infatti in presenza di tre coppie di figure, ciascuna ottenuta accostando i due triangoli-base rispettivamente lungo cateto minore, cateto maggiore o ipotenusa, in modo che siano direttamente o inversamente congruenti (Figura 6).

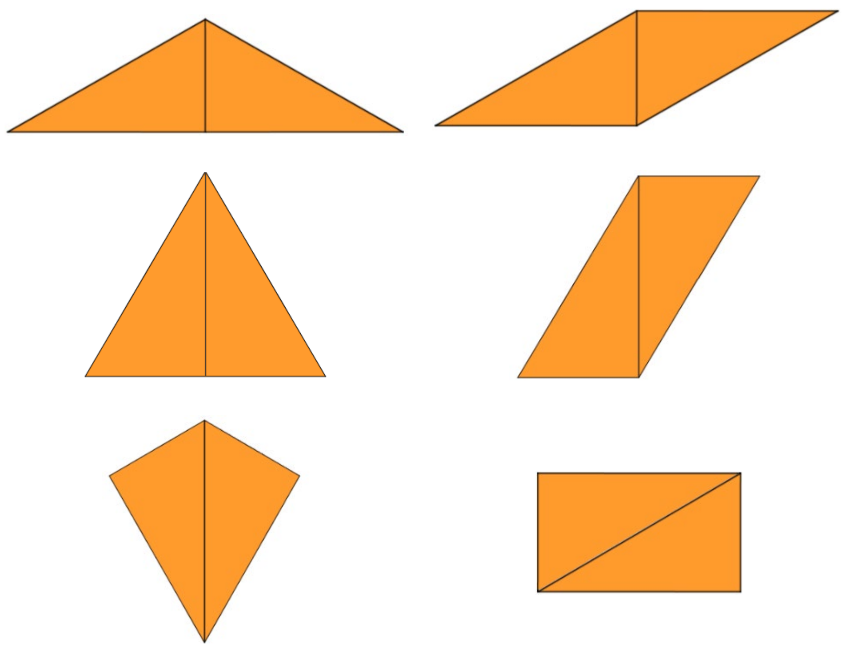


Figura 6
Le sei configurazioni possibili.

Analisi dei risultati: In classe, il lavoro ha preso le mosse dall'analisi dei protocolli e dalla loro classificazione effettuata durante la lezione precedente. Ci si è ben presto resi conto del fatto che la consegna richiede un'organizzazione sistematica dei casi possibili, che gli allievi non erano in grado di elaborare autonomamente. Si è allora suggerita l'osservazione delle due sagome centrali di Figura 6, mettendo in evidenza che esse sono state ottenute accostando "gli stessi lati, ma in modo diverso". Si è proposto di procedere in modo analogo nel caso del triangolo isoscele e del deltoide. La richiesta ha promosso quell'operazione di ribaltamento di un triangolo-base di cui si è parlato nella premessa; anche per molti allievi di scuola elementare, sebbene avessero almeno quattro anni in più rispetto a quelli della scuola dell'infanzia, il ribaltamento è risultato non spontaneo e talvolta difficile da realizzare. Per facilitare il compito, si è fornito un ulteriore suggerimento: "lasciare nella stessa posizione il triangolo-base di sinistra ed operare su quello di destra". In effetti, questa è la logica con cui è stata organizzata la Figura 6. Solo attraverso il dialogo tra pari e tra allievi e docenti, dopo una vivace discussione in classe, si è pervenuti ad individuare tutti e sei i tipi di figure costruibili in base alla consegna.

5.4 Consegna n° 4: costruiamo un poster e posizioniamo le etichette

Nell'incontro successivo sono stati presentati agli allievi due poster di formato A3, preparati precedentemente, che mostravano le sagome di Figura 6. Si è anche predisposta una scatola contenente delle etichette con le seguenti diciture: TRIANGOLO SCALENO, TRIANGOLO ISOSCELE, TRIANGOLO EQUILATERO, PARALLELOGRAMMA, RETTANGOLO, DELTOIDE, TRAPEZIO, ROMBO, QUADRATO. Si è spiegato che le etichette dovevano essere collocate opportunamente sui poster e si è proceduto a estrarle a caso. La seguente figura (Figura 7) mostra il risultato finale dell'attività.

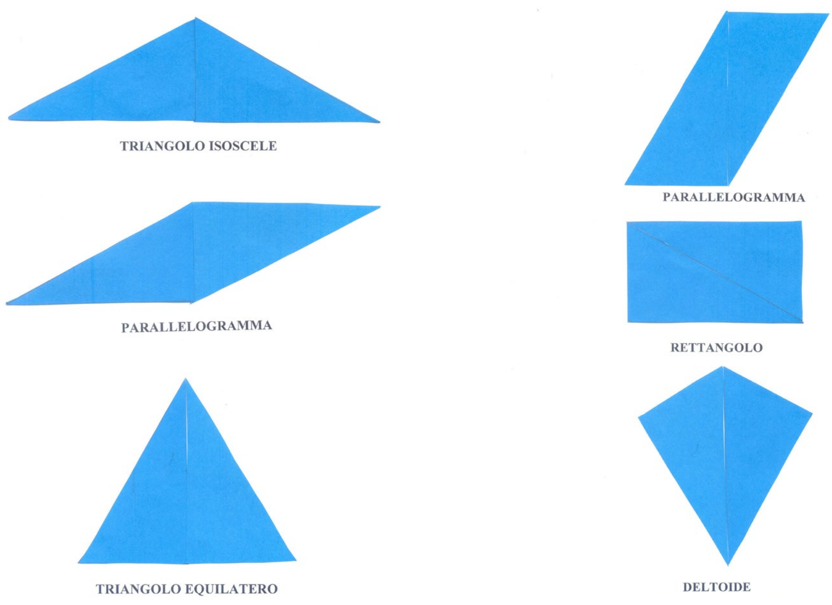


Figura 7
I poster contenenti le figure costruite rispettando la consegna.

Commento: si propone il passaggio inverso rispetto a quello effettuato durante l'attività descritta in 5.2.1. Non si tratta infatti di denominare figure, ma di 'scoprire forme' a cui assegnare nomi, associando una etichetta a ciascuna figura. Le sagome nei poster sono sei, mentre le etichette presentano nove nomi diversi: questo fa nascere l'esigenza di costruire altre figure a cui associare le etichette rimanenti.

Analisi dei risultati: la prima etichetta estratta dalla scatola è stata 'PARALLELOGRAMMA'. È stato necessario riprendere il suo significato; in particolare, un bambino, ricordando le osservazioni fatte nella lezione precedente, l'ha descritta così: "È una figura che ha due lati paralleli in un verso e altri due paralleli nell'altro verso". Non si tratta certo di una definizione tradizionale, di quelle che compaiono nei libri di testo, ma è un primo passo verso una definizione vera e propria. Ulteriori precisazioni sono state rimandate al prosieguo dell'attività. Dopo aver osservato che nei poster i parallelogrammi sono due, una etichetta PARALLELOGRAMMA è stata incollata sotto la seconda figura ed un'altra sotto alla quarta (**Figura 7**).

Successivamente si sono posizionate le etichette 'TRIANGOLO ISOSCELE' (i bambini hanno detto subito: "è il primo") e 'TRIANGOLO EQUILATERO' ("il terzo"). Qualcuno ha espresso dubbi sul fatto che quest'ultimo triangolo fosse equilatero ("non c'è, dobbiamo mettere da parte l'etichetta"): in effetti, dovendo stimare solo "ad occhio", la perplessità è lecita. Anche questo è uno spunto da riprendere per promuovere il passaggio da visualizzazione iconica a non iconica (Duval, 2005).
L'estrazione successiva ha riguardato l'etichetta 'QUADRATO'. Un bambino, indicando il secondo poster, ha risposto subito "È l'ultimo!", ma è seguito un coro di "No!". Questo episodio ha fornito lo spunto per parlare delle proprietà del quadrato (secondo gli allievi, "Il quadrato ha i lati paralleli e tutti uguali" e "Il sesto non ha nessuno dei due") e per ricordare la parola 'deltoide', introdotta precedentemente. L'etichetta 'DELTOIDE' è stata così incollata sotto la sesta sagoma, mentre quella con la scritta 'QUADRATO' è stata messa da parte. Si è poi proceduto con l'estrazione dell'etichetta 'RETTANGOLO', prontamente incollata. A quel punto i poster erano completati e sono stai appesi ad una parete dell'aula. Nel sacchetto rimanevano le etichette 'TRIANGOLO SCALENO', 'QUADRATO', 'ROMBO' e 'TRAPEZIO'.

L'insegnante ha poi chiesto di riportare sul quaderno i risultati dell'attività, copiando i poster. Poiché il 'quaderno di matematica' era a quadretti, si è posto il problema della rappresentazione dei triangoli-base che per le loro proprietà geometriche non possono avere tutti e tre i vertici nei 'nodi' della quadrettatura. Si è allora scelto di far disegnare triangoli rettangoli diversi da quelli manipolati, con cateti di 3 e 4 'lati di quadretti', in modo che l'ipotenusa avesse una lunghezza rappresentata da un numero intero, in questo caso il 5 (si è dunque fatto ricorso alla terna pitagorica 3, 4, 5). Ecco due fotografie di quaderni (**Figura 8**).

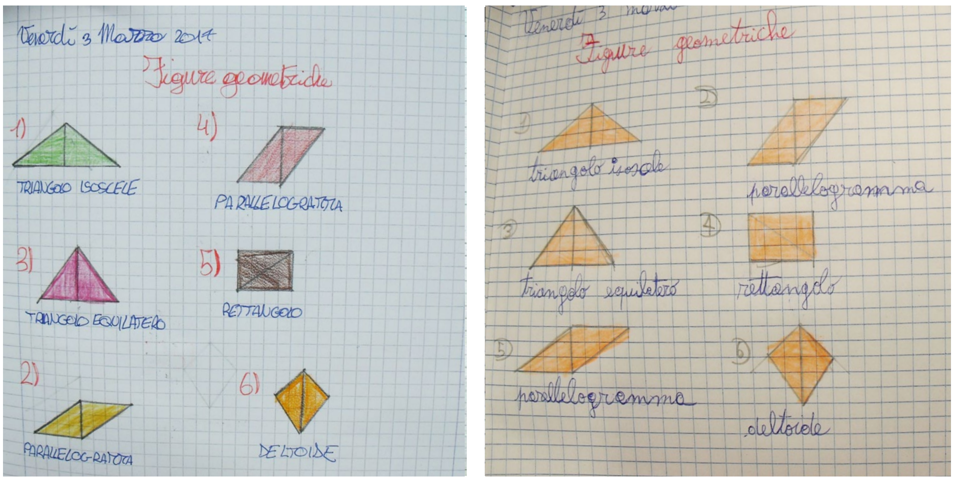


Figura 8
I quaderni.

Non si ottiene ovviamente una riproduzione in scala delle figure del poster, ma i disegni sono comunque accettabili, visti gli scopi dell'attività. Ripensandoci, sarebbe stato meglio fornire a ciascun bambino una coppia di triangoli-base e, dopo averli appoggiati opportunamente su di un foglio bianco, far disegnare i contorni delle sagome ottenute. In questo modo si sarebbero disegnate forme con le stesse caratteristiche di quelle dei poster, passando così dal disegno di oggetti bidimensionali (2D) a quello di lati (1D) e vertici (0D), come suggerito da Duval (2005).

5.5 Consegna n° 5: ricerca delle figure simmetriche

Si propone un'osservazione delle sagome in termini di simmetria, tramite la seguente consegna:

> "*Tra le sei figure dei poster, ci sono figure simmetriche (nel senso che hanno assi di simmetria)? Se sì, quali*?"

Commento: in classe si era già parlato di 'simmetria nel caso dei triangoli', basandosi sulla piegatura che fa combaciare una parte con l'altra. In precedenza, avendo ravvisato l'importanza della manipolazione e della piegatura, erano state preparate numerose sagome di carta con le sei forme in oggetto, alcune congruenti a quelle del poster, ma anche altre di varie dimensioni, per esempio rettangoli, parallelogrammi di misure tali da poter essere manipolati più facilmente di quelli del poster (descritti dai bambini come "troppo stretti e lunghi") ecc. Le sagome di carta sono state distribuite tra gli allievi, con l'intento di consentire loro di manipolare, oltre che di osservare le figure sui poster, per poter rispondere alla domanda posta.

Analisi dei risultati: Inizialmente si è osservata la ricerca dell'asse di simmetria come 'piega che divide a metà la figura'. Nel nostro caso, i lati accostati dei triangoli-base possono aver indotto in errore, un bambino ha infatti descritto l'asse di simmetria come "la fessura tra i lati". Ne abbiamo approfittato per discutere le seguenti affermazioni: "Se una retta taglia a metà una figura, allora è un asse di simmetria" e "Se una retta è un asse di simmetria allora divide in due parti uguali una figura": la prima è falsa, mentre la seconda è vera ed è l'enunciato di un teorema. Un'altra misconcezione è emersa relativamente alla natura dell'asse di simmetria. In particolare, nel caso del triangolo isoscele l'asse di simmetria è stato descritto da un allievo come "l'altezza del triangolo":[3] innanzitutto di altezza in un triangolo non ce n'è solo una, quella che solitamente viene osservata, inoltre, quando si parla di 'asse' ci si riferisce ad una retta, ma quello che i bambini vedono e descrivono è la piegatura, cioè un segmento. L'espediente a cui si è fatto ricorso è stato quello di distinguere la piega che porta una parte del triangolo sull'altra (che poteva rappresentare un'altezza), dalla piega del foglio bianco su cui il triangolo è incollato (asse), chiedendo, come spesso si fa, di immaginare che essa prosegua al di là dei bordi del foglio. Anche in questo caso, è stato necessario riprendere l'argomento in un altro momento per parlare di questi concetti.

3. L'allievo si riferisce qui alla cosiddetta 'altezza relativa alla base', di cui si parla tradizionalmente. Ricordiamo che in un triangolo le altezze sono tre, ciascuna delle quali è relativa ad un lato.

L'attività di piegatura delle sagome di carta è stata fondamentale per giungere all'individuazione di simmetrie nelle figure che ne possiedono ed ha posto il 'problema del parallelogramma'. In un primo tempo, in base alla 'somiglianza' con il rettangolo, alcuni allievi hanno cercato di piegarlo lungo le mediane (segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti), ma hanno ben presto rinunciato. A quel punto è stato introdotto il "centro di simmetria" concludendo che "un parallelogramma non ha assi di simmetria, ma ha un centro di simmetria".

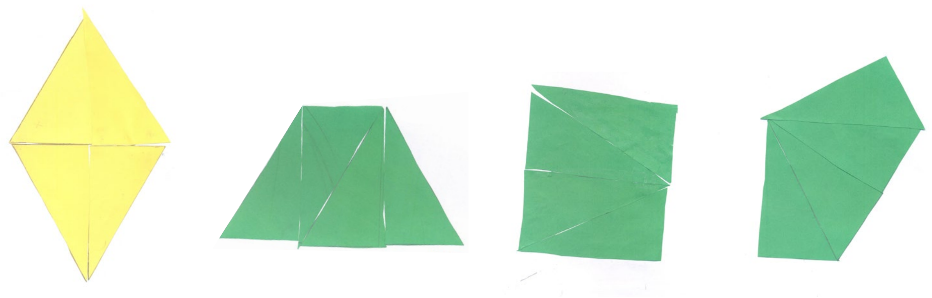
5.6 Consegna n° 6: costruiamo nuove figure

Ci si interroga sulla possibilità di costruire altri quadrilateri, usando i triangoli-base.

> "*La volta scorsa, nella scatola sono rimaste le etichette 'TRIANGOLO SCALENO', 'QUADRATO', 'ROMBO' e 'TRAPEZIO'. Queste figure si potranno costruire con i nostri triangoli-base?*"

Commento: l'obiettivo è quello di allargare l'orizzonte sulla 'famiglia dei quadrilateri' e di completare la casistica (anche relativamente alla 'famiglia dei triangoli').

Analisi dei risultati: Una bambina ha risposto che "un quadrato si può fare con 4 triangoli". I compagni, cogliendo il suo suggerimento, hanno lavorato in coppia, cimentandosi con la manipolazione di quattro triangoli-base. Alcuni risultati sono documentati dai protocolli riprodotti in **Figura 9**.
Su 10 protocolli, si sono ottenuti 6 rombi (**Figura 9a**), un solo trapezio (**Figura 9b**) (le due bambine che l'hanno costruito, essendo state le uniche a farlo, ne erano molto fiere), due rettangoli (**Figura 9c**) e anche una figura pentagonale (**Figura 9d**), che i bambini hanno proposto di chiamare "ventaglio". Questo ha consentito di precisare che in geometria solo alcune 'figure notevoli' hanno un nome, ma la maggior parte delle figure no. Si osservi che tutti e quattro i tipi di sagome costruite hanno assi di simmetria, forse per le caratteristiche della consegna, ma probabilmente anche per motivi di carattere culturale (Weyl, 1962).



a) b) c) d)

Figura 9
Costruzione di altre figure: alcuni esempi.

A questo punto rimanevano due etichette: 'TRIANGOLO SCALENO' e 'QUADRATO'. Per realizzare un TRIANGOLO SCALENO due bambini hanno pensato bene di prendere un solo triangolo-base ("C'abbiamo messo un po' perché abbiamo provato altre forme") e hanno usato il righello per verificare che lo è, dicendo: "ha un lato lungo, uno molto corto e questo qui è il medio" (in riferimento rispettivamente a ipotenusa, cateto minore e cateto maggiore). In seguito avremmo sfruttato questa nomenclatura (paragrafo 5.8).

Precisiamo che la **Figura 9c** è stata costruita nel tentativo di ottenere un quadrato da una coppia di bambini, che hanno affermato: "è un quadrato, l'abbiamo anche misurato, è di 10 cm da tutti e due i lati"; dunque, per perseguire il loro intento, hanno 'forzato le misure' (in realtà i lati misurano all'incirca 10 cm e 8,7 cm). In effetti la **Figura 9c** non ricorda i 'soliti' rettangoli con lati di misure decisamente diverse, qui le lunghezze dei lati non differiscono di molto. Il problema sarà ripreso più avanti (paragrafo 5.8). Durante la discussione in classe, un bambino commenta così: "Ci hanno imbrogliato gli angoli retti! Questa figura ha tutti gli angoli retti come il quadrato, ma per essere un quadrato dovrebbe avere anche tutti i lati uguali". In questo modo comincia a realizzarsi quella osservazione delle proprietà delle figure che fa passare dal livello visuale a quello descrittivo (van Hiele, 1986); inoltre il quadrato comincia ad essere visto come particolare rettangolo. Un episodio analogo si è verificato relativamente al rombo (**Figura 9a**), che è stato descritto dai bambini prima come un "parallelogramma", poi come "parallelogramma speciale perché è equilatero, mentre quelli dei poster (**Figura 7**) hanno due lati uguali e due lati uguali" (si intende far riferimento alle coppie di lati opposti uguali). Infine è stato detto che "un rombo non è un quadrato perché deve anche avere tutti gli angoli retti, mentre nel rombo due sono ottusi e due acuti". Il riconoscimento di analogie e differenze è un primo passo verso l'individuazione di proprietà e la classificazione, dunque verso il 'livello razionale' di van Hiele (1986).
Di fatto, con i triangoli-base non si può costruire un quadrato, per ragioni di carattere teorico. Solo dopo aver consegnato coppie di triangoli rettangoli isosceli, il 'problema impossibile' ha avuto soluzione (**Figura 11 b**). Un'osservazione di carattere didattico: si è scelto di cambiare colore per il nuovo tipo di triangolo (con angoli di 90°, 45° e 45°), in modo tale da evidenziare la differenza rispetto ai triangoli-base usati in precedenza. Come si vede nelle figure seguenti, alcuni bambini hanno usato i 'nuovi' triangoli rettangoli isosceli per costruire un triangolo isoscele (seconda e unica altra possibilità con quel materiale), ma … non c'erano più etichette da incollare! Al termine dell'attività sono stati costruiti due nuovi poster (**Figura 10**).

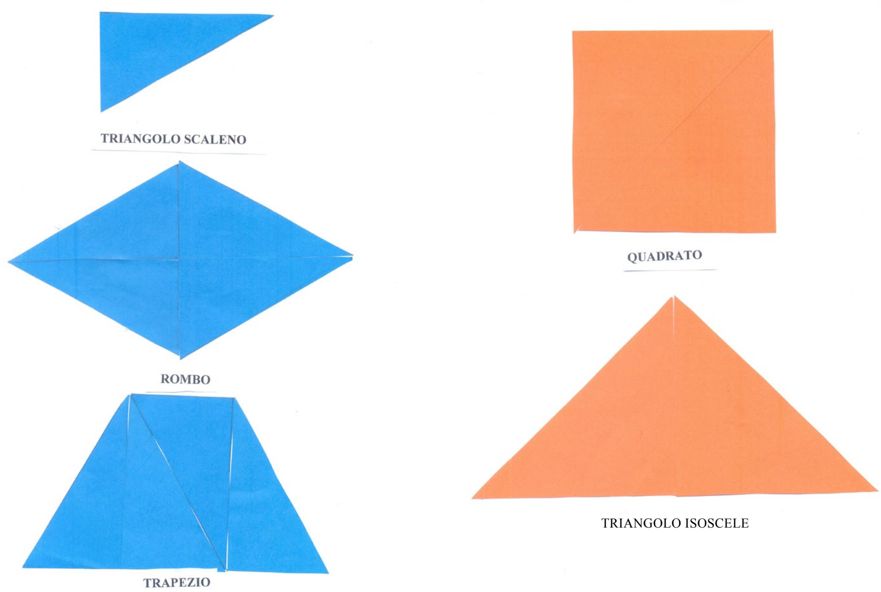


Figura 10
Costruiamo
due nuovi poster.

5.7 Consegna n° 7: confrontiamo le aree

A distanza di circa un mese, sono stati ripresi i poster di Figura 7 ed è stato presentato in classe un nuovo quesito:

> "*Osserva le figure dei primi due poster: ce n'è qualcuna più grande?*"

Commento: La domanda è posta in modo volutamente ambiguo e fuorviante, mediante l'uso dell'aggettivo 'grande'. Un primo obiettivo è quello di far comprendere che la forma non determina l'area di una figura e di mettere in guardia rispetto all'influenza della forma e alle suggestioni di carattere percettivo. Si vuole inoltre pervenire all'osservazione dell'equiestensione delle sagome, motivata dal fatto che tutte e sei sono state costruite accostando coppie di triangoli 'tutti uguali fra di loro' (o meglio 'triangoli congruenti').

Il problema del rapporto tra forma e area è stato studiato a fondo da Chamorro (2002, p. 63):

> «A nostro giudizio, la componente dominante della nozione di superficie[4] è, di fatto, la forma: è impossibile concepire una superficie senza la forma. Quando gli allievi identificano una superficie, lo fanno in primo luogo attraverso la forma, ecco perché qualsiasi cambiamento in essa comporta l'idea che si sia ottenuta una superficie differente che non conserva alcuna relazione con la prima, per cui, se il cambiamento della forma è stato rilevante, l'allievo non riconosce la conservazione della superficie».

4

La stessa autrice individua un vero e proprio ostacolo didattico nell'uso esclusivo di superfici disegnate ed evidenzia nella presentazione di superfici ritagliate una variabile didattica (Brousseau, 1994) fondamentale. Nel nostro caso, questo problema dovrebbe essere superato, poiché le sagome sono state costruite attraverso manipolazioni dei triangoli-base. L'attività svolta suggerisce anzi un metodo per confrontare le aree, quello basato sulla 'scomposizione in parti uguali'.

Analisi dei risultati: Come previsto, in un primo tempo gli allievi hanno cercato di individuare la 'figura più grande' usando solo la vista e la loro idea personale di 'più grande'. Alcuni hanno scelto il triangolo isoscele (probabilmente privilegiando la larghezza), altri il deltoide (badando invece all'altezza), altri ancora il triangolo equilatero. Sicuramente la prima e immediata reazione alla domanda posta è stata dettata dalla percezione che, come la *teoria della Gestalt* documenta (Arnheim, 1962), svolge un ruolo fondamentale nel vedere le figure. Tuttavia, è stato sufficiente che, dopo le prime risposte, si chiedesse: "Ma vi fate imbrogliare così facilmente?", perché gli allievi capissero che la domanda era ingannevole, dato che grande è un termine generico che può significare vari aspetti e, dopo una breve riflessione, riconoscessero l'equiestensione delle sei sagome. Una discussione finale ha permesso di fare chiarezza sull'uso ambiguo di locuzioni come 'più grande' e sull'importanza di usare espressioni come ' … ha la stessa area di …' oppure '… sono equiestese'. Nel caso specifico delle sagome di Figura 6, si è concluso dicendo che esse sono equiestese.

4. Chamorro utilizza in questa citazione il termine superficie come sinonimo di area.

5.8 Consegna n° 8: confrontiamo i perimetri

Il quesito successivo è relativo al confronto dei perimetri delle sei sagome contenute nei primi due poster (**Figura 7**):

> "*Ci sono figure che hanno contorni della stessa lunghezza? Rispondi senza usare il righello*".

Commento: l'intento è quello di far confrontare i contorni senza misurare, tenendo conto delle caratteristiche dei triangoli che compongono le sagome, allo scopo di comunicare che due contorni possono essere confrontati in vari modi, non necessariamente calcolandone la lunghezza. Si vuole anche cogliere l'occasione per lavorare sulla distinzione tra il concetto di perimetro e quello di area. Secondo Duval (2005), sarebbe proprio la visualizzazione iconica delle figure a provocare confusione tra i due concetti, in quanto l'osservazione globale delle forme non porta ad osservarne i contorni e le relative proprietà.

Analisi dei risultati: i bambini hanno subito pensato al perimetro, inteso come misura del contorno e, di conseguenza, avrebbero voluto ricorrere al righello. Per raggiungere il nostro intento è stato necessario portare l'attenzione sul confronto delle lunghezze dei lati dei 'triangoli-base', che avevano tanto manipolato in precedenza. La consegna ha promosso un'investigazione visiva dei lati dei triangoli (da 2D a 1D, nella notazione di Duval): riprendendo le locuzioni usate da una coppia di bambini (paragrafo 5.6) i cateti sono stati chiamati rispettivamente 'lato corto' e 'lato medio', mentre l'ipotenusa è stata denominata 'lato lungo'. L'osservazione dei contorni e la loro descrizione 'a parole' non hanno tuttavia prodotto i risultati attesi. Si è allora proposto di organizzare tramite una tabella il 'calcolo' delle lunghezze dei contorni.

La **Tabella 1** mostra il risultato finale. Si deve precisare che in un primo tempo è stata completata solo la seconda colonna, percorrendo con un dito il contorno di ciascuna sagoma e scrivendo di volta in volta quanto osservato. Il passaggio alla terza colonna, ha sviluppato una sorta di pre-algebra consistente in semplici addizioni e passaggi di calcolo letterale. I dati ottenuti nella terza colonna, completata successivamente, hanno reso evidente che le sagome sono a due a due isoperimetriche. I bambini hanno poi argomentato sul confronto arrivando a spiegare perché $2l+2m$ è maggiore di $2l+2c$ che a sua volta è maggiore di $2m+2c$. In questo modo, hanno potuto apprezzare i vantaggi del 'linguaggio delle lettere' rispetto a quello verbale. Si sarebbe potuta aggiungere una quarta colonna, dopo aver osservato che c è la metà di l in quanto "ogni triangolino è la metà di un triangolo equilatero"; abbiamo preferito evitarlo poiché la soluzione del problema posto era già stata individuata (volendo, si sarebbe potuta sfruttare questa occasione per fare ancora un po' di semplice calcolo letterale).

Figura 1	l+l+m+m	2l+2m
Figura 2	l+m+l+m	2l+2m
Figura 3	l+l+c+c	2l+2c
Figura 4	l+c+l+c	2l+2c
Figura 5	c+m+c+m	2m+2c
Figura 6	c+c+m+m	2m+2c

Tabella 1
Confronto di perimetri usando un po' di calcolo letterale.

A questo punto, ho proposto di riprendere il problema posto dalla **Figura 9c**: "Per capire se è un rettangolo o un quadrato senza usare il righello, possiamo usare le lettere". I lati del quadrilatero misurano rispettivamente $c + c = 2c$ e m, saranno uguali? I bambini sono pervenuti alla risposta solo attraverso la manipolazione ed il confronto diretto dei lati della sagoma (dal punto di vista teorico si sa che è $l = 2c$ e che $l \neq m$). Successivamente hanno verificato le loro congetture anche usando il righello.

5.9 Consegna n° 9: ragioniamo sugli angoli

Anche questa consegna si riferisce ai primi due poster (**Figura 7**).

> "*Utilizzando il goniometro, misurate gli angoli acuti di ciascun triangolo-base. Stabilite poi le misure degli angoli delle sei figure*".

Commento: Gli allievi hanno usato in precedenza il goniometro e sanno già che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180°. L'obiettivo è di condurre a scoprire che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è 360°.

Analisi dei risultati: I bambini hanno eseguito la consegna e verificato che gli angoli acuti di ciascun triangolo-base misurano 30° e 60°. Iniziando poi dal triangolo isoscele, che si trova in alto a sinistra nel poster (**Figura 7**), hanno scritto 30°+ (60° + 60°) + 30° = 180°; a questo punto, ricordando quanto appreso in precedenza, hanno detto subito che anche nel triangolo equilatero, che si trova nel poster (**Figura 7**), la somma degli angoli è 180° e si sono concentrati sui quattro quadrilateri rimanenti. Hanno iniziato dalla seconda figura, un parallelogramma con angoli di 30° + (60°+ 90°) + 30° + (60° + 90°) = 360°; questa attività ha consentito anche di osservare che gli angoli opposti hanno la stessa ampiezza. Procedimenti analoghi sono stati seguiti per l'altro parallelogramma e per il deltoide, mentre nel caso del rettangolo gli allievi hanno calcolato 90° × 4 = 360°, probabilmente usando una proprietà già osservata in precedenza. Alla fine dell'attività hanno notato che la somma delle ampiezze degli angoli di tutti e quattro i quadrilateri è 360° e si sono accorti del fatto che avrebbero potuto rispondere più velocemente calcolando 180° × 2 in quanto ciascun quadrilatero è formato da due triangoli-base. L'insegnante ha posto allora il seguente problema: "E per un quadrilatero qualunque quale sarà la somma delle ampiezze degli angoli?". Si è arrivati velocemente alla generalizzazione e all'estensione del risultato precedente, dopo aver usato l'espediente di 'dividere ciascun quadrilatero in due triangoli', mediante il tracciamento di una diagonale. In questo modo, si è enunciato il teorema (che verrà ripreso nella scuola media-superiore): "In ogni quadrilatero la somma delle ampiezze degli angoli interni è un angolo giro".

5.10 Consegna n° 10: L'indovinello

È stato proposto ai bambini il seguente indovinello:

> "*Io penso ad un quadrilatero e voi dovete indovinare qual è, facendo domande*".

Commento: si vuole stimolare a ragionare in termini di proprietà, per esempio, sono possibili domande come le seguenti: "ha tutti i lati uguali?" oppure "ha angoli retti?". Una volta tanto è il bambino che fa domande, e non l'insegnante!

Analisi dei risultati: a parte domande non accettabili, anche se lecite in base alla consegna, del tipo "è un rettangolo?", si è osservato che gli allievi, motivati dall'idea dell'indovinello, hanno partecipato con entusiasmo. In un secondo tempo il gioco è stato condotto a turno da un bambino, che ha preso il ruolo del docente. Significativo il fatto che un allievo abbia scelto come oggetto dell'indovinello un 'quadrilatero qualunque', in modo tale da poter rispondere negativamente a tutte le domande poste dai compagni, che alla fine, hanno compreso il 'trucco' usato dal loro interlocutore.

6 Conclusioni

In uno scritto di Clara Bozzolo sui quadrilateri, pubblicato nel 1999 e ancora nel 2017 in occasione della sua scomparsa, tra le possibili "Aperture", intese come sviluppi dell'attività, si legge: «I rettangoli si trasformano: scomposizione di un rettangolo e ricomposizione delle parti ottenute per formare altri poligoni» (Bozzolo, 2017, p. 41). Il lavoro qui descritto rientra proprio in quest'ottica. In ogni caso, mi ha stupito questa coincidenza tra la scomposizione di un rettangolo nei due triangoli individuati da una sua diagonale, da cui ha preso spunto l'itinerario descritto, e la frase di Clara. Per questo motivo ho deciso di dedicarle questo articolo, oltre che per l'argomento comune 'quadrilateri'.
L'itinerario fornisce un esempio del ruolo dell'osservazione didattica come strumento di ricerca e come strumento per l'insegnante. L'osservazione delle lezioni, sia durante il loro svolgimento sia mediante la successiva visione ed analisi dei filmati realizzati in classe, ha consentito di evidenziare atteggiamenti, errori, misconcezioni, difficoltà, problemi inerenti agli argomenti trattati, in funzione dei quali programmare le attività da proporre. Come già detto inizialmente, non si sono formulate ipotesi di ricerca, ma si è semplicemente cercato di fornire un esempio di "ingegneria didattica".[5] 5
Si tratta di un'esperienza didattica realizzata con oggetti molto particolari (i triangoli-base), ma sia la descrizione dell'itinerario in sé, che i commenti e le analisi che l'accompagnano possono mostrare utili spunti agli insegnanti. Precisiamo che le attività proposte sono state pensate di volta in volta, in base al comportamento degli studenti ed ai risultati e alle osservazioni emerse in ciascuna sessione di lavoro. Il percorso didattico può essere proposto gradualmente a partire dalla classe terza, così com'è, oppure può essere preso come esempio da cui trarre spunti per attività analoghe.
A proposito dell'insegnamento della geometria nella scuola elementare, Chamorro (2006, p. 415) evidenzia due "poli opposti", entrambi criticabili: da una parte un insegnamento basato su espressioni linguistiche che spesso risultano prive di signifi-

5. Per 'ingegneria didattica' si intende «… un insieme di sequenze d'aula concepite, organizzate e articolate nel tempo in forma coerente dal maestro-ingegnere per costruire un progetto d'apprendimento adibito ad una certa popolazione di allievi» (Douady, 1993).

cato per l'allievo, dall'altra un lavoro con materiali che rischia di ridursi a "bricolage" e che si ferma alle soglie della geometria. L'itinerario qui presentato, pur partendo dalla manipolazione di oggetti concreti, va al di là del bricolage e consente di sviluppare gradualmente sia il ragionamento geometrico, che il relativo linguaggio. È un percorso atipico, che porta alla costruzione di particolari figure geometriche, tuttavia la generalizzazione a 'quadrilateri qualunque' si potrà realizzare in seguito, ripartendo dal lavoro fatto, probabilmente senza particolari difficoltà.
Il lavoro in classe è andato quindi ben al di là della manipolazione e costruzione di figure. In altre parole, non abbiamo dimenticato quanto sostenuto da Duval (2016, p. 219), in base al quale per «comprendere e fare geometria» non occorre imparare a costruire figure, ma a «decostruire dimensionalmente le forme». Nel nostro caso, la manipolazione è un punto di partenza irrinunciabile, che fornisce l'opportunità di riflessioni ed argomentazioni di carattere geometrico, ma che viene gradualmente superato con il passaggio da aspetti pratici e visivi a considerazioni di carattere teorico. Nel prossimo anno scolastico si cercherà di procedere oltre, attuando il passaggio dalla 'costruzione' alla 'decostruzione', con individuazione di vertici, lati e proprietà geometriche, come già descritto.

Ringraziamenti.
Si ringraziano l'insegnante Giovanna Barantani e gli allievi della classe quarta A per aver consentito la sperimentazione dell'itinerario e per la collaborazione.
Un 'grazie' particolare al dott. Igino Aschieri per i preziosi consigli e suggerimenti.

Bibliografia

Arnheim, R. (1962). *Arte e percezione visiva*. Milano: Feltrinelli.

Bozzolo, C. (2017). I quadrilateri. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *40A*(1), 39-70.

Brousseau, G. (1994). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2013). Le triangle-acrobate: un jeu géométrique sur les isometries en CE1. Intéréts et limites. *Grand N*, 91, Grenoble: Irem, 4370.

Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2014a). Analisi di un gioco sulle isometrie nella scuola primaria: il triangolo-acrobata, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *37A*(1), 7-33.

Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2014b). Preconcetti sulle isometrie nella scuola primaria. Un case-study condotto in Francia e in Italia. *L'insegnamento* della *matematica e delle scienze integrate*, *37A*(2), 107-132.

Chamorro, M. C. (2002). Le difficoltà nell'insegnamento/apprendimento delle grandezze nella scuola di base (parte seconda), *La Matematica e la sua Didattica*, Bologna: Pitagora, 58-77.

Chamorro, M. C. (2006). Matematica per la mente e le mani: l'insegnamento della geometria nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, 20, 3, 401-424.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouwn (Ed.) *Handbook of research on Mathematics Teaching*, N.C.T. M.-Macmillan, 420-464.

Douady, R. (1993). *L'ingénierie didactique*. Cahier de DIDIREM n°19, Paris: Université de Paris VII.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Duval, R. (2000). Costruire, vedere e ragionare in geometria: quali rapporti?, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 41, 9-24.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103-131.

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. In M. Iori (Ed.). *La matematica e la sua Didattica. Mathematics and Mathematics education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore.* Bologna: Pitagora, 213-220.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139-162.

Grenier, D., & Laborde, C. (1988). Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale. In G. Vergnaud, G. Brousseau, & M. Hulin (Eds.). *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres Mai 1987*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 65-86.

Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortunity, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for research in mathematics education*, *22*(3), 237-251.

Hejny, M. (2004). Understanding and structure. *Proceedings CERME3*, WG 3, 1-9.

Kandinsky, W. (1968). *Punto, linea, superficie*. Milano: Adelphi.

Klein, F. (1889). Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti. *Annali di Matematica Pura e Applicata*, *17*, 307-343.

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile in http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot-7734_12 (consultato il 10.11.2017).

Platone (1989). *Tutte le opere*. (a cura di G. Pugliese Carratelli). Firenze: Sansone.

Swoboda, E., & Vighi, P. (2016). *Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries.* New York Springer [ICME13 Topics Surveys Series]

Rovelli, C. (2017). *L'ordine del tempo*. Milano: Adelphi.

Van Hiele, P. (1986). *Structures and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

Vighi, P., & Marchini, C. (2014). Geometrical speaking of children: the slanting giraffe's neck. In Pytlak M. (Ed.) *Communication in the mathematical classroom*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, University of Rzeszow (Poland), 108-122.

Vighi, P. (2015). Language for learning: spontaneous vs specific geometrical language. In J.

Novotna, & H. Moraova (Eds.) *Developing mathematical language and reasoning*, Prague (Czech Republic).

Vighi, P. (2016a). Arte e pensiero geometrico nella scuola dell'infanzia. In M. Iori (Ed.) *La matematica e la sua Didattica. Mathematics and Mathematics education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore*. Bologna: Pitagora, 513-523. Disponibile in https://rsddm. dm. unibo.it (consultato il 10.11.2017).

Vighi, P. (2016b). From speaking to learning of parallelism and perpendicularity relations. *Proceedings Cerme 9*, 341-349. HAL archives-ouvertes.fr, Id: hal-01288529v2, Id: hal-01288529v2.

Vighi, P. (in corso di stampa). Abstract paintings, objects and actions: how to promote geometrical understanding. *Proceedings Mathematical Trangressions II*, Krakow.

Vighi, P. (in corso di stampa). From abstract art to geometrical understanding. *ICME-13 Proceedings*.

Villani, V. (2006). *Cominciamo dal punto*. Bologna: Pitagora Editrice.

Weyl, H. (1962). *La simmetria*. Milano: Feltrinelli.

Sitografia

http://www.wassilykandinsky.net/work-637.php

Autore / Paola Vighi
già Dipartimento di Matematica e Informatica – Università di Parma, Italia
paola.vighi@unipr.it

Recensioni

DdM

Peres, E. (2017). *Matematica per comuni mortali*. Milano: Salani.

Ho letto tanti libri di Ennio e ne ho recensiti otto su varie riviste; e lui ha scritto una prefazione a un mio libro di giochi. Tante volte l'ho invitato a tenere conferenze e seminari nei convegni da me organizzati, la prima volta 32 anni fa. Che dire? Il lettore capirà meglio se scrivo la seguente frase: il più grande giocologo d'Italia non smette mai, ancora oggi, di stupirmi.

Intanto quel divertente titolo: "per comuni mortali"… Chi sarebbero i comuni mortali? Sono coloro che hanno intuito il mondo affascinante che c'è dietro la matematica, la definizione è data nel risguardo della pagina 1 della copertina.

E poi, che cosa contiene questo libro? Le "solite" cose …

Una lunga, piacevole, brillante introduzione sulla matematica vista con gli occhi seri della storia, severi del professore (ex, in questo caso), divertiti del giocologo.

E poi sette capitoli, i cui titoli dicono tutto.

1. *Numeri curiosi*, una raccolta di curiosità che non possono che sbalordire gli amanti dei misteri delle cifre e incuriosire coloro che credono di odiare la matematica.
2. *Pura logica*, una bella raccolta di giochi alla Gardner, con soluzioni a volte inattese; per sicurezza Ennio dà sempre la soluzione, alla fine di ogni capitolo.
3. *Pensiero laterale*, una divertente e profonda raccolta di proposte di indovinelli alla De Bono, per risolvere i quali occorre una bella dose inventiva; molti di questi hanno più soluzioni; per esempio, caro Ennio, quella che dai a pag. 67 per l'esercizio 3.1. proposto a pagina 56, ha un'alternativa fantastica e coerente …
4. *Lampo di genio*, proposte nelle quali serve assai poca matematica (e, quella che serve, estremamente elementare), ma molto acume.
5. *Magia matematica*, trucchi alla portata di tutti, con i quali si possono stupire gli amici durante un'altrimenti noiosa riunione, vera e propria magia (in questo genere di attività, Ennio è sempre stato un maestro di livello mondiale); alcuni di queste magie hanno 700 anni e più, pensa un po' …
6. *Paradossi matematici*, nei quali si mescola l'intuizione, che viene severamente sfidata, la capacità di vedere, alcune nozioni di aritmetica e di geometria che, talvolta, giocano al contrario.
7. *Strategie ottimali*, basato sui principi più elementari della teoria dei giochi, forse il più matematico di tutti, ma anche il più formativo.

Segue una breve bibliografia.

Sei un insegnante di matematica, di non importa qual livello scolastico, dalla scuola primaria all'università? I tuoi allievi a volte manifestano noia o rifiuto della matematica? Dedica 20 minuti a settimana ai giochi matematici, sorprendi i tuoi studenti, divertili, appassionali; a parte che impareranno più matematica in quei 20 minuti che nel restante tempo, di certo vedranno la matematica con occhi nuovi. Ti chiederanno: «Ma prof, interroga su queste cose? Rientrano nella valutazione?» E tu dirai: «Certo, perché è matematica per davvero, ma la valutazione non sarà fatta sulla base di interrogazioni, creerete voi giochi analoghi e li proporrete a casa e ai compagni e agli amici».

I tuoi allievi sono ghiotti divoratori di matematica, pendono dalle tue labbra quando fai lezione, adorano eseguire esercizi in quantità e si divertono tanto a farli? Premiali, mostra loro questi giochi, queste curiosità, queste ghiottonerie, e lascia che si entusiasmino ancora di più, scoprendo un lato troppo spesso nascosto della nostra meravigliosa disciplina.

In entrambi i casi, ringrazierai poi Ennio, il matemagico.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas,
Bogotà, Colombia

Piergiorgio Odifreddi (2017). *Dalla terra alle lune. Un viaggio cosmico in compagnia di Plutarco, Keplero e Huygens*. Milano: Rizzoli.

Nel 2011 uscì un film di Martin Scorzese, *Hugo Cabret*, un vero capolavoro, che fruttò al regista statunitense il premio come miglior regista al *Golden Globe* 2012 e 5 statuette Oscar su 11 nomination ai *Premi Oscar* 2012. Il protagonista è un dodicenne orfano che vive in una stazione ferroviaria a Parigi, nascosto a tutti, che revisiona gli orologi e ruba quotidianamente quel poco che gli serve per vivere. Hugo ha un profondo legame con un robot rotto che gli ha lasciato il padre e che domina tutta la storia del film, automa che egli deve/vuole riparare ad ogni costo. Realmente il costruttore del robot è l'anziano Georges Méliès, interpretato da un superbo Ben Kingsley, proprietario-gestore di un chiosco di giocattoli nella stessa stazione. Parte del film è appunto dedicata alla rivalutazione di Méliès sia da parte delle autorità, sia della critica cinematografica che, all'inizio della sua carriera, l'aveva stroncato e che ora, finalmente, riconosce la sua genialità.

Come, lettore, non ti ricordi il nome di Georges Méliès? Perbacco, è l'autore del film muto *Viaggio nella Luna* del 1902, il primo (vero) film di fantascienza del mondo, ispirato a *Dalla Terra alla Luna* e *Intorno alla Luna* di Jules Verne, del 1865 e 1870, e al romanzo di Hebert George Wells *I primi uomini sulla Luna* del 1901.

Non ti viene ancora in mente? Lo conosci di sicuro, almeno una scena iniziale del suo film è stata vista da tutti: il razzo lanciato dalla Terra si va a infilare nell'occhio destro del faccione umano che rappresenta la Luna, una scena che è parte integrante della storia del cinema.

Un altro grande omaggio alla produzione cinematografica di Méliès è stata fatta dal regista italiano Maurizio Michetti nel film *Domani si balla* (1983) (con Mariangela Melato e Paolo Stoppa) nel quale esseri extraterrestri, che ricordano in tutto e per tutto i personaggi di Méliès, svaniscono in una nuvola di fumo, uccisi dal suono delle parole che giungono loro dalla Terra, inviate da una stazione televisiva.

Se sei un appassionato della serie *I Simpson*, ricorderai forse il film numero 21 della ventunesima stagione, nel quale si propone una parodia del film. (C'è più matematica nei Simpson che in un testo di algebra per i licei …). Ma allora ti piace forse anche la serie *Futurama*; nella prima stagione, nel secondo film, il robot alcolista Bender infila una bottiglia nell'occhio sinistro del faccione di un funzionario travestito da Luna, evidente riferimento a Méliès.

Che cosa c'entra tutto ciò con il libro di Odifreddi? È che quando leggo qualcosa che mi entusiasma, non so trattenermi e comincio a tessere ragnatele che uniscono mondi. E, certo, questa è stata per me una delle letture più entusiasmanti degli ultimi anni.

Il gigante Plutarco ha scritto, circa nell'anno 70, dunque giovanissimo, il famoso (ma non abbastanza) testo *Il volto della Luna* dal quale, a parte ingenuità che generosamente Odifreddi definisce "giovanili", possiamo ancora attingere molte informazioni sulla cultura greca. Chi ha letto questo dialogo e, più in generale, l'opera di Plutarco? Di certo Copernico, Kepler, Galileo e Newton, alcuni dei quali si lasciano andare a plagi, come Galileo nel *Sidereus Nuncius* del 1610. E poi Shakespeare che ne usa interi brani e la descrizione di alcuni personaggi; l'Alfieri, ghiotto di notizie sui vari studi dell'antichità; Jean-Jacques Rousseau che esalta Plutarco più volte nei suoi scritti; Michel de Montaigne che usa pedissequamente le notizie elargite dallo stesso Plutarco.

Si tratta del più prolifico scrittore greco, appassionato di mitologia, filosofia e scienza, prima dimenticato e poi celebrato con l'avvento dell'Umanesimo e del Rinascimento; la sua opera più famosa è di certo quel *Vite parallele* che è a dir poco geniale; meno conosciuta, dunque, l'opera citata all'inizio, *Il volto della Luna*, alla quale si devono,

come scrive Odifreddi, «molte informazioni su ciò che i Greci sapevano di meccanica, di ottica e di astronomia: un sapere che andò perduto nel buio dei secoli cristiani, ma che poté essere in seguito ritrovato e rinnovato alla luce dei secoli illuministi».
Nel 1593 un altro giovanotto interessato alle scienze, Johannes Kepler, decide di scrivere un saggio, *Astronomia lunare*, nel quale cerca di rispondere alla seguente domanda: se fossimo sulla superficie lunare, come si vedrebbe il cosmo? E la Terra in particolare? Ma, preso da altre incombenze, non portò a termine questa impresa. Scrisse e pubblicò le sue opere immortali, ben note. Ma, giunto ad una certa età, come suol dirsi per le *personnes agées*, riprese in mano quel sogno giovanile che, appunto, intitolò *Sogno* (*Somnium*), che però uscì a stampa postumo (1634), a cura del figlio Ludovico. Come ricorda anche Odifreddi, Jorge Luis Borges lo considera il primo vero romanzo di fantascienza. Ma la stessa cosa hanno sostenuto altri autori, tra i quali il più esperto in questo campo, Isaac Asimov. Il protagonista è un ragazzo islandese che ha una madre strega e che viene informato da un demonio dell'esistenza di un'isola (Levania, la Luna); egli allora immagina, come in un sogno, appunto, come si possa vedere la Terra da quell'isola e, più in generale, l'intero firmamento. Lo scopo è divulgativo, affermare e difendere il sistema eliocentrico copernicano.
Nel 1698, già anziano, Christian Huygens pubblica *L'osservatore cosmico*, opera nella quale, facendo esplicito riferimento all'opera di Kepler, si pone lo stesso problema, ma con aspirazioni ancora più vaste; sempre stando sulla Luna, guardare e descrivere la sfera celeste. E poi fare lo stesso con gli altri pianeti del sistema solare. Egli aveva scoperto nel 1655 (a 26 anni) un satellite di Saturno e dunque la sua visione cosmogonica era assai più vasta e completa.
Torniamo al libro di Odifreddi. Che cosa ha pensato di fare il nostro autore? Lo scrive lui stesso: «Ho dunque messo insieme *Il volto della Luna*, il *Sogno* e *L'Osservatore cosmico* come se fossero tre capitoli di un'unica opera collettiva a sei mani. O, parafrasando *Il sogno di Coleridge* di Borges, un archetipo non ancora rivelato agli uomini, un oggetto eterno che sta entrando gradatamente nel mondo: la sua prima manifestazione fu il dialogo di Plutarco, la seconda il racconto di Keplero, la terza il saggio di Huygens».
Un vero e proprio colpo non a sorpresa, che sarebbe troppo, ma certamente adatto ad ammaliare qualsiasi lettore colto e amante delle cose di scienza. Con un risultato che suscita stupore in chi diligentemente legge, lasciandosi dirigere da chi è in grado di ideare simili viaggi culturali.
Questo libro va letto fino in fondo come fosse un romanzo d'avventura, anche perché le ultime pagine riservano al lettore curioso e attento tante sorprese ghiotte.
E adesso, una raccomandazione. Vista la natura di questa rivista è pressoché certo che il lettore di queste righe sia un insegnante di matematica. Ai nostri allievi è sempre meno concesso leggere, perché tutto il mondo che ruota attorno e a volte le nostre stesse indicazioni non vanno in questa direzione. Questo è un libro per professori, non per studenti, ma cela in sé mille preziose e puntuali questioni che un bravo studente curioso può gustare; sarebbe opportuno non sottrargliele.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas,
Bogotà, Colombia

Malvaldi, M. (2017). *Le due teste del tiranno*. Milano: Rizzoli.

Marco Malvaldi è noto e amato da molti (in particolare matematici) per i suoi gialli del Bar Lume, ma non solo per quelli, basti ricordare il delizioso *Buchi nella sabbia*. Nelle storie "dei vecchietti" si intrecciano battute fulminanti, dosi massicce di toscanità, considerazioni di vario tipo, il tutto lungo trame costruite con maestria.

Nei gialli con un protagonista a cui il pubblico si affeziona, si ripete spesso uno schema fisso al momento dello scioglimento dell'intrigo. Per Miss Marple è l'accostamento di qualche elemento della vicenda con qualcosa che è successo nel suo villaggio; per don Matteo è una frase detta in tutt'altro contesto da uno dei personaggi *naif* che lo circondano. Per Massimo, il "barrista" del Bar Lume, è spesso qualcosa che ha a che fare con la matematica. La matematica serve al protagonista per spiegare la storia e chiarire i legami tra i suoi elementi.

Per il matematico professionista questa caratteristica dei romanzi di Malvaldi è un elemento in più da tenere presente per indovinare l'enigma, talvolta anticipato sottotraccia lungo il racconto. Qualche volta gli "spiegoni matematici" possono risultare ostici per il non addetto ai lavori, o pretenziosi per il professionista: non c'è dubbio però che lo stile di Malvaldi affascina e potrebbe essere preso come caso di studio in molte situazioni in cui ci si domanda come comunicare la matematica.

In questo libro, Marco Malvaldi ribalta lo schema. Protagonista è la matematica, e dalla matematica fuoriescono storie. Queste storie servono per spiegare la matematica, e soprattutto per spiegare come i matematici hanno vissuto e vivono il loro mestiere: si parla del senso della ricerca scientifica, di cosa significhi nella realtà vissuta fare matematica da professionisti, di come impatta la matematica anche sulla vita di quelli che vogliono consapevolmente e pervicacemente cancellarla dalla propria vita.

Chi come il sottoscritto o come molti insegnanti cerca faticosamente di costruire un proprio stile e un proprio modo per parlare di matematica, di fronte a questo libro di Malvaldi prova fondamentalmente un sentimento, che riassumo con le parole di Carlo Trivella (matematico, protagonista di un altro romanzo di Malvaldi, *Argento vivo*): Invidia. Invidia verde.

Giorgio Bolondi
Libera università di Bolzano, Italia

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de: Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile in http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

Questo libro, disponibile e gratuito sia in versione cartacea sia in versione pdf, si apre con due prefazioni, dotte e profonde, firmate da due illustri personaggi, studiosi e ricercatori di fama internazionale, entrambi presidenti dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), rispettivamente, dal 2007 al 2009, e dal 2013 al 2016: Michèle Artigue (medaglia Félix Klein 2013) e Ferdinando Arzarello (presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica dal 1998 al 2006). Entrambi i prefatori evidenziano le divergenze e le convergenze dei punti di vista dei

due autori in didattica della matematica; da una parte, l'importanza che entrambi attribuiscono alla dimensione epistemologica, semiotica e sociologica, alla pratica storica e culturale, alla necessità di rivedere alcuni concetti fondamentali, quali il sapere, la conoscenza e l'apprendimento; dall'altra, le loro diverse esperienze, culture didattiche, convinzioni epistemologiche e semiotiche, che alimentano l'impalcatura logica delle loro riflessioni, discussioni, argomentazioni, analisi didattiche, orientando il loro sguardo sul mondo, sulla cultura, sulle situazioni d'aula, sull'insegnamento e sull'apprendimento. È il secondo di una serie di volumi destinati ai ricercatori, agli studenti di dottorato, agli studenti universitari, ai docenti universitari, ai docenti di scuola di qualunque livello, che desiderano approfondire alcuni temi di ricerca di grande attualità e rilevanza a livello internazionale in didattica della matematica. In questo volume i problemi semiotici, epistemologici e pratici relativi all'insegnamento e all'apprendimento della matematica vengono spiegati, interpretati e affrontati dagli autori, Bruno D'Amore e Luis Radford, anche in chiave sociologica e storico-culturale. Si tratta di questioni e problemi fondamentali per la didattica della matematica che ogni docente si pone e deve in qualche modo affrontare per capire le situazioni d'aula e intervenire efficacemente. Certo, il modo di affrontare certe questioni è sempre relativo al contesto sociale e culturale in cui ci si trova a operare e strettamente legato a ipotesi, assunzioni, obiettivi, conoscenze e convinzioni personali o collettive sui processi di insegnamento e apprendimento della matematica, come affermano gli stessi autori e come si evince dalle loro analisi, condotte con impareggiabile maestria ed estrema perizia, da punti di vista differenti ma complementari e convergenti su obiettivi comuni.
Le questioni affrontate sono tante. Eccone alcune:
Come concepire il sapere? E la conoscenza? Che cos'è un concetto? Come avviene la concettualizzazione in matematica? Come concepire un oggetto matematico? E l'apprendimento? Come avviene l'apprendimento in matematica? Che cosa si intende per interiorizzazione? E per oggettivazione? Come concepire la soggettività? E l'alienazione? Che struttura ha l'attività matematica? Che cosa si intende per "pratica"? E per "meta-pratica"? Quali tipi di pratiche intervengono nelle attività matematiche? Come affrontare le difficoltà che gli studenti incontrano in tali attività? Con quali strumenti? Come concepire gli ostacoli che si presentano nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica? Come interpretare l'errore? Dove si annida il fallimento?
In relazione a tutto questo:
Come concepire la formazione universitaria dei docenti di scuola primaria? E quella dei docenti di scuola secondaria? Che cosa dicono le ricerche sulla formazione professionale dei docenti di matematica? E sui corsi di didattica della matematica offerti dalle università e dalle istituzioni scolastiche? A quale tipo di Sapere si fa riferimento nella formazione dei docenti di matematica? Di che tipo è il sapere insegnato? Che cosa si può dire del sapere appreso e del suo uso professionale?
Nelle pagine di questo prezioso volume sono fornite le risposte a queste e a tante altre domande e questioni, sulla base degli studi, delle esperienze dirette e dei lavori di ricerca che hanno reso famosi i due autori a livello internazionale. Risposte tra loro diverse, ma convergenti, così profonde e interessanti che non possono non far riflettere, coinvolgere, stimolare il lettore.
Al lettore, al docente, al ricercatore la scelta della prospettiva o teoria che fornisce gli strumenti più adatti, utili ed efficaci per capire, studiare, gestire e valutare ciò che accade nella propria aula, o nel contesto specifico in cui si trova ad operare.

Maura Iori
Nucleo di Ricerca di Didattica della matematica
Università di Bologna, Italia

Sbaragli, S. & Franchini, E. (2017). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare*. Locarno: Dipartimento formazione e apprendimento.

Questo rapporto, inserito nell'ambito dei lavori del Centro competenze di Didattica della Matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, può rappresentare uno strumento prezioso per gli insegnanti e gli studenti della scuola elementare e media, in un'ottica di continuità tra i diversi livelli scolastici. Il progetto, promosso dal Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport del Ticino, è volto a valutare le competenze degli allievi ticinesi su alcuni ambiti della matematica e dimostra ancora una volta l'importanza di dare uno sguardo in profondità ai risultati delle prove standardizzate, collegando un'analisi quantitativa fatta da tabelle di percentuali di risposte corrette, errate e mancanti, con un'analisi qualitativa che tenti di indagare le ragioni didattiche di tali risposte. In questo senso si esaminano e discutono i risultati della somministrazione ad allievi di quinta elementare di trenta quesiti afferenti al processo *Matematizzare e Modellizzare* previsto dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (2015). Attorno a questo processo viene inizialmente presentato un quadro teorico di riferimento molto ricco e denso di spunti e riflessioni: vengono chiariti i motivi della scelta di concentrarsi su quest'aspetto di competenza; si affronta il legame tra questo aspetto di competenza e la capacità di risoluzione di problemi; vengono infine discusse, con il supporto di una vasta letteratura di ricerca, le difficoltà tipiche legate a questa dimensione del "fare matematica". Il rapporto procede poi con l'analisi didattica dei trenta quesiti e dei risultati ottenuti dalle somministrazioni; tale analisi è organizzata secondo criteri didattici e di specificità del problema dal punto di vista delle caratteristiche matematiche, linguistiche e di processi risolutivi in gioco; è arricchita inoltre da protocolli di studenti.

Per alcuni dei trenta quesiti è stata pensata e realizzata una seconda somministrazione a studenti all'ingresso della prima media, al fine di indagare più nel dettaglio, attraverso interviste individuali, le motivazioni sottostanti alle risposte fornite. In molti casi questa seconda somministrazione, con la rispettiva analisi e comparazione di dati e percentuali, risulta essere illuminante rispetto ai processi risolutivi messi in atto dai ragazzi; in altri casi viene confermato quanto ormai noto da anni nel mondo della ricerca in didattica della matematica per quanto concerne la risoluzione di problemi di matematica, con tutto quello che vi ruota attorno. Viene inoltre confermato il fenomeno, già evidenziato in letteratura, relativo al peggioramento nelle prestazioni degli allievi che ritornano a scuola dopo la pausa estiva: le percentuali di risposte errate degli alunni di prima media sono infatti in diverse occasioni più basse rispetto a quelle di fine quinta elementare.

L'insegnante che decidesse di leggere il rapporto potrebbe trovare consigli utili su come implementare nelle attività di risoluzione di problemi una serie di accorgimenti, attenzioni e sensibilità al testo e alla sua formulazione, agli aspetti linguistici, alle fasi di risoluzione ecc. Le due autrici sottolineano spesso, collegando l'analisi dei protocolli ad una vasta letteratura di ricerca, come sia didatticamente importante attivare prassi didattiche che si focalizzino maggiormente sui processi di risoluzione e sulla loro argomentazione e comunicazione, piuttosto che sui prodotti e i risultati di un dato problema. Allo stesso tempo, una sana abitudine all'esaminare gli elaborati prodotti dagli allievi consentirebbe all'insegnante di andare più in profondità rispetto ai loro punti di forza e a eventuali difficoltà e di riflettere su tutta una serie di impliciti interni alla propria azione didattica.

Nelle conclusioni vengono evidenziati i punti di forza e di debolezza emersi. Si confermano e si descrivono tutta una serie di difficoltà critiche: nella comprensione della situazione proposta dal problema e nella trasformazione del testo in un modello matematico (fase *formulare* del ciclo della matematizzazione), nella risoluzione matematica del problema (fase *utilizzare* del ciclo della matematizzazione) e nell'interpretazione dei risultati (fase *interpretare* del ciclo della matematizzazione). Viene infine evidenziata positivamente la ricchezza delle rappresentazioni figurali e simboliche utilizzate dagli studenti nell'approcciarsi alle situazioni problematiche proposte dagli item.
Questo documento è dunque pensato, e pensato bene, come strumento per l'insegnante: può essere sfogliato all'occorrenza per trovare spunti e riflessioni inerenti a specifici concetti e nuclei della matematica, può essere letto con attenzione per approfondire nel dettaglio tutta una sfera di tematiche che riguardano l'"essere competenti" (in matematica).

Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento
Supsi di Locarno, Svizzera