Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
SUPSI
Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 04

Didattica della Matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

DOI: 10.33683/ddm.18.4
ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Repubblica e Canton Ticino, Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport (DECS).

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio Risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC)
Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI

Impaginazione:
Luca Belfiore

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
Matematica

04

Novembre 2018

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

Editoriale

La rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* giunge con soddisfazione al quarto numero, l'ultimo relativo all'anno 2018. L'impostazione, forte degli ottimi risultati ottenuti a livello di fruizione (quasi 12000 utenti hanno scaricato i precedenti numeri della rivista), rimane focalizzata sul vicendevole rapporto fra ricerca e pratiche didattiche.

La didattica della matematica è una disciplina relativamente giovane nel panorama della ricerca scientifica, nata nell'ambito delle matematiche, come una matematica applicata al problema dell'apprendimento, a partire dagli anni '80 del secolo scorso, ha ricevuto ampi stimoli da diverse branche della cultura; sono infatti numerosi gli spunti di riflessione che sono giunti e continuano a giungere ad esempio dalla filosofia, dalla pedagogia, dalla psicologia, dalla sociologia e dalla semiotica.

I problemi di ricerca della didattica della matematica nascono nel mondo delle scuole o delle università, in quelle minisocietà istituzionali formate da docenti e allievi che hanno (o avrebbero) come scopo sociale primario quello di apprendere la matematica; ma sappiamo che in quest'ambito nascono numerosi problemi, dipendenti da svariati fattori, che vanno interpretati attraverso diverse chiavi di lettura, che travalicano la singola disciplina. La minisocietà istituzionale classe, va poi rapportata con l'istituzione scuola/università, e sua volta con l'attualità del mondo e della società in cui siamo inseriti; in questo panorama, la didattica della matematica non può fare a meno di interrogarsi su come svilupparsi e integrarsi all'interno delle complesse dinamiche sociali con le quali si trova ad operare e a doversi confrontare, fruendo con grande apertura del contributo delle altre aree culturali. Le problematiche dell'apprendimento della matematica diventano dunque oggetto di studio da parte dei ricercatori che stanno a stretto contatto con i docenti di scuola, con i quali individuano le problematiche e condividono i risultati della ricerca. È infatti dalla lettura della realtà d'aula che nascono i veri problemi di apprendimento, sui quali è bene soffermarsi per porsi domande di ricerca, ipotizzare, progettare e sperimentare interventi e pratiche finalizzate all'apprendimento degli allievi. È in quest'ottica che la rivista intende aprire lo sguardo verso le diverse discipline, creando un anello di congiunzione tra ricerca e pratiche d'aula, tra ricercatori e docenti, con il fine di giungere agli allievi e all'intera società.

In questo numero, nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli che in modo diverso enfatizzano il ruolo dell'insegnante come mediatore del processo di apprendimento degli allievi: nel primo viene presentata un'analisi, condotta in Italia attraverso un questionario online, che ha avuto come oggetto d'indagine il rapporto emotivo dei partecipanti, tra cui alcuni docenti, con la matematica e i suoi metodi di insegnamento; nel secondo viene presentata e discussa un'esperienza didattica, realizzata nella scuola dell'infanzia, nella quale attraverso il disegno e la verbalizzazione stimolata dal docente si riflette sulla rappresentazione 2D di mattoncini Lego; infine, nell'ultimo articolo della sezione si presenta e si discute, tramite un'esemplificazione avvenuta a livello di scuola elementare, il quadro teorico della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS), sviluppata a partire dall'idea seminale di mediazione semiotica introdotta da Vygotskij, con l'obiettivo di fornire un modello di insegnamento e apprendimento focalizzato sul processo semiotico relativo all'utilizzo di artefatti culturali.

La seconda parte della rivista, legata alle *Esperienze didattiche*, presenta quattro articoli di contenuto molto diverso che fanno riferimento ad aspetti con i quali gli insegnanti si trovano sempre più spesso confrontati. Il primo articolo si occupa di metacognizione e matematica: viene descritta un'esperienza nella quale centrale è stato il voler attivare negli allievi abilità di pianificazione, controllo continuo e valutazione finale tramite l'utilizzo di giochi di logica e la personificazione di processi metacognitivi. Il secondo articolo descrive un'esperienza didattica, condotta in una scuola elementare in Ticino, volta a sviluppare la cooperazione tra gli alunni attraverso la partecipazione al Rally Matematico Transalpino. Il penultimo articolo s'interessa di algoritmi spontanei in classi multiculturali, nelle quali la presenza di studenti provenienti da famiglie di cultura e lingua non italiana diventa strumento e occasione per costruire un sapere matematico a disposizione di tutti. L'ultimo articolo, infine, riguarda una sperimentazione condotta in una IV media ticinese, corso base, che verte sulla proposta di situazioni problema situate nei mestieri che gli allievi dichiarano di voler svolgere in futuro.

Escluso il terzo, tutti gli articoli relativi a quest'ultima sezione sono corredati di allegati che rendono le esperienze fruibili, adattabili e replicabili dagli insegnanti che volessero sperimentare le attività nelle proprie classi.

La ricchezza e la profondità dei contributi che pervengono alla redazione della rivista ci sprona ad essere decisamente ottimisti rispetto al futuro della didattica della matematica: nel mondo della ricerca e dell'insegnamento c'è voglia di indagare, comprendere, progettare, sperimentare e inventare. In quest'ottica, il nostro intento non può che essere quello di mantenere lo strumento della rivista con il fine di raccogliere i numerosi contributi e, in qualche modo, fungerne da cassa di risonanza.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Editorial

The journal *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* has come with satisfaction to its fourth issue, the last one related to the year 2018. Strengthened by the excellent results obtained in terms of downloading (almost 12000 users have downloaded the previous issues of the journal), the structure remains focused on the mutual relationship between research and didactic practices.

In the landscape of scientific research, mathematics education is relatively young as a discipline. Born in the field of mathematics, as mathematics applied to learning issues, it has received, since the 80's of the last century, extensive stimuli from different cultural domains. Numerous causes for reflection have come and continue to come for instance from philosophy, pedagogy, psychology, sociology and semiotics.

The research problems in mathematics education arise in the world of schools or universities, in those institutional mini-societies made by teachers and students who have (or would have) the primary social purpose to learn mathematics. Nevertheless, we know that, in this area, many problems arise, depending on various factors, which must be interpreted through different lenses, going beyond the individual discipline. The institutional mini-society of the classroom must be related to the school/university institution, and in turn with the current situation of the world and of the society in which we live. In this landscape, mathematics education cannot avoid questioning itself on how to develop and to integrate within the complex social dynamics with which it has to operate and cope with, being wide open to profit from the contribution of the other cultural domains. The issues related to the learning of mathematics therefore become the subject of study of the researchers who work in close contact with school teachers, with whom they identify the problematics and share the research results. It is actually from the interpretation of classroom reality that the real problems of learning arise, and it is good to rest on them in order to formulate research questions and hypotheses, to design and experiment interventions and practices aimed at students' learning. It is in this perspective that the journal wants to open its view to the different disciplines, creating a connection between research and classroom practices, between researchers and teachers, with the aim to reach students and the entire society.

In this issue, the section *Riflessione e ricerca* contains three articles that, in different ways, emphasize the teacher's role as a mediator of the students' learning process. The first article reports on an analysis conducted in Italy through an online questionnaire, whose object of investigation was the emotional relationship with mathematics and its teaching methods expressed by participants, some of which were teachers. The second article presents and discusses a didactic experience carried out in kindergarten, in which the teacher fosters the reflection on the bi-dimensional representation of Lego bricks through the drawing and the verbalization. Finally, in the last article of this section, a long-term teaching experiment in primary school allows the authors to present and discuss the framework of the Theory of Semiotic Mediation (TMS), developed from the seminal idea of semiotic mediation introduced by Vygotskij, in order to provide a model of teaching and learning focused on the semiotic process related to the use of cultural artifacts.

The second part of the journal, related to the *Esperienze didattiche*, presents four articles about very different topics related to issues with which teachers are increasingly confronted. The first article deals with metacognition and mathematics: the described experience is centered on the desire that the students activate planning skills, continuous control and final evaluation through the use of logic games and the personification of metacognitive processes. The second article describes a didactic experience, carried out in a primary school in Ticino, with the aim of developing cooperation between pupils through the participation in the Transalpine Mathematical Rally. The third article focuses on spontaneous algorithms in multicultural classes, in which the presence of students from families of non-Italian culture and language becomes an instrument and an opportunity to build a mathematical knowledge available to all. The last article, finally, concerns a teaching experiment conducted in a 9th grade classroom, taking a basic course in mathematics, in Ticino; it is grounded on the proposal of realistic situations contextualized in the professions that the students claim to want to exert in the future.

Except for the third one, all the articles related to this last section are accompanied by attachments that make the experiences usable, adaptable and reproducible by teachers who want to implement the activities in their classes.

The richness and the depth of the contributions received by the editors of the journal spurs us to be definitely optimistic about the future of mathematics education: in the world of research and of teaching there is a desire to investigate, understand, design, experiment and invent. In this perspective, our purpose can only be to maintain the journal as an instrument to collect the numerous contributions and, in some way, to act as a sounding board.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Riflessione e ricerca

DdM

“Io e la matematica”: un’indagine sull’esperienza matematica

“Me and mathematics”: a survey about mathematical experience

Andrea Capozio*, Davide Passaro• e Pietro Di Martino▲
*Data Analyst in HR Development & Compensation – Enel S.p.A., Italia
•Liceo Classico Sperimentale “Bertrand Russell” – Roma, Italia
▲Dipartimento di matematica – Università di Pisa, Italia

Sunto / Scopo di questo articolo è quello di esaminare il rapporto delle persone con la matematica e il suo insegnamento. Attraverso la somministrazione di un questionario online (domande con risposta libera testuale) viene chiesto ai partecipanti di indicare in particolare le emozioni associate alla matematica e la propria esperienza con essa. I risultati della survey sono analizzati mediante tecniche statistiche di Natural Language Processing, tra tutte la Sentiment Analysis e il POS Tagging. Viene studiata la dipendenza delle emozioni riguardanti la matematica dal livello e tipologia di istruzione dei partecipanti all’indagine; in particolare viene posta l’attenzione sulle principali critiche al metodo di insegnamento emerse tra i giovani.

Parole chiave: didattica della matematica; analisi statistica; aspetti affettivi; analisi del sentiment; metodi didattici.

Abstract / The purpose of this article is to examine the relationship between people and mathematics and the teaching. Through a survey (with free textual answers) the participants' emotions associated with mathematics and their own experience with it are investigated. The results are analyzed with Natural Language Processing statistics, including Sentiment Analysis and POS Tagging. The relationship between emotions concerning mathematics and respondents’ educational level is studied; particular attention is focused on the main criticisms of the teaching method that emerged among young people.

Keywords: Mathematics education; statistical survey; affective issues; sentiment analysis; teaching methods.

1 Premessa

Le difficoltà che gli studenti incontrano nello studio della matematica sono purtroppo diffuse a tutti i livelli scolari e, oltre che nella percezione di insegnanti e studenti – che riconoscono la matematica spesso come bestia nera – sono ben documentate negli ultimi 15 anni anche da diversi dati ufficiali. Si va dal dato impressionante che, nel 2007 portò l’allora ministro Fioroni ad emettere un apposito comunicato stampa del MIUR per l’emergenza matematica: praticamente emerse che uno studente su due tra quelli con debito formativo alla scuola secondaria di secondo grado[1], aveva un debito in matematica; a quelli che emergono dalle rilevazioni internazionali (OECD, 2015) e nazionali (INVALSI, 2017) e che mostrano un Paese spaccato in due sulla matematica: con zone di nicchia che viaggiano su livelli di eccellenza e altre zone in cui la percentuale di quello che viene definito analfabetismo matematico è 1

1. La scuola secondaria di secondo grado è detta in Canton Ticino scuola medio superiore.

elevatissima (quasi uno studente su tre tra quelli all'uscita dell'obbligo scolastico).
Del resto tali difficoltà sono oggetto di studio di ampia parte della ricerca in didattica della matematica, che cerca di comprenderne le cause, individuare i fattori di diversa natura che incidono sul fenomeno e sviluppare – a partire da tali conoscenze – percorsi per la prevenzione e il superamento delle difficoltà (vedi ad esempio Baccaglini, Di Martino, Natalini & Rosolini, 2018; Zan, 2007).
In particolare, lo studio dei fattori che influiscono sulle difficoltà in matematica ha ben presto rivelato come un ruolo cruciale sia giocato dai cosiddetti fattori affettivi, quali convinzioni, emozioni e atteggiamenti (McLeod, 1992).
In questa ottica, l'indagine "Io e la matematica" nasce da un'idea di Rosetta Zan e Pietro Di Martino che hanno condotto uno studio teorico per la caratterizzazione del costrutto di atteggiamento nei confronti della matematica (Di Martino & Zan, 2010; 2011), basato sulla raccolta e analisi di circa 2.000 temi autobiografici dal titolo "Io e la matematica".
L'analisi di tali temi ha portato diverse informazioni sul rapporto che gli studenti hanno con la matematica.
In particolare, relativamente alla paura della matematica, la ricerca ha mostrato:

1. la diffusione della paura di sbagliare tra gli studenti, che risulta essere l'emozione più associata alla matematica;
2. l'influenza della paura di sbagliare non solo nel rapporto affettivo dell'allievo con la disciplina, ma anche nelle prestazioni cognitive. Diversi studi (vedi ad esempio Zan, 2007) mostrano come la paura di sbagliare possa alterare e inibire i processi di pensiero; questa influenza è avvertita da chi prova tale emozione in matematica ed è spesso raccontata nelle biografie;
3. la diffusione di questa paura sin dal primo ciclo di istruzione.

L'indagine in esame, prendendo le mosse da questo background di risultati di ricerca in didattica della matematica, ha cercato di raccogliere ulteriori informazioni sul rapporto che gli adulti e studenti hanno con la matematica. Da quest'esigenza di raccolta di ulteriori elementi per indagare tale connessione è nata pertanto la collaborazione tra *Math is in the Air* (www.mathisintheair.org) e i due ricercatori Zan e Di Martino.
Per offrire degli spunti interpretativi completi a chi legge questo articolo è necessario premettere che *Math is in the Air* è un progetto dedicato alla divulgazione della matematica che coinvolge oltre venti fra matematici, fisici, statistici e ingegneri e ha come obiettivo quello di fare divulgazione della disciplina in particolare partendo da temi applicativi. I primi due autori di questo lavoro sono tra i responsabili del progetto.
Il sito, nato a fine 2014, ha sviluppato nel tempo una ampia comunità di lettori, anche grazie ad alcuni riconoscimenti come l'essere stato finalista al *Premio Nazionale della Rete* nel 2015 nella categoria "Divulgazione" e al *Premio Nazionale per la Divulgazione Scientifica* promosso dalla Associazione Italiana degli Editori.
Fra questi lettori una presenza significativa è rappresentata da insegnanti di discipline scientifiche (in particolare matematica e fisica).
Potendo quindi contare su una vasta platea di visitatori (135.000 accessi nel 2016 e 147.000 nel 2017) si è deciso di utilizzare lo strumento dell'indagine on-line, consapevoli dei limiti di questa scelta (a partire dall'impossibilità di ottenere un campione determinato su basi di campionatura statistica).
Le risposte ottenute hanno coinvolto utenti attenti alle tematiche trattate dal sito e, per mezzo dell'invito fatto agli insegnanti, anche gli studenti di scuola secondaria di secondo grado.
In base all'età dei partecipanti e al titolo di studio, è stato possibile discriminare,

all'interno del campione, il gruppo appartenente alla categoria "studenti".
Nei prossimi paragrafi verranno presentate l'indagine, le tecniche statistiche utilizzate e sarà fornita una interpretazione dei risultati ottenuti.
In questo contesto d'introduzione all'articolo ci sembra importante fare una precisazione di natura metodologica sul tipo di indagine realizzata, che si differenzia dalla più ampia ricerca sui temi da cui ha preso spunto.
In tale ricerca era stato scelto dagli autori di utilizzare nell'analisi dei problemi dell'educazione matematica un paradigma di tipo interpretativo, che riflette l'evoluzione dello statuto delle discipline quali le scienze sociali o la psicologia rispetto a quello normativo; quest'ultimo, presente nei primi studi sull'atteggiamento verso la matematica, mira a individuare rapporti di causa/effetto, determinare leggi in grado di "spiegare" i fenomeni osservati al pari di quello che succede nelle scienze sperimentali.
L'approccio interpretativo, applicato ai problemi dell'educazione matematica, assume invece come non riducibile in termini di causa ed effetto la complessità dell'allievo e del processo di apprendimento/insegnamento, e mira a "capire", cioè ad interpretare, i comportamenti osservati.
Nel caso di questa indagine, pur confermando la scelta dell'approccio interpretativo, per le citate limitazioni intrinseche dello strumento (che però ha avuto il vantaggio di raccogliere un significativo numero di dati in poco tempo) si è optato per l'utilizzo di una analisi statistica, sviluppata al giorno d'oggi per analizzare la grande quantità di dati dei social network (Ceron, Curini & Iacus, 2013). Questo non vuol ovviamente dire che si stiano suggerendo inferenze deterministiche e normative, l'approccio rimane interpretativo e anti-positivista.

2 L'indagine

L'indagine statistica si è svolta dal 26/10/2017 al 08/12/2017 mediante un apposito questionario online (http://www.mathisintheair.org/wp/indagine-sulla-matematica).
Il questionario è composto da 10 domande (alcune a risposta chiusa, altre a risposta aperta), frutto del confronto tra gli autori rispetto alla significatività prevista (anche in termini di categorizzazione) dei dati che si possono ottenere dalle risposte a tali domande:

1. Qual è la tua età?
2. Quale è il tuo grado di istruzione?
3. Quali scuole hai frequentato (o stai frequentando)?
4. Con quali aggettivi (da 1 a 3) descriveresti la matematica?
5. Quali emozioni associ alla matematica?
6. Descrivi sinteticamente il tuo rapporto con la matematica.
7. Descrivi il tuo rapporto con la matematica con una sola parola.
8. Dell'insegnamento della matematica cosa non hai apprezzato?
9. In quale momento della tua vita hai "amato" di meno la matematica?
10. In quale momento della tua vita, invece, l'hai "amata" di più?

Hanno partecipato al questionario 3.491 persone, di cui 3.232 in maniera completa.
Ai fini dell'analisi è stata considerata la popolazione che ha risposto a tutte le domande del questionario.

3 L'analisi

L'analisi dei dati è stata effettuata mediante il software statistico **R**, richiamando alcuni servizi esterni (ad esempio TreeTagger per la parte di POS Tagging http://www.cis.uni-muenchen.de/~schmid/tools/TreeTagger/). L'infografica è stata invece realizzata tramite appositi programmi di grafica.

3.1 I dati descrittivi

In prima istanza sono stati analizzati i dati descrittivi del campione che ha partecipato alla nostra indagine. In particolare, sono state analizzate le risposte alle prime 3 domande del questionario, relative alle dimensioni: **Età** (Figura 1 e Tabella 1), **Titolo di Studio** (Figura 2 e Tabella 2) e **Tipologia di Scuola secondaria di secondo grado frequentata** (Figura 3 e Tabella 3).
Da notare come la maggior parte dei partecipanti abbia un'età inferiore ai 18 anni (diploma di Terza Media come Titolo di Studio). Questo è un aspetto importante in quanto ci dice che la maggior parte delle risposte alle domande provengono da ragazze e ragazzi che vivono ancora quotidianamente lo studio della matematica nelle scuole secondarie di secondo grado (su tutte il Liceo Scientifico).

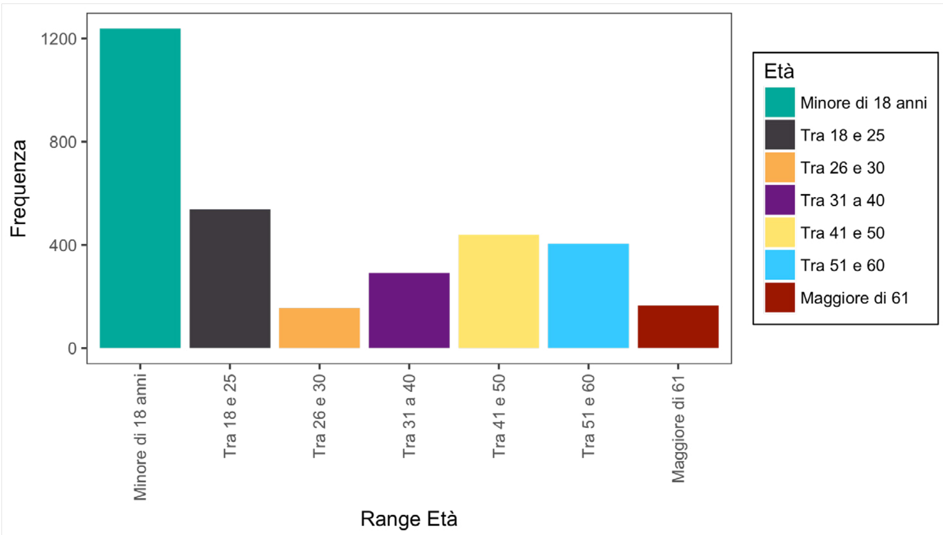


Figura 1
Suddivisione dei rispondenti per range di età.

Età	Numerosità	Percentuale
<18	1.238	38%
18-25	538	17%
26-30	154	4%
31-40	291	9%
41-50	440	14%
51-60	405	13%
>60	166	5%

Tabella 1
Suddivisione dei rispondenti per range di età.

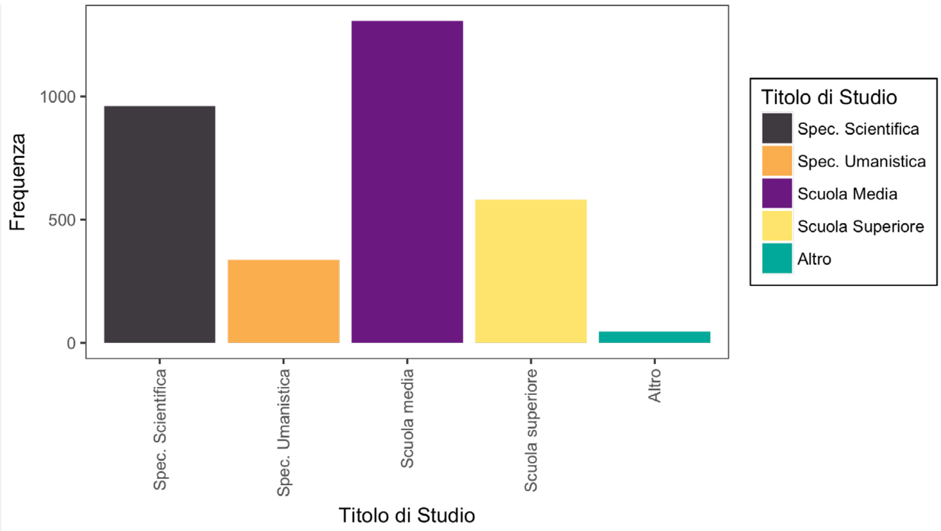


Figura 2
Suddivisione dei rispondenti per Titolo di Studio.

Titolo di Studio	Numerosità	Percentuale
Laurea/Master/Dottorato in ambito scientifico	961	30%
Laurea/Master/Dottorato in ambito umanistico	338	10%
Scuola secondaria di secondo grado	581	18%
Scuola media	1.306	40%
Altro	46	2%

Tabella 2
Suddivisione dei rispondenti per Titolo di Studio.

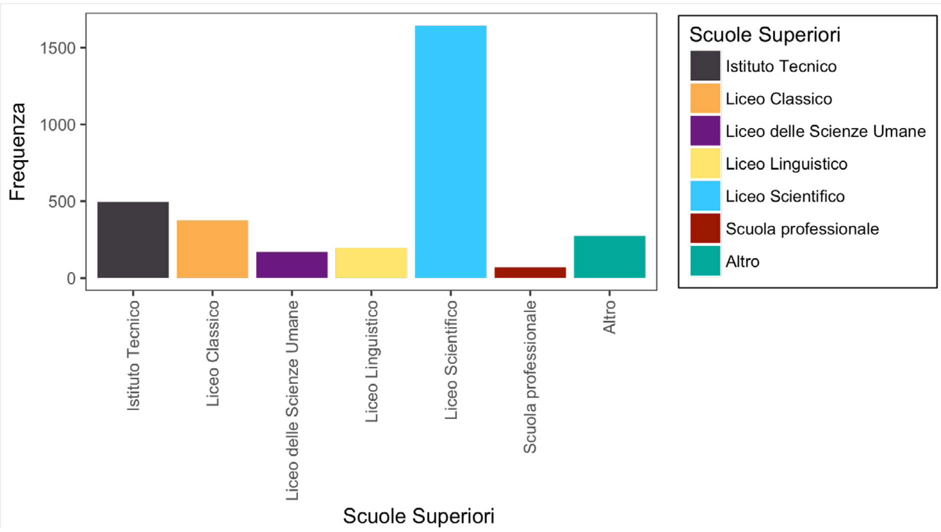


Figura 3
Suddivisione dei rispondenti in base alle Scuole secondarie di secondo grado frequentate.

Scuola secondaria di secondo grado	Numerosità	Percentuale
Scuola Professionale	72	2%
Liceo Linguistico	198	6%
Liceo delle Scienze Umane	173	5%
Liceo Scientifico	1.645	51%
Liceo Classico	376	12%
Istituto Tecnico	494	15%
Altro	274	9%

Tabella 3
Suddivisione dei rispondenti in base alle Scuole secondarie di secondo grado frequentate.

Il dato sulla tipologia di scuola dei rispondenti fornisce un importante fattore per l’analisi dei dati raccolti: il campione è fortemente caratterizzato da chi frequenta o ha frequentato Licei ed in particolare Licei Scientifici (che assorbono la maggioranza assoluta dei rispondenti).
Lo storico dei dati sulle iscrizioni degli ultimi anni mostra come i Licei si attestino in totale intorno al 55% (e il Liceo Scientifico da solo intorno al 25%), gli Istituti Tecnici intorno al 30% e gli Istituti Professionali intorno al 15% (http://www.indire.it/2018/02/08/iscrizioni-online-licei-ancora-in-crescita-li-sceglie-il-553-dei-ragazzi/).
Questa caratterizzazione del nostro campione non è di per sé sorprendente (la ricerca è stata sviluppata e pubblicizzata attraverso canali di blog matematici) e conferma la non rappresentatività statistica del campione. Allo stesso tempo, proprio la caratterizzazione del campione permette di evidenziare (come discuteremo) la presenza ampia – e dunque la rilevanza – di fenomeni di ostilità nei confronti della matematica anche in contesti che dovrebbero accogliere prevalentemente chi, almeno in partenza, ha un buon rapporto con la matematica.

3.2 Il periodo *migliore* e *peggiore* con la matematica

In seguito sono state esaminate le risposte alle domande 9 e 10 del questionario, in particolare i periodi in cui i rispondenti dichiarano di aver amato di più (Figura 4 e Tabella 4) e amato di meno (Figura 5 e Tabella 5) la matematica. Ricordiamo che una grossa fetta degli intervistati è composta da giovani ancora alle prese con la scuola secondaria (38% sotto i 18 anni). Ne emerge come la scuola secondaria di secondo grado sia la più scelta (sia per indicare il periodo di maggior passione per la matematica, sia per quello di minor passione). Da sottolineare, seppure non particolarmente significativa, è la presenza di casi anomali che creano rumore nei dati: ad esempio 2 persone aventi licenza media come grado di istruzione hanno indicato l’Università come periodo di maggior affetto verso la Matematica, mentre sono 4 i rispondenti con titolo di licenza media ad aver indicato l’Università come periodo di minor affetto. Nel primo caso (periodo di maggior affetto, Tabella 4) tali risposte sono dovute ad errata comprensione della domanda, mentre nel secondo caso (periodo di minor affetto, Tabella 5) si tratta di sarcasmo da parte dei rispondenti.
Nello studio narrativo di Di Martino e Zan, un aspetto interessante è l’analisi dell’evoluzione del rapporto con la matematica raccontata da chi scrive. Facendo riferimento in partenza ai tipi fondamentali di sviluppo di un testo narrativo: “progressivo”,

"regressivo", "stabile" (Lieblich, Tuval-Mashiach & Zilber, 1998), Di Martino e Zan (2005) individuano in generale cinque categorie di rapporto con la matematica: costantemente alto (stabile); costantemente basso (stabile); alti e bassi (combinazione di più tipi fondamentali); in calando (regressivo); in crescendo (progressivo). Dal loro studio emerge come nessuna di queste categorie sia vuota e che comunque la maggior parte delle storie non è stabile.
Le domande 9 e 10 forzavano a scegliere (e quindi a posizionarsi come non stabili), ma il fatto che quantitativamente emerga la scuola secondaria di secondo grado manda un messaggio chiaro: si incide (nel bene e nel male) sul rapporto con la matematica anche a livello di scuola secondaria di secondo grado. Questa consapevolezza è importantissima in ottica di lavoro sulle difficoltà e contraria all'opinione che non si possa incidere su ragazzi che "ormai hanno un atteggiamento negativo verso la matematica".

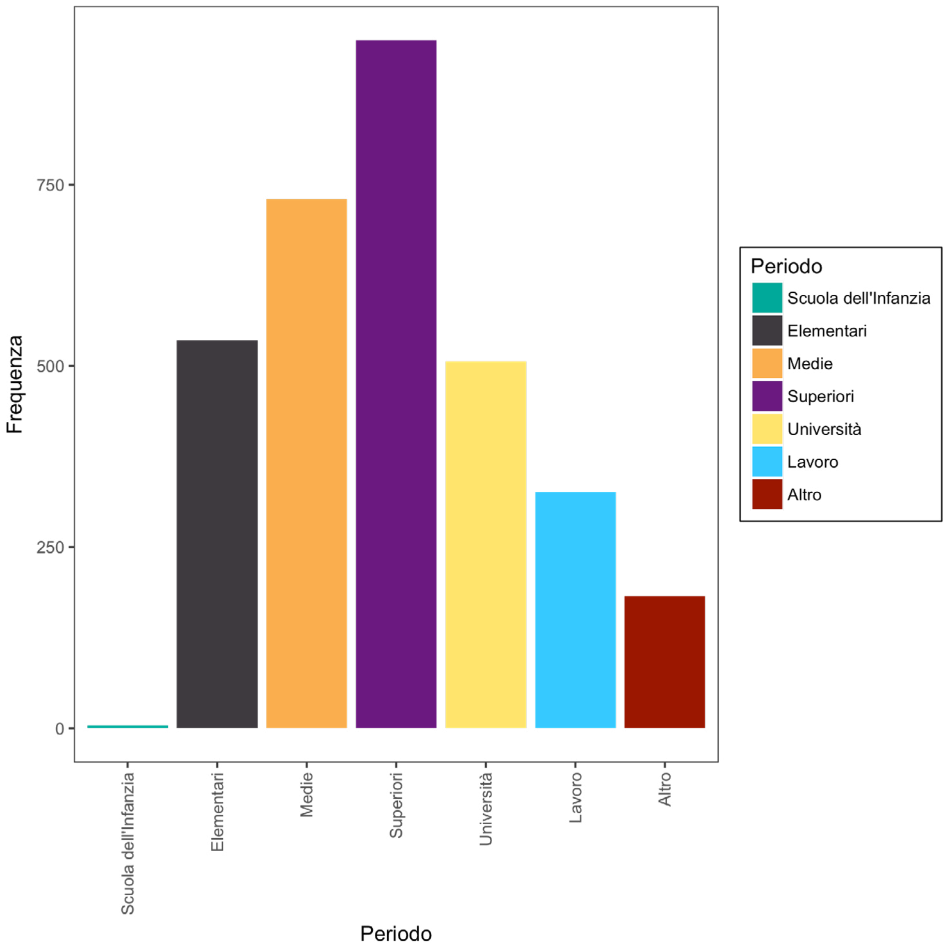


Figura 4
Suddivisione dei rispondenti per periodo di maggior affetto verso la matematica.

	Titolo di Studio						
Periodo	Spec. Scientifica	Spec. Umanistica	Scuola superiore	Scuola Media	Altro	Totale	%
Scuola dell'infanzia	0	0	0	4	0	4	0,1%
Elementari	39	55	75	351	15	535	16,6%
Medie	82	77	101	449	21	730	22,6%
Secondarie di secondo grado	224	76	205	438	6	949	29,4%
Università	379	30	95	2	0	506	15,6%
Lavoro	183	68	65	7	3	326	10,1%
Altro	54	32	40	55	1	182	5,6%

Tabella 4
Suddivisione dei rispondenti per periodo di maggior affetto verso la matematica, in base al livello di istruzione.

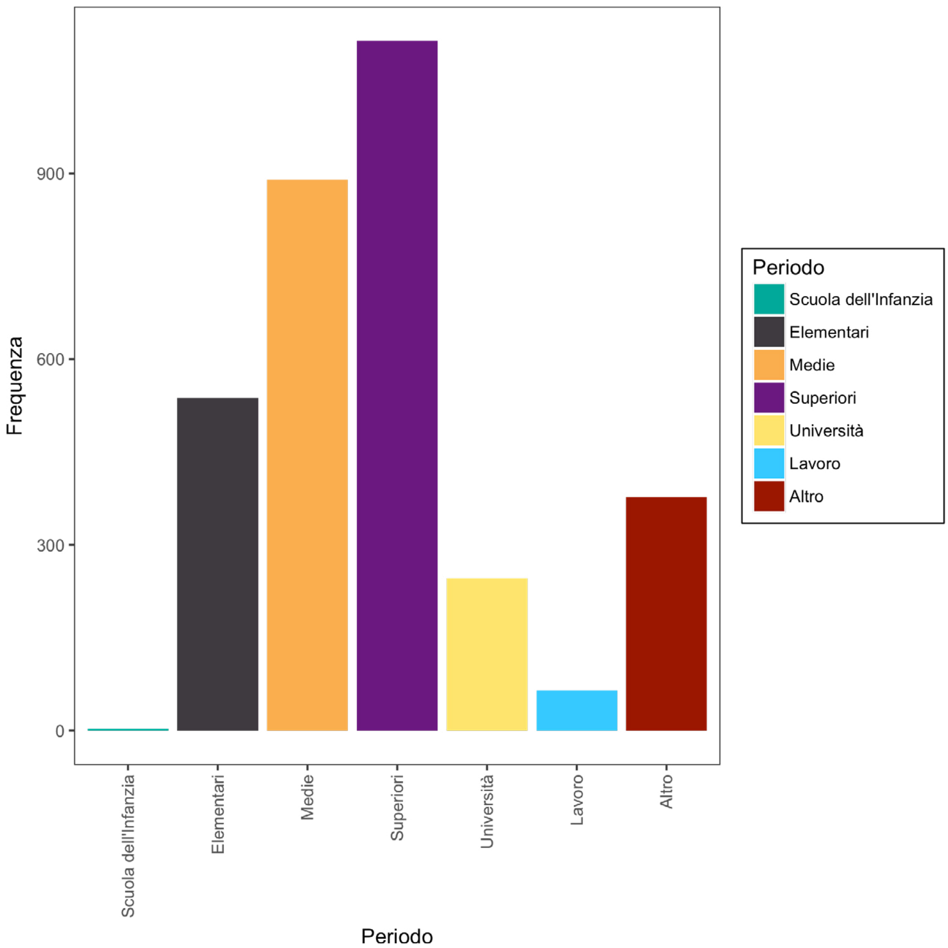


Figura 5
Suddivisione dei rispondenti per periodo di minore affetto verso la matematica.

	Titolo di Studio						
Periodo	Spec. Scientifica	Spec. Umanistica	Scuola superiore	Scuola Media	Altro	Totale	%
Scuola dell'infanzia	1	0	0	1	1	3	0,1%
Elementari	138	35	70	279	15	537	16,6%
Medie	213	75	152	435	15	890	27,5%
Secondarie di secondo grado	230	165	234	480	5	1.114	34,5%
Università	155	22	62	4	3	246	7,6%
Lavoro	44	13	6	1	1	65	2,0%
Altro	180	28	57	106	6	377	11,7%

Tabella 5
Suddivisione dei rispondenti per periodo di minore affetto verso la matematica, in base al livello di istruzione.

3.3 Il rapporto con la matematica e l’analisi delle emozioni

L’analisi delle emozioni è una particolare analisi statistica applicata a dei dati di tipo testuale, allo scopo di determinare lo stato d’animo (sentiment) di chi scrive rispetto a un particolare tema.
Ad esempio si può determinare la reazione degli utenti riguardo a un particolare prodotto di un’azienda a partire dalle recensioni inserite sul Web oppure riguardo a uno specifico evento (elezioni, manifestazioni sportive, ecc.) tramite il flusso di tweet/post su Twitter e Facebook.
Nel nostro caso i dati su cui calcolare il sentiment sono i commenti dei partecipanti al questionario sul proprio rapporto con la matematica (singoli aggettivi caratterizzanti e breve descrizione dell’esperienza e le emozioni associate alla matematica).

Per effettuare l’analisi delle emozioni sono stati utilizzati due approcci:

– utilizzo delle Dandelion[2] API[3] per analisi su dati di tipo testuale;
– utilizzo di dataset di parole negative/positive.

2 – 3

Le emozioni rispetto alla matematica sono state misurate con il primo approccio, prendendo in considerazione le risposte aperte alla domanda *Descrivi sinteticamente il tuo rapporto con la matematica*. In sostanza viene richiamato un servizio online (il calcolo del sentiment) al quale vengono passati dei dati (le risposte alla domanda in questione) e questo restituisce per ciascuna risposta l’emozione associata.
Il servizio utilizzato analizza la struttura e il contenuto del singolo commento e attribuisce a questo uno tra i 3 valori di reazione emotiva (positivo, negativo, neutrale) in base a una scala di valori numerici compresi tra –1.0 *(estremamente negativo)* e 1.0 *(estremamente positivo)*. La fascia di neutralità è compresa invece tra –0.5 e 0.5.

2. https://dandelion.eu
3. Acronimo di Application Programming Interface, sono delle librerie di funzioni che permettono a un programmatore di interagire con un programma o una piattaforma software richiamandone alcuni servizi da utilizzare. Rendere disponibile un set di API di un software significa dare la possibilità ad altri di interagire con la sua piattaforma e, soprattutto, estendere le funzioni e le caratteristiche della struttura base della stessa. In sostanza, le API sono un valido strumento per diffondere un programma lasciando ad altri stabilire la modalità di interazione.

Ad esempio, si considerino i seguenti commenti dati dai partecipanti e il relativo sentimento attribuito dal servizio:

- «ottima, è sempre stata la mia materia preferita» POSITIVO
- «la matematica è la materia con cui ho più affinità per questo mi piace molto» POSITIVO
- «rapporto quotidiano che mi permette di comprendere meglio la realtà che mi circonda» NEUTRALE
- «la matematica per me è complicata ma permette di rispondere a tanti perché» NEUTRALE
- «mi impegno per cercare di capire ragionando ma quando non riesco a risolvere un procedimento mi do per vinta» NEGATIVO
- «non mi fa impazzire si svolge ma senza emozioni» NEGATIVO

È evidente che anche questa analisi "algoritmica" ha alla base decisioni di fondo soggettive su cosa e quando si possa parlare di testo associato ad un’emozione positiva/negativa: se è vero infatti che molti commenti sono in qualche modo chiaramente associabili ad un’emozione positiva o negativa (ovvero si può pensare che ci sarebbe un accordo molto ampio sulla classificazione anche fosse fatta manualmente), in altri casi la scelta è probabilmente più discutibile, basata su sfumature e certamente non univocamente determinata. L’ultimo esempio fatto è paradigmatico di questo, si può pensare – come fatto dall’analisi proposta – che la frase evidenzi un sentiment negativo, ma allo stesso tempo è sostenibile anche una posizione che assegna alla stessa frase un sentiment più neutro. Insomma algoritmico non è sinonimo di oggettivo e ci sembra importante sottolinearlo.
Venendo all’analisi globale, è emerso che il 40% dei partecipanti ha/ha avuto un rapporto negativo con la matematica.

Tabella 6
Suddivisione dei rispondenti in base al rapporto emotivo con la matematica.

Sentiment Rapporto con la Matematica		
Sentiment	Conteggio	Percentuale
Positive	791	24
Neutral	1.151	36
Negative	1.290	40

Successivamente è stato misurato il sentiment per i vari aggettivi forniti come risposta alla domanda *Con quali aggettivi (da 1 a 3) descriveresti la matematica?*
Prima di effettuare il calcolo del sentiment per i vari aggettivi è stata effettuata una pulizia delle risposta da tutte le parole che non fossero aggettivi; inoltre per evitare duplicati in base al genere o al numero (ad esempio *bello/bella/belle/belli*), tutte le varie declinazioni di un aggettivo sono state riportate al maschile singolare. In questo caso è stata effettuata un’analisi grammaticale delle risposte, anche detta "Part of Speech (POS) Tagging".
Il POS Tagging consiste nell’assegnazione a una parola della categoria morfo-sintattica cui questa appartiene. Le categorie principali sono nomi, verbi, avverbi, articoli, pronomi e così via.
Nel nostro caso questa classificazione preliminare è stata effettuata con un programma di Tagging, il *TreeTagger* prodotto e rilasciato dal Center for Information

and Language Processing dell’Università Ludwig-Maximilians di Monaco di Baviera. Successivamente il set di aggettivi è stato confrontato con un dataset di parole già classificate secondo il sentiment positivo/negativo.

Al fine di valutare con facilità gli aggettivi positivi e negativi maggiormente ricorrenti, sono state realizzate due nuvole di parole (wordcloud) distinte (**Figura 6** e **Figura 7**). Una nuvola di parole è una rappresentazione grafica di dati testuali, usata in particolare per la visualizzazione di parole chiave sul web o di testo in forma libera. Le modalità di visualizzazione di una nuvola variano a seconda della particolare necessità. Il criterio adottato in questa analisi consente una rapida visione degli aggettivi maggiormente frequenti: viene dapprima assegnata una dimensione al font per la rappresentazione di ciascun aggettivo in maniera direttamente proporzionale alla frequenza dello stesso; successivamente i termini vengono collocati, a partire dal centro della nuvola, seguendo l’ordine decrescente delle frequenze. In pratica, le parole più usate nei testi che abbiamo raccolto sono inserite nel centro e hanno una dimensione maggiore alle altre (dipendente linearmente dal numero di volte che compare nei testi: cioè se una parola X compare 5 volte e una parola Y compare 10 volte, la parola Y sarà più centrale nella nuvola e avrà dimensione doppia della parola X).

Figura 6
Aggettivi con sentiment negativo.

Figura 7
Aggettivi con sentiment positivo.

Emergono aspetti quali l'utilità e il fascino (*interessante, affascinante, intrigante*); inoltre è significativo come ricorrano parecchi termini legati al divertimento che scaturisce dallo studio e la pratica della matematica (ad esempio *divertente, giocoso, piacevole*). In chiave negativa sono invece da considerare aspetti come la complessità, il rigore e l'eccessivo formalismo dai quali scaturisce una repulsione verso la matematica, che viene avvertita inoltre come *incomprensibile, pesante* e *impossibile*. D'altra parte, anche in questo caso, ci sono analisi controverse: come discusso nella ricerca di Di Martino e Zan (2005), l'aggettivo "difficile" non è associato sempre a sentimenti negativi, così come la percezione di complessità. In questi casi, lo studio citato, mostra come non sia la complessità/difficoltà della matematica in assoluto a stimolare sentimenti negativi verso la matematica, ma la percezione di non essere in grado di affrontare tale complessità. Insomma la differenza viene fatta dal rapporto tra l'idea che la matematica sia complessa e la percezione di sé come *matematico*. Nei casi in cui la percezione di sé è alta, la complessità è considerata uno degli aspetti positivi della matematica. La disposizione emozionale rispetto alla difficoltà dipende molto dalla percezione di competenza in matematica che il soggetto ha: riuscire (o percepire di riuscire) in una sfida difficile è spesso motivo di grande soddisfazione.
Questo aspetto trova ulteriore conferma nell'analisi delle emozioni associate alla matematica. In Figura 8 e Figura 9 sono state riportate rispettivamente le emozioni negative e positive suscitate dalla matematica nei rispondenti al questionario. Per l'analisi delle risposte testuali date alla domanda *Quali emozioni associ alla matematica?* è stato utilizzato lo stesso approccio adottato per lo studio degli aggettivi utilizzati per descrivere la matematica, suddividendo le parole tra positive e negative tramite un confronto con dataset di parole già classificate per tipo di reazione.

Figura 8
Emozioni negative associate alla matematica.

La nuvola in **Figura 8** conferma, anche per il nostro campione (che come detto è comunque fortemente caratterizzato), quanto discusso negli studi precedenti di Di Martino e Zan. In particolare, emergono emozioni negative molto forti (*frustrazione, rabbia, disperazione, odio, disgusto*) e sedimentate (*ansia, paura*). Tipicamente questo quadro, che nasce da esperienze ripetute di fallimento, può portare a provare – a priori – disagio nei confronti di qualsiasi situazione matematica: disagio a priori spesso legato ad un senso di impotenza. Impotenza (presente nella nuvola word cloud al centro sulla destra) che può trasformarsi nel fenomeno noto in letteratura come "learned helpness" (McLeod & Ortega, 1993) e che mina l'efficacia di qualsiasi tentativo di recupero: l'allievo è convinto di non potercela fare in matematica e, coerentemente con questa convinzione, rinuncia ad investire risorse per cambiare la propria situazione. Particolarmente interessanti da questo punto di vista (anche a livello di pratica didattica per il recupero) sono gli studi di Wiener (1986) sulle attribuzioni causali di successo/fallimento. Wiener descrive le tre dimensioni principali secondo cui classificare le attribuzioni causali: interne/esterne, stabili/instabili, controllabili/incontrollabili. La dimensione di stabilità e quella di controllabilità sono quelle più importanti in ottica di recupero: dagli studi di Di Martino e Zan (2005) emerge come spesso lo studente in difficoltà attribuisca il fallimento a cause che lui riconosce come incontrollabili e stabili, sviluppando la convinzione che non ci sia niente da fare.
Un altro fattore di continuità con gli studi citati è il riferimento importante al tempo. Nonostante che ovviamente "tempo" non sia un'emozione, evidentemente al "tempo in matematica" è associata un'emozione negativa e questo dovrebbe farci riflettere come insegnanti. Il tempo è considerato un nemico in matematica da molti studenti: dall'analisi dei temi di Di Martino e Zan emerge come molti studenti in difficoltà abbiano la percezione che potrebbero farcela se fosse dato loro "più tempo". Al di là del fatto che questa convinzione sia fondata o meno, fatto sta che di per sé il fatto che uno studente possa pensare questo è evidentemente frustrante.

Figura 9
Emozioni positive associate alla matematica.

La nuvola delle emozioni positive, evidenziando come *soddisfazione* sia l'emozione positiva più ricorrente, sembra rafforzare la convinzione che la considerazione di complessità possa avere un ruolo in tale soddisfazione. L'appagamento dato dal riuscire a risolvere qualcosa di complesso è motivo di *gioia, orgoglio ed eccitazione*.

Dal punto di vista quantitativo, si è voluto analizzare anche le correlazioni statistiche tra le emozioni (indicate con la variabile SENTIMENT) e le dimensioni relative a Titolo di Studio, Età e Scuola. È stata studiata in particolare la dipendenza della variabile SENTIMENT rispetto alle altre dimensioni.
Nel nostro caso l’indipendenza è stata misurata utilizzando il test del χ quadrato (test tra i più noti a livello statistico) e per ciascuna coppia SENTIMENT-Dimensione è stato calcolato il *valore p* per verificare la significatività statistica della relazione (valore di soglia fissato ad $\alpha = 0{,}05$).
Per significatività statistica si intende invece, in termini semplicisti, che ciò che viene osservato difficilmente è dovuto al caso. Il livello di significatività di un test viene scelto dallo sperimentatore, ma di solito viene scelto un livello di probabilità pari al 5%. Questa probabilità, detto *valore p*, rappresenta una stima quantitativa della probabilità che le differenze osservate siano dovute al caso. Un valore di *p* vicino a 0 significa che c’è una bassa probabilità che la differenza osservata sia dovuta al caso.
La variabile SENTIMENT risulta essere in una relazione di dipendenza rispetto alle dimensioni Età, Titolo di Studio e Scuola, in quanto i valori di significatività risultano essere tutti inferiori al valore soglia da noi stabilito.

Coppia di Variabili	*valore p*
SENTIMENT-Età	5.435e-07
SENTIMENT-Titolo di Studio	3.822e-16
SENTIMENT-Scuola	0.00013

Nei grafici che seguiranno è mostrata la natura della dipendenza della variabile SENTIMENT rispetto alle tre dimensioni Età, Titolo di Studio e Scuola, ossia come i 3 valori emozionali (negativo, neutrale, positivo) si relazionano ai rispettivi delle altre variabili.
A ciascuna coppia di possibili valori viene associato un valore numerico che rappresenta l’intensità della relazione tra la coppia di valori delle variabili in esame (tale valore viene detto *residuo* ed è la differenza tra il valore reale – il numero di co-occorrenze – e il valore atteso dato dalla statistica).
I valori dei grafici mostrati di seguito vanno letti nel seguente modo:

- pallini positivi in blu: valori positivi in una cella indicano un’alta presenza nella popolazione in esame di unità che sono descritte dal valore della riga e dal valore della colonna;
- pallini negativi in rosso: valori negativi stanno a significare una scarsa presenza nella popolazione in esame di unità che sono descritte dal valore della riga e dal valore della colonna.

Ad esempio, nel grafico che analizza la dipendenza tra i valori dell’Età e quelli del sentiment (**Figura 10**), emerge come le persone di età inferiore ai 18 anni abbiano un tipo di reazione principalmente negativo (pallino blu intenso nella cella *negativo – minore di 18 anni*) rispetto a quello positivo (pallino rosso intenso nella cella *positivo – minore di 18 anni*); d’altra parte persone con età superiore ai 51 anni tendono a mostrare un atteggiamento prevalentemente positivo verso la matematica (pallini blu nelle celle *positivo – tra 51 e 60 e positivo – maggiore di 61* e pallini rossi nelle rispettive celle del sentiment negativo). In questo caso è possibile anche una interpretazione sul particolare campione: nel caso degli studenti, sono state coinvolte intere classi; gli over 50 sono invece persone che hanno deciso di partecipare probabilmente da frequentatori del sito www.mathisintheair.org e quindi interessati alla matematica.

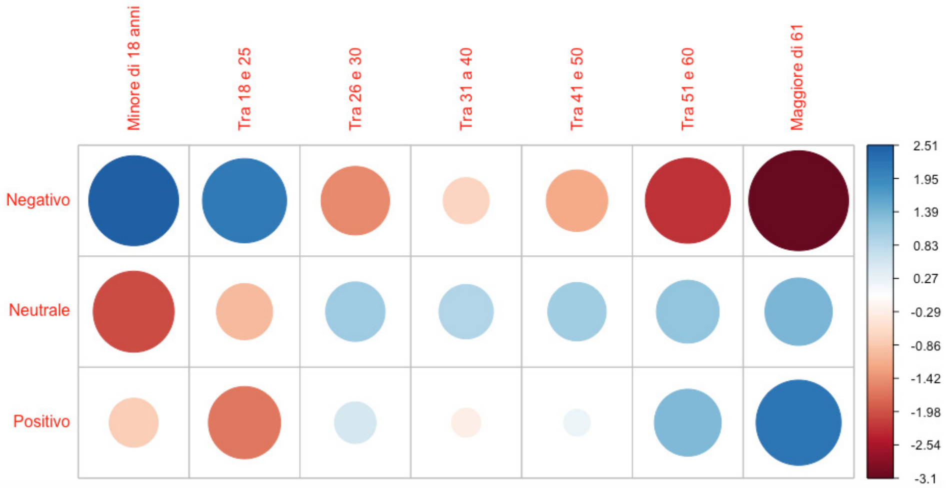


Figura 10
Relazione tra i valori della coppia di variabili SENTIMENT-Età.

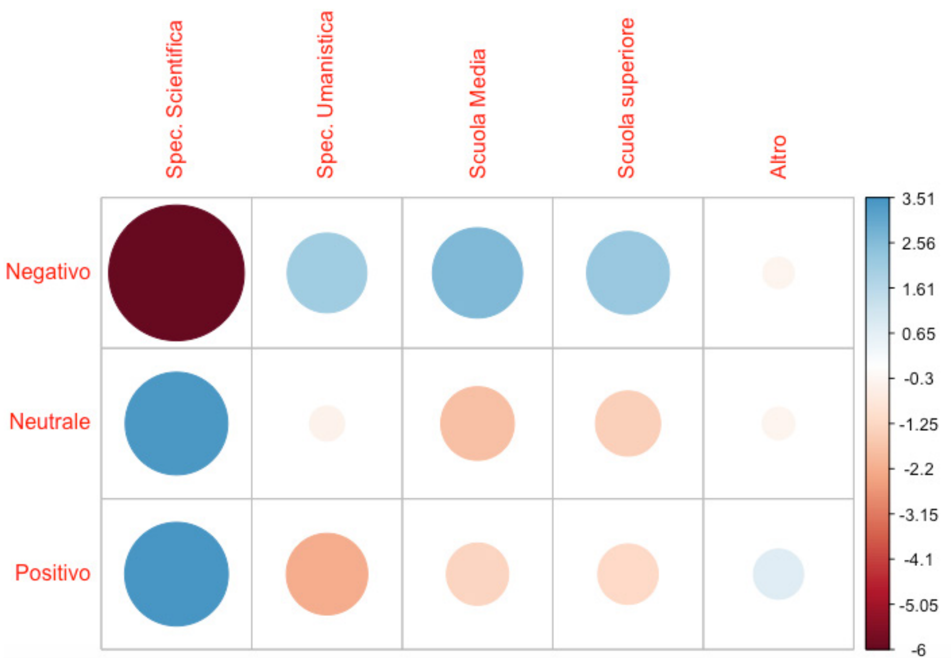


Figura 11
Relazione tra i valori della coppia di variabili SENTIMENT-Titolo di Studio.

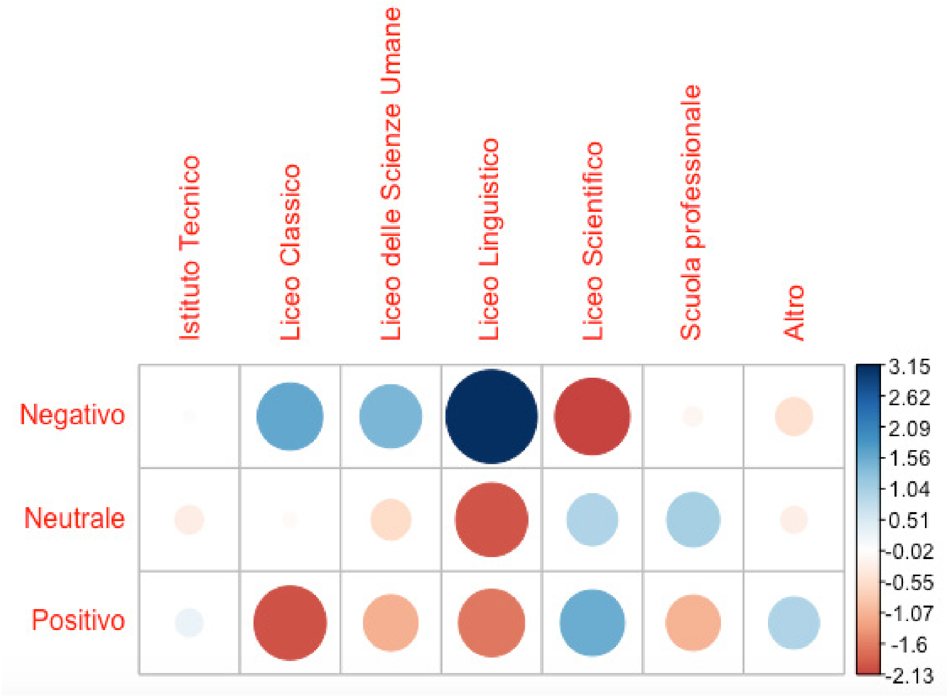


Figura 12
Relazione tra i valori della coppia di variabili SENTIMENT-Scuola.

Dagli altri 2 grafici (**Figura 11** e **Figura 12**) emerge in maniera abbastanza netta un forte apprezzamento della matematica da parte di chi ha già conseguito una specializzazione scientifica e una notevole avversione da parte di partecipanti che frequentano o hanno frequentato scuole superiori a indirizzo umanistico (tra tutte il Liceo Linguistico).

3.4 Analisi Testuale sull’Insegnamento

Una nota di rilievo è stata data alle risposte fornite da parte dei ragazzi sotto i 18 anni alla domanda *Dell’insegnamento della matematica cosa non hai apprezzato?*
A tale scopo sono stati raccolti tutti i trigrammi più rilevanti.
Per *n*-gramma si intende una sequenza contigua di *n* parole in una data sequenza di testo. Pertanto sono state raccolte tutte le sequenze contigue formate da 3 parole. Successivamente, per ciascuna sequenza, è stato effettuato il POS tagging delle 3 singole parole della sequenza. Infine è stato calcolato un indice di significatività testuale (*IS Index*, in cui intervengono la frequenza della sequenza, la frequenza delle singole parole costituenti la sequenza e il POS Tagging di questi ultimi).

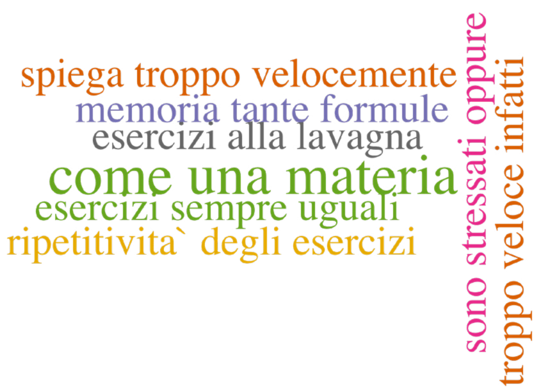


Figura 13
Trigrammi più frequenti tra gli under 18.

Dall’analisi emerge come vengano percepiti negativamente la velocità delle spiegazioni, la ripetitività degli esercizi e la mole di formule da dover imparare. Riteniamo che questi aspetti, soprattutto se collegati a quanto evidenziato dalla precedente ricerca sui temi effettuata da Di Martino e Zan, forniscano una importante indicazione su alcune problematiche della pratica didattica che influiscono negativamente sugli atteggiamenti che gli studenti sviluppano nei confronti della matematica.
Pur essendo consapevoli dell’esiguità e non rappresentatività del campione di popolazione coinvolto nell’indagine, pensiamo che quanto emerso potrebbe essere utile alla riflessione di un insegnante di matematica.
Sicuramente, fra le tante criticità dell’insegnamento della matematica, i problemi riscontrati nell’indagine (spiegazioni troppo veloci, esercizi ripetitivi e sforzi mnemonici) sembrano essere aspetti su cui potrebbe essere più semplice per un docente agire e modificare la propria pratica didattica.
Se da una parte, come già indicato in precedenza, le analisi sin qui emerse sono da contestualizzare su un campione in larga parte costituito da studenti del Liceo Scientifico (57% degli under 18), dall’altra va sottolineato come le difficoltà emerse nel rapporto con la matematica siano condivise tra tutta la popolazione giovanile esaminata.

4 Conclusioni

Scopo di questa indagine è stato quello di analizzare il rapporto di una parte di studenti e adulti con la matematica, in particolare le emozioni ad essa associate.
L’indagine è partita da una precedente ricerca svolta in ambito affettivo e, utilizzando nuovi strumenti di analisi (su dati di tipo testuale) si è concentrata sulle emozioni suscitate dalla matematica: se da un lato emerge un sentimento di paura e ostilità verso la matematica dato dall’astrusità dei concetti o da un senso di inadeguatezza, dall’altro spicca invece il senso di fascino e sfida dato dal cimentarsi nello studio e dal possibile piacere e appagamento che ne deriva.
Tra i giovani sono stati indagati con maggiore attenzione inoltre gli aspetti negativi legati all’insegnamento ricevuto; questo viene percepito come sbrigativo e monotono e, come conseguenza, la matematica viene vista come un’attività meccanica e noiosa.
L’indagine, pur fortemente condizionata dalla predominanza di ragazzi frequentanti scuole secondarie, ha fornito interessanti risposte e chiavi di lettura su questa relazione, utili ai docenti per una possibile rimodulazione della propria metodologia di insegnamento e dell’approccio con i propri studenti.

Bibliografia

Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica.* Milano: Mondadori.

Ceron, A., Curini, L., & Iacus, S. (2013). *Social media e sentiment analysis. L’evoluzione dei fenomeni social attraverso la rete*. Springer.

Di Martino, P., & Zan, R. (2005). Raccontare il contare: l’incontro scontro con la matematica nei resoconti degli allievi. In P. Gisfredi (A cura di), *Itinerari tra storie e cambiamento. Momenti e processi Formativi* (pp. 105-126). Bologna: CLUEB.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). "Me and maths": Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 27-48.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43*(4), 471-482.

INVALSI. (2017). Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2016/17. Disponibile in http://www.invalsi.it/invalsi/doc_eventi/2017/Rapporto_Prove_INVALSI_2017.pdf (consultato il 28.06.2018).

Lieblich, A., Tuval-Mashiach, R., & Zilber, T. (1998). *Narrative research. Reading, analysis, and interpretation*. SAGE Publications.

Mc Leod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). McMillan Publishing Company.

McLeod, D., & Ortega, M. (1993). Affective issues in mathematics education. In P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (pp. 21-36). New York: McMillan Publishing Company.

OECD. (2015). *PISA 2015 Result in focus*. Disponibile in https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf (consultato il 28.06.2018).

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Weiner, B. (1986). *An attributional theory of motivation and emotion*. New York: Springer-Verlag.

Autori/Andrea Capozio[*], Davide Passaro[•] e Pietro Di Martino[▴]
[*]Data Analyst in HR Development & Compensation – Enel S.p.A., Italia
[•]Liceo Classico Sperimentale "Bertrand Russell" – Roma, Italia
[▴]Dipartimento di matematica – Università di Pisa, Italia
andreacapozio@gmail.com, passaro.fk@gmail.com, pietro.di.martino@unipi.it

Mi descrivi il tuo disegno del Mattoncino Lego? Un'esperienza didattica di matematica nella scuola dell'infanzia

Could you describe me the Lego Brick drawing? A mathematical teaching experience in Kindergarten

Benedetto Di Paola[*] e Antonella Montone[•]

[*]Dipartimento di Matematica e Informatica – Università degli Studi di Palermo, Italia

[•]Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Bari Aldo Moro, Italia

Sunto / La consapevolezza dell'importanza di guardare, attraverso una lente di tipo matematico, i disegni prodotti dai bambini, considerandoli come strumento diagnostico per quello che D'Amore et al. (2004) chiamano come il "Campo di Esperienza" *Spazio, Ordine e Misura*, ha dato spunto a questo contributo che discute una sperimentazione didattica condotta in una sezione di scuola dell'infanzia (5 anni). All'interno della stessa è stato chiesto ai bambini di rappresentare dei mattoncini Lego con un disegno, e di descrivere successivamente i propri elaborati rintracciando e argomentando in essi eventuali segni di scarto numerico-spaziali rispetto al mattoncino osservato/manipolato, attraverso visioni prospettiche differenti.
L'analisi qui discussa ci sembra interessante sia per i ricercatori in Didattica della Matematica sia per gli insegnanti di scuola dall'infanzia e primaria, che vogliono indagare il ruolo del disegno come forma espressiva e diagnostica per approfondire conoscenze, abilità e competenze matematiche dei loro studenti.

Parole chiave: percezione visiva; rappresentazione 2D/3D; artefatto; disegno; scuola dell'infanzia.

Abstract / The awareness of the importance to observe, through a mathematical lens, the children drawings, considering them as diagnostic tools for the context that D'Amore et al. (2004) call as "Campo di Esperienza" *Spazio, Ordine e Misura*, is the base of this contribution. It discusses a didactic experience conducted in a Pre-Primary school (students 5 years old) in which we asked children to represent Lego bricks with a drawing. We also asked them to describe their works, tracing any sign of numerical-spatial difference with the real object, observed from different prospectives. The discussed results seem to us interesting both for researchers in Mathematics Education and for Pre-Primary and Primary School teachers who want to deepen the role of drawing as an expressive and diagnostic form to analyse students knowledge, abilities and proto-mathematical skills.

Keywords: visual perception; 2D/3D representation; artifact; drawing; Kindergarten.

1 Premessa

Da diversi decenni è stata acquisita la consapevolezza della necessità di favorire apprendimenti significativi e competenze proto-disciplinari, disciplinari e meta-disciplinari stabili.
Se da un lato occorre infatti selezionare i saperi essenziali, relativi all'alfabetizzazione di base di cui parlano i diversi piani di studio, in particolare le Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012) italiane, dall'altro è necessario utilizzare strumenti e ambienti adeguati per proporre attività per la costruzione di significati matematici, attraverso metodo-

logie significative che veicolino i saperi in gioco in modo formale o informale (D'Amore & Di Paola, 2016). Pertanto, come sottolineato dalla Ricerca in Didattica, già dai primi anni di scuola, diviene indispensabile abbandonare la "logica del programma" che si affida essenzialmente all'organizzazione sequenziale, accademica, dei contenuti disciplinari, in favore di un curricolo verticale a spirale (D'Amore, Di Paola, Fandiño Pinilla, Monaco, Bolondi & Zan, 2014). La ratio sottesa a quest'approccio fa riferimento all'idea di formazione continua del cittadino e, quindi, al costante approfondimento e/o rivisitazione di conoscenze, abilità e competenze capaci di permettere allo studente di vivere in modo diretto occasioni di ripensamento critico e autonomo del proprio sapere (D'Amore & Sbaragli, 2003; D'Amore & Di Paola, 2016).
Certamente essere docenti in un panorama così complesso non è semplice; lo stile educativo deve ispirarsi all'ascolto, all'accompagnamento dello studente nella scoperta di "nuovi mondi", all'istituzionalizzazione delle sue conoscenze che piano piano, negli anni, possono proiettare lo studente verso forme di apprendimento sempre più autonome e consapevoli (Fandiño Pinilla, 2008).
Riferendo tali osservazioni alla specificità della scuola dell'infanzia, e fissando l'attenzione alla competenza da favorire nel bambino in questa fascia di età, in accordo con le Indicazioni Nazionali e i nuovi scenari (del 2012 e del 2018), ciò che l'insegnante dovrebbe proporre in sezione è «giocare, muoversi, manipolare, curiosare, domandare, descrivere, rappresentare, immaginare situazioni ed eventi (…)» (MIUR, 2012, p. 16). La scuola dell'infanzia è in questo senso «la scuola dell'attenzione e dell'intenzione, del curricolo implicito (…)» (MIUR, 2018, p. 8).
Tutto ciò che il bambino vive in sezione nel suo "primo" triennio educativo dovrebbe poi essere vissuto in continuità nel passaggio alla scuola elementare che, attraverso le esperienze educative proposte durante la scuola dell'infanzia, dovrebbe portarlo a potenziare l'esercizio autonomo di differenti stili cognitivi che via via, nel percorso di crescita, tra la scuola elementare e la scuola superiore, dovrebbero permettergli di sviluppare, attraverso gli alfabeti caratteristici delle varie discipline, un pensiero riflessivo e critico (Di Paola, Battaglia & Fazio, 2016; Di Paola & Ruisi, 2016). Tuttavia ciò non sempre succede: spesso il meccanismo si inceppa e molte delle competenze acquisite nei vari segmenti scolastici si "perdono" nel passaggio da un grado scolastico a quello successivo. Questo è maggiormente vero sui gradi scolastici più bassi e in molti casi interessa la scuola dell'infanzia, che purtroppo non sempre viene valorizzata quanto si dovrebbe. Una parte della "colpa" ricade sulla ricerca in didattica. In particolare, in accordo con quanto sostenuto da D'Amore e Di Paola (2016), relativamente all'insegnamento/apprendimento della Matematica, sono ancora molti gli insegnanti e gli autori che per questo segmento educativo «fanno riferimento a teorie didattiche spesso superate, a materiali strutturati in alcuni casi inutili, a situazioni di pseudo-apprendimento spesso mal poste e quindi dannose» (D'Amore & Di Paola, 2016, p. 1). Se esiste infatti, come sostengono gli autori, un linguaggio ormai condiviso a livello nazionale e internazionale per la didattica della matematica nei livelli scolastici successivi e nell'Università, lo stesso purtroppo non si può dire per la scuola dell'infanzia. In questo livello scolastico, per quanto riguarda la ricerca e le successive applicazioni nella didattica corrente, molto è ancora da costruire, anche se sono sempre di più gli specialisti che, sulla scia lasciata da qualche nucleo di ricerca in didattica come quelli di Bologna (pionieri da questo punto di vista), Bari, Modena, Reggio Emilia e Palermo, cominciano a osservare i fenomeni didattici specifici per questo segmento educativo. In questo senso, se negli anni passati in molti lavori si osservava un "prendere a prestito" elementi teorico/sperimentali più adatti per

altri livelli scolastici e un provare a "trasporli" in questo livello scolastico (con scarsi risultati), oggi, sempre di più la comunità dei ricercatori in didattica della matematica sta provando a teorizzare aspetti di competenza e processi proto-disciplinari in modo specifico per i bambini della fascia di età 3-5 anni. La scuola dell'infanzia ha, infatti, delle specificità talmente particolari che, spesso, la trasposizione a partire dai livelli scolastici successivi è impossibile da realizzare.
In generale poi, come si evidenzia in D'Amore et al. (2014), trattare la matematica con allievi così giovani come quelli della scuola dell'infanzia può essere interessante perché spesso obbliga a ripensamenti importanti su questioni teoriche anche per gradi scolastici successivi.
Guardando alla didattica tipica di questo livello scolastico, una delle modalità espressive più comuni, è certamente il disegno libero o guidato, assieme alla narrazione, all'uso di giochi simbolici e ad attività di gioco definite su registri semiotici di varia natura (Angeli, D'Amore, Di Nunzio & Fascinelli, 2011; Bartolini Bussi, 2008). Il disegno viene spesso utilizzato dagli insegnanti come una tecnica, un'occasione, per far comunicare ai bambini le loro idee "ingenue", la loro visione del mondo così da provare a scoprire le loro "storie" (Anning & Ring, 2004), le loro abilità, le loro competenze (Cherney, Seiwert, Dickey & Flichtbeil, 2006; Fandiño Pinilla, 2008). I disegni, "letti" attraverso una lente di tipo proto-matematico, possono rappresentare secondo noi (ma non siamo certamente i primi a dirlo) uno strumento diagnostico potentissimo dal punto di vista matematico, inquadrando la disciplina in quello che D'Amore et al. (2004) chiamano come il "Campo di Esperienza" *Spazio, ordine e misura*. In accordo con quanto discusso in letteratura sull'argomento (Arrigo & Sbaragli, 2004; Sbaragli 2006; Di Paola, Manno, Scimone & Sortino, 2007) un'analisi attenta di una rappresentazione figurale proposta da un bambino come risposta ad un determinato compito cognitivo, messa anche in relazione ad altre forme comunicative come ad esempio il linguaggio naturale o quello gestuale da lui/lei utilizzato per descrivere il proprio disegno, può permettere all'insegnante uno studio più profondo (e quindi un successivo potenziamento delle relative competenze sottese) dei modelli mentali e degli schemi di ragionamento propri della nostra cultura (Di Paola, 2016; Donaldson, 2010; Montone, Pertichino & Ancona, 2005), di tipo matematico, messi in atto dal bambino nell'azione grafico-pittorica (D'Amore, 2015).
Se tutto ciò si può realizzare alla scuola dell'infanzia, partendo da attività di tipo a-didattico, nei gradi successivi si potranno prevedere attività più strutturate e agganciate a obiettivi e traguardi matematici specifici.

2 Quadro teorico: i "segni" lasciati nello spazio del disegno

L'attività figurale è da sempre motivo di studio e riflessione in ambito di ricerca psichiatrica, psicologico, grafologico, pedagogico e didattico. In accordo con Lowenfeld (1947) l'espressione figurale viene usata come indicatore delle abilità emergenti in aree diverse come quella motoria, percettiva, linguistica, simbolica, sensoriale, spaziale ecc. Il disegno quindi, in questo senso, è da sempre considerato un "indicatore" delle capacità intellettive del disegnatore.
Numerosi sono i lavori che discutono il disegno infantile e le fasi di sviluppo rintracciabili attraverso questa forma di rappresentazione. Le ricerche di Luquet (2001)

hanno messo in evidenza come il bambino, grazie ad una lenta e progressiva crescita cognitiva, passi pian piano dallo scarabocchio all'uso consapevole dei segni per rappresentare la realtà. La prima fase di sviluppo è quella del *realismo fortuito*, rintracciabile intorno ai due anni di età, in cui il bambino disegna qualche linea e vi attribuisce un significato suo, proprio, astrattamente legato ad un aspetto emozionale, psicologico.

Segue poi la fase del *realismo mancato* che dura fino ai 4-5 anni circa. Durante quest'arco temporale nel disegno infantile si rintraccia una assoluta mancanza di sintesi operata dal bambino. Nelle sue rappresentazioni figurali i segni lasciati nello spazio bianco del foglio da disegno sono spesso tra loro slegati, incerti, confusi. Le figure tracciate appaiono in molti casi lacunose e composte da parti non messe in relazione tra loro.

La terza fase è quella del *realismo intellettuale* che copre l'arco temporale che va dai 5 agli 8 anni circa. In questa fase il bambino appare più competente nel riprodurre l'aspetto di ciò che disegna. Il tratto sul foglio appare più "maturo" e si evidenzia un maggiore controllo dalle relazioni tra i segni grafici proposti.

Nell'ultima fase, chiamata da Luquet (2001) *realismo visivo*, il bambino disegna gli oggetti così come appaiono davanti ai suoi occhi, evidenziando un'alta competenza di rappresentazione figurale.

Citiamo inoltre brevemente (per non allontanarsi troppo dall'obiettivo dell'articolo) ulteriori approfondimenti che discutono il disegno da un punto di vista che fa da sfondo a quanto qui si discute, ma non in ambito propriamente didattico, come ad esempio i lavori di Di Leo (1981), Oliverio Ferraris (1978), Talladini e Valentini (1990). Invece ci interessa far esplicito riferimento a quanto rintracciato in letteratura in merito al ruolo che questa forma espressiva può avere nella scuola dell'infanzia, come strumento diagnostico nell'ambito alla terna *Spazio, ordine e misura* (D'Amore et al., 2004).

Non sono molte le ricerche che affrontano questa tematica; significative certamente quelle proposte da Piaget (1967, 1971) e i successivi sviluppi (Morino, 1970; Morra, 2005) che discutono la relazione, rintracciabile nel disegno fatto da un bambino, tra emozione, immaginazione e punto di vista osservativo, nella rappresentazione di un oggetto tridimensionale. Come sostiene Pontecorvo (1992) riprendendo queste ricerche, un disegno, che riporta in modo corretto dei segni in una relazione spaziale utile a rappresentare al meglio un oggetto reale, evidenzia una buona capacità del disegnatore di «decentramento spaziale» (Pontecorvo, 1992, p. 354). Questo aspetto fa riferimento alla difficile abilità, nell'atto del disegnare, di tener conto di punti di vista differenti (Bartolini Bussi, 2008; Montone, 2013), messi correttamente in relazione tra loro. Le ricerche di Luquet (2001) mostrano su quest'ambito come l'analisi di un disegno realizzato su un foglio di carta bianco di un oggetto tridimensionale, rappresentato in prospettiva, possa evidenziare diverse tappe evolutive relative a competenze di tipo proto-matematico. Il bambino disegnatore, negli anni, passa infatti da una semplice "figura piana" (tipica di una visione frontale) al disegno di uno o più lati/facce tra loro ribaltate/sovrapposte sullo stesso piano. Questa rappresentazione poi pian piano si trasforma in un'altra che, seppur inizialmente lacunosa, evidenzia i primi approcci a concetti geometrici più complessi come ad esempio il parallelismo tra i lati e le facce di un solido. Solo dopo parecchi anni e parecchi disegni si rilevano nei bambini rappresentazioni figurali contenenti un corretto effetto di profondità dato all'oggetto da disegnare. I segni che il bambino della scuola dell'infanzia traccia nelle sue rappresentazioni figurali possono, in questo senso in accordo

con Piaget (1967, 1971), "raccontare" la progressiva maturazione e riorganizzazione, sul piano cognitivo ed emotivo, delle immagini mentali (Piaget, 1971) che via via in lui si perfezionano.
Guardando al binomio disegno-conoscenza matematica, la relazione tra l'oggetto geometrico conosciuto e il disegno che lo raffigura è molto delicata.
Per Duval (1998) non può esserci un'acquisizione concettuale di un oggetto da conoscere, senza dover necessariamente far riferimento ad una sua rappresentazione realizzata per mezzo di segni. Ogni forma di conoscenza è quindi, sempre e a qualunque età, inseparabile da un'attività di rappresentazione (D'Amore, 2000). Il disegno è una di queste.
Per Sbaragli (2006)

> «i concetti geometrici richiedono rappresentazioni figurali per riuscire ad essere compresi, ma queste non sono soddisfacenti per formare il concetto geometrico; solo con un atto mentale, un disegno può essere interpretato e può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta, anche la generalità».
> (p. 1)

Leggere i segni matematici lasciati su un disegno non è per nulla facile! Tuttavia diviene fondamentale individuarli e analizzarli per comprendere il livello di evoluzione nella costruzione dei significati del soggetto in apprendimento.
Pertanto nella pratica didattica, per un intervento di analisi efficace, il punto di partenza deve sempre essere il soggetto apprendente. I segni rintracciati nel suo disegno "raccontano" qualche cosa di lui/lei (delle sue competenze proto-matematiche) se prima vengono *tradotti* e poi, come riportato sopra in Sbaragli (2006), *interpretati*. Se però l'interpretazione riguarda il significato simbolico del disegno stesso, la traduzione richiede la decodifica dell'immagine attraverso una serie di parametri che prendono in considerazione, tra gli altri, gli aspetti formali, grafologici e contenutistici del disegno. Analizzare il disegno di un bambino per interpretarlo e tradurlo al meglio significa allora guardare alla qualità del tratto, agli annerimenti, alle cancellature, alle dimensioni delle figure e/o degli oggetti disegnati, alle eventuali imprecisioni del disegno, alla collocazione nel foglio degli oggetti rappresentati, alle relazioni numerico/spaziali tra le parti degli oggetti raffigurati sul foglio (si pensi alla proporzione tra lunghezze, superfici, volumi ecc.) (D'Amore & Sbaragli, 2011; Sbaragli, 2011).
Alcuni di questi aspetti, in tempi non recenti, sono stati discussi dagli psicologi della Gestalt e in larga misura confermati da ricerche più attuali come quelle proposte dalle neuroscienze (Battista, 2007; Della Sala, 2016; Gallese, 2014). Queste ultime hanno analizzato i processi che il cervello mette in evidenza nel disegnare un oggetto reale curandone sia il contesto (la posizione spaziale nel foglio bianco sul quale si disegna) sia i particolari (percepiti e controllati in modo soggettivo), che contraddistinguono l'oggetto tridimensionale da disegnare (Moss, 2015).
Il rapporto tra spazio vuoto (rappresentato dal foglio di carta bianco) e gli oggetti geometrici disegnati all'interno, può, in accordo con Speranza (1997), far riferimento a due differenti definizioni di spazio: "spazio indipendente" o "spazio non indipendente".

> «Spazio non indipendente significa che noi pensiamo essenzialmente, o primariamente, agli oggetti (o alle figure); lo spazio è solo la coesistenza di

> questi(e) (…) Spazio indipendente significa invece che noi pensiamo prima allo spazio e poi in questo collochiamo gli oggetti (le figure)».
>
> (Speranza, 1997, p. 130)

Nella riproduzione di una figura geometrica, attraverso il disegno, il compito cognitivo che si richiede al bambino è di

> «generare un'immagine mentale della figura, di mantenerla attiva per un certo periodo di tempo e di confrontare la propria produzione grafica con l'immagine mentale generata. Altri compiti di geometria richiedono, poi, di eseguire trasformazioni di vario tipo».
>
> (Sbaragli & Mammarella, 2011, p. 71)

Fino all'ingresso nella scuola dell'infanzia i bambini sembrano mostrare soltanto le funzioni cognitive relative al riconoscimento e alla riproduzione, seppur spesso con errori, lacune, distorsioni (Clements, 2004). Vighi (2016) sostiene che in molti casi il bambino piccolo, di questo livello scolastico, concepisce lo spazio come "non indipendente" ponendo più attenzione agli oggetti da disegnare (per come li percepisce), che allo spazio geometrico disponibile in sé per il disegno.
Ritornando alla complessa relazione tra l'oggetto geometrico conosciuto, il disegno che lo raffigura, e ciò che quel disegno rappresenta per il bambino, va anche sottolineato che per un possibile apprendimento significativo da parte di un soggetto apprendente è necessario che lo studente "si muova" tra più registri semiotici, legati a più rappresentazioni dello stesso oggetto matematico (Duval, 1998). Queste operazioni, ormai note in ricerca in didattica della matematica, fanno capo alle trasformazioni di *trattamento* e *conversione* (Duval, 1998). Volendo fare un esempio che consideri il disegno come registro semiotico, si ha *trattamento* quando si passa da una rappresentazione di un dato oggetto matematico a un'altra, mantenendo costante il registro semiotico disegno; si ha *conversione* quando, abbandonando l'idea di voler usare uno strumento metodologico univoco, si passa ad utilizzare un altro registro semiotico differente dal disegno (D'Amore, 2000, 2006; Sbaragli, 2005). Analizzare quindi conoscenze e competenze di un soggetto apprendente obbliga a far ricorso alle stesse funzioni di trasformazione di *trattamento* e *conversione* tra più registri semiotici. Non ci si può fermare all'analisi del solo disegno!
Questo è ciò che abbiamo provato a fare sperimentalmente con i bambini della scuola dell'infanzia mettendo in relazione registri diversi come il disegno, il gesto e il linguaggio naturale. Con la consapevolezza che in questo livello scolastico risulta più "naturale" per i bambini il ricorso a modelli ed attività che rientrano nella geometria tridimensionale (Cottino & Sbaragli, 2004), il compito proposto ha riguardato la rappresentazione figurale e successivi trattamenti e conversioni di oggetti reali ben noti nella scuola dell'infanzia, come i mattoncini Lego.
L'analisi dei disegni prodotti dai bambini, commentata nei paragrafi successivi, ha fatto riferimento ai risultati discussi in letteratura sullo stesso tema di ricerca da parecchi autori, secondo prospettive differenti e molteplici approcci teorico/sperimentali, (Bianchi, 2006; Cox, 1978, 1985; Luquet, 2001; Montone, 2013; Sbaragli, 2006; Vighi, 2008, 2016) che evidenziano le possibili diverse strategie messe in atto dai bambini (scuola dell'infanzia ed elementare) per rappresentare gli elementi tridimensionali.

Interessante poi, ai fini della nostra ricerca, la prospettiva di Greig (2000) che sottolinea come davanti a compiti cognitivi più complessi (oggetti reali più difficili per il bambino o a lui meno noti) a causa della sua naturale "limitata" veduta (legata all'età), il disegno di un oggetto tridimensionale viene in molti casi semplificato, spesso in modo del tutto errato. Questa semplificazione per Greig (2000) può variare in funzione delle competenze del bambino e per tale motivo necessita di una traduzione e interpretazione spesso non facile. Questi aspetti non sempre sono condivisi da lavori di ricerca in ambito matematico.

3 Campione e domande di ricerca

La ricerca è stata svolta in una sezione omogenea (5 anni) di una scuola dell'infanzia di Palermo in un contesto socio culturale disagiato. La classe è composta da 9 allievi (4 maschi e 5 femmine). La durata complessiva del percorso sperimentale è stata di 2 mesi (febbraio - marzo).
Le domande che hanno guidato la ricerca condotta sono le seguenti:

- Che tipo di disegno producono i bambini di scuola dell'infanzia alla richiesta di rappresentare un oggetto reale a loro ben noto come un mattoncino Lego?
- Che tipo di disegno producono questi bambini se l'oggetto da rappresentare è un mattoncino Lego a loro "meno noto" e/o di forma "meno regolare"?
- Quali argomentazioni producono i bambini all'atto di raccontare il proprio disegno?
- Che consapevolezza dimostrano nel gioco del cambio di visione prospettica di un oggetto reale?
- Come cambia eventualmente il disegno dei bambini (con un trattamento) dopo il "riconoscimento" (mediato da una discussione con l'insegnante) di un possibile scarto tra la propria rappresentazione figurale dell'oggetto richiesto e l'oggetto reale osservato secondo una visione differente?

4 Metodologia di ricerca

L'indagine sperimentale ha fatto riferimento a:

- un'analisi qualitativa dei comportamenti rintracciati in sezione operata grazie ad un'osservazione sincrona dell'azione in classe da parte dall'insegnante e una successiva osservazione della stessa, precedentemente audio e video registrata, in presenza di due ricercatori in didattica della matematica;
- un'analisi qualitativa di tutti protocolli (disegni) dei bambini, analizzati in team dall'insegnante di classe e da due ricercatori in didattica della matematica;
- un'analisi qualitativa delle argomentazioni prodotte dai singoli bambini durante un'intervista condotta dall'insegnante di classe e finalizzata all'analisi dei processi sottesi alla rappresentazione figurale dei mattoncini proposti ai bambini e alla identificazione e discussione dei possibili scarti di rappresentazione figurale, rintracciati sui disegni prodotti in relazione all'oggetto reale osservato/manipolato.

La sperimentazione didattica si è articolata in più fasi qui di seguito sintetizzate:

– Fase 0: *"Scopriamo i mattoncini della scatola dei Lego"*. In questa prima fase, dopo aver spiegato ai bambini il gioco proposto, si invita ciascuno a scegliere un mattoncino (tra quelli più semplici selezionati dall'insegnante di classe). Ogni bambino osserva (attraverso la manipolazione libera) il proprio mattoncino provando a coglierne la forma, la presenza di spigoli, di "punte" e la loro eventuale numerosità ecc. Dopo una prima fase di esplorazione autonoma ogni bambino presenta verbalmente il proprio mattoncino ai compagni.
– Fase 1: *"Disegniamo i nostri mattoncini"*. Ogni bambino prova a ricalcare le forme del "proprio" mattoncino su un foglio bianco (in formato A4) e successivamente a disegnarlo liberamente su un altro foglio bianco (in formato A4).
– Fase 2: *"Mi presenti il tuo mattoncino?"*. In questa seconda fase, svolta in giorni successivi a quelli dedicati alla fase precedente, si richiede ai bambini di descrivere ancora una volta al resto dei compagni della sezione il proprio mattoncino, mostrando questa volta anche il disegno dello stesso. L'insegnante di classe chiede di "confrontare" i vari mattoncini tridimensionali con i relativi disegni elaborati dai compagni. Si cerca, attraverso una discussione tra pari, di far emergere gli aspetti di criticità delle rappresentazioni figurali operate dai bambini.
– Fase 3: *"Il mattoncino blu"*. Viene proposto a tutti i bambini della sezione di disegnare uno stesso mattoncino (più grande di quelli precedentemente forniti nella fase 1), scelto dall'insegnante ma condiviso da tutti come un "bel mattoncino" da disegnare. La consegna è stata quindi: *"Vince chi fa il disegno che rappresenta meglio il mattoncino, la sua forma, le sue facce, le sue "punte"* (questo è il termine condiviso in classe per i piolini presenti nel mattoncino blu), …".
  Per il compito proposto viene scelto il mattoncino Lego riportato sotto (Figura 1). Come per la fase 0 ogni bambino inizialmente osserva (attraverso la manipolazione libera) il mattoncino blu provando a coglierne la forma, la presenza di spigoli, di "punte", la loro numerosità ecc. In un secondo momento il mattoncino viene posto sul banco e i bambini disegnatori si seggono in linea davanti a questo. Il setting proposto viene scelto per favorire nei bambini più punti di vista di osservazione, legati alla loro posizione spaziale. Si cerca di favorire la produzione di disegni dello stesso oggetto, ma con prospettive diverse.

Figura 1
Mattoncino Lego per la fase 3.

  La scelta del disegno più simile al mattoncino blu tra quelli realizzati dai singoli bambini viene operata dalla classe grazie ad una discussione *orchestrata dall'insegnante* (Bartolini Bussi & Boni, 1995), atta a permettere a tutti gli studenti di valutare in autonomia il disegno del compagno e la relativa accuratezza in relazione anche al punto di vista utilizzato. Il mattoncino blu rimane fisso sul banco per tutta la durata dell'attività.
– Fase 4: *"Mi descrivi il tuo disegno?"*. In un setting creato ad hoc (singolo bam-

bino-insegnante di classe, seduti accanto) si intervistano tutti i bambini della sezione. A ciascuno viene riproposto il proprio disegno del mattoncino blu. Durante l'intervista si chiede inizialmente di argomentare il perché delle proprie scelte grafico-pittoriche e di eventuali scarti e/o criticità numerico-spaziali tra il mattoncino blu osservato (che rimane sempre a disposizione del bambino intervistato per eventuali libere manipolazioni) e quello da lui/lei disegnato in sezione secondo un determinato punto di vista. Si lasciano liberi i bambini di "modificare" (o disegnare ex-novo), eventualmente, il proprio disegno precedentemente prodotto (fase 3).

– Fase 5 e fase 6: *"Si cambia forma!"*. Replicando quanto proposto durante la terza e quarta fase del percorso sperimentale viene chiesto a tutti i bambini della sezione di disegnare un mattoncino "più irregolare" di quello blu. Si tratta di un mattoncino rosso di forma "trapezoidale" (mostrato sotto, Figura 2) diversa da quelle degli altri mattoncini Lego precedentemente mostrati in sezione.

Figura 2
Mattoncino Lego per le fasi 5 e 6.

– La scelta di proporre tale mattoncino è legata al voler far operare i bambini con un oggetto reale tridimensionale di una forma a loro meno nota perché poco usata nei giochi proposti nella sezione in questione.
Questa costruzione viene presentata come ultimo stimolo del percorso. Tale scelta nasce dalla consapevolezza secondo la quale la scarsa linearità e forse la forma più atipica del mattoncino, relativamente all'identificazione delle relazioni tra le parti che compongono l'oggetto stesso (spigoli orizzontali, verticali, obliqui e "punta" più grande), avrebbero potuto rendere più ricca la rappresentazione nel registro figurale delle relazioni parte/tutto e, quindi, la relativa fase argomentativa di discussione successiva nell'intervista operata con i bambini. Come in precedenza, durante la sesta e ultima fase, anche in questo caso infatti si chiede ai bambini, intervistati singolarmente, di commentare le scelte fatte sul proprio disegno (realizzato in sezione durante la quinta fase sperimentale) ed eventualmente modificarlo (o rifarlo) alla luce di un possibile riconoscimento di scarto tra la rappresentazione del mattoncino rosso disegnato sul foglio e quello reale (posto anche durante l'intervista a disposizione del bambino per eventuali manipolazioni).

5 Discussione dei risultati

Di seguito si riportano i disegni e le argomentazioni prodotte nelle varie fasi da alcuni bambini tra quelli coinvolti nella sperimentazione. I protocolli qui riportati possono

considerarsi esaustivi in relazione alla varietà delle strategie individuate nei disegni prodotti da tutti i bambini della sezione.
Per brevità si è scelto di riportare i disegni delle ultime 4 fasi tralasciando le precedenti. Di seguito viene inoltre riportata una ricostruzione sintetica delle sollecitazioni proposte dall'insegnante durante le varie interviste realizzate con i bambini nelle fasi 4 e 6. Queste, come detto in precedenza, sono state registrate e successivamente analizzate in team dall'insegnante di classe e da due ricercatori in didattica della matematica. I commenti alle interviste riportati di seguito rappresentano quindi l'accordo raggiunto dai tre soggetti coinvolti in fase di analisi, dopo un'iniziale riflessione autonoma su quanto osservato sui protocolli dei singoli bambini e in merito alle loro argomentazioni prodotte in assetto di intervista.

5.1 Il mattoncino blu di Dario

Nel disegno prodotto e mostrato in sezione (durante la fase 3, **Figura 3**), Dario ha tracciato una forma rettangolare con 11 pallini disposti in un'unica fila. La visione del mattoncino appare frontale come in realtà era la sua posizione in sezione rispetto al mattoncino stesso.

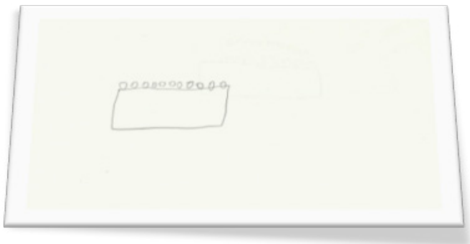


Figura 3
Il mattoncino blu della fase 3, rappresentato da Dario.

Durante l'intervista (fase 4) la maestra gli propone il suo disegno lasciando a disposizione il mattoncino blu, posto sul banco davanti a lui, con la possibilità di manipolarlo.

Ins.: «Mi descrivi il tuo disegno?».
D.: «Sì! Ci sono questi cerchietti che escono» (indica le punte del mattoncino blu posto sul banco).
Ins.: «Ah, Ok! Come li hai disegnati nel foglio?».
D.: «Così» (fa scorrere il dito sui cerchietti disegnati).
(Lunga pausa di silenzio, circa 1 minuto).
D.: «Mmm. No, forse però non è fatto bene …».

Osservando il mattoncino blu da un punto di vista diverso probabilmente si accorge immediatamente di certe caratteristiche che non ha rappresentato nel suo disegno (il punto di vista osservativo in sezione era quasi frontale, diverso da quello proposto durante l'intervista) ed esplicita:

D.: «Ma come faccio queste punte?».
Ins.: «Non lo so, che dici tu?».
(Lunga pausa di silenzio, circa 1 minuto).
Ins.: «Hai contato le punte?».

D.: (Dopo aver contato le punte sul mattoncino blu) «Si! Dodici».
Ins.: «Contiamo quelle del disegno?».
D.: (il bambino conta ad alta voce) «Undici! Mamma mia!» (ridendo e toccandosi la fronte con la mano) … «Uno!».

L'espressione «Mamma mia!» potrebbe far pensare ad un bambino impaurito. Ciò in realtà non è, il bambino prendendo coscienza dello scarto tra il numero di punte da lui rappresentato e quello reale, dopo aver esplicitato la "dimenticanza" ride e, soddisfatto, esplicita la nuova scoperta! L'espressione linguistica utilizzata da Dario è inoltre tipica del contesto geografico sul quale si è operato.

Ins.: «Che hai scoperto Dario?» (ridendo).
D.: «Ne manca una. La aggiungo!».
Ins:. «Come vuoi, sei stato bravo comunque!».
(Dario disegna una punta in più sul foglio, in linea con le altre).

Ins.: «Queste "punte", come sono messe nel mattoncino blu? Perché le hai disegnate così?».
D.: «Sono in fila» (Dario tocca il mattoncino blu). «Qui e qui» (indica le due file di punte del mattoncino).
Ins.: «Bene! Ho capito. E tu come le hai disegnate? Mi descrivi il tuo disegno?».
D.: (ridendo e guardando il disegno) «Ho messo le punte in una fila. Ora sto vedendo anche le altre».
Ins.: «Ok … e quindi?».
D.: «Io ne avevo visto solo una. Non lo vedevo da sopra il mattoncino».
Ins.: «Ah, ho capito! Bene, bene! Forse perché avevi disegnato mentre eri di fronte al mattoncino?».
D.: «Sì. Lo avevo così» (allontana l'oggetto e lo pone di fronte a sé).
D.: «Lo posso disegnare di nuovo, ora?».
Ins.: «Sì, certo».
(D. posa il mattoncino blu sul banco, un po' distante da sé stesso, e inizia a disegnare il rettangolo in un altro foglio bianco a sua disposizione. Poi però si ferma).
D.: «Sì però … Mmm … Ma come faccio a mettere le punte accanto sul foglio? Non lo voglio disegnare da sopra. Lo voglio disegnare mentre è lì» (indica l'oggetto posto sul banco di fronte a sé, in una posizione che lui stesso ha deciso).
Ins: «Non saprei ... Come possiamo fare? Come vuoi disegnare?».
D.: «Le contiamo prima».
Ins: «Ok. Contiamo quante sono nelle due file … quante punte ci sono in ogni fila?».
D.: (dopo aver contato) «Sei … ma come faccio a mettere dietro queste?» (indicando la seconda fila del mattoncino blu).
Ins.: «Non saprei, proviamoci! Io ti guardo, prova a disegnarlo».
D.: «Ci provo!».

Dario a questo punto si rimette a disegnare in silenzio. Cambiando il punto di vista, cambia il disegno! Ciò che è interessante è analizzare come cambia.

In questa seconda rappresentazione figurale, riportata in **Figura 4**, viene tracciata (in modo più o meno fedele a quella riportata sul primo disegno da lui prodotto) la forma rettangolare. A differenza di quanto prodotto in precedenza vi è però, come chiaramente verbalizzato da Dario, un tentativo di disporre le punte presenti sul mattoncino blu in due file differenti. Le punte disegnate sono però inaspettatamente 8 per la prima fila e 13 nella seconda fila ed è inoltre assente una relazione di parallelismo tra le due file di punte. Ciò non deve stupire, il compito richiesto è molto complesso, lo sforzo cognitivo è alto. Una linea di punte viene disegnata da Dario lontana dalla base di appoggio, forse per dar un senso di profondità che però, chiaramente, il bambino nel suo disegno gestisce in modo ancora insicuro.

Figura 4
Seconda rappresentazione del mattoncino blu da parte di Dario.

Da notare il miglior dettaglio delle punte rispetto al primo disegno. Queste non appaiono più come palline ma evidenziano delle forme più allungate e quindi più simili al reale.

Ins.: «Questo disegno ti sembra più accurato del primo? Più preciso?».
D.: «Sì».
Ins.: «Perché, me lo dici?».
D.: «È più bello. È fatto meglio, è uguale al mattoncino blu messo lì».
Ins.: «Me lo descrivi?».
(Lunga pausa di silenzio. D guarda il disegno).
Ins.: «Quante punte hai disegnato?».
(Lunga pausa di silenzio. D guarda nuovamente il disegno).
D.: «13 qui. C'era spazio. Ne ho messi tanti. Lui (indicando il rettangolo con il dito e facendolo scorrere lungo il lato lungo dello stesso) è lungo! … Il disegno ti piace (ridendo)? Ne potevo mettere di più, c'è ancora spazio. Però mi sono fermato, se no erano troppe».
(…)
Ins.: «Il disegno è bellissimo! Sei stato bravissimo! Perché queste punte le hai disegnate qua sopra? Sono curiosa (sorridendo)».
D.: «Perché sono sopra le altre. Guarda! (indica le due file di punte del mattoncino disegnato e osserva il mattoncino blu cercando un riscontro). Prima le avevo fatte diverse perché vedevo solo quelle dritte!».

Chiaramente, come è normale che sia, i disegni prodotti evidenziano come Dario sia nella fase del *realismo mancato* (Luquet, 2001); ciò non deve sorprendere, vista l'età del bambino e il difficile compito cognitivo a lui richiesto. Dario non fa "errori", non sbaglia. Nelle due occasioni di disegno interpreta il mattoncino blu attraverso lenti

diverse (prova ne è la verbalizzazione durante l'intervista «è uguale al mattoncino blu messo lì», «Prima le avevo fatte diverse perché vedevo solo quelle dritte!»), collegate a sue posizioni spaziali diverse rispetto all'oggetto da disegnare.
La risposta di Dario «Ne potevo mettere di più» sembra però confermare quanto discusso in ambito di ricerca in merito alla gestione dello spazio. In accordo con Vighi (2016), Dario infatti sembra percepire lo spazio come "non indipendente". Non curandosi (o facendolo in parte) delle relazioni tra gli oggetti geometrici disegnati, perde di vista quanto discusso con l'insegnante sulla numerosità delle punte e facendosi guidare dal voler rendere "più bello" il disegno solo dal punto di vista estetico, usa lo spazio del foglio secondo una relazione numerico-spaziale non rintracciabile nel mattoncino a lui proposto.
L'analisi dei disegni e delle argomentazioni verbali prodotte da Dario nelle fasi sperimentali qui discusse hanno permesso, anche grazie alla collaborazione dell'insegnante-ricercatore, un'analisi più approfondita delle competenze visuo-spaziali e logico-verbali sottese al compito. Ciò ha favorito un successivo potenziamento delle stesse.

5.2 La visione "prospettica" del mattoncino blu di Giulia

Anche il disegno proposto da Giulia nella terza fase riporta una forma rettangolare sulla quale vengono posizionati dei cerchietti in linea.

Figura 5
Il mattoncino della fase 3, rappresentato da Giulia.

Il rettangolo è abbastanza irregolare, i cerchietti sono correttamente 6, anche se, come si vede nel disegno riportato accanto, non esiste nessuna relazione tra la base del mattoncino blu e i cerchietti disegnati.
Giulia nel suo disegno non rappresenta i cerchietti distribuendoli su tutto il lato lungo del rettangolo ma solo per metà. La relazione spaziale tra i cerchietti e il lato del rettangolo evidenzia quindi una mancata relazione tra le parti che compongono l'oggetto (Battista, 2007).

Ins.: «Brava, bel disegno! Me lo descrivi?».
G.: «Sì! Ci sono questi cerchietti che escono».
(pausa di silenzio).
G.: «Ho disegnato il mattoncino blu! Questo … (prende in mano il mattoncino posto sul banco), ti ricordi?».
Ins.: «Sì, sì. Bene! Guardiamo meglio il tuo disegno, che hai fatto?».
G.: «Sì! Ho disegnato questo (indica il rettangolo) e poi le palline».
Ins.: «Ok. Come le hai disegnate queste palline? Come le hai messe sul rettangolo? Me lo spieghi? Ti va?».
G.: «Ho contato e poi le ho disegnate».

Ins.: «Brava! Guardiamo adesso assieme il mattoncino blu».
G.: «Va bene» (prende il mattoncino in mano, guarda poi l'insegnante e il disegno).
Ins.: «Mi hai detto che le hai contate, vero? Quante sono le punte nel mattoncino?».
G.: «6 (senza guardare il mattoncino), tutte vicine».
Ins.: «Sei sicura?».
G. annuisce.
Ins.: «Le contiamo insieme?».
G.: (riprende in mano il mattoncino posto sul banco e dopo aver contato correttamente) «Dodici».
Ins.: «Ah sono dodici? …» (sorridendo).
G.: «Sì!» (sorride soddisfatta).
G.: «Qui – indicando solo la prima fila – sono sei. Io ne avevo viste sei».
Ins.: «E come mai?».
G.: «Erano sei (ridendo), ci sono stata attenta».
Ins.: «Sì, secondo me sei stata attenta infatti, come eri seduta quando hai disegnato in classe? Dove era messo il mattoncino?».
G.: «Ero accanto a Dario … quasi davanti a me …».
Ins.: «Sei stata brava allora, ne vedevi solo sei da lì?».
G.: «Si, ora no, però no …».

Dal dialogo si nota come Giulia abbia nel suo disegno deciso opportunamente di rappresentare solo la prima fila. È stata una sua scelta, volontaria, dettata dalla sua visione spaziale in relazione alla posizione tenuta in sezione durante l'azione del disegno. Il suo «quasi davanti a me …» sembra poi motivare lo scarto tra la reale posizione delle punte del mattoncino osservato in sezione e quello disegnato in modo "distorto". Le punte sono infatti tutte allineate a sinistra della base.

Ins.: «Proviamo a fare un altro disegno? Che ne dici? Ti va?».

Giulia, accettando contenta l'invito dell'insegnante evidenzia una nuova rappresentazione figurale (riportata sotto), «diversa», «più dall'alto ma non da sopra», «con sei punte» (come lei stessa dichiara).
Per svolgere il compito proposto non guarda il mattoncino Lego posto sul banco. Nonostante sia invogliata più volte dalla maestra a manipolare lo stesso mattoncino, va spedita. «Ho capito come fare! Non c'è bisogno!».

Nel nuovo disegno (Figura 6) che riproduce in un altro foglio bianco, il rettangolo questa volta è più regolare e le punte, anche se sono 14 e non 12, vengono distribuite equamente sul lato superiore del rettangolo.

Figura 6
Seconda rappresentazione del mattoncino blu da parte di Giulia.

Questo disegno evidenzia un maggiore controllo da parte di Giulia della relazione tra gli oggetti geometrici presenti nella "nuova" rappresentazione figurale e la loro posizione spaziale.
Guardando alla terna *Spazio, ordine e misura*, Giulia sembra dimostrare con il nuovo disegno una competenza che prima non aveva mostrato.
Il cambio di punto di vista mette infatti in evidenza un elemento che in precedenza era del tutto assente: il parallelismo tra le file. Questo è adesso corretto.
Come nel caso di Dario, il "gioco di cambio di visuale" qui proposto ha permesso al disegno di rivelarsi come strumento diagnostico, capace di permettere all'insegnante una valutazione più precisa delle competenze visuo-spaziali di Giulia. Una maggiore competenza che si ritrova, ad esempio, nella comparsa dell'aspetto prospettico che sembra essere proposto da Giulia, in questo secondo disegno, attraverso la netta separazione dei 14 cerchietti sul lato lungo del rettangolo. Tale ipotesi viene anche confermata successivamente. Alla richiesta della maestra di spiegare il perché di tale nuova rappresentazione (definita da Giulia «più dall'alto ma non sopra») Giulia risponde: «ne ho messi 7 dentro e 7 fuori il rettangolo, così si vede meglio, come se è da lontano un po' sollevato».
In accordo con Luquet (2001) il protocollo di Giulia e la sua argomentazione (seppur scorretta nella forma) mostrano in questo caso un "effetto di profondità" dato dai segni e dagli spazi figurali gestiti dalla bambina che è ancora incerto, ma c'è!
A differenza di quanto visto sul disegno di Dario, questo secondo disegno di Giulia mostra delle sovrapposizioni di più elementi legati a punti di vista diversi che fanno immaginare uno stadio di *realismo mancato* più avanzato di quanto si poteva immaginare analizzando solo il primo disegno.
Particolare interessante di questo secondo protocollo è poi la presenza all'interno del primo cerchietto (disegnato sulla sinistra) di un cerchietto concentrico, più piccolo. Il prosieguo dell'intervista rivela, su questo particolare, un'autocorrezione da parte di Giulia che, resasi conto di aver inizialmente sbagliato le dimensioni del primo cerchietto, in relazione alla lunghezza del lato lungo del rettangolo, ha rimediato subito all'inesattezza di misura commessa, ingrandendo il cerchietto, in modo tale da "ricoprire" tutto il lato lungo del rettangolo come effettivamente si rileva sul mattoncino blu.

Quanto detto sin qui, grazie all'analisi dei protocolli di Dario e Giulia, ci permette di ribadire, ancora una volta, quanto sia stato importante per l'insegnante e per noi ricercatori, in termini di valutazione di competenza dei bambini coinvolti, guardare attraverso una lente di tipo matematico ai disegni da loro prodotti e successivamente discussi e reinterpretati alla luce di possibili cambi di visione spaziale. Grazie all'uso di "occhiali diversi", come detto da un bambino intervistato, si sono potuti osservare processi e competenze differenti.
Sia per Dario che per Giulia, infatti, il trattamento della forma espressiva legata al cambio di visuale e il ricorso parallelo ad altre forme comunicative, rintracciate sperimentalmente nei bambini, come il linguaggio naturale e quello gestuale ha permesso un migliore approfondimento delle loro conoscenze, delle loro abilità grafiche e delle loro competenze aritmetico-geometriche.

5.3. I mattoncini blu e rosso di Gabriele

L'immagine riportata sotto (Figura 7), a differenza di quanto mostrato fino ad ora, contiene due disegni. Quello in basso è stato fatto da Gabriele in classe (fase 3 del percorso sperimentale), l'altro, quello più in alto, si riferisce invece a quello prodotto, sempre da Gabriele, durante l'intervista (fase 4) riportata, seppur in parte, di seguito.

Figura 7
Prima e seconda rappresentazione del mattoncino blu da parte di Gabriele.

Come nei casi precedenti, infatti dopo aver discusso con Gabriele sulla numerosità effettiva dei cerchietti del mattoncino (16 e non 12), la disposizione spaziale degli stessi e lo scarto rispetto all'oggetto reale, il bambino, nella fase 4, ha chiesto di ridisegnare il mattoncino blu mantenendo lo stesso foglio utilizzato precedentemente in classe per (come dichiara durante l'intervista) «guardare anche il disegno "di prima", per migliorare».

Osservando parallelamente i due disegni, si osserva come nel "secondo" (quello riportato sul foglio, più in alto), le punte siano rimaste in numero errato (14 e non 12) e come, nonostante la corretta relazione spaziale tra le file di cerchietti, forse in virtù del cambiamento del punto vista usato da Gabriele nell'osservare il mattoncino posto davanti a sé durante l'intervista, sia sparito l'approccio alla visione prospettica che si intravedeva invece nella prima rappresentazione proposta in sezione.
Osservata questa differenza di rappresentazione, l'insegnante prova ad approfondire con Gabriele il perché di questi spazi "vissuti" in modo diverso nelle due rappresentazioni.

(…)
Ins.: «Ma questi due disegni sono diversi?».
G.: «Sì, non proprio però».
Ins.: «Perché, mi puoi spiegare meglio?».

Gabriele nel rispondere a questa domanda dimostra una competenza di alto livello ed esplicita:

G.: «I disegni sono diversi perché ... (pausa di silenzio) … Qui ho disegnato solo il pezzetto blu delle costruzioni di sopra (indica la figura in alto) … Dovevo farlo più dritto. Qui avevo disegnato il mattoncino. (indica la figura in basso). Vedi?».

Le parole di Gabriele sottolineano ancora una volta come il trattamento operato sulla rappresentazione figurale realizzata in sezione gli abbia permesso di arricchire, in seconda battuta durante l'intervista, il disegno dell'oggetto, migliorando l'aspetto conoscitivo dello stesso (Duval & Godin, 2005).
L'analisi del disegno prodotto dal bambino evidenzia un comportamento "comples-

so" che mostra più strategie messe in atto per rappresentare l'oggetto tridimensionale richiesto. Da un lato infatti prevale una visione più frontale, dall'altro si ritrova la sovrapposizione di più elementi legati a punti di vista diversi che viene usata da Gabriele per dare al disegno un certo effetto di profondità, ancora lacunoso ma presente. Il riconoscimento delle scelte di rappresentazione figurale dell'oggetto, richiesto dall'insegnante durante l'intervista, non ha prodotto ciò che ci si aspettava (relativamente alla numerosità dei cerchietti che sono rimasti in quantità scorretta) ma ha permesso di scoprire un aspetto interessante relativo alle abilità visuo-spaziali di Gabriele, sulle quali in seguito l'insegnante di classe ha lavorato in fase di potenziamento.

Il disegno riportato sotto (Figura 8) fa riferimento alla rappresentazione figurale del mattoncino "trapezoidale" rosso disegnato da Gabriele in sezione (durante la fase 5).

Figura 8
Prima rappresentazione del mattoncino rosso da parte di Gabriele.

Nel disegno posto a centro pagina si ritrova una forma rettangolare molto semplice sulla quale è posto un rettangolino più piccolo con un cerchietto all'interno. Nella forma disegnata sono del tutto assenti i lati obliqui, le «pendenze» (termine usato dai bambini in sezione in fase di descrizione dei disegni da loro prodotti), del mattoncino rosso.
Il cerchietto posto al centro sembra mettere in evidenza un cambio di punto di vista che però si mostra come "confuso".
Se nel caso della rappresentazione del mattoncino blu, discussa prima, Gabriele evidenziava una competenza proto-matematica relativa al controllo simultaneo (seppur lacunoso per certi versi) della terna *Spazio, ordine e misura* in relazione all'oggetto tridimensionale, in questo caso, invece, sembra quasi che davanti ad un oggetto più complesso lo sforzo cognitivo sia tanto più difficile quanto più semplice e lacunosa è la rappresentazione figurale che ne deriva. Anche se Gabriele nel disegnare il mattoncino rosso usa simultaneamente due punti di vista diversi (confermando le sue abilità nel saper fare ciò), la rappresentazione risultante è in questo caso molto semplificata rispetto a quanto prodotto in precedenza. Questo sembra confermare ancora una volta gli studi di prospettiva di Greig (2000) che, ribadiamo, sottolineano come davanti a compiti cognitivi più complessi (in questo caso meno "naturali", su oggetti "poco noti"), in molti casi, a causa di una più fragile "veduta" del bambino, il disegno tridimensionale venga semplificato in funzione delle competenze del bambino stesso.
Durante l'intervista proposta nella sesta fase, l'insegnante gli ripropone il disegno lasciando a sua disposizione il mattoncino "trapezoidale", posto sul banco.

Ins.: «Gabriele mi descrivi il tuo disegno?».
Ga.: «Ti piace?».
Ins.: «Sì, è bello! Me lo descrivi?».

Ga.: «Sì!» (mostra entusiasmo).
Ga.: (Gabriele descrive il suo disegno in modo molto lacunoso, dopo un po' prende in mano il mattoncino rosso posto sul banco ed esclama) «È questo quello che ho disegnato!».
Ins.: «Queste (indicando i due lati piccoli del rettangolo rappresentato nel suo disegno) e queste (toccando i due lati obliqui del mattoncino rosso) sono uguali?».
Ga.: «No» (tocca il mattoncino e rimane in silenzio).
Ins.: «Come sono queste (facendo scorrere il dito sui due lati più corti del rettangolo più piccolo rappresentato nel suo disegno)?».
Ga.: «Sono così» (e fa un gesto della mano destra ponendola in direzione verticale, con le dita rivolte verso l'alto).
Ins.: «E nel mattoncino? …».
Ga.: «Così (posiziona le manine come se stesse pregando ma in posizione più obliqua e rimane in silenzio) ...».

Ga.: «Vuoi sapere perché ho messo il cerchietto al centro?».
Ins.: «Sì, dimmi. Perché?».
Ga.: «Questo cerchietto sta sopra, vedi?» (indica il mattoncino rosso).
Ins.: «Bene! E dei lati che cosa mi puoi dire? Perché li hai disegnanti così?».
(Lunga pausa di silenzio, circa 1 minuto).

Ga.: «Lo disegno di nuovo? Posso?».
Ins.: «Certo, se ti va!».
Ga.: «Sì!» (mostra di nuovo entusiasmo nel disegnare).
Ins.: «Ok. Come possiamo fare? Io ti guardo, ok?».
Ga.: «Mmm (ci pensa su, sembra non avere un'idea precisa, poi esclama) ho capito, posso farlo come lo scivolo!».
Ins.: «Vero? Perché?».
Ga.: «Guarda (indica uno dei lati obliqui del mattoncino), da qui si scivola!».

Gabriele prende in mano la matita e disegna sul foglio il suo "nuovo" mattoncino trapezoidale. Sembra più sicuro, va spedito nel tratto.
Il trattamento operato (riportato accanto) mette in evidenza un disegno simile al primo ma con una caratteristica in più: «questo ha la forma dello scivolo e questo pure» (indicando i due lati dell'oggetto tridimensionale).

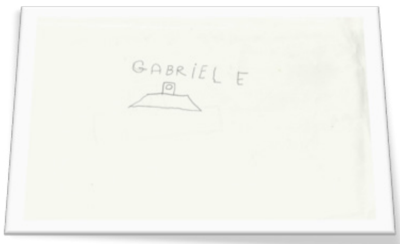


Figura 9
Seconda rappresentazione del mattoncino rosso da parte di Gabriele.

Anche in questo caso le operazioni di conversione tra i diversi registri semiotici, proposti durante l'intervista (gesti, parole, disegni), hanno permesso a Gabriele di interiorizzare meglio la forma tridimensionale proposta e rappresentarla prestando

attenzione a maggiori dettagli rispetto a quanto tracciato in sezione.
Terminato il disegno Gabriele inizia autonomamente a interpretarlo immaginando altri oggetti con la "stessa" rappresentazione: «è come il tetto senza punta», «il cappello di papà», «la gomma della maestra Maria» ecc.

> Ins.: «Questo cerchietto dove si trova nel mattoncino rosso?».
> Ga.: «Qui (indica correttamente quanto richiesto sul mattoncino posto sul banco). Vedi?».
> Ins.: «Sì».
> Ga.: «È difficile. Il mattoncino blu era più bello da disegnare! Con questo non ci avevo mai giocato!».
> Ins.: «È vero, hai ragione. Sei stato bravissimo!».

Il punto di vista utilizzato per rappresentare l'oggetto tridimensionale è nuovamente mischiato. In Gabriele la visione frontale, predominante, si somma ad una visione diversa che nel disegno si rintraccia nella presenza di più facce visibili contemporaneamente (come quella relativa al quadratino posto sopra il rettangolo e il cerchietto interno ad esso). Il disegno risultante è giustamente ancora disorganico; ciò però non deve sorprendere vista l'età di Gabriele e, come detto anche prima, il notevole carico cognitivo richiesto in questo caso al bambino.

6 Conclusioni

I risultati ottenuti, considerando il numero esiguo di bambini, non vogliono avere alcun carattere di generalità. Mettono comunque in evidenza dei comportamenti che, in relazione alla letteratura, sembrano essere significativi per il mondo della ricerca e della scuola.
Condividendo l'importanza di guardare, attraverso una lente di tipo matematico, ai disegni prodotti dai bambini e considerarli come strumento diagnostico per analizzare conoscenze, abilità e competenze inerenti la terna *Spazio, ordine e misura* (D'Amore & Sbaragli, 2003; D'Amore et al., 2004), l'obiettivo di rispondere alle tre domande di ricerca, ha permesso di interpretare i dati raccolti in riferimento non soltanto alla richiesta di rappresentare con un disegno due mattoncini Lego di forme differenti e di complessità crescente, ma anche ad una descrizione successiva operata dagli stessi bambini finalizzata all'identificazione delle caratteristiche del loro disegno, alla luce del punto di vista di osservazione e del "rintracciare" eventuali scarti di rappresentazione nella relazione tra l'oggetto reale e quello 2D. I trattamenti e le conversioni (Duval, 1998) operate in ambito sperimentale hanno mostrato diverse strategie di comportamento e quindi diversi livelli di competenza dei bambini, legati sia alla rappresentazione di un oggetto tridimensionale su un piano bidimensionale in relazione a punti di vista osservativi differenti, sia alle competenze argomentative relative al linguaggio naturale registrato durante le interviste.
Tutti i protocolli raccolti hanno evidenziato, in accordo con Vighi (2016), la concezione da parte dei bambini della scuola dell'infanzia dello spazio come "non indipendente"; in molti casi risultano evidenti le difficoltà riscontrate a questa età in merito alla complessa relazione tra l'oggetto geometrico conosciuto, il disegno che

lo raffigura e ciò che quel disegno per il bambino rappresenta. Relazione che è stata in qualche caso (Gabriele, ad esempio) migliorata, favorendo un arricchimento del disegno dell'oggetto e dell'aspetto conoscitivo dello stesso al variare del punto di vista osservativo.
L'analisi dei disegni prodotti dai bambini ha inoltre confermato quanto discusso in letteratura da parecchi autori (Bianchi, 2006; Cox, 1978, 1985; Luquet, 2001; Sbaragli, 2006; Vighi, 2008) relativamente a compiti cognitivi differenti ma sempre associati a rappresentazioni di oggetti e figure bidimensionali e tridimensionali. Nei disegni raccolti sono state infatti rintracciate rappresentazioni legate a più visioni del solido Lego, da quella frontale a quella quasi prospettica nella quale, anche se in modo lacunoso o del tutto errato, si evidenziava la presenza di più facce visibili contemporaneamente o la sovrapposizione di più elementi legati a punti di vista diversi. In molti casi i concetti geometrici di parallelismo e profondità sono risultati incerti, ciò però non deve sorprendere vista l'età dei bambini e la fase del *realismo mancato* (Luquet, 2001) nella quale tutti o quasi tutti si trovavano.
Riferendoci in modo specifico alla seconda domanda di ricerca, i risultati raccolti sembrano confermare gli studi di Greig (2000): tutti i bambini davanti ad un compito cognitivo più complesso come quello del disegno del mattoncino "trapezoidale" rosso mostrano disegni molto semplificati nei quali spesso i dettagli rimangono nascosti anche se percepiti a livello manipolativo (come nel caso di Gabriele).
Riteniamo che le analisi qui discusse possano risultare interessanti per gli insegnanti di scuola dell'infanzia ed elementare che vogliono approfondire il ruolo del disegno come forma espressiva di conoscenze, abilità e competenze visuo-spaziali (D'Amore, Godino, Arrigo & Fandiño Pinilla, 2003).
Guardando poi all'insegnamento/apprendimento della matematica in un'ottica verticale che abbracci tutti i gradi scolastici, riteniamo che le considerazioni qui esposte possano essere un buono spunto di riflessione per i ricercatori in didattica della matematica per future indagini teorico/sperimentali sullo sviluppo del pensiero geometrico in tutte le sue forme (guardando ad esempio al modello di Van Hiele, 1986) dalla scuola dell'infanzia a contesti universitari vari.
In questa sede, per brevità, non abbiamo inoltre approfondito l'aspetto relativo all'analisi semiotica dei gesti messi in evidenza dai bambini durante la sperimentazione; ci ripromettiamo di farlo in futuro guardando anche alla possibilità di trasporre la stessa esperienza didattica alla scuola primaria.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'insegnante Domenica Mondino che ha condotto in classe in modo puntuale e rigoroso il percorso sperimentale qui discusso.

Bibliografia

Angeli, A., D'Amore, B., Di Nunzio, M., & Fascinelli, E. (2011). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

Anning, A., & Ring, K. (2004). *Making sense of children's drawings*. McGraw-Hill Education (UK).

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). Salviamo la geometria solida! Riflessioni sulla geometria dall'infanzia alle superiori. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Il grande gioco della Matematica. Atti del II Convegno omonimo* (pp. 3-17). Lucca: Formarete.

Bartolini Bussi, M. G. (2008). *Matematica: i numeri e lo spazio*. Bergamo: Junior.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 18*(3), 221-256.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 843-908.

Bianchi, D. (2006). *Disegnatori si nasce e si diventa*. Ticino: Centro didattico cantonale.

Brousseau, G. (1999) Research in Mathematics Education: Observation and ... Mathematics. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I, Proceedings of the First Conference of the European Society for Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 34-48). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cherney, I. D., Seiwert, C. S., Dickey, T. M., & Flichtbeil, J. D. (2006). Children's drawings: A mirror to their minds. *Educational Psychology, 26*, 127-142.

Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education, *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 267-297.

Cottino, L., & Sbaragli, S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo*. Roma: Carocci.

Cox, M. V. (1978), Spatial depth relationships in young children's drawings. *Journal of Experimental child psychology, 26*, 551-554.

Cox, M. V. (1985). One object behind another: young children's use of array-specific or view-specific representations. In N. H. Freeman & M. V. Cox (Eds.), *Visual order: The nature and development of pictorial representation* (pp. 188-200). Cambridge: Cambridge University Press.

D'Amore, B. (2000). "Concetti" e "oggetti" in Matematica. *Rivista di matematica dell'università di Parma. (6)*3, 143-151.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici, *La matematica e la sua didattica, 4*, 557-583.

D'Amore, B. (2015). Arte e matematica. *Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Bari: Dedalo.

D'Amore, B., & Di Paola, B. (2016). Dialogo sulla matematica nella scuola dell'infanzia. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La matematica e la sua didattica, Convegno del trentennale*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Di Paola, B., Fandiño Pinilla, M. I., Monaco, A., Bolondi, G., & Zan, R. (2014). *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Gabellini, G., Marazzani, I., Masi, F., & Sbaragli, S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia.* Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Godino, D. J., Arrigo, G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Della Sala, S. (2016). *Le neuroscienze a scuola: Il buono, il brutto e il cattivo*. Firenze: Giunti.

Di Leo, J. H. (1981). *I disegni dei bambini come aiuto diagnostico*. Firenze: Giunti.

Di Paola, B., Manno, G., Scimone, A., & Sortino, C. (2007). *La Geometria, una guida ai suoi contenuti e alla sua didattica*. Palermo: Palumbo Editore.

Di Paola, B. (2016). Why Asian children outperform students from other countries? Linguistic and parental influences comparing Chinese and Italian children in Preschool Education. *IEJME-Mathematics Education, 11*(9), 3351-3359.

Di Paola, B., Battaglia O. R., & Fazio C. (2016). Non-hierarchical clustering as a method to analyse an open-ended questionnaire on algebraic thinking. *South African Journal of Education, 36*(1) (pp. 1-13). Disponibile in http://dx.doi.org/10.15700/saje.v36n1a1142 (consultato il 14.05.2018).

Di Paola, B., & Ruisi, M. (2016). I bambini si raccontano: soddisfazioni, paure e aspettative della loro scuola. In B. D'Amore (A cura di), *La matematica e la sua didattica, Convegno del trentennale. Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica"* (pp. 67-70). Bologna: Pitagora Editrice.

Donaldson, M. C. (2010). *Come ragionano i bambini*. Milano: Springer.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*, 139-163.

Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N, 76*, 7-27.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Gallese, V. (2014). Arte, Corpo, Cervello: Per un'Estetica Sperimentale. *Micromega, 2*, 49-67.

Greig, P. (2000). *L'enfant et son dessin. Naissance de l'art et de l'écriture*. Ramonville Saint-Agne: Erès.

Lowenfeld, B. (1947). Psychological aspects of blindness. *Outlook for the blind and the teachers forum, 41*(2), 31-36.

Luquet, G. H. (2001) *Children's Drawings* (translated by A. Costall), London: Free Association Books (original book published 1927- Le dessin enfantin).

MIUR. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf (consultato il 14.05.2018).

MIUR. (2018). *Indicazioni nazionali e nuovi scenari. Documento a cura del Comitato Scientifico Nazionale per le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. Roma. Disponibile in http://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/3234ab16-1f1d-4f34-99a3-319d892a40f2 (consultato il 23.05.2018).

Montone, A. (2013). Dallo spazio, al piano, allo spazio: dalla casa al suo arredo, dalla casa al villaggio per giocare. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi & P. Vighi (A cura di), *"...per piacere, voglio contare...". Difficoltà, disturbi di apprendimento e didattica della matematica,* Vol. 1 (pp. 149-160). Bologna: Pitagora.

Montone, A., Pertichino, M., & Ancona, R. L. (2005). Street games for the acquisition of spatial orientation in Primary School. In J. Novotna (Ed.), *SEMT 2005 International Symposium Elementary Math Teaching* (pp. 66-70). Prague: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická faculta.

Morino Abelle, F. (1970). *Interpretazioni psicologiche del Disegno Infantile*. Firenze: Edizioni OS.

Morra, S. (2005). Cognitive aspects of change in drawings: A neo-Piagetian theoretical account. *British Journal of Developmental Psychology, 23*, 317-341.

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S., & Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM, 47*(3), 377-390.

Oliverio Ferraris, A. (1978). *Il significato del disegno infantile*. Torino: Boringhieri, Torino.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's concept of space*. New York: Norton.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). *Mental imagery in the child*. London: Routledge, Kegan Paul.

Pontecorvo, C. (1992). *Un curricolo per la continuità educativa dai quattro agli otto anni*. Firenze: La Nuova Italia.

Jolley, R. P., & Rose, S. E. (2008). The relationship between production and comprehension of representational drawing. In C. Milbrath & H. M. Trautner (Eds.), *Children's Understanding and Production of Pictures, Drawings, and Art* (pp. 207-235). Cambridge: Hogrefe and Huber Publishers.

Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei docenti di matematica, 50*, 69-76.

Sbaragli, S. (A cura di). (2006). L'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali. *La Matematica e la sua Didattica, vent'anni di impegno. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme, 23 09 2006* (pp. 257-260). Roma: Carocci.

Sbaragli, S., & Mammarella, I. (2011). Insegnare e apprendere la geometria. *Difficoltà in Matematica, 8*, 65-82.

Speranza, F. (A cura di). (1997). Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio. In *Scritti di Epistemologia della Matematica* (pp. 129-140). Bologna: Pitagora.

Tallandini, M.A., & Valentini, P. (1990), Lo sviluppo del disegno infantile: teorie stadiali. *Età evolutiva, 37*, 92-105.

Van Hiele, P. (1986). *Structures and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

Vighi, P. (2016). Arte e pensiero geometrico nella Scuola dell'Infanzia. In M. Iori (A cura di), *La Matematica e la sua Didattica - Mathematics and Mathematics Education - In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore* (pp. 513-523). Bologna: Pitagora.

Vighi, P. (2008). Dall'osservazione alla formazione dei concetti: guarda ... gioca, guarda... impara. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Didattica della Matematica e Azioni d'Aula* (pp. 89-96). Bologna: Pitagora.

Autori/Benedetto Di Paola[*] e Antonella Montone[•]

[*]Dipartimento di Matematica e Informatica – Università degli Studi di Palermo, Italia

[•] Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Bari Aldo Moro, Italia

benedetto.dipaola@unipa.it, antonella.montone@uniba.it

Disponibile anche in inglese

Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica

From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process

Maria Alessandra Mariotti* e **Andrea Maffia•**
*Università di Siena, Italia
•Università di Bologna, Italia

Sunto / Il potenziale didattico degli artefatti nell'apprendimento è stato ampiamente studiato, focalizzandosi soprattutto sul loro possibile uso da parte degli studenti e sui benefici che ne derivano. Vi è però la tendenza a sottostimare la complessità legata alla piena espressione di tale potenziale, e in particolare l'importanza del ruolo del docente nell'organizzazione del processo d'insegnamento e apprendimento. A partire dall'idea seminale di mediazione semiotica introdotta da Vygotskij, è stato sviluppato il quadro teorico della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), con l'obiettivo di fornire un modello di insegnamento e apprendimento che pone l'attenzione sul processo semiotico relativo all'utilizzo di artefatti culturali. Assumendo una prospettiva semiotica è possibile analizzare il discorso che si sviluppa nella classe ed evidenziare specifici schemi di azione messi in atto dall'insegnante al fine di far evolvere i significati personali degli studenti verso i significati matematici che sono l'obiettivo dell'intervento didattico. L'articolo presenta un primo modello dell'azione del docente e fornisce alcuni esempi legati ad una sperimentazione didattica a lungo termine svolta a livello della scuola elementare.

Parole chiave: mediazione semiotica; artefatti; potenziale semiotico; ciclo didattico; docente.

Abstract / The didactic potential of artefacts for learning have been extensively studied, with a main focus on their possible use by students and the subsequent benefits for them. However, there has been the tendency to underestimate the complexity of exploiting this potential, and specifically the complexity of the teacher's role orchestrating the teaching and learning process. Following Vygotskij's seminal idea of semiotic mediation, the theoretical framework of Theory of Semiotic Mediation (TSM) has been developed (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) with the aim of providing a teaching and learning model, where attention is focused on the semiotic processes related to the use of cultural artefacts. Through the semiotic lens it is possible to analyse the classroom discourse and highlight specific patterns in the teacher's action that make students' personal meanings evolve towards the mathematical meanings that are the objective of the didactic intervention. The paper presents a first model of the teacher's action and provides some examples drawn from long term teaching experiments carried out at the primary school level.

Keywords: semiotic mediation; artefact; semiotic potential; didactic cycle; teacher.

1 Premessa

Il ruolo principale di un insegnante di matematica è rendere il sapere matematico accessibile ai suoi studenti. Questa missione educativa può essere raggiunta utilizzando vari mezzi e l'uso di strumenti manipolativi costituisce un esempio comune nelle classi elementari. Anche le tecnologie ICT possono servire allo stesso scopo. Questi

strumenti possono però risultare inutili senza un intervento specifico dell'insegnante volto a mediare i contenuti matematici che si intende tramettere nella sequenza didattica progettata.
Lavorando sull'idea seminale di mediazione semiotica introdotta da Vygotskij (1978), Bartolini Bussi e Mariotti (2008) hanno elaborato un modello atto a descrivere e spiegare il processo che comincia con l'utilizzo da parte degli studenti di uno strumento specifico per svolgere un compito, e porta lo studente all'appropriazione di un particolare concetto matematico. Tale modello considera il tema dell'integrazione di strumenti nella pratica didattica da una prospettiva molto ampia, proponendo un quadro teorico che può includere qualsiasi tipo di artefatto, considerando il suo potenziale didattico rispetto a uno specifico contenuto matematico; inoltre, questo approccio teorico prende esplicitamente in considerazione il ruolo dell'insegnante, offrendo la base per un modello esplicito di quello che ci si aspetta da lui/lei.
In questo contributo, dopo aver presentato le idee chiave del quadro teorico (la Teoria della Mediazione Semiotica, TMS), ci concentreremo sull'azione dell'insegnante, in particolare su come possa utilizzare un artefatto in relazione ai suoi specifici obiettivi educativi.

2 La mediazione in accordo con l'approccio semiotico

Il termine *mediazione* è stato usato frequentemente, con differenti significati non sempre compatibili, in relazione all'utilizzo di artefatti nelle pratiche scolastiche ed è stato abbondantemente preso in considerazione nella letteratura in didattica della matematica (Meira, 1995; Radford, 2003; Noss & Hoyles, 1996; Borba & Villarreal, 2005). Usata soprattutto in relazione al supporto che uno specifico strumento fornisce alla realizzazione di un compito attraverso il suo utilizzo, l'idea di mediazione è stata anche messa in relazione al potenziale di promuovere i processi di apprendimento rispetto a una specifica conoscenza, ad esempio una conoscenza matematica. Spesso tuttavia, la complessità del processo di mediazione non è stata affrontata adeguatamente, come conseguenza dell'aver trascurato il problema epistemologico relativo alla relazione tra lo svolgimento di un compito e i processi di apprendimento matematico dello studente.
Al contrario, questo tema è considerato specificamente dalla Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), che elabora la nozione di mediazione combinando una prospettiva semiotica ad una educativa e considera il ruolo cruciale della *mediazione umana* (Kozulin, 2003) nel processo di insegnamento-apprendimento. La TMS fornisce un modello del processo d'insegnamento e di apprendimento sviluppandosi attorno a due elementi chiave: la nozione di potenziale semiotico di un artefatto e la nozione di ciclo didattico. Dopo una breve descrizione di queste due nozioni principali, descriveremo diverse modalità di mediazione che potrebbero essere proposte dall'insegnante per sfruttare il potenziale semiotico di un dato artefatto durante la fase collettiva di un ciclo didattico.

3 Il potenziale semiotico di un artefatto

La relazione tra una conoscenza matematica e l'utilizzo di uno strumento specifico ha una lunga storia: il caso della riga e del compasso è probabilmente il più rappresentativo. È un dato di fatto che, osservando l'utilizzo di uno specifico strumento, un esperto può essere portato a richiamare una specifica nozione matematica. Secondo Hoyles (1993), ci si può riferire alla relazione tra artefatto e conoscenza come *conoscenza evocata*. Per esempio, la notazione posizionale e la scrittura polinomiale dei numeri possono essere evocate dall'abaco e dal suo utilizzo; allo stesso modo, per un matematico, un software di geometria dinamica può evocare la geometria classica, ovvero la geometria con "riga e compasso".

Figura 1
Un compasso e un bicchiere con una matita.

Consideriamo gli strumenti di Figura 1: il primo è il conosciutissimo compasso, mentre il secondo è la combinazione di un bicchiere e una matita. Quando vengono utilizzati per disegnare, entrambi gli strumenti producono una traccia circolare (un cerchio), e per questa ragione, entrambi possono essere messi in relazione, e quindi evocare, la nozione matematica di cerchio. Ciò nonostante, malgrado il prodotto finale sia lo stesso, se li confrontiamo in relazione ai gesti compiuti, possiamo osservare che la procedura seguita è completamente differente ed evoca proprietà geometriche piuttosto diverse.
Secondo Rabardel (1995), possiamo distinguere tra l'oggetto stesso – l'artefatto – e la procedura che viene utilizzata per svolgere il compito – lo schema d'uso. Considerando la combinazione di un artefatto e il suo schema d'uso possiamo identificare conoscenze matematiche specifiche che possono essere evocate dall'utilizzo dello specifico artefatto.
Nel caso della combinazione di un bicchiere e una matita, lo schema di utilizzo si concentra sul movimento circolare della mano che tiene la matita; questo porta alla regolarità della forma specifica, regolarità che per un esperto può evocare la proprietà geometrica di curvatura costante; nel caso del compasso, lo schema di utilizzo si concentra sulla presenza del punto particolare dove è fissato l'ago della prima asta, sull'allargamento delle due aste e sulla costanza di tale allargamento nel tracciare la forma rotonda. Per un esperto, tutto questo può evocare la nozione di *centro*, la nozione di *raggio* e la proprietà di costanza della distanza tra il centro e un qualsiasi punto sulla circonferenza.
È chiaro che a seconda di quale dei due artefatti viene utilizzato, vengono evocati si-

gnificati matematici diversi (Chassapis, 1998); in altre parole possiamo dire che i due artefatti hanno *potenziali semiotici* differenti. In generale, definiamo il *potenziale semiotico di un artefatto* come la doppia relazione che può istaurarsi tra un artefatto, i significati personali che emergono dal suo utilizzo per svolgere un compito (attività strumentale) e i significati matematici evocati dal suo utilizzo e riconoscibili come matematica da un esperto (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).
Un'analisi a priori, che coinvolga allo stesso tempo una prospettiva cognitiva ed una prospettiva epistemologica, può portare ad identificare il *potenziale semiotico* di un artefatto.
La progettazione di qualsiasi progetto pedagogico (sequenza d'insegnamento-apprendimento) centrato sull'utilizzo di un dato artefatto deve basarsi su una descrizione a priori del potenziale semiotico dell'artefatto; esempi ispirati all'uso di artefatti classici del passato possono essere quelli relativi all'abaco (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 759 ff.) e al prospettografo (Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005).

4 Il ciclo didattico

Riportiamo di seguito le fasi del ciclo didattico (**Figura 2**):

Figura 2
Il ciclo didattico.

L'identificazione del potenziale semiotico di un dato artefatto costituisce l'antefatto necessario al suo utilizzo in classe, ciò nonostante l'efficacia del suo utilizzo dipende da un'attenta progettazione dell'intervento didattico. Una volta che un'analisi cognitiva ed epistemologica ha prodotto una sequenza di possibili compiti, è necessaria un'opportuna organizzazione didattica di questi compiti, accompagnata da un'appropriata gestione delle attività in classe da parte del docente. Assumere una prospettiva semiotica significa focalizzarsi sulla produzione di segni e sul processo di trasformazione di questi segni, considerando questa trasformazione come una evidenza dell'apprendimento. In altre parole, secondo la TMS, riconosciamo un ruolo centrale nei segni[1], sia come prodotti, sia come mezzi, e interpretiamo la costruzione 1

1. L'utilizzo del termine *segni* è ispirato da Pierce. Assumiamo una relazione indissolubile tra il significato e il significante. Sulla corrente di altri ricercatori (Radford, 2003; Arzarello, 2006) abbiamo sviluppato un'idea di significato originato dall'interazione intricata dei segni (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008): per una riflessione approfondita si veda (Sfard, 2000, p. 42 e seguenti).

di un sapere come l'evoluzione di una conoscenza da significati radicati nell'uso dell'artefatto verso significati esplicitamente riconosciuti come coerenti con i significati matematici: partendo dall'*emergere del potenziale semiotico*, testimoniato dalla produzione da parte degli studenti di specifici segni, il cui significato si riferisce principalmente all'utilizzo dell'artefatto *(segni artefatto)*, l'intervento attivo del docente promuoverà la loro evoluzione verso i segni matematici attesi. L'intera struttura di una sequenza didattica può essere delineata come l'iterazione di *cicli didattici*, progettati per *sfruttare il potenziale semiotico dell'artefatto*. Ogni ciclo è costituito da attività specifiche, ognuna delle quali contribuisce differentemente, ma in maniera complementare, allo sviluppo del complesso processo di mediazione semiotica.
Riassumendo, il *processo di mediazione semiotica* consiste nell'evoluzione che parte dall'emergere di significati personali relativi alla risoluzione di un compito e si compie nello sviluppo/ costruzione collettiva di segni condivisi relativi sia all'utilizzo dell'artefatto, sia alla matematica da apprendere. È possibile progettare una sequenza di cicli didattici con lo scopo di sostenere tale evoluzione; le differenti attività proposte in ogni ciclo sono classificabili in relazione al loro contributo al processo di mediazione semiotica. Tre diverse categorie di compito costituiscono un ciclo didattico, come descritto di seguito.

Attività con l'artefatto. Queste costituiscono l'inizio di ogni ciclo e si basano sulla richiesta agli studenti di portare a termine un compito che implichi l'utilizzo dell'artefatto, con l'obiettivo di promuovere la produzione di segni (parole, disegni, gesti) il cui significato si riferisca all'utilizzo dell'artefatto, ma che sia anche coerente con le conoscenze matematiche obiettivo dell'intervento didattico.

Attività di produzione individuale di segni. Durante le attività con l'artefatto emerge una produzione spontanea di segni. Per questo vengono proposte diverse attività semiotiche, chiedendo produzioni ed elaborazioni di segni individuali, in relazione alla fase precedente. Un ruolo cruciale è giocato dai testi scritti, perché per loro natura e al contrario di altri segni, come i gesti, i segni scritti (e in particolare le parole) cominciano a distaccarsi dalla contingenza dell'azione situata. Inoltre, le produzioni scritte possono diventare oggetto di discussione nel seguente lavoro collettivo.

Discussioni collettive. Questo tipo di attività gioca un ruolo essenziale nel processo d'insegnamento-apprendimento e costituisce il fulcro del processo di mediazione semiotica. L'intera classe è coinvolta: vengono discusse varie soluzioni in modo collettivo, vengono analizzati insieme e in seguito commentati ed elaborati i testi degli studenti o altri testi. Gli interventi degli studenti sono orchestrati dal docente con l'obiettivo di favorire l'evoluzione verso significati matematici, sfruttando il potenziale semiotico che deriva dall'utilizzo del particolare artefatto.

5 Il ruolo del docente nello sviluppo del processo di mediazione semiotica

La prospettiva della mediazione semiotica mette in evidenza che l'artefatto non solo è utilizzato in classe dagli studenti per risolvere un compito, ma che è anche utilizza-

to dal docente per svolgere il suo compito didattico, per raggiungere i propri obiettivi educativi. In questo senso, l'artefatto è una risorsa per il docente che lo utilizza come «strumento di mediazione semiotica» (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 754).
In ogni fase del ciclo didattico il docente ricopre un ruolo cruciale. Il suo intervento comprende

– l'ideazione di compiti atti a favorire l'emergere del potenziale semiotico dell'artefatto scelto;
– l'analisi delle soluzioni e delle sintesi scritte dagli studenti dopo lo svolgimento del compito, identificando l'emergere dei segni attesi;
– la progettazione di discussioni collettive sulla base dei risultati delle precedenti analisi;
– la gestione della discussione collettiva favorendo l'evoluzione dei significati personali degli studenti verso i segni matematici desiderati.

Alcune delle azioni dell'insegnante appena descritte riguardano la progettazione degli interventi didattici, mentre altre riguardano la loro messa in atto; alcune riguardano le attività collettive svolte in classe mentre altre le attività individuali.
Nelle sezioni seguenti ci concentreremo sulle azioni dell'insegnante relative alle attività collettive, specialmente quelle volte a indirizzare la discussione di classe con l'obiettivo di promuovere lo sviluppo del processo di mediazione semiotica.

5.1 L'evoluzione del discorso matematico in classe

Coerentemente ad un approccio Vygotskiano, interpretiamo il processo di insegnamento e apprendimento come un *processo di internalizzazione*; interpretiamo la costruzione individuale delle conoscenze come uno sforzo collettivo, diretto da processi semiotici correlati alla comunicazione, e che coinvolge la produzione e l'interpretazione di segni, in quello che possiamo chiamare spazio *interpersonale* (Cummins, 1996). Inoltre, mantenendo un'ottica Vygotskiana, al centro della TMS c'è anche la convinzione che il processo semiotico, generando e promuovendo una costruzione sociale del sapere, può essere indirizzato dall'insegnante, il quale può agire in maniera intenzionale per promuovere l'evoluzione del discorso matematico[2] di classe. 2
Numerosi teaching experiment sono stati condotti negli scorsi anni, utilizzando vari artefatti di diversa natura; secondo un approccio design-based, in cui «il design è concepito non solo per soddisfare le esigenze locali, ma per far avanzare un'agenda teorica» (Barab & Squire, 2004, p. 5, traduzione degli autori), un'attenzione speciale è stata dedicata all'analisi delle azioni dell'insegnante nella gestione del processo di evoluzione dei segni (Mariotti, 2001; Cerulli, 2004; Falcade, Laborde & Mariotti, 2004; Falcade, 2006; Mariotti & Maracci, 2010). Queste analisi hanno evidenziato schemi d'azione ricorrenti correlati allo sviluppo efficace dei processi di mediazione semiotica; tali schemi d'azione, infatti, possono essere descritti in riferimento ai principali obiettivi della discussione didattica svolta in un particolare ciclo didattico: promuovere cioè sia l'emergere, sia il condividere dei segni personali degli studenti e la loro evoluzione verso i segni matematici desiderati. La descrizione delle differenti categorie di schemi d'azione verrà fornita in relazione a questi obiettivi.

2. L'utilizzo del termine *discorso matematico* riprende Moschkovich (2003, p. 326, traduzione degli autori). Caratterizzazione: «Il discorso matematico include non solo modi di parlare, agire, interagire, pensare, credere, leggere, scrivere ma anche valori matematici, convinzioni e punti di vista. La partecipazione alle pratiche del discorso matematico può essere intesa in generale come parlare e agire nel modo in cui le persone matematicamente competenti parlano e agiscono quando parlano di matematica».

Di seguito presentiamo una descrizione delle azioni del docente emerse dall'osservazione in classe e caratterizzate da un obiettivo specifico relativo all'evoluzione dei segni attesa; ogni tipo di azione è illustrato da esempi presi da una particolare sperimentazione. Per rendere più comprensibili gli esempi proposti, cominciamo fornendo una descrizione generale dell'intervento didattico.

Una panoramica del teaching experiment
Gli esempi proposti sono presi da teaching experiment realizzati alla scuola elementare. Scopo dell'esperimento era l'introduzione delle proprietà della moltiplicazione in accordo con un approccio relazionale (Maffia, 2017) e l'artefatto su cui era basato l'intervento è la tavola di Laisant (anche conosciuta come *decanomio*). Si tratta di una tabella con righe e colonne formate da caselle di diversa grandezza. Ogni casella di una riga è di un'unità più alta di quelle della riga precedente. Allo stesso modo, ogni casella di una colonna è più larga di quella alla sua sinistra, come mostrato dalla Figura 3. Durante questo intervento a lungo termine, i bambini hanno avuto l'opportunità di esplorare la tabella e di discutere il modo in cui è fatta. Hanno realizzato la loro tabella personale e l'hanno utilizzata per rappresentare moltiplicazioni e determinarne il prodotto. Sono stati in grado di associare ogni casella alla moltiplicazione corrispondente, riconoscendo sia i fattori sia il risultato. La tavola è stata anche utilizzata per introdurre una relazione di equivalenza tra moltiplicazioni attraverso l'equivalenza di rettangoli, verificata attraverso la sovrapposizione di rettangoli di carta realizzati dai bambini.

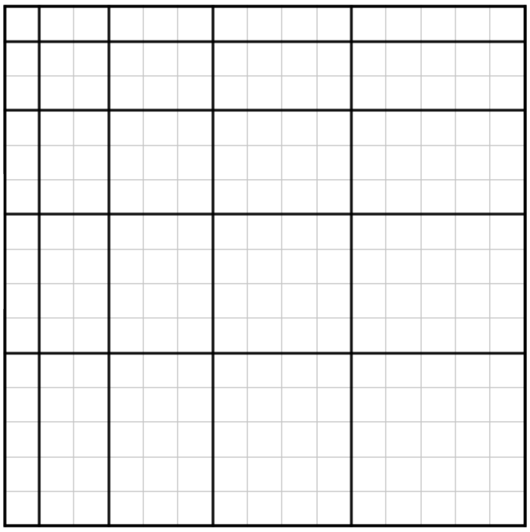


Figura 3
La tavola di Laisant con cinque righe e cinque colonne.

Considerando alcuni compiti che possono essere affrontati utilizzando questo artefatto, possiamo analizzare il suo potenziale semiotico. È possibile produrre rettangoli di carta, tagliarli, manipolarli e incollarli di nuovo. In particolare, i rettangoli possono essere scomposti e ricomposti ottenendo rettangoli con misure differenti rispetto a quelli originali. Queste operazioni mostrano che l'area del rettangolo (che è il risultato dell'operazione) non cambia (Figura 4).

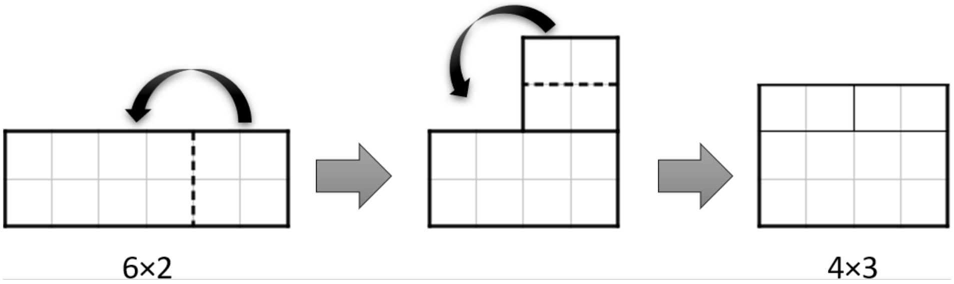


Figura 4
Scomposizione e ricomposizione di rettangoli.

Da un punto di vista matematico «possiamo riconoscere in queste operazioni con i rettangoli il significato di una relazione di equivalenza basata sul fatto che nelle manipolazioni la misura della superficie del rettangolo può conservarsi o meno» (Maffia & Mariotti, 2016, p. 9). Inoltre, in questa relazione di equivalenza l'esperto può riconoscere il significato matematico di alcune proprietà della moltiplicazione. «Per esempio, la proprietà commutativa del prodotto è riconoscibile nell'invarianza della superficie operando rotazioni che scambiano la posizione dei lati» (Maffia & Mariotti, 2016, p. 9) (**Figura 5**).

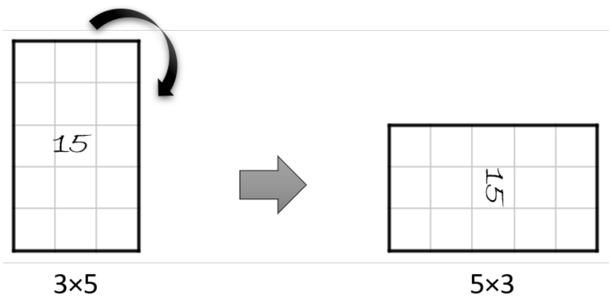


Figura 5
Esempio di rotazione di un rettangolo che può essere associato alla proprietà commutativa.

Basandosi su questo tipo di analisi del potenziale semiotico è stata progettata e implementata una sequenza didattica. Agli studenti è stato chiesto di confrontarsi con diversi compiti utilizzando questi artefatti (la tabella e i rettangoli di carta). Il docente ha organizzato discussioni collettive per sviluppare il significato relazionale delle proprietà della moltiplicazione, partendo dall'emergere del potenziale semiotico dell'artefatto rispetto ai compiti proposti. Di seguito vengono utilizzati estratti della discussione per esemplificare le azioni del docente.

Costruzione congiunta di segni condivisi

È possibile definire due azioni complementari relative all'obiettivo di far emergere segni personali in riferimento dell'esperienza comune con l'artefatto. Le indichiamo come azione di *ritorno al compito* e azione di *focalizzazione*.

Il primo passo cruciale nel processo di mediazione semiotica consiste nel promuovere l'emergere dei segni relativi all'utilizzo dell'artefatto, quindi una prima classe di situazioni può essere caratterizzata dalla necessità di promuovere la produzione di segni da parte degli studenti. In generale, questa necessità si presenta all'inizio della discussione in classe, ma potrebbe anche presentarsi in seguito: per esempio, quando gli interventi degli studenti non contribuiscono più adeguatamente ad alimentare la discussione di classe. In breve, in tutti quei momenti in cui la produzione di segni dovrebbe cominciare o ricominciare si richiede l'intervento intenzionale ed esplicito del docente atto a

– provocare la produzione personale di segni da parte degli studenti in relazione all'utilizzo dell'artefatto;
– costruire un contesto condiviso per questi segni attraverso l'evocazione del contesto di utilizzo dell'artefatto;
– ottenere contributi da tutti gli studenti nel massimo numero possibile.

Chiamiamo questo tipo d'intervento azione di *ritorno al compito*.

I punti elencati sopra sono tra loro correlati e le azioni del docente sono spesso volte al raggiungimento di tutti questi obiettivi simultaneamente, anche se di volta in volta uno può prevalere sugli altri.

Un intervento tipico potrebbe essere «Chi vuole raccontare che compito è stato proposto? Come avete fatto a svolgerlo? Cosa chiedeva di fare?».

L'azione di ritorno al compito è considerata efficace se provoca numerosi interventi, però non tutti gli elementi che emergeranno potrebbero essere correlati al potenziale semiotico; questo richiede di selezionare gli aspetti pertinenti dei significati che vengono condivisi, quegli aspetti cioè che possono portare allo sviluppo dei segni matematici che costituiscono l'obiettivo educativo. In tutti quei momenti nei quali si richiede di mettere a fuoco aspetti specifici, si rende necessario un intervento intenzionale del docente, con lo scopo di

– metter a fuoco segni specifici (condivisi) prodotti fino ad un certo momento;
– selezionare gli aspetti pertinenti dei significati di questi segni (condivisi);
– circoscrivere il riferimento di determinati segni a specifici aspetti dell'uso dell'artefatto;
– supportare gli studenti nella presa di coscienza di questi aspetti chiave.

Chiamiamo questo tipo d'intervento azione di *focalizzazione*.

In breve, l'obiettivo è di evidenziare e limitare una parte dell'esperienza comune degli studenti con l'artefatto, in relazione al suo potenziale semiotico. In questo caso spesso vengono osservati gesti che talvolta simulano aspetti specifici dell'uso dell'artefatto.

Di seguito presentiamo brevi estratti di una discussione collettiva per illustrare l'intrecciarsi di interventi appartenenti alle due categorie appena descritte. L'estratto che segue è tratto da una discussione che si è svolta dopo un'attività proposta per introdurre la proprietà commutativa della moltiplicazione.

Agli studenti è stato chiesto di scegliere una casella nella tavola di Laisant e di colorarla, successivamente è stato chiesto loro di preparare un pezzo di carta della stessa forma e dimensione. Ogni bambino aveva la sua copia della tavola di Laisant, carta e forbici. Dopo aver realizzato il rettangolo di carta, ad ogni bambino è stato chiesto di cercare una casella all'interno della tavola di Laisant alla quale il rettangolo di carta si sovrapponesse perfettamente. Gli studenti muovevano i loro rettangoli di carta sulla loro copia della tavola di Laisant e una volta trovata la casella corretta, la coloravano. Ovviamente, ci sono due caselle differenti che corrispondono a ciascun rettangolo: quella scelta inizialmente dallo studente e la sua simmetrica, che corrisponde alla stessa moltiplicazione con l'ordine dei fattori invertito. I quadrati costituiscono un'eccezione in quanto appaiono una sola volta nella tavola. La stessa procedura è stata ripetuta due volte, ogni volta partendo da una casella diversa.

Quando tutti i bambini hanno finito il proprio lavoro, il docente ha chiesto loro di condividere quello che hanno notato a proposito della posizione delle due caselle colorate.

Estratto 1

1. Ins.: Avete scoperto qualcosa? Chi vuole dire cosa ha scoperto? [Siro alza la mano] Ok, dicci tutto.
2. Siro: Le due gemelle sono nella stessa posizione. Due sono in alto e due sono a sinistra. Sono nella posizione perché se giri il foglio diventa all'incontrario. Questo è il mio. Questo è quello che c'è sulla mia tabella.
3. Ins.: Ok! Partiamo da quest'idea. Siete tutti d'accordo che quando si gira il foglio, tutte le caselle vanno nella stessa posizione?
4. Molti studenti: No.
5. Ins.: Date un'occhiata alla vostra tabella. Siro dice che se girate il foglio, poi le gemelle vanno nella stessa posizione.
6. Siro: Be', se lo giro così [gira il foglio] diventa… questa qua!

Il docente comincia la discussione chiedendo ai bambini cosa hanno scoperto (linea 1). Secondo la nostra categorizzazione, questo intervento può essere classificato come *ritorno al compito*. Infatti, questa è una domanda molto generica, atta a stimolare interventi da parte degli studenti sul proprio lavoro, promuovendo così la produzione di segni personali legati all'attività svolta con l'artefatto. Questo obiettivo viene subito raggiunto grazie a Siro, che usa la parola "gemelle" (linea 2) per riferirsi ad una coppia di caselle colorate. Questa parola non ha un significato condiviso e viene proposta in questo momento, da questo bambino, per la prima volta. Siro descrive anche la posizione assoluta delle caselle nella sua tavola e le mette in relazione attraverso l'azione di girare il foglio (linea 2). Forse questa è un'azione che ha svolto mentre eseguiva il compito.

Dopo l'intervento di Siro, il docente decide di attirare l'attenzione degli studenti su quanto è stato detto e *focalizza* l'attenzione degli allievi sull'idea di girare il foglio. Infatti, il docente ripete parte delle parole dello studente. In particolare, le parole "gira" (linea 3) e "gemelle" (linea 5) vengono 'rispecchiate'. In entrambi i casi, sembra che il docente riconosca il potenziale semiotico di queste parole rispetto al significato matematico della proprietà commutativa che rappresenta l'obiettivo del suo intervento didattico. Infatti, la parola "gira" potrebbe riferirsi all'inversione dei fattori nella moltiplicazione, mentre la parola "gemelle", riferita alle caselle, esprime il fatto che le due caselle colorate hanno le caratteristiche comuni e si corrispondono quando si gira il foglio.

Comunque, visto che, nonostante la riformulazione da parte dall'insegnante, gli altri bambini (linea 4) non sembrano convinti dall'intervento di Siro, l'insegnante chiede agli studenti di guardare le loro tabelle (linea 5); in altre parole, agli studenti viene chiesto di tornare a quello che hanno fatto mentre svolgevano il compito. Questo spinge Siro a svolgere nuovamente l'azione di girare il foglio, mostrandola ai suoi compagni (linea 5).

Questo breve estratto mostra come, con la combinazione delle due azioni ritorno sul compito e *focalizzazione*, l'insegnante inneschi il primo passo nella costruzione di un contesto condiviso per i segni proposti da Siro (le parole "girare" e "gemelle"), attraverso l'evocazione dell'uso dell'artefatto.

Verso i segni matematici

Come detto in precedenza, il ritorno al compito e la focalizzazione sono due tipi d'intervento complementari: il primo intende sfruttare la ricchezza semantica relativa al contesto dell'artefatto, mentre il secondo può essere usato per focalizzare

l'attenzione su significati specifici che possono essere messi in relazione con il significato matematico atteso.
L'utilizzazione, ripetuta e alternata, di questi due tipi di azione, è in grado di favorire la costruzione di una rete di segni condivisa, segni che da un lato sono legati all'uso dell'artefatto, ma che dall'altro conservano quegli elementi chiave del loro significato che sono pertinenti rispetto allo sviluppo dei segni matematici che si vogliono introdurre.
Tuttavia, l'evoluzione verso i segni matematici attesi richiede ulteriori interventi per raggiungere la decontestualizzazione dei segni prodotti in relazione all'artefatto e al suo utilizzo, e la corretta caratterizzazione matematica. Due altri tipi d'intervento possono essere sfruttati per ottenere quest'evoluzione: *la richiesta di una sintesi* e *l'offerta di una sintesi*.
L'emergere del potenziale semiotico – che è l'emergere di segni stabili e condivisi che condensano gli aspetti chiave relativi sia all'artefatto e all'esperienza del suo utilizzo, sia alla matematica evocata da tale utilizzo – richiede l'intervento dell'insegnante per promuovere la necessità di generalizzare e di decontestualizzare i significati emersi. Il processo di generalizzazione e decontestualizzazione dei significati non può però limitarsi a una semplice sostituzione dei segni prodotti (per esempio il verbo "girare" riferito alle celle) con il segno matematico appropriato ("inversione di fattori"). I nuovi segni devono essere costruiti e condivisi, guadagnando in questo modo un significato prettamente matematico, seppur mantenendo allo stesso tempo gli aspetti chiave relativi alla loro origine. Per esempio, ci aspettiamo che la dinamica intrinseca di ruotare il rettangolo di carta rimanga come componente del significato matematico della proprietà commutativa, nonostante la sua definizione matematica non includa esplicitamente un riferimento al movimento di rettangoli. Quest'evoluzione consiste in un complesso processo semiotico che richiede l'intervento diretto del docente, con l'obiettivo di

- promuovere la decontestualizzazione dall'uso dell'artefatto;
- promuovere la generalizzazione rispetto ai compiti specifici;
- mantenere in entrambi i processi precedenti (decontestualizzazione e generalizzazione) quegli aspetti dei significati personali riconosciuti come pertinenti ai segni matematici da acquisire.

Un processo semiotico così complesso può essere promosso dall'intervento dell'insegnante chiedendo agli studenti di riassumere quello che è stato discusso fino a quel punto o chiedendo loro cosa considerano come condiviso fra quanto emerso dalla discussione collettiva. Chiamiamo questo tipo d'intervento *richiesta di sintesi*. Infatti, chiedere una sintesi non solo induce gli studenti a rendere espliciti i significati personali, ma li induce anche a condensare esperienze diverse in un'unica frase, e questo può portare a cercare aspetti comuni, favorendo la generalizzazione. Inoltre, le sintesi prodotte durante una discussione collettiva tendono a riprendere i segni emersi in precedenza, ma possono anche includere i segni matematici già in uso o introdotti recentemente dall'insegnante. In altre parole, condividere le proprie idee personali attraverso una sintesi rappresenta lo spazio interpersonale nel quale l'insegnante può introdurre il punto di vista matematico, ed eventualmente, la terminologia standard. L'estratto seguente offre esempi di queste azioni.

Estratto 2

55. Ins.: Marco è venuto alla lavagna e ha scritto il numero 15 in queste due caselle gemelle [indica le caselle 3×5 e 5×3].

56. Siro: Sì! Perché sono gemelle!
57. Ins.: Quindi le caselle gemelle hanno sempre lo stesso numero?
58. *Molti studenti dicono "sì", mentre altri dicono "no"*.
59. Ins.: Sì o no?
60. Molti studenti: Sì!
61. Ins.: Provo con un esempio. Qui ho 1, 2, 3 [conta i quadrati lungo un lato della casella 3×4, che sulla sua tabella è colorata] in orizzontale e 1, 2, 3, 4 in verticale. Che numero devo mettere?

L'estratto comincia con l'insegnante che focalizza su quanto fatto da uno degli studenti e lo mette in relazione con il nuovo segno "gemelle": Marco (linea 55), scrive il numero 15 all'interno delle due "caselle gemelle" 3×5 e 5×3. Questa focalizzazione spinge Siro ad accorgersi che questo dipende dalla natura stessa dell'essere gemelle (linea 56). Alla linea 57, il docente pone una domanda che non si riferisce più unicamente alle caselle 3×5 e 5×3, ma a tutte le coppie di caselle gemelle. Così facendo, promuove la generalizzazione mettendola in relazione all'esempio specifico. Questo può essere descritto come un caso di richiesta di sintesi. Ciò nonostante, quest'azione dell'insegnante non produce gli effetti sperati; infatti, non tutti gli allievi concordano su questo fatto (linea 58). Quindi l'insegnante invita i bambini a tornare al compito (linea 61). Un'efficace richiesta di sintesi può portare alla produzione di spiegazioni generali o decontestualizzate, anche se queste non sono ancora completamente espresse in termini matematici.
Quando nella discussione il processo di decontestualizzazione e di generalizzazione a partire dai significati emersi dal contesto di utilizzo dell'artefatto si attiva ma non può ancora considerarsi completo, l'insegnante può intervenire con un'offerta di sintesi, facendo esplicito riferimento al contesto matematico e ai suoi significati, con lo scopo di:
– rendere esplicite le relazioni tra significati matematici e significati costruiti attraverso la discussione di classe;
– introdurre i segni matematici desiderati e fornire una formulazione matematica;
– confermare l'accettabilità e il valore matematico di un segno specifico.
L'estratto seguente mostra un esempio di offerta di sintesi da parte dell'insegnante.

Estratto 3

43. Ins.: Ok, quindi: Nico dice che non è vero per tutte le caselle perché i quadrati non hanno gemelli.
44. Siro: Infatti, non ho detto "tutte", ho detto solo quelle.
45. Ins.: Quelle che sono da questa parte.
46. Fabio: Tutte le caselle sono specchi. Questa [indica la casella 5×5] riflette questa e questa, questa e questa [indica tutte le caselle "gemelle" nella quinta riga e colonna] mentre questa [indica la casella 4×4] riflette questa, questa, questa e questa [indica le coppie di celle nella quarta riga e colonna].
47. Ins.: Sta dicendo che tutti i quadrati sono specchi.

In questo estratto possiamo vedere come il processo di generalizzazione stia procedendo attraverso la discussione sull'accettabilità della proprietà per tutte le caselle di "avere una gemella". All'inizio, l'insegnante si concentra sull'espressione di Nico (linea 43) e questo stimola un intervento di Fabio. Secondo lui tutte le caselle sono specchi (linea 46), ma poi si limita a indicare i quadrati per dire che riflettono le caselle che sono nella stessa riga/colonna. A questo punto, l'insegnante fornisce una

sintesi (linea 47), reinterpretando le parole di Fabio, introducendo il segno matematico desiderato (quadrato) e in questo modo confermando l'accettabilità matematica delle parole di Fabio. Possiamo notare che questa non è una affermazione puramente matematica perché ci sono ancora dei riferimenti al contesto dell'artefatto, ciò nonostante il processo di decontestualizzazione è cominciato e i segni matematici appropriati sono stati introdotti; ora il processo deve continuare.
Questo evidenzia due aspetti interessanti: da un lato, l'offerta di una sintesi non intende fermare il processo di mediazione semiotica, ma può costituire una tappa intermedia nell'evoluzione fornendo esempi di decontestualizzazione e generalizzazione; dall'altro lato, la complessità del processo di mediazione semiotica, coinvolgendo sia la sfera individuale sia quella collettiva, richiede una continua alternanza di richieste e offerte di sintesi da parte del docente.

6 Conclusioni

Secondo la TMS l'utilizzo didattico di un artefatto ha una duplice funzione: in primo luogo viene usato direttamente dagli studenti come mezzo per portare a termine un compito; in secondo luogo è utilizzato indirettamente dall'insegnante come mezzo per raggiungere specifici obiettivi educativi, per esempio la costruzione di un sapere matematico. Il nostro contributo si è focalizzato sul ruolo specifico del docente nella gestione del processo d'insegnamento e apprendimento. Nello specifico, abbiamo indirizzato la nostra attenzione a una particolare fase dell'organizzazione didattica generale - la fase della discussione collettiva – mettendo in evidenza possibili schemi nelle modalità di interazione tra insegnante e studenti.
Dopo l'analisi di numerose discussioni collettive, abbiamo identificato possibili categorie di azioni, che ci hanno portato ad una categorizzazione esplicita delle possibili modalità d'intervento dell'insegnante mirate a guidare il processo semiotico centrato sull'utilizzo di un artefatto. In particolare, le due coppie di azioni complementari presentate sopra, descrivono come, durante una discussione collettiva, l'insegnante possa favorire sia la costruzione collettiva di segni condivisi, sia la loro evoluzione verso i segni matematici attesi.
Questo modello d'azione dell'insegnante mette in luce specifiche forme di mediazione legate al processo d'insegnamento e di apprendimento e ad elementi specifici riguardanti la gestione della discussione di classe. Inoltre, chiarisce cosa ci si aspetta dall'insegnante per rendere l'artefatto funzionale alla mediazione semiotica. La caratterizzazione esplicita delle possibili azioni dell'insegnante rende possibile la loro comunicazione e condivisione nella comunità dei docenti, contribuendo così al loro sviluppo professionale su questa tematica, in particolare indirizza l'attenzione sull'importanza della consapevolezza del docente sul proprio ruolo e sulle scelte che deve prendere durante le discussioni in classe.

Bibliografia

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*, 267–299

Barab, S., & Squire, B. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14. Disponibile in http://website.education.wisc.edu/kdsquire/manuscripts/jls-barab-squire-design.pdf (consultato il 21.07.2018).

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic Mediation In The Primary School: Dûrer's Glass. In H. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity And Sign – Grounding Mathematics Education* (Festschrift For Michael Otte) (pp. 77-90). New York, USA: Springer.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Springer.

Cerulli, M. (2004). *Introducing pupils to Algebra as a Theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation*, Ph.D Thesis in Mathematics, Università di Pisa, Scuola di Dottorato in Matematica.

Chassapis, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 275-293.

Cummins, J. (1996). *Negotiating identities: Education for empowerment in a diverse society*. Ontario, CA: California Association of Bilingual Education.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2004). Towards a definition of function. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 367–374). University of Norway, Bergen (Norvegia).

Falcade, R. (2006). *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collective, dans des sequences d'ensignament avec Cabri- Géomètre por la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Grenoble: Université J. Fourier: Unpublished doctoral dissertation.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 1-17). NATO ASI Series, New York, USA: Springer.

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev & S. M. Miller, *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context* (pp. 15 -38). Cambridge University Press.

Maffia, A. (2017). *Insegnamento e apprendimento di fatti moltiplicativi: un approccio relazionale mediante la tavola di Laisant*. Unpublished doctoral dissertation.

Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2016). Semiotic mediation: from multiplication properties to arithmetical expressions. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete, 16*(1), 4-19.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2010). Un artefact comme outils de médiation sémiotique: une ressource pour l'enseignant. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, Dordrecht: Kluwer, *6*(3), 257-281.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 121-142.

Moschkovich, J. (2003). What Counts as Mathematical Discourse?. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 325-332.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). New York, USA: Springer.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37–70.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Autori/Maria Alessandra Mariotti[*] e Andrea Maffia[•]
[*]Università di Siena, Italia
[•]Università di Bologna, Italia
mariotti21@unisi.it, andrea.maffia2@unibo.it

Traduzione di Carlo Mina

Esperienze didattiche

DdM

Giocare per imparare, imparare a giocare

Playing to learn, learn to play

Fania Coluccia* e Francesca Rosini°
*Scuola elementare di Losone – Svizzera
°Scuola elementare di Cadenazzo – Svizzera

ESPERIENZA DIDATTICA

Sunto / In questo lavoro viene presentata una ricerca-azione che intende indagare lo sviluppo di alcune abilità metacognitive attraverso la loro personificazione e la sperimentazione di un percorso relativo a giochi di logica. Oltre ai principali riferimenti teorici, vengono esposte le modalità operative e gestionali delle attività svolte in classe.
L'analisi qualitativa dei dati ha permesso di dimostrare come vi sia stata un'accresciuta consapevolezza nei bambini sui processi, le strategie e le capacità metacognitive di pianificazione, controllo continuo e valutazione finale.

Parole chiave: metacognizione; pianificazione; controllo continuo; valutazione finale; giochi di logica.

Abstract / In this paper we present a research investigating the development of metacognitive abilities through their personifications and an itinerary focusing on logic games. Besides the main theoretical references, we expose the operational and management modalities of the activities conducted in the classroom.
The qualitative analysis of data allowed us to answer affirmatively to our research questions, proving that kids developed higher awareness about processes, strategies and metacognitive abilities, such as planification, continuous control and final evaluation.

Keywords: metacognition; planification; continuous control; final evaluation; logic games.

1 Introduzione

In questo articolo viene presentata una sperimentazione realizzata in una seconda elementare di Cadenazzo e in una quarta elementare di Losone durante la Formazione in Insegnamento per il livello elementare presso il Dipartimento Formazione e Apprendimento (SUPSI).[1] L'itinerario aveva lo scopo di stimolare lo sviluppo delle abilità metacognitive attraverso l'introduzione in classe di metafore associate ad alcune professioni/mestieri e un percorso incentrato su giochi di logica. Si intendeva attivare nell'allievo strategie di pianificazione, controllo continuo e valutazione finale in ambito ludico-didattico, indagando anche la capacità dei bambini di operare un transfer e una generalizzazione delle strategie acquisite ad altri ambiti legati alla disciplina matematica.
La sperimentazione è stata condotta con le intere classi sull'arco di sei settimane, concentrando l'attenzione su quattro bambini in particolare, indicati nell'articolo con En., Er., A. e F., che sono stati filmati, osservati in maniera strutturata attraverso l'uso di griglie osservative, registrazioni video dei momenti di gioco e interviste, come anche grazie a questionari compilati dai bambini stessi. Gli indicatori sono stati

1

1. In questo articolo viene presentata una panoramica dal taglio qualitativo. Per informazioni più approfondite si rimanda ai lavori di diploma (disponibili in http://tesi.supsi.ch/2089/ e http://tesi.supsi.ch/2124/).

scelti per rendere osservabili comportamenti riconducibili alle tre abilità metacognitive (pianificazione, controllo continuo e valutazione finale).
Il tema della metacognizione, benché così centrale e trasversale, ha ancora poco respiro nella pratica dei docenti. Se si concorda sull'importanza che riveste il tentare di capire come ragionano i bambini, quali strategie e abilità sanno mettere in atto, consciamente o inconsciamente, allora la vera sfida del docente diventa quella di permettere ai bambini di provare una reale esigenza di riflettere sul proprio operato, attivando processi metacognitivi.
I risultati della sperimentazione suggeriscono che l'integrazione di riflessioni di tipo metacognitivo nella progettazione didattica non possa essere elusa: i processi d'insegnamento-apprendimento implicano generalmente la capacità di interrogarsi, di controllare e di riflettere sul proprio operato, non soltanto a posteriori, ma anche prima e in corso d'opera. La dimensione ludica favorisce inoltre l'implicazione e la motivazione dei bambini, costituendo un fattore che coadiuva la focalizzazione sui processi, sulla scoperta e sull'applicazione di strategie.
In quest'ottica, il progetto ha dunque mirato a sollecitare in modo equilibrato vari aspetti: l'approfondimento della metacognizione in ambito matematico, il considerare il ruolo centrale e consapevole del bambino e, in qualità di docenti, la riflessione rispetto alla scelta e alla strutturazione di situazioni stimolanti e attivanti, che mirino ad aumentare l'efficacia delle attività proposte.
Nonostante il progetto nasca in stretta relazione con la matematica, nel corso della sperimentazione è stato percepito un senso più ampio della proposta didattica: si è trattato di promuovere l'educazione ad una forma mentis, proattiva e propositiva, attenta al contesto e abituata ad interrogarsi sul proprio operato, in grado all'occorrenza di trovare e applicare strumenti e strategie.

2 Gioco e metacognizione in ambito matematico

2.1 Metacognizione

Con il termine metacognizione si intende in modo generale la conoscenza che un individuo ha su di sé, sul proprio funzionamento cognitivo e sui relativi meccanismi di regolazione.
Il concetto nasce nel corso degli anni '70 come costrutto teorico volto a indagare e capire l'origine delle difficoltà mnemoniche dei bambini in età scolastica e prescolastica (Flavell, 1970, citato da Mazzoni, 1999, p. 45). In particolare Mazzoni (1999) si riferisce alla differenza tra le strategie conosciute consapevolmente dai bambini e quelle che applicano invece spontaneamente. Le ricerche condotte, basate sull'ipotesi che i bambini non utilizzino in maniera spontanea e adeguata le strategie di memorizzazione, hanno favorito in quegli anni lo sviluppo di alcuni approcci metodologici (Mazzoni, 1999). L'autrice, facendo riferimento a importanti ricerche, evidenzia come i bambini siano capaci di applicare delle strategie mirate solo a seguito di un insegnamento mirato; non si rendono infatti conto in modo autonomo della necessità di agire in modo specifico per memorizzare, non sono coscienti dell'efficacia delle strategie e faticano a mettere in relazione il tipo di compito con la strategia risolutiva più consona (Flavell & Wellman, 1977, citato da Mazzoni, 1999, p. 45). Sugli aspetti appena citati si è definito il concetto di metamemoria e successivamente, in maniera

più generale, di metacognizione.
Come sostengono Büchel e Hessels-Schlatter (2001) non si può veramente parlare di una sola teoria o di un'unica definizione esaustiva riguardo la metacognizione. Quello che generalmente viene chiamata metacognizione risulta essere un insieme di riflessioni sviluppate da scuole diverse, come evidenziano Cavanaugh e Perlmutter (1982); fra queste troviamo ad esempio "il costruttivismo piagettiano (Piaget, 1976), e postpiagettiano (Montangero, 1993), la psicologia dello sviluppo della memoria (Flavell, 1971; Flavell & Wellman, 1977), (…), o la teoria dell'intelligenza (Sternberg, 1984)". A partire da una delle due definizioni di metacognizione proposte da Flavell, Richer presenta la metacognizione come composta da due poli: le conoscenze possedute dal soggetto riguardo alle proprie risorse cognitive e le abilità che è in grado di esercitare sulle sue risorse (Richer, 2005, citato da Leuba, 2013, p. 16). La seguente tabella esplicita in modo più puntuale queste due categorie metacognitive.

Tabella 1
I due poli della metacognizione (tratto da Pallascio, 2005, p. 92, citato da Leuba 2013, p. 16).

Conoscenze metacognitive (Aspetti dichiarativi)	Abilità metacognitive (Aspetti procedurali)
Personali (su di sé)	Controllo continuo (monitoring)
Sul compito e sui materiali	Pianificazione
Sulle strategie	Valutazione o controllo finale

Dunque, da un lato le conoscenze metacognitive si riferiscono alle rappresentazioni personali che il soggetto ha di sé stesso e del proprio funzionamento, all'attività da svolgere e all'utilità ed efficacia delle strategie (Doly, 1997). Rispetto a queste tre conoscenze metacognitive è fondamentale sottolineare la frequente interazione fra le componenti e il ruolo delle esperienze personali.
D'altro canto, le abilità metacognitive (Brown, 1975, 1977, 1978, 1980, citato da Noël, 2016, p. 12) definiscono l'aspetto procedurale e si basano su processi quali la pianificazione, il controllo e la valutazione. Sottesa a questi tre aspetti vi è un'attenzione attiva, che per Flavell (1970) compare grazie a quelle esperienze metacognitive che egli definisce come presa di coscienza del soggetto sullo svolgimento della propria attività (Flavell, 1970, citato da Doly, 1997, p. 21). Nei prossimi paragrafi verrà esposto nello specifico in cosa consistono le abilità di tipo metacognitivo.
La pianificazione si rende manifesta in operazioni di anticipazione, come ad esempio indentificare l'obiettivo, anticipare procedure e difficoltà, scegliere le strategie più appropriate e stimare risultati, tempo e investimento cognitivo.
Il controllo continuo, o *monitoring*, è la capacità di valutare i propri progressi, controllando comprensione, conoscenze, risultati e l'abilità di regolare in itinere il proprio piano di risoluzione e le strategie attivate.
Infine, la valutazione consiste nel controllo finale dei risultati ottenuti in funzione dell'obiettivo stabilito, nella presa di coscienza di procedure e strategie utilizzate e nel giudizio globale di quanto svolto e dei risultati ottenuti (Flavell, 1970, citato da Doly, 1997, p. 2).
Come evidenzia Hessels-Schlatter (2010) sono numerosi i programmi di intervento che sono stati concepiti con l'obiettivo di sviluppare le competenze cognitive e metacognitive. Questi programmi, come ad esempio il PEI (Feuerstein, 2009) o il DELF (Büchel & Büchel, 1995) promuovono lo sviluppo di processi e strategie cognitive

e metacognitive diverse, attraverso sia esercizi che implicano contenuti scolastici o disciplinari (ad esempio Palinscar & Brown, 1984; Paris & Jacobs, 1984; Evarech & Kramarski, 1997; Montague, 2003; Adey & Shayer, 1994, citati da Hessels-Schlatter, 2010) sia compiti non scolastici (ad esempio Büchel & Büchel, 1995; Feuerstein, Rand, Hoffman & Miller, 1980; Klauer, 1989, citati da Hessels-Schlatter, 2010, p. 6). Hessels-Schlatter (2010) nell'articolo *Les jeux comme outils d'intervention métacognitive* conclude che per giungere all'elaborazione dei processi metacognitivi è indispensabile una mediazione. Per questo motivo è necessario che in un primo momento l'insegnante progetti delle situazioni di insegnamento-apprendimento specifiche, nelle quali la componente pratica/sperimentale sia centrale. Infatti, come descrive Balas-Chanel (Toupiol, 2006), e come riassume la seguente tabella, è l'azione stessa che permette la cognizione.

Agire	Risoluzione di un problema → Risultato	Azione + cognizione implicita
Apprendere	Saper fare → Leggi e regole della situazione	Azione + metacognizione implicita
Apprendere ad apprendere	Saper riapplicare o regolare strategie → Strategie efficaci	Azione + cognizione + metacognizione esplicita

Tabella 2
Funzionamento dell'apprendere Balas-Chanel (Toupiol, 2006, p. 134).

Per descrivere tali processi, Leuba (2013) propone una situazione esemplare: apprendere ad andare in bicicletta. In un primo livello, attraverso l'azione e l'esperienza della ricerca di equilibrio si arriva a mettere in atto azioni efficaci o inefficaci per la riuscita. In un secondo tempo l'azione appresa deve essere reiterata: il soggetto è dunque in una situazione d'apprendimento. A questo secondo livello la metacognizione implicita, stimolata dalle esperienze precedenti, serve a regolare le azioni; il soggetto sulla bicicletta sa che per non cadere deve raggiungere una certa velocità. Il terzo ed ultimo livello è quello costituito dalla metacognizione esplicita in cui il soggetto riesce, sotto forma di verbalizzazione, a esplicitare le strategie efficaci e le eventuali regolazioni messe in atto precedentemente: questo viene definito apprendere ad apprendere (Leuba, 2013). In questo livello, la persona in bicicletta potrebbe esplicitare: «Ieri per partire più velocemente, ho posizionato il pedale in alto, devo farlo di nuovo».
In questa ricerca si è cercato di accompagnare gradualmente i bambini attraverso i tre livelli sopracitati, per sollecitare l'uso e lo sviluppo di abilità metacognitive e la presa di coscienza, favorita dalla verbalizzazione delle strategie adottate.

2.2 Metacognizione e gioco: quale utilità per l'ambito disciplinare matematico?

Nel capitolo precedente è stata citata una serie di programmi di educazione cognitiva e metacognitiva sviluppata e adottata in ambito educativo sia attraverso compiti scolastici sia, come nel caso dell'imparare ad andare in bicicletta, attraverso esercizi lontani da contesti strettamente disciplinari.
La scelta di orientare la ricerca su compiti non scolastici si basa essenzialmente su due ragioni principali. Innanzitutto, sgravando l'allievo dai contenuti disciplinari e

da possibili difficoltà collegate ad essi, gli si permette di focalizzarsi sui processi e sulla scoperta e l'applicazione di strategie. In secondo luogo, questa scelta consente di evitare sentimenti ed emozioni negative o lo sviluppo di un basso sentimento di autoefficacia (Bandura, 1997; Bandura, 2003, citato da Hessels-Schlatter, 2010, p. 99), in quanto gli allievi non sono stati confrontati con fallimenti reiterati nei compiti proposti.
Dunque, l'uso di attività ludiche basate su contenuti non scolastici per favorire lo sviluppo di abilità metacognitive ha senso laddove i giochi, che sono frequentemente presenti all'interno delle classi, vengano utilizzati consapevolmente ed esplicitamente in una prospettiva cognitiva-metacognitiva. Hessels-Schlatter (2010) in questo senso propone un approccio teorico ai giochi come mezzi di intervento metacognitivo. La ricercatrice dell'Università di Ginevra illustra come i giochi abbiano il vantaggio di sviluppare sia i processi cognitivi e metacognitivi implicati nell'apprendimento sia gli aspetti motivazionali. Essi favoriscono dunque l'implicazione e la riflessione sui processi messi in atto invece che focalizzarsi unicamente sui contenuti. I processi e le strategie sollecitate attraverso il gioco possono essere applicati in altri contesti, consentendo all'allievo di esercitare le strategie apprese su materiali diversi. Queste capacità, dette di *transfer*, non sono tuttavia spontanee e andrebbero stimolate proponendo una variazione dei contesti d'apprendimento (Borkowski & Muthukrishna, 1992; Brown, 1978; Fuchs et al., 2003, citati da Hessels-Schlatter, 2010). Lo sfondo ludico di queste attività da un lato fornisce agli allievi un ambiente di lavoro percepito come meno rischioso e meno giudicante, anche perché la situazione di gioco non ha conseguenze dirette sulla realtà (Brougère, 2005), dall'altro permette di rendere coscienti i bambini che la riuscita del gioco dipende dal loro impegno cognitivo e dalle strategie da loro attuate, e che queste ultime possono essere messe in atto anche in altri contesti.

2.3 Potenzialità del progetto in ambito matematico

Come si può evincere dai capitoli precedenti, l'approccio metacognitivo, se trasposto in chiave didattica, interessa la capacità di comprensione degli allievi, la tipologia delle proposte didattiche, gli aspetti operativi, nonché i processi cognitivi, emotivo-motivazionali ed affettivi. Questo è particolarmente vero per l'ambito disciplinare matematico, come sottolineano Caponi, Falco, Focchiatti, Cornoldi e Lucangeli (2006), i quali prendono in considerazione il rapporto tra apprendimento e insegnamento e la complessa relazione fra sistema di credenze e uso controllato della mente. Un ulteriore stimolo all'integrazione di questi aspetti nella pratica didattica è presente d'altronde anche nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015): in quest'ultimo si possono trovare riferimenti alla metacognizione in ogni area disciplinare e riguardano la riflessione sul proprio operato, la consapevolezza rispetto agli errori commessi e l'applicazione e la verbalizzazione di strategie. Nelle indicazioni metodologiche e didattiche dell'area matematica viene sottolineato che

> «Gli allievi devono essere stimolati a una continua interpretazione e verbalizzazione di idee, intuizioni e proposte, evitando che in loro subentri (...) il tentativo di riprodurre in modo acritico e impersonale definizioni, formule e procedimenti standard».
>
> (DECS, 2015, p.140)

Nei processi di apprendimento-insegnamento vanno promosse dunque situazioni attivanti, che inducano il bambino «a mobilitarsi per elaborare strategie e una o più conseguenti soluzioni e deve includere un'attenzione alla riflessione metacognitiva e alla ricerca del senso» (DECS, 2015, p.140). La messa in atto o la creazione di strategie metacognitive si lega indissolubilmente al metodo euristico-induttivo e ad un approccio socio-costruttivista e situato, che preveda l'attivazione di quelle che vengono definite situazioni problema. Tra i Traguardi di competenza relativi al primo ciclo, particolarmente connesso alla metacognizione è quello che recita: «Presenta, descrive e motiva le proprie scelte prese per affrontare una semplice situazione matematica legata alla realtà in modo tale che risultino comprensibili ai compagni, come pure comprende le descrizioni e presentazioni degli altri» (DECS, 2015, p.147).
Dal punto di vista dei processi cognitivi matematici descritti nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese, risulta evidente come *Esplorare e provare, Interpretare e riflettere sui risultati* e *Comunicare e argomentare* si leghino in modo particolare alla metacognizione e alle abilità ad essa connesse. Inoltre, lo sviluppo della metacognizione, l'uso di strategie metacognitive e la loro personalizzazione passa certamente in modo privilegiato dall'attività di risoluzione di problemi: attraverso un lavoro collettivo il docente, facilitatore e moderatore, porta all'esplicitazione e alla condivisione di atteggiamenti strategici che vanno successivamente rielaborati a livello individuale (Caponi et al., 2006). Va infine sottolineata la forte connessione fra alcune competenze trasversali del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese e la metacognizione: in particolare, il pensiero creativo e il pensiero riflessivo e critico (DECS, 2015).

3 La sperimentazione in aula

L'approfondimento rispetto alle tematiche sopracitate ha permesso di orientare la sperimentazione del percorso didattico che si voleva proporre. Operare su giochi di logica ha consentito da un lato di coniugare aspetti a prima vista opposti come obbligo e spontaneità e dall'altro di costruire un contesto privilegiato per le osservazioni libere e strutturate del docente, che ha così modo di cogliere ragionamenti, dinamiche, scoperte e fatiche dei propri allievi.
La sperimentazione ha previsto quattro fasi principali: una valutazione in entrata rispetto alle tre abilità metacognitive sopra citate sfruttando il gioco Logik'Ville *(pre-test)* e l'introduzione di tre personaggi (architetto, capo cantiere e tecnico comunale) ad esse associate; una seconda di allenamento con diversi tipi di esercizi e giochi matematici; un'ultima fase di valutazione in uscita sfruttando sia il gioco Logik'Ville sia il gioco Chocolate Fix *(post-test)* (**Allegato 1**).
Nei momenti di valutazione sono stati utilizzati degli strumenti osservativi sia qualitativi che quantitativi.[2] In questo contributo si farà riferimento esclusivamente ai risultati di tipo qualitativo, ottenuti mediante le griglie osservative e le interviste strutturate inserite nel pre-test e nel *post-test* (**Allegato 2**).

2

2. Per i dati prettamente quantitativi si rimanda ai due lavori di diploma.

3.1 Analisi dei principali giochi matematici

Un aspetto centrale della ricerca è stata l'analisi dei giochi matematici da proporre, selezionati in funzione delle abilità metariflessive che riescono ad attivare: alcuni sono stati scelti perché in grado di sollecitare tutte e tre le abilità, mentre altri per il focus particolare su una soltanto di esse. Oltre ai due giochi utilizzati nelle fasi di *pre-test* e *post-test*, nella fase di allenamento sono stati utilizzati diversi giochi e attività differenziati per livello, come sudoku, quadrati magici, calcoli in codice, problemi di logica e RushHour (vedi **Allegato 3**).

3.1.1 Logik'Ville

Figura 1
Materiali di Logik'Ville. Per maggiori informazioni aprire il Link

Logik'Ville è il gioco senz'altro più importante dell'intera ricerca ed è stato utilizzato come *pre-test*, in fase di allenamento e come *post-test*. Logik'Ville ha costituito non solo il *fil rouge* dell'itinerario, accompagnando i bambini in tutte le sue fasi, ma anche il campo privilegiato delle riflessioni in ambito metacognitivo.
Il gioco ha come scopo il posizionamento di inquilini e animali domestici all'interno di tre case (disposte in fila da sinistra a destra) a due piani (al pianterreno gli animali e al primo piano gli inquilini) attraverso la decodifica di carte da gioco (**Figura 2**). Queste ultime sfruttano una simbologia specifica: ogni simbolo fornisce un'informazione più o meno esplicita per poter localizzare la posizione dei personaggi e degli animali all'interno delle case.

Figura 2
Esempio di carta da gioco (fronte e retro).

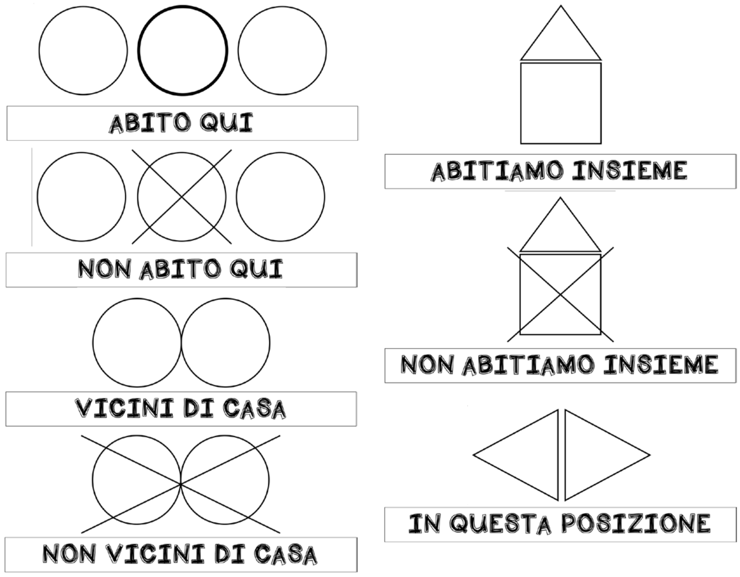


Figura 3
Legenda dei simboli presenti sulle carte di Logik'Ville fornita come promemoria nei momenti di gioco.

Interpretando le carte da gioco e la legenda, si possono logicamente ricavare le informazioni necessarie per posizionare correttamente tutti gli elementi (inquilini e animali).
Nelle 84 carte alcune indicazioni sono lasciate sottintese, aspetto che obbliga il giocatore a pianificare un ordine di lettura di ciascuna carta, partendo dalle informazioni più sicure (ad esempio "abito qui") e a controllare in modo continuo il proprio operato. Sul retro di ogni carta è stampata la soluzione, che permette un controllo finale e un'autovalutazione della strategia risolutiva adottata.
La scelta di Logik'Ville è stata dettata dalla struttura e dalle regole che connotano il gioco stesso, che hanno consentito di lavorare contemporaneamente e in modo equilibrato su tutte e tre le abilità metacognitive. Per ognuna di esse, si riportano nella tabella seguente quali comportamenti o azioni del bambino sono interpretabili come indicatori concreti della loro messa in atto.

Tabella 3
Indicatori di Logik'Ville.

Pianificazione	– Inizia a collocare i personaggi e gli animali la cui posizione è sicura. – Seguendo le indicazioni fornite dalle carte, dispone personaggi e animali sul tabellone di gioco prima di collocarli nelle rispettive case. – Leggendo la carta, pianifica una propria sequenza logica.
Controllo continuo	– Si accorge di aver commesso errori nel posizionare personaggi e animali nelle rispettive case. – Modifica le scelte fatte. – Rilegge la carta.
Valutazione finale	– Controlla ogni indicazione prima di girare la carta per guardare la soluzione. – In caso di errore, riguarda le informazioni sulla carta e cerca di capire dove ha sbagliato.

3.1.2 Chocolate Fix

Figura 4
Chocolate Fix.
Per maggiori informazioni aprire il Link e cercare "Chocolate Fix".

Questo gioco è stato scelto per svolgere il secondo *post-test* con l'obiettivo di valutare un possibile *transfer* delle abilità metacognitive stimolate attraverso il gioco di Logik'Ville. Chocolate Fix infatti risulta molto simile a quest'ultimo per scopo, struttura e competenze attivate.
Lo scopo di Chocolate Fix è quello di posizionare in modo corretto dei pasticcini di forma e colore diverso all'interno di una scatola di cioccolatini. Anche in questo gioco le indicazioni utili al posizionamento degli elementi vengono fornite attraverso una specifica simbologia che emerge da alcune carte (Figura 5), che offrono informazioni più o meno sicure. Esse stimolano dunque il giocatore a pianificare le sue mosse e a controllare il lavoro strada facendo. Anche in questo gioco sul retro di ogni carta viene riportata la soluzione.

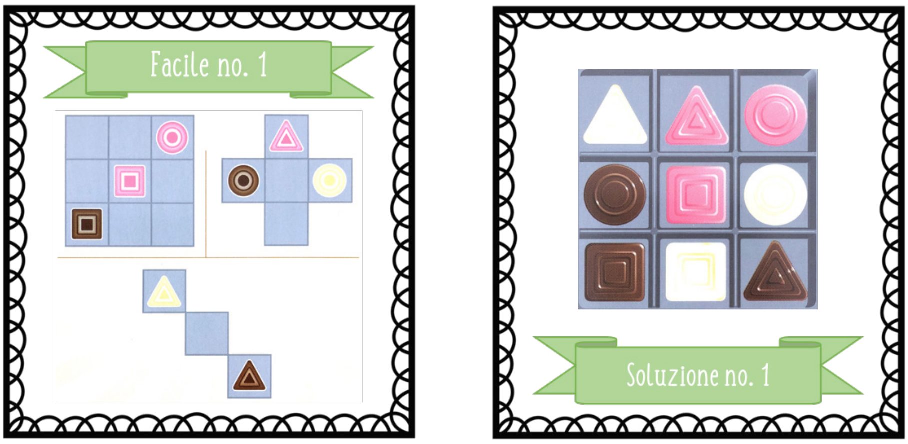


Figura 5
Carte del gioco Chocolate Fix.

Anche per questo gioco riportiamo gli indicatori che possono essere letti come manifestazione osservabile delle tre abilità metacognitive.

Pianificazione	– Inizia a collocare i pasticcini la cui posizione è sicura. – Seguendo le indicazioni fornite dalle carte, dispone i pasticcini fuori dalla teglia prima di collocarli al posto giusto. – Leggendo la carta, pianifica una propria sequenza logica.
Controllo continuo	– Si accorge di aver commesso errori nel posizionare i pasticcini sulla teglia. – Modifica le scelte fatte. – Rilegge la carta.
Valutazione finale	– Controlla ogni indicazione prima di guardare la soluzione. – In caso di errore, riguarda le informazioni sulla carta e cerca di capire dove ha sbagliato.

Tabella 4
Indicatori Chocolate Fix.

3.2 Articolazione del percorso

Di seguito si riporta uno schema sintetico delle varie fasi del percorso, svolto nell'arco di sei settimane.

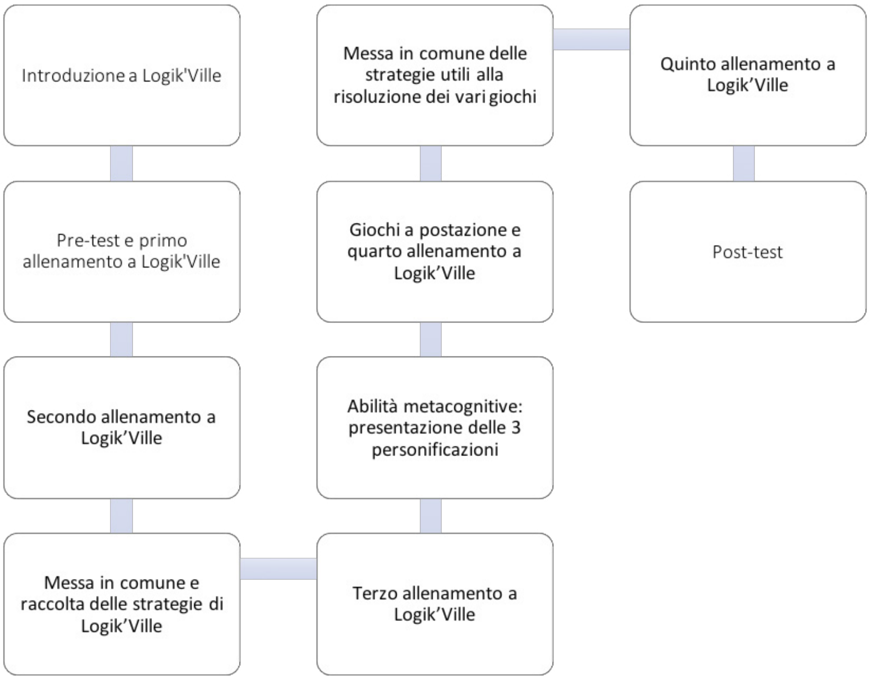


Figura 6
Successione degli interventi proposti.

Il percorso è iniziato con l'introduzione del gioco Logik'Ville. È stato chiesto ai bambini di comporre dei cartelloni che costituissero una legenda dei simboli presenti nelle carte, sollecitando processi inferenziali e il dialogo. Alcuni esempi agiti sono stati proposti a grande gruppo attraverso una presentazione PowerPoint allo scopo di far comprendere il gioco; ciò ha permesso di risolvere le prime carte collettivamente con il supporto degli strumenti creati.

Alcuni momenti successivi sono stati utilizzati per riprendere regole e legenda in modo ludico e dinamico attraverso dei quiz. Successivamente sono state introdotte le schede e i questionari (Allegato 2) progettati per tenere traccia del percorso individuale dei bambini e per avere una panoramica quantitativa del lavoro da essi svolto. Questi strumenti hanno costituito un'ulteriore possibilità di riflettere individualmente sul proprio operato in quanto richiedevano un'autovalutazione rispetto

a correttezza, difficoltà percepita e grado di soddisfazione.
Fin da questi primi momenti di gioco ci si è resi conto di quanto l'ambito ludico abbia inciso positivamente sulla motivazione dei bambini resa evidente tramite l'implicazione personale e le riflessioni esplicite.

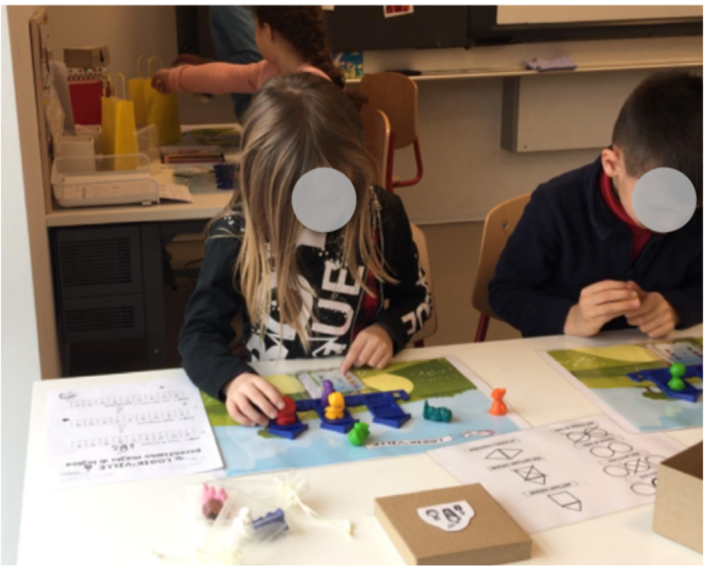


Figura 7
Bambini al lavoro (Logik'Ville).

Logik'Ville, e successivamente Chocolate Fix, sono stati proposti come postazione nei momenti di allenamento ed esercizio settimanale. Anche queste occasioni hanno costituito momenti proficui per osservazioni più spontanee, ma ricche di sollecitazioni.
Particolarmente significativi sono stati i momenti di messa in comune e di condivisione delle strategie scelte dai singoli bambini, che hanno favorito il decentramento cognitivo degli allievi e la consapevolezza dell'esistenza di numerose modalità di risoluzione di uno stesso problema. Si è deciso di creare una parete della memoria collettiva con consigli e strategie proposte dai bambini, che fungesse da sostegno e promemoria soprattutto per i bambini più in difficoltà.

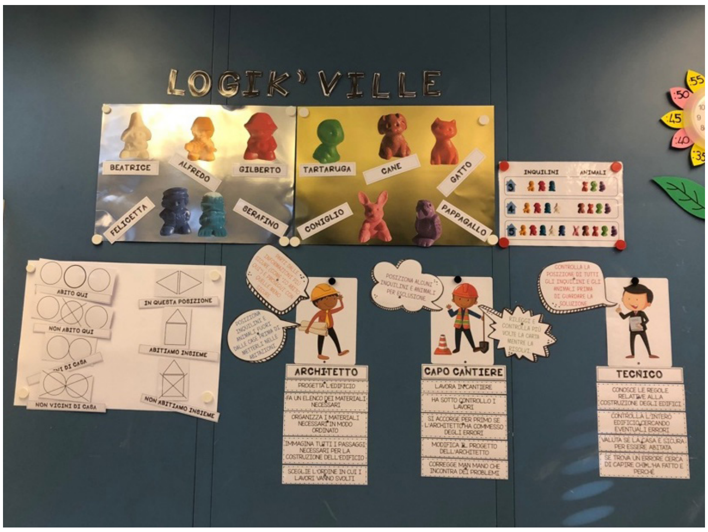


Figura 8
Parete di Logik'Ville: personificazioni delle tre abilità metacognitive con mansioni e consigli.

La presentazione delle personificazioni delle abilità metacognitive ha costituito un altro punto centrale dell'intera sperimentazione. Sono stati presentati tre personaggi, uno per abilità metacognitiva: l'*architetto* per la pianificazione, il *capo cantiere* per il controllo continuo e il *tecnico* per la valutazione finale. I bambini, a grande gruppo e attraverso una discussione, hanno associato ad ogni personaggio i compiti e le caratteristiche da noi fornite. In un secondo momento, invece, gli allievi sono stati invitati ad attribuire i consigli e le strategie prodotti da loro ai vari personaggi. La metafora edile, inizialmente presa in modo letterale dalla maggior parte dei bambini, si è con il tempo rivelata un efficace supporto e riferimento per le riflessioni collettive e individuali dei bambini. Si è cercato di sollecitare i bambini a riferirsi alle personificazioni non solo in occasione dei momenti di allenamento, bensì in tutti gli ambiti disciplinari e nelle attività proposte nei mesi della sperimentazione, cercando di stimolarli nel tessere connessioni rispetto alle richieste proposte. Dopo breve tempo, è stato interessante notare che i bambini stessi, in modo autonomo e parallelamente al percorso sui giochi di logica, si riferivano ai tre personaggi per denotare tipologie diverse di azioni e ragionamenti. Ad esempio, in occasione di un'attività di ricerca a gruppi che richiedeva un'attenta pianificazione e organizzazione delle informazioni individuate nei libri e nei testi a disposizione per la creazione di cartelloni riassuntivi ed esaustivi, alcuni bambini hanno sottolineato l'importanza del ruolo dell'*architetto*. In un'altra occasione, nella quale i bambini dovevano creare giochi di classe per esercitare le tematiche affrontate in diversi ambiti disciplinari, alcuni alunni in entrambe le classi hanno ricondotto alla funzione del *tecnico* la risoluzione e la revisione degli esercizi creati dai vari gruppi di lavoro.

Figura 9
Momenti di lavoro a postazione (fase di allenamento).

Oltre a sollecitare le competenze metacognitive dei bambini, i laboratori di giochi e attività di logica proposti a rotazione nel corso dell'allenamento hanno costituito l'opportunità di lavorare su competenze trasversali, quali l'autonomia e lo sviluppo personale. Un aspetto interessante di queste occasioni è stato indagare e ipotizzare un possibile *transfer* rispetto alle strategie individuate per il gioco proposto inizialmente, ovvero Logik'Ville.
Le raccolte dati condotte attraverso i due *post-test* hanno consentito di avere una panoramica generale rispetto al possibile sviluppo delle abilità metacognitive nonché di *transfer* di entrambe le classi prese in considerazione.

Figura 10
Momento di lavoro (Chocolate Fix).

I test in uscita, svolti su Logik'Ville e Chocolate Fix, sono stati condotti con le medesime modalità del *pre-test*.

4 Risultati osservati

Le personificazioni delle abilità metacognitive sono state accolte dai bambini con curiosità ed entusiasmo. Nei momenti di lavoro, anche quelli successivi alla sperimentazione, i bambini si sono riferiti ai consigli delle personificazioni in varie occasioni. Una differenza notata in entrambe le classi a seguito della sperimentazione è stata l'esplicitazione spontanea delle strategie da parte di alcuni bambini, che hanno altresì dimostrato di avere attuato un processo di personalizzazione. Sensibilizzati dalla tipologia dei giochi proposti, molti bambini hanno dimostrato una competenza pianificatoria esplicitando l'esigenza di organizzare le informazioni ricevute e attuando di fatto un piano di risoluzione. Ad esempio alcuni bambini sono riusciti ad attribuire delle strategie applicate inizialmente a Logik'Ville ad altri giochi sperimentati.

Ins.: Avete dei consigli o dei trucchi per giocare a Rush Hour?
Si.: Prima di iniziare a giocare può, puoi...prima guardare tutto, ecco.
Ins.: Cioè di guardare bene...
Dav.: Tutto!
Ins.: Tutto in che senso?
Al.: Come gli architetti.

Nel confronto fra i dati raccolti attraverso le interviste e le osservazioni si sono potute constatare in generale piccole significative evoluzioni.
Per quanto concerne i quattro bambini monitorati è stato possibile notare uno sviluppo dell'abilità metacognitiva della pianificazione. Inizialmente carenti, i bambini hanno progressivamente dimostrato di saper strutturare maggiormente pensiero e azione, soprattutto nella scelta dell'ordine procedurale personalizzato e nella capacità di discriminare da quali indicazioni fosse più utile iniziare il gioco. Ad esempio A. esprime maggior consapevolezza e sottolinea come ricerchi l'informazione più utile o sicura passando poi man mano a quelle che reputa più complesse.

Ins.: (...) Prova a ridirmi cosa fai passo per passo quando prendi una carta nuova.
A.: All'inizio guardo "io abito qui".
Ins.: Ok. "Io abito qui". Come mai guardi quella?
A.: Perché è la più facile. (Facile inteso come utile).

Per quanto concerne il controllo continuo sono stati rilevati una particolare attenzione rispetto alla rilettura delle carte, l'individuazione di errori e la conseguente modifica delle scelte fatte già in occasione del *pre-test*, ma nei *post-test* i bambini hanno dimostrato di interessarsi maggiormente alla causa degli errori commessi, riuscendo persino ad elencare una serie di comportamenti che secondo loro contribuirebbero a ridurre l'incidenza di possibili sbagli. En. ad esempio, si pone con un atteggiamento che denota metariflessione e autocritica.

Ins.: (...) La prossima volta cosa potresti fare invece che mettere i cioccolatini anche se non sei convinto.
En.: Guardare due o tre volte e stare lì un po' a pensare, riposizionare e poi controllare.
Ins.: (...) e cosa avresti potuto fare per essere più sicuro di come hai disposto i cioccolatini?
En.: ...mmm sono andato un po' a bambera (vanvera) e non ho guardato tanto bene e dopo ho fatto due carte sbagliate.
Ins.: Sì. Qui quale personaggio ti viene in mente che potrebbe aiutarci tra quelli che abbiamo in classe?
En.: Il capo cantiere e il tecnico, guarda bene se la casa è ben...soda (solida).

Nonostante dalle rilevazioni strutturate i bambini si siano dimostrati poco attenti all'abilità metacognitiva relativa alla valutazione o controllo finale, fin dalle prime giocate di Logik'Ville hanno percepito ed esplicitato l'esigenza di dover controllare il lavoro svolto. Questa sensibilità è emersa in entrambi i gruppi classe che sono inoltre riusciti a proporre una rielaborazione personale delle mansioni attribuite ai personaggi che ne specificano il ruolo o ne indagano lo scopo.

Ins.: Perché è importante che il tecnico provi a capire quali errori sono stati fatti?
Gi.: Va a cercare gli errori perché poi... l'architetto e il capo cantiere non rifanno lo sbaglio.
Ins.: (...) Come mai cerca di capire chi ha fatto un errore e perché l'ha fatto? Perché non lo si corregge e basta?
R.: Così non lo rifacciamo un'altra volta.

Per quanto concerne in particolare il secondo *post-test*, svolto con Chocolate Fix, i bambini hanno dimostrato quasi tutti di riuscire a tracciare un parallelo con il gioco di Logik'Ville, evidenziandone i nessi rispetto a scopo e strategie, come emerge dal seguente dialogo trascritto:

Ins.: E da cosa inizi? Ci sono le varie informazioni, tu da cosa parti?
F.: Dalle più sicure.
Ins.: Da quelle più sicure. E quali sono?
F.: Tipo, più o meno come in Logik'Ville "io abito qui", ...

Nonostante gli incoraggianti dati raccolti in entrambe le classi è rimasta la difficoltà, in alcuni bambini, a riconoscere le strategie, applicate ancora talvolta inconsciamente, e a collegare ed associare le strategie attuate alle personificazioni delle abilità metacognitive, rendendo a nostro parere la metariflessione e l'esplicitazione del proprio operato più astratta e complessa.

4.1 Due cicli a confronto: analogie e differenze

Uno degli aspetti da specificare, comune ad entrambe le classi, è l'importanza che hanno rivestito le personificazioni delle abilità metacognitive introdotte in classe. I tre personaggi hanno consentito di attribuire comportamenti e strategie astratte ad immagini ed azioni concrete, che ne hanno facilitato l'associazione e l'esplicitazione.
È stata riscontrata inoltre una maggiore attenzione rispetto alla ricerca e alla condivisione di strategie, spesso verbalizzate e proposte in modo autonomo dai bambini nello svolgimento di attività.
Rispetto ai due giochi principali della sperimentazione (Logik'Ville e Chocolate Fix), anche nei gruppi classe mediamente si sono potute rilevare delle tendenze simili ai bambini osservati più puntualmente: una maggiore propensione all'applicazione di strategie legate alla pianificazione, un controllo continuo più attento e un'accresciuta consapevolezza per la valutazione finale, ancora però piuttosto sporadica e carente. Anche se talvolta non vengono attivati i consigli attribuiti ai personaggi, gli studenti risultano più consapevoli del proprio operato, arrivando ad esplicitare le modalità con le quali far fronte a possibili errori commessi.
A fronte però di questi aspetti positivi ed incoraggianti, va altresì sottolineato che alcuni bambini, in particolare quelli che presentano criticità linguistiche, di memoria di lavoro e difficoltà attentive, hanno faticato nella metariflessione. Nello specifico, si sono rilevate difficoltà a ricordare i ruoli dei personaggi e ad individuare e associare i comportamenti che essi rappresentano nelle attività svolte.

5 Conclusioni

Al termine dell'itinerario sono stati confrontati i risultati ottenuti dando voce ai dati dell'analisi, consapevoli dei numerosi limiti e dell'impossibilità di generalizzare le nostre osservazioni per la natura e l'impostazione della sperimentazione stessa.
Dai risultati ottenuti nelle due classi emerge come la proposta di attività ludico-didattiche si sia rivelata efficace nell'offrire un contesto non giudicante, come ribadito da Bandura (1997) e da Brougère (2005). Come evidenziato da Cottini (2006), i giochi proposti hanno motivato i bambini, facendo percepire loro il desiderio e la necessità di trovare strategie che consentissero una corretta risoluzione.
Hessels-Schlatter (2010) nell'articolo *Les jeux comme outils d'intervention métacognitive* sostiene che per giungere all'elaborazione dei processi metacognitivi è essenziale una mediazione: in entrambe le sperimentazioni si è reputato indispensabile il ruolo del docente facilitatore e guida, nonché il supporto metaforico dei personaggi associati alle tre abilità metacognitive. Questi ultimi, in particolare, hanno supportato e ancorato le metariflessioni dei bambini ad azioni concrete, facilitando l'applicazione e l'esplicitazione di procedure e ragionamenti altrimenti molto astratti.

Risultati simili sono stati rilevati nel lavoro di Fritz e Hussy (1996), i quali hanno mostrato come nel loro gruppo sperimentale si sia manifestato un miglioramento significativo rispetto alle abilità di pianificazione, controllo continuo e valutazione finale. I risultati ottenuti, benché non generalizzabili, trovano conferma e sostegno nei riferimenti teorici appena citati, confermandoci la grande potenzialità di un lavoro sistematico e guidato sulla metacognizione.

Bibliografia

Büchel, F.P., & Büchel, P. (1995). *Découvrez vos capacités, réalisez vos possibilités, planifiez votre démarche, soyez créatifs (DELF)*. Russin, Suisse : Centre d'Education Cognitive.

Büchel, F., & Hessels-Schlatter, C. (2001). Apprentissages cognitifs. In J.A. Rondal & A. Comblain (Eds.), *Manuel de psychologie des handicaps: sémiologie et principes de remédation* (pp. 49-80). Sprimont: Mardaga.

Caponi, B., Falco, G., Focchiatti, R., Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2006). *Didattica metacognitiva della matematica. Nuove prospettive e strumenti.* Trento: Erickson.

Cottini, L. (2006). *La didattica metacognitiva*. Disponibile in: http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/did_meta.pdf (consultato il 16.03.2018).

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*, Bellinzona: Ticino.

Doly, A. M. (1997). Métacognition et médiation à l'école. In M. Granceat & P. Meirieu (Eds.), *La métacognition, une aide au travail des élèves* (pp. 17-61). Parigi : ESF éditeur.

Hessels-Schlatter, C. (2010). Les jeux comme outils d'intervention métacognitive. In M. Hessels & C. Hessels-Schlatter (Eds.), *Évaluation et intervention auprès d'élèves en difficultés* (pp. 99-128). Peter Lang AG.

Leuba, E. (2013). *Je jeue, donc j'apprends!*. Disponibile in: http://doc.rero.ch/record/232406 (consultato il 16.02.2018).

Mazzoni, G. (1999). *Métaconnaissances et processus de contrôle*. In P. A. Doudin, D. Martin & O. Albanese (Eds.), Métacognition et éducation (pp. 69-98). Berna: Peter Lang.

Autori/Fania Coluccia* e Francesca Rosini°

*Scuola elementare di Losone – Svizzera

°Scuola elementare di Cadenazzo – Svizzera

fania.coluccia@edu.ti.ch, francesca.rosini@edu.ti.ch

Il Rally matematico e la cooperazione tra allievi di scuola elementare

Mathematical Rally and cooperation between elementary school students

Silvia Magnone
Scuola elementare di Castel San Pietro, Canton Ticino – Svizzera

Sunto / Le competenze trasversali, come sottolinea il *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015), rivestono un ruolo molto importante nel percorso scolastico degli allievi di scuola elementare e non solo. Nel presente contributo si espone un percorso didattico realizzato in un semestre scolastico in una quarta elementare, volto a sviluppare la cooperazione tra alunni attraverso il Rally Matematico Transalpino. Questo progetto mette in luce differenti aspetti legati alle competenze in gioco, cognitive e sociali e alla rivalutazione dei ruoli all'interno della classe.

Parole chiave: cooperazione; Rally Matematico Transalpino; competenze; osservazione; valutazione.

Abstract / The transversal competences, as underlined by the *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015), play a very important role in the school curriculum of elementary and non-primary students. In this work we present an experience realized in a scholastic semester in a fourth grade class, aimed at developing cooperation among pupils through RMT (Rally Matematico Transalpino). This project highlights different aspects related to cognitive and social competences, roles revaluation in the classroom.

Keywords: cooperation; Rally Matematico Transalpino; skills; observation; evaluation.

1 Introduzione

In questo articolo viene presentato un lavoro di diploma realizzato durante l'anno scolastico 2017/2018 in una quarta elementare di Castel San Pietro (Svizzera) composta da 16 alunni. Il lavoro di diploma aveva l'intento di valutare lo sviluppo della cooperazione tra allievi tramite un percorso didattico incentrato sul Rally Matematico Transalpino (RMT), che verte su un confronto tra classi basato sulla risoluzione di problemi matematici in un tempo limitato.

Il Rally matematico è nato in Svizzera nel 1992 per classi del secondo ciclo (dagli 8 ai 10 anni) e si è diffuso molto rapidamente anche in altre aree geografiche. A seguito di tale diffusione il Rally è diventato Rally Matematico Transalpino (RMT).[1] 1

Gli obiettivi del RMT sono i seguenti: risolvere problemi, lavorare in interazione, responsabilizzare il gruppo classe, esplicitare delle procedure di risoluzione e giustificare delle soluzioni (Grugnetti & Jaquet, 1999).

Come presentato nel diciannovesimo incontro internazionale dell'associazione Rally Transalpino, consultabile in Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT, 2015), l'esperienza del Rally porta con sé tre dimensioni dell'apprendimento: razionale, emotiva, sociale. Il RMT vede l'interazione tra ragione ed emozione con

1. Per maggiori informazioni si prenda visione del seguente link: http://www.armtint.org/.

un'attenzione sia alla disciplina, sia alle relazioni interpersonali. In questo senso esso lavora su un piano razionale e conscio e su uno emotivo e inconscio, inserendosi in questo modo in un'ottica di socio-costruttivismo.
Il confronto fra classi non è quindi da considerarsi in termini riduttivi, solo come una competizione, ma può assumere una più ampia valenza pedagogica e didattica tramite il costrutto delle competenze trasversali (DECS, 2015).
In questo percorso il RMT è stato proposto come occasione di lavoro condiviso; si è trattato dunque di un progetto di classe che ha comportato l'attivazione di tutti gli allievi, ognuno con le proprie competenze, le proprie fragilità e soprattutto i propri punti di forza, giungendo così anche a lavorare attraverso le identità competenti presenti in aula. È stato dunque un percorso sia cognitivo che sociale, legato all'apprendimento della matematica, al conflitto cognitivo, alle relazioni e a una pratica socio-costruttivista incentrata sulle teorie del *cooperative learning*.

2 Quadro teorico

2.1 Il *cooperative learning*

Prima di cominciare questo percorso è stato importante documentarsi sulle teorie che ruotano attorno ai lavori di gruppo, in modo da essere maggiormente consapevole, in qualità di docente, sulle possibili dinamiche relazionali che si sarebbero potute creare, ma anche della complessità di ciò che si chiede ai propri alunni. Per questa ragione si è approfondita la tematica del *cooperative learning*.

> «Il cooperative learning è (…) una teoria e un metodo da cui discendono un paradigma formativo e un insieme di tecniche di lavoro: si costituisce (…) come un insieme di principi educativi che (…) definiscono come gli studenti possono imparare gli uni dagli altri (…)».
> (Hijzen, Boekaerts & Vedder, 2006, citati da Cacciamani, 2008, p. 32)

Questa metodologia di lavoro, nata negli Stati Uniti negli anni Trenta e Quaranta del secolo scorso e diffusasi con successo dapprima negli Stati Uniti, poi in Canada, Israele, Olanda, Norvegia, Inghilterra e poi anche in Svizzera, stimola gli alunni a una crescita cognitiva e sociale, grazie al lavoro di gruppo, alla condivisione e alla conoscenza reciproca.
Il *cooperative learning* vede dunque nell'applicazione di tale metodologia una possibile educazione alle competenze trasversali, di tipo sociale.
La competenza[2] di un allievo compensa quella di un altro e ognuno ha modo di apportare il proprio contributo. 2
Ma che cos'è, in fondo, un gruppo? Un gruppo è un insieme di persone che condivide un obiettivo comune e fra le quali vi è una relazione di interdipendenza. Il lavoro di gruppo altro non è che il risultato dei prodotti di queste ultime, delle loro azioni e dei loro processi. Esso può esistere alla sola condizione che i suoi componenti lo riconoscano e, così, lo istituiscano.

2. Seguendo Comoglio (s.d.) «Le competenze sono definite (…) alla stregua di una combinazione di conoscenze, abilità e atteggiamenti appropriati al contesto» (p. 1).

Il gruppo è qualcosa di dinamico, luogo di scontro, confronto, in cui si costruisce la propria identità, una o più conoscenze, dove si verificano dei cambiamenti e si manifestano anche differenti emozioni. Kurt Lewin, esponente della Gestalttheorie, formula la teoria del campo e introduce il concetto di «gruppo come campo unitario dinamico i cui componenti sono in relazione di interdipendenza reciproca» (Dozza, 1993, p. 28). Il gruppo è per lui un fenomeno, un'unità, non solo una somma di fenomeni.
In questo senso l'apprendimento di gruppo rappresenta una strategia che ha come scopo finale quello di acquisire competenze cognitive e sociali. È dunque un percorso evolutivo, di progresso, che richiede una tempistica adeguata e uno sforzo da parte di chi è coinvolto. Per fare ciò sono importanti la conversazione, la discussione collettiva, il tipo di gruppo e l'aiuto reciproco. Quinn, Jannasch-Pennell e Rutherford (1995) sono d'accordo sull'importanza dell'ascolto, della gestione del conflitto e del problem solving per poter lavorare in maniera cooperativa (Cacciamani, 2008).
La cooperazione, inoltre, rende possibile la rimozione nel bambino di uno spiccato egocentrismo e la totale dipendenza dall'adulto.

2.2 Competenze trasversali e contesti di formazione generale

La competenza trasversale maggiormente implicata nel progetto, sebbene tutte siano inevitabilmente presenti, è stata sicuramente la collaborazione e, all'interno di essa, la cooperazione.
Le competenze sociali nel *cooperative learning* si suddividono tra quelle di base (fidarsi degli altri, conoscersi, accettarsi e sostenersi l'un l'altro, comunicare e risolvere i conflitti) e quelle di cooperazione in gruppo (competenze per la formazione e l'avvio del gruppo, di funzionamento, di apprendimento e di stimolo al processo metacognitivo).
Anche all'interno del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015) è messo bene in luce quanto siano importanti le relazioni a scuola, ma è altrettanto vero che la scuola è anche il luogo di costruzione di competenze disciplinari; pertanto, entrambi gli aspetti devono essere tenuti in conto, senza che uno sopraffaccia l'altro.
La definizione di collaborazione proposta dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015) è proprio «Sviluppare uno spirito cooperativo e le strategie necessarie per lavorare in gruppo» (p. 32). Vengono poi messe in luce soprattutto la condivisione degli scopi e l'organizzazione del lavoro, e la conseguente rilevanza che assume l'autostima e l'accettazione della diversità.
Anche nell'area dedicata all'insegnamento della matematica si legge che questa disciplina «è tenuta anche a contribuire a (…) favorire atteggiamenti adeguati per sviluppare forme di cooperazione e di integrazione sociale di cui oggi si avverte prepotentemente la necessità» (p. 139).
Collaborazione e cooperazione sono pertanto inscindibili, e sono entrambe importanti per l'insegnamento e l'apprendimento in ambito matematico.
Sempre citando il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015), la competenza trasversale della collaborazione «è collegata a tutti i processi cognitivi matematici», ossia *Comunicare e argomentare, Matematizzare e modellizzare, Esplorare e provare, Interpretare e riflettere sui risultati* (p. 164).
Il fatto che nel RMT si debba trovare un accordo con i compagni riguardo al modo di affrontare un problema e in seguito esplicitare il procedimento seguito coinvolge

la cooperazione e il confronto. Ma ciò prevede anche uno sviluppo personale, poiché l'allievo è chiamato a decentrarsi, ad autoregolarsi, a mettersi in discussione, a autovalutarsi e al tempo stesso a raggiungere una propria consapevolezza. Tutto ciò si lega imprescindibilmente al contesto di formazione generale di vivere assieme ed educazione alla cittadinanza, anch'esso previsto dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015, p. 50).

Come ricorda Liliana Dozza (1999), anche John Dewey (fondatore delle scuole attive, basate su una concezione comunitaria e democratica dell'educazione) sosteneva che «la scuola deve essere una comunità sociale, un "ambiente speciale" in cui l'individuo possa sperimentare l'essenza della democrazia, della cooperazione, della partecipazione» (p. 12). Come riscontrato da uno studio di Lewin, Lippitt e White del 1939, grazie a un clima democratico è più semplice sviluppare un senso di appartenenza al gruppo, condividere idee e soluzioni ed essere maggiormente produttivi. Nel loro piccolo gli allievi sperimentano una società democratica, nella quale non è il più forte a prevalere sul più debole, ma dove si cerca di trovare un accordo fra tutte le parti coinvolte, si aiuta l'altro, si domanda aiuto, si discute, si affrontano sfide insieme.

Il fatto che con il RMT si ridefiniscano i ruoli all'interno della classe, permette l'abolizione di alcune etichette che talvolta i compagni si attribuiscono a vicenda e promuove consapevolezza riguardo al fatto che tutti abbiano delle fragilità e dei punti di forza.

In quest'ottica il RMT può diventare un progetto per gli allievi, ma anche per i docenti, che possono così avvalersene per valutare per competenze, prestando attenzione alle strategie risolutive adottate, osservando i processi e le risorse cognitive messe in atto dai propri allievi. Ciò consente l'osservazione della propria classe con uno sguardo nuovo, differente, più consapevole e maggiormente aperto. I problemi proposti dal RMT offrono infatti la possibilità di giungere allo stesso risultato in differenti modi, dando così l'opportunità agli allievi di lavorare secondo il proprio livello, agendo dunque in maniera "naturalmente differenziata".

Nel lavoro di ricerca legato alla tesi di Bachelor dell'autrice[3] è stato analizzato, attraverso questionari quantitativi e qualitativi, se e come si sviluppa la cooperazione tra gli allievi attraverso il percorso didattico legato al RMT. Nell'**Allegato 1** sono riportati i dati raccolti alla fine del percorso, che mettono ben in evidenza lo sviluppo di una predilezione per il lavoro di gruppo rispetto a quello individuale. In questo articolo ci soffermeremo maggiormente su alcuni aspetti didattici emersi. 3

3 Il percorso

In base al regolamento del RMT (**Allegato 2**), nel mese di gennaio, l'associazione RMT (che dispone anche di un'interessante banca dati di problemi matematici: http://www.armtint.org/) invia alle classi iscritte il materiale per un primo allenamento. In seguito ci sono due prove ufficiali da superare (la prima a febbraio e la seconda ad aprile), ognuna delle quali prevede un punteggio di quattro punti per ogni proble-

3. Per maggiori informazioni si prenda visione del seguente link: http://tesi.supsi.ch/2107/

ma risolto correttamente. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di cinquanta minuti, durante i quali per la classe quarta sono previsti sei problemi matematici in ambiti differenti (tra geometria, grandezze e misure, algebra, equazioni, operazioni aritmetiche, funzioni e successioni ecc.). La classe è responsabile della propria organizzazione e dunque della suddivisione dei compiti al proprio interno. Il docente non può intervenire in alcun modo durante le prove.
Il fatto stesso che si tratti di una sfida matematica, e dunque di una vera e propria gara con classifica finale, stimola il coinvolgimento degli alunni e un notevole entusiasmo a partecipare. Entusiasmo che rappresenta il motore per effettuare un percorso su se stessi di consapevolezza del proprio lavoro, di riconoscimento del proprio sforzo, delle strategie attivate e del prezioso confronto con i compagni.

Il percorso didattico si è articolato come illustrato nella Tabella 1. Esso si basa su una successione costituita dalle fasi di: allenamento (o prova), discussione, correzione che si è perpetuata durante tutto il percorso, in modo da modificare di volta in volta il piano d'azione degli allievi, per affrontare al meglio i momenti di risoluzione dei problemi in gruppo e raggiungere una maggiore consapevolezza riguardo al ruolo della cooperazione nello svolgimento delle prove.

Data	Tipo di intervento	Durata
08.01.2018	Condivisione di senso e lancio della situazione problema	45 minuti
11.01.2018	Allenamento ufficiale inviato dall'associazione RMT	50 minuti
15.01.2018	Discussione di classe su aspetti positivi e negativi relativi al primo allenamento	45 minuti
18.01.2018	Correzione del primo allenamento	90 minuti
22.01.2018	Autovalutazione richiesta dagli allievi	20 minuti
01.02.2018	Allenamento con problemi scaricati dalla banca dati del RMT	50 minuti
08.02.2018	Correzione del secondo allenamento e bilancio di classe	60 minuti
19.02.2018	Prima prova ufficiale e bilancio di classe	90 minuti
01.03.2018	Correzione della prima prova	45 minuti
05.03.2018	Discussione su aspetti positivi e negativi dei vissuti precedenti e nuovo piano d'azione	45 minuti
08.03.2018	Allenamento con problemi scaricati dalla banca dati del RMT	50 minuti
15.03.2018	Correzione del terzo allenamento	45 minuti
22.03.2018	Bilancio iniziale e allenamento con problemi scaricati dalla banca dati del RMT	90 minuti
29.03.2018	Correzione del quarto allenamento	45 minuti
12.04.2018	Seconda prova ufficiale e bilancio di classe	90 minuti
26.04.2018	Correzione della seconda prova	45 minuti
30.04.2018	Bilancio di classe sull'esperienza del RMT	45 minuti

Tabella 1
Sviluppo del percorso didattico.

Il percorso didattico si è sviluppato a partire da una condivisione di senso della situazione problema: si è trattato di proporre la partecipazione al RMT e conseguentemente di richiedere agli allievi di strutturare un piano d'azione. Dopo una loro iniziale entusiastica accettazione a partecipare e la spiegazione del regolamento di gara, si è infatti domandato agli allievi come avrebbero potuto affrontare questa sfida matematica. Le loro proposte sono state annotate alla lavagna; si riportano di seguito le loro idee: «Creiamo 3-4 gruppi, ogni gruppo fa una scheda, chi finisce fa le altre e poi ci si aiuta/ci si mette insieme»; «Ci si aiuta nel gruppo e tra gruppi»; «Creiamo 6 gruppi (da 3 e da 2), ogni gruppo fa una scheda»; «A coppie (6) e 4 ragazzi girano per aiutare (almeno 2 forti)»; «Un ragazzo all'inizio legge a voce alta i problemi»; «Creiamo gruppi di livello (capacità simili)»; «Creiamo gruppi eterogenei (capacità diverse)»; «Mettiamo insieme ragazzi bravi in ambiti diversi (geometria, calcolo, …)»; «Man mano che si finisce si aiutano gli altri»; «Successivamente facciamo un'autovalutazione (personale e di classe)». Gli alunni hanno deciso di provare più alternative proposte, iniziando da quella a coppie con quattro compagni che fungevano da aiutanti. Quest'ultima proposta è stata infatti messa in atto nel primo allenamento inviato dall'associazione RMT, poiché gli alunni avevano il timore che il tempo non fosse sufficiente per risolvere tutti e sei i problemi. Hanno così sentito la necessità di avere degli aiutanti che potessero fornire un appoggio e un contributo a chiunque si trovasse in difficoltà. Successivamente gli allievi hanno considerato questa modalità poco efficace poiché gli aiutanti dovevano leggere e capire bene molti problemi ed era secondo loro più complesso rispetto a creare gruppi di lavoro più numerosi in partenza (3-4 membri per problema).

La stessa settimana gli allievi hanno svolto il primo allenamento (**Allegato 3**), grazie al quale è stato possibile effettuare una prima discussione di classe per condividere gli aspetti positivi e negativi emersi. Tali aspetti sono illustrati nella **Tabella 2** sottostante.

Aspetti positivi	Aspetti negativi
I compagni aiutano	Se qualcuno non ti aiuta
Aiutarsi a vicenda	Alcune schede difficili
Le schede finivano rapidamente	Alcuni compagni non collaboravano
L'organizzazione della classe dopo i primi 5 minuti	Alcuni compagni avevano bisogno di più aiuto
L'organizzazione generale nei gruppi	C'erano troppi gruppi e poche teste (coppie poco equilibrate)
	Gli aiutanti non collaboravano

Tabella 2
Aspetti positivi e negativi emersi dal primo allenamento.

Grazie al bilancio gli alunni si sono resi conto di non essersi confrontati a sufficienza, e che molti di loro, dopo aver terminato la propria parte, non hanno sfruttato il tempo restante per svolgere un altro problema, accontentandosi della risposta data dagli altri. Ciò è dipeso anche dalla convinzione di molti di loro che «non è gentile mettere in dubbio la soluzione degli altri» e che «bisogna fidarsi del gruppo che svolge il problema». Solo nel momento in cui sono stati corretti e discussi tutti i problemi gli allievi hanno voluto aggiungere, tra le regole scritte la prima volta, il fatto di confrontarsi e controllare i problemi svolti da altri gruppi, poiché «correggersi a vicenda non è maleducato se fatto con rispetto», bensì costruttivo in quanto fonte di insegnamento.

È stato inoltre molto utile per gli allievi proporre, a seguito di questo momento di discussione, una lezione dedicata alla correzione dei problemi del RMT del primo allenamento; in questo modo si sono potuti analizzare i problemi da un punto di vista prevalentemente disciplinare, in modo da far intuire agli allievi che per poter affrontare tali prove occorre una buona competenza disciplinare, e mostrando come la collaborazione risulti fondamentale per la risoluzione dei problemi del RMT.
Al termine della correzione è sorto dagli allievi il desiderio di poter eseguire un'autovalutazione delle loro competenze in ambito disciplinare, suddivisa secondo i diversi ambiti matematici che avrebbero poi affrontato nei problemi e secondo alcune competenze linguistiche, come comprendere il testo di un problema e formulare una risposta completa. La classe era infatti abituata ad autovalutarsi e a svolgere questa pratica con piacere, valorizzandone le ricadute. Si è così creata tutti insieme una bozza di autovalutazione alla lavagna, seguendo le indicazioni degli allievi. Ne è emerso lo schema riportato in **Tabella 3** che è stato utilizzato nelle lezioni seguenti.

	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono	Ottimo
Leggere e capire il problema					
Ambito numeri e calcolo					
Ambito geometrico					
Ambito grandezze e misure					
Esprimere (scrivendo) il procedimento svolto					

Tabella 3
Schema di autovalutazione realizzato con gli allievi.

Dopo la stesura della prima autovalutazione, la docente ha presentato una tabella riassuntiva delle varie autovalutazioni realizzate dai singoli allievi, in modo che tutta la classe, come richiesto da loro stessi, potesse riorganizzare i gruppi di lavoro sulla base delle competenze che essi stessi sentivano di avere. Questo strumento è stato usato dagli alunni al solo scopo di creare gruppi di lavoro che hanno reputato omogenei, con allievi più forti e altri più fragili all'interno dello stesso gruppo. Per realizzare tale suddivisione, non hanno però osservato in quale ambito ogni allievo si dichiarasse forte o fragile, hanno solamente guardato i gradi di competenza senza tener in considerazione le righe riguardanti gli ambiti.

Tali scelte strategiche effettuate dagli allievi sembrano essere state funzionali a raggiungere una migliore prestazione. Infatti, nell'allenamento sono passati da 6 punti su 24 (primo allenamento) a 15 punti su 24 (secondo allenamento). Durante il bilancio del 08.02.2018, gli alunni hanno affermato che nel secondo allenamento i gruppi erano più equilibrati, hanno collaborato meglio e si sono aiutati maggiormente. Per questa ragione gli allievi hanno deciso di mantenere la stessa organizzazione per la prima prova ufficiale del 19.02.2018 (i problemi delle due prove possono essere consultati nell'**Allegato 4** e nell'**Allegato 5**).
Quest'ultima ha dato quasi lo stesso esito del secondo allenamento (14 punti su 24). Ciò che è emerso dal bilancio è stato che gli allievi hanno provato molta ansia, dovuta soprattutto alla presenza della direttrice come supervisore della prova. Tra gli aspetti interessanti emersi dal bilancio successivo vi sono l'importanza dell'ascolto e della presa in considerazione del pensiero altrui; aspetti che gli allievi hanno evidenziato come particolarmente importanti per la risoluzione dei problemi, proprio poiché si tratta di un lavoro di gruppo.
Da questo punto di vista un episodio è risultato emblematico: un allievo ha risolto un problema correttamente, utilizzando schemi risolutivi interessanti e matematicamente corretti, ma la sua proposta non è stata presa in considerazione, poiché le altre due compagne del gruppo, ritenute più "forti" disciplinarmente di lui, avevano scelto un'altra risposta, che successivamente è risultata errata.
In particolare, gli allievi hanno sottolineato l'importanza della gentilezza nel momento in cui ci si confronta con i compagni, così come il peso negativo che ha l'egoismo o la prepotenza in questi momenti di risoluzione (vedi **Tabella 4**).

Problemi	Soluzioni
Alcuni compagni non ascoltano	Ascoltare tutti
Prepotenza	Essere gentili, NO egoismo
Aiutanti non funzionano	Non mettere gli aiutanti
Tipologia gruppi da rivedere	Formare nuovi gruppi

Tabella 4
Bilancio degli allievi prima del terzo allenamento.

Tutti gli allievi hanno dimostrato di volersi impegnare per migliorare, cercando di ascoltarsi maggiormente, poiché hanno rilevato come l'ascolto non fosse sempre presente all'interno dei gruppi. Hanno così iniziato a rivalutarsi e hanno anche proposto di sperimentare una nuova modalità nell'allenamento successivo, sperimentando gruppi da tre allievi, con altri quattro che fungevano da "controllori" delle soluzioni proposte.

Nel terzo allenamento i ragazzi hanno totalizzato 13 punti su 24. I "controllori", nel momento in cui gli altri svolgevano i problemi, si sono trovati senza far nulla, motivo per il quale hanno iniziato comunque a risolvere qualche problema, aspetto che si è rivelato essenziale per la riuscita. Da sottolineare il fatto che, dopo questo allenamento, gli alunni hanno affermato più volte come sia importante formare gruppi funzionali alla risoluzione dei problemi e non solo creati in base alle amicizie, e come sia importante collaborare con tutti per riuscire al meglio in questa sfida di classe.

4 Aspetti disciplinari

Nonostante il lavoro di diploma si sia focalizzato sulla cooperazione, sono stati molto approfonditi anche gli aspetti prettamente disciplinari, dunque matematici, soprattutto durante i momenti di bilancio e di correzione durante i quali si sono affinate le strategie adottate.
Si è potuto registrare infatti anche un notevole miglioramento del punteggio nei vari allenamenti e prove, come mostra la **Figura 1**, derivante da un approfondimento di tutti gli aspetti, sia disciplinari sia relazionali/sociali. Nel primo allenamento gli allievi hanno totalizzato 6 punti su 24, nel secondo 15 su 24, nella prima prova 14 punti su 24, nel terzo allenamento 14 su 24, nel quarto 18 su 24 e nella seconda prova 20 su 24.

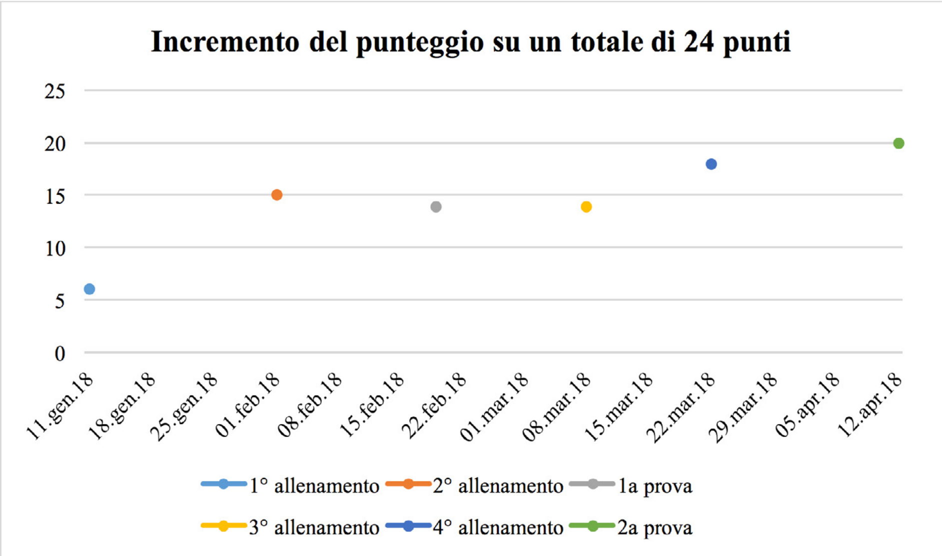


Figura 1
Incremento del punteggio negli allenamenti e nelle prove del RMT durante il percorso didattico.

Dal punto di vista disciplinare, i momenti dedicati alle correzioni sono stati utili anche perché non tutti gli alunni negli allenamenti o nelle prove hanno avuto modo di visionare tutti i problemi. In questa fase, infatti, la classe ha potuto riflettere su tutta la prova: chi ha risolto un dato problema durante il RMT ha potuto spiegare ai propri compagni come ha ragionato, quali strategie ha adottato e quali difficoltà ha incontrato, e gli altri hanno potuto dire che scelte avrebbero fatto. Le correzioni si sono svolte a grande gruppo, con un momento iniziale dedicato alla lettura di ogni singolo problema da parte di ciascun alunno. Dopo un'attenta lettura del testo ognuno poteva evidenziare gli elementi del problema che riteneva importanti. Successivamente ciascuno poteva suggerire una modalità risolutiva, realizzando prove alla lavagna o tramite retro-proiettore e confrontandosi l'uno con l'altro. In questo modo, oltre ad attivare un momento di tutoring fra pari (aspetto che ha permeato tutto il percorso con il RMT), si è messa in campo anche la competenza comunicativa, in quanto gli alunni hanno verbalizzato il procedimento risolutivo scelto. Frequenti sono state frasi come «È vero, ci si poteva arrivare anche così», «Così era molto più semplice», «Ci siamo complicati la vita inutilmente!».
Non sono stati però rari i casi in cui gli allievi si sono trovati in difficoltà nel momento

in cui hanno dovuto spiegare alla classe come avevano fatto per risolvere un problema. Alcune volte è capitato che l'allievo fosse sicuro del proprio ragionamento e spiegasse con le proprie parole quanto svolto, ma i compagni affermavano: «Non abbiamo capito nulla». Effettivamente il RMT è molto legato anche all'ambito linguistico, infatti, oltre a comprendere bene il testo del problema, bisogna anche fornire una risposta completa che indichi precisamente il ragionamento svolto. Come si può leggere nei problemi nell'**Allegato 4** e nell'**Allegato 5** è infatti sempre richiesta una motivazione circa il procedimento e il ragionamento svolto. I momenti dedicati alla correzione sono stati anche occasione per il docente di dare il proprio contributo. In questi frangenti infatti è stato importante sottolineare l'importanza di leggere bene il testo del problema e selezionare le parti rilevanti per la comprensione e la risoluzione del problema; chiedere come organizzare le informazioni raccolte; suggerire l'uso di materiale concreto, tabelle, fogli quadrettati ecc.; fornire qualche procedimento alternativo risolutivo e istituzionalizzare alcune scoperte avvenute.
Le correzioni si sono rivelate importanti anche per recuperare alcuni aspetti matematici poco chiari o colmare lacune di alcuni allievi, rafforzando così il singolo anche tramite l'aiuto del gruppo.

5 Aspetti di competenza

Il RMT si è rivelato anche un ottimo strumento per attivare risorse e processi cognitivi matematici. La risoluzione di problemi implica la comprensione del testo e di concetti matematici ad esso collegato. Bisogna dunque riconoscere questi concetti, comprenderli e conseguentemente metterli in relazione con una procedura risolutiva. Gli alunni ad un certo punto hanno capito che se utilizzavano un po' più di tempo nella comprensione di quanto chiesto loro, riuscivano a trovare strumenti più adeguati per la risoluzione e l'esecuzione risultava di conseguenza più rapida ed efficace.
Nella **Figura 2** si possono osservare gli allievi mentre si aiutano con cubetti di legno per la riproduzione nel reale della configurazione rappresentata nella traccia del problema di geometria solida «Giochi con i cubetti» (**Figura 3**).

Figura 2
Gli allievi che utilizzano materiale concreto per la comprensione e la risoluzione di un problema.

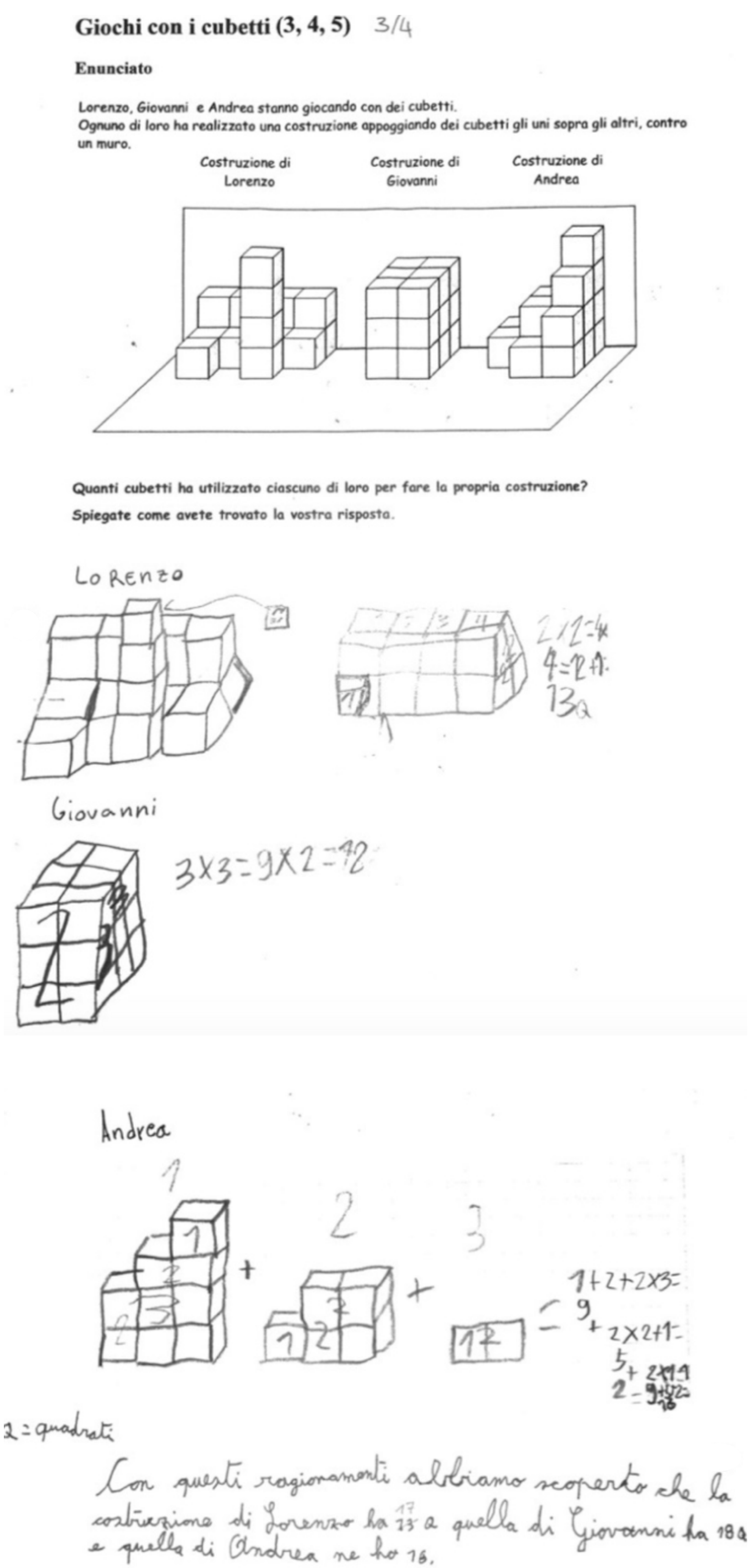


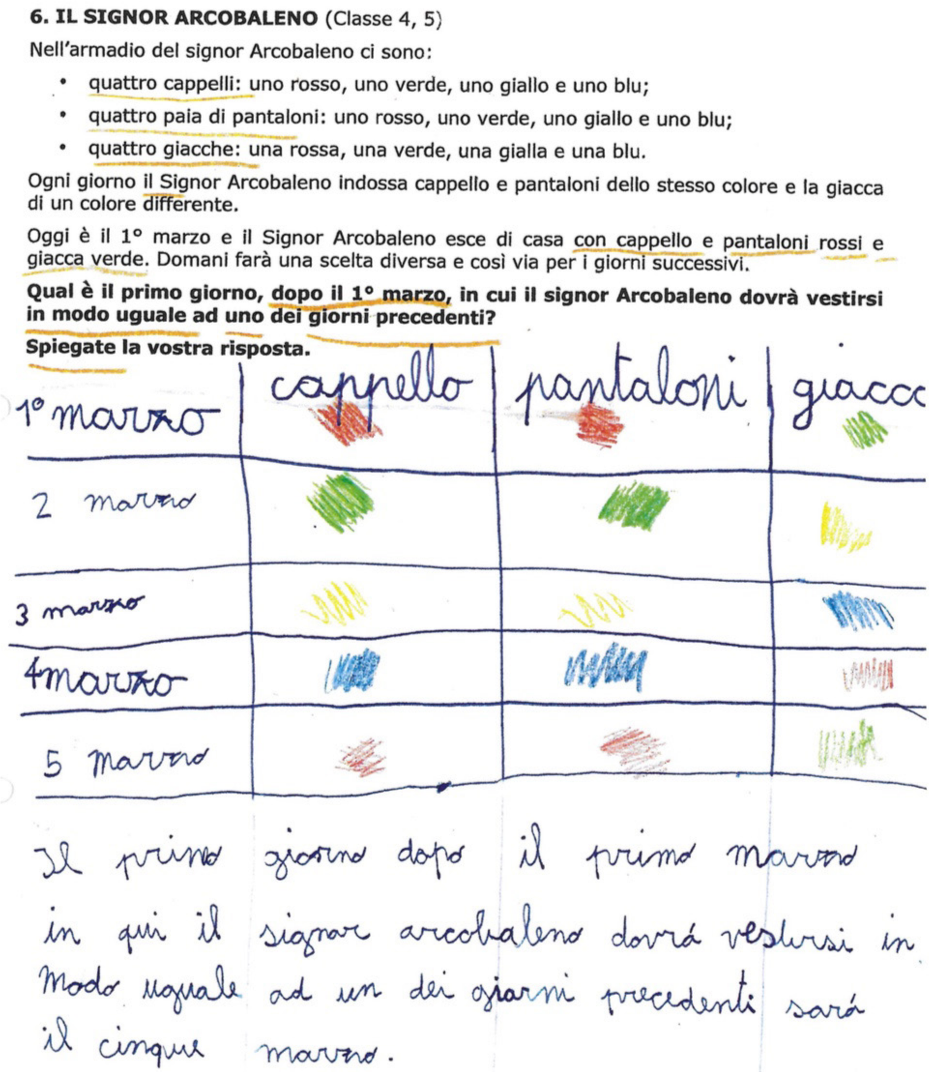
Figura 3
Problema di geometria: «Giochi con i cubetti».

In situazioni aperte come quelle offerte dal RMT caratterizzate dalla possibilità di giungere allo stesso risultato in modi diversi, i processi relativi all'esplorare, provare e procedere per tentativi sono assai stimolati. Questi processi risultano funzionali a prendere coscienza delle diverse rappresentazioni semiotiche relative ad uno stesso oggetto matematico, allo scopo da un lato di individuare quella più efficace per la risoluzione, dall'altro di ricercare una strategia risolutiva personale e sviluppare così un approccio personale alla materia, stimolando un'attitudine positiva nei confronti della matematica.

Ciò è emerso soprattutto nei problemi di combinatoria. In questi casi è stato interessante osservare quali tentativi hanno messo in atto gli allievi e come l'errore sia stato occasione di comprensione, di crescita, di confronto. L'errore in questi casi non veniva corretto dall'insegnante, ma sono stati i personali tentativi a dir loro quale era la strada giusta da percorrere.

Vale la pena fare alcune considerazioni a proposito del caso già discusso in precedenza, relativo a ciò che è avvenuto in un gruppo di lavoro di tre allievi durante la prima prova ufficiale. Il gruppo era composto da due allieve, considerate tra le più brave della classe in matematica, e un allievo. Il problema che risolvevano, intitolato «Il Signor Arcobaleno» (Figura 4), richiedeva di trovare il maggior numero possibile di combinazioni di abiti per il Signor Arcobaleno. I tre allievi hanno discusso per diverso tempo poiché l'allievo affermava che avrebbero potuto aiutarsi con una tabella, mentre le due compagne dicevano che bastava fare una proposta. Al termine della discussione, hanno accettato di aiutarsi con una tabella, ma le due ragazze hanno deciso di inserire in quest'ultima la loro idea iniziale, ovvero una proposta casuale di cinque possibili combinazioni, motivando al compagno che erano due contro uno e dunque la maggioranza vinceva, e consegnando infine una risposta erronea. L'allievo, un po' sconsolato per il verdetto finale, ma risoluto circa la sua idea, ha proseguito il proprio ragionamento, svolgendo una tabella completa e corretta alla lavagna, con tutte le combinazioni possibili.

Durante la correzione a grande gruppo è emerso che l'allievo aveva dato la risoluzione corretta, ma le ragazze avevano consegnato la loro come risposta ufficiale, ottenendo così 0 punti in questo problema. Questa vicenda ha fatto riflettere tutta la classe anche per quanto concerne i ruoli all'interno del gruppo.



6. IL SIGNOR ARCOBALENO (Classe 4, 5)

Nell'armadio del signor Arcobaleno ci sono:

- quattro cappelli: uno rosso, uno verde, uno giallo e uno blu;
- quattro paia di pantaloni: uno rosso, uno verde, uno giallo e uno blu;
- quattro giacche: una rossa, una verde, una gialla e una blu.

Ogni giorno il Signor Arcobaleno indossa cappello e pantaloni dello stesso colore e la giacca di un colore differente.

Oggi è il 1° marzo e il Signor Arcobaleno esce di casa con cappello e pantaloni rossi e giacca verde. Domani farà una scelta diversa e così via per i giorni successivi.

Qual è il primo giorno, dopo il 1° marzo, in cui il signor Arcobaleno dovrà vestirsi in modo uguale ad uno dei giorni precedenti?

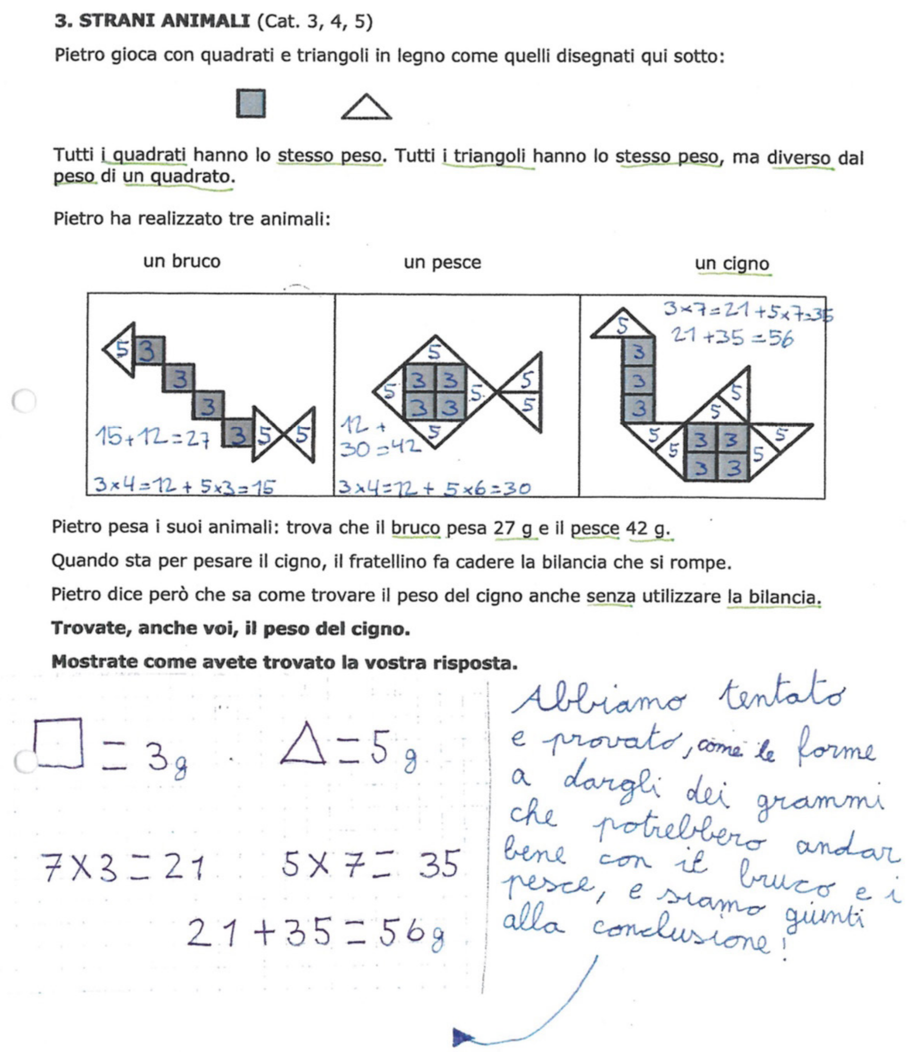
Spiegate la vostra risposta.

	cappello	pantaloni	giacca
1° marzo			
2 marzo			
3 marzo			
4 marzo			
5 marzo			

Il primo giorno dopo il primo marzo in qui il signor arcobaleno dovrá vestirsi in modo uguale ad un dei giarni precedenti sará il cinque marzo.

Figura 4
Un esempio di risoluzione del problema di combinatoria «Il Signor Arcobaleno».

Un altro esempio ben riuscito e ben impostato che ribadisce l'importanza del processo cognitivo *Esplorare e provare*, è il problema «Strani animali» illustrato nella Figura 5, relativo alla seconda prova ufficiale. In questo caso gli allievi stessi nella risposta al problema esplicitano il fatto che hanno «tentato e provato» per giungere poi alla soluzione.



3. STRANI ANIMALI (Cat. 3, 4, 5)

Pietro gioca con quadrati e triangoli in legno come quelli disegnati qui sotto:

Tutti i quadrati hanno lo stesso peso. Tutti i triangoli hanno lo stesso peso, ma diverso dal peso di un quadrato.

Pietro ha realizzato tre animali:

Pietro pesa i suoi animali: trova che il bruco pesa 27 g e il pesce 42 g.

Quando sta per pesare il cigno, il fratellino fa cadere la bilancia che si rompe.

Pietro dice però che sa come trovare il peso del cigno anche senza utilizzare la bilancia.

Trovate, anche voi, il peso del cigno.

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

□ = 3g △ = 5g

7X3 = 21 5X7 = 35

21+35 = 56g

Abbiamo tentato e provato, come le forme a dargli dei grammi che potrebbero andar bene con il pesce, e il bruco e i siamo giunti alla conclusione!

Figura 5
Esempio di risoluzione del problema «Strani animali».

Anche il processo cognitivo *Matematizzare e modellizzare* è fortemente presente nella risoluzione dei problemi del RMT. Un esempio molto interessante di matematizzazione è quello illustrato nella Figura 6, tratto sempre dalla seconda prova del RMT, in cui gli allievi hanno impostato una vera e propria equazione (suggerita già dal problema) inserendo man mano i dati trovati.

6. IL BAULE DI MATT E MATIC (Cat. 4, 5)

In un angolo del loro solaio, Matt e Matic trovano un messaggio vicino ad un baule chiuso da un lucchetto come questo:

Ecco cosa vi leggono:

Questo baule è protetto da un lucchetto a codice che blocca il sistema di apertura.

Per aprirlo, dovete sostituire le lettere A, B, C, D, E con numeri di una sola cifra, tutti diversi che rispettano le seguenti uguaglianze:

$A = C - 4$
$B = A + 2$
$D = C : 4$
$E = A + C - 3$

A voi aprire il baule!

Maestro Geo

Qual è il codice segreto per aprire il baule?
Spiegate come lo avete trovato.

$A = 4$ $\qquad \overset{4}{A} = \overset{8}{C} - 4 = 4$

$B = 6$ $\qquad \overset{6}{B} = \overset{4}{A} + 2 = 6$

$C = 8$ $\qquad \overset{2}{D} = \overset{8}{C} : 4 = 2$

$D = 2$ $\qquad \overset{2}{E} = \overset{4}{A} + \overset{8}{C} - 3 = 9$

$E = 9$

La combinazione è 4-6-8-2-9

Figura 6
Esempio di risoluzione del problema «Il baule di Matt e Matic».

I problemi proposti dal RMT portano gli alunni anche a mobilitare il processo *Interpretare e riflettere sui risultati*, poiché è necessario essere critici, mettere in dubbio la propria soluzione o quella dei compagni, confrontarsi e giungere a una soluzione condivisa sulla base di elementi oggettivi e veridicità matematiche piuttosto che relazionali, legate alle amicizie. Nella **Figura 7**, due allieve si confrontano sui risultati ottenuti in un problema, mostrando e spiegando il proprio procedimento per valutare poi la strategia migliore da adottare e giungendo così ad una scelta ponderata e condivisa.

Figura 7
Il confronto fra due allieve e la riflessione circa la strategia risolutiva da adottare.

6 Conclusioni

Per quanto concerne la professione di docente di scuola elementare, questo percorso ha consentito di valutare l'importanza di sviluppare alcune competenze trasversali descritte nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015). Esse possono essere attivate grazie ad esperienze incentrate sulle diverse discipline e il percorso con il RMT ne è un valido esempio. È importante che processi cognitivi e competenze sociali possano svilupparsi in sinergia, per far vivere agli allievi la possibilità di sperimentare già in classe gli aspetti di una società democratica. Il RMT ha consentito a questi allievi la possibilità di testare l'efficacia della collaborazione e di viverla in maniera positiva, come aiuto, come risorsa e come occasione per scoprire se stessi, con i propri punti di forza e di fragilità. Questa esperienza didattica è stata estremamente significativa sia per il docente sia per gli allievi: si cresce insieme, si cambia, ci si ritrova. Al docente viene offerta l'opportunità di farsi da parte, di osservare e di ascoltare la voce dei propri allievi, i loro pensieri, le loro strategie. In questo modo si può valutare per competenze, andando oltre le semplici conoscenze nozionistiche. Agli allievi viene data la possibilità di essere i protagonisti indiscussi, di far emergere le proprie idee, di mettersi in gioco, di divertirsi con la matematica e di confrontarsi con gli altri. Il RMT ha consentito di lavorare in maniera aperta per quanto riguarda la risoluzione di problemi matematici; si è ritenuto assai utile approfondire con gli allievi sia gli aspetti disciplinari sia quelli relazionali/sociali, entrambi fondamentali per lo sviluppo di competenza.

Tali considerazioni sono supportate dalle seguenti frasi, scritte dagli allievi al termine di questo progetto: «Io penso che non siamo migliorati solo in matematica ma anche a ragionare meglio, a discutere trovando una soluzione»; «Con il Rally ho imparato che nella mia classe non sono l'unica, ma ho delle persone che mi stanno accanto e mi aiutano (…)»; «È stata un'avventura un po' particolare: bella, divertente, istruttiva, giocosa, e di amicizia nel senso che mi ha fatto imparare che non solo i miei amici sanno fare le cose!»; «Ripensando alla prima prova abbiamo fatto molti progressi su: lavoro di gruppo e matematica».

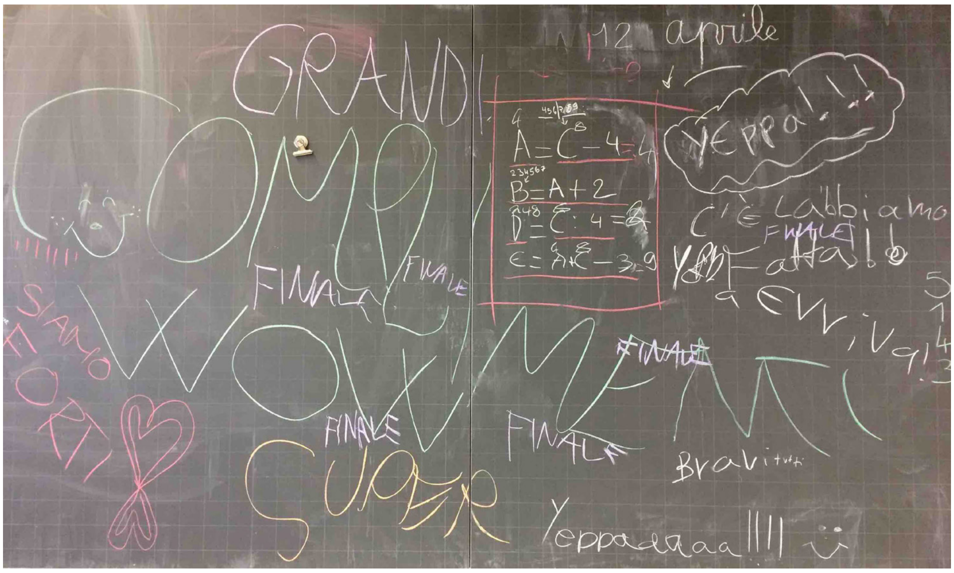


Figura 8
La lavagna decorata dagli allievi al termine della seconda prova ufficiale del RMT.

Bibliografia

Abrami, P. C., Chambers, B., Poulsen, C., De Simone, C., D'Apollonia, S., & Howden, J. (1996). *L'apprentissage coopératif. Théories, méthodes, activités*. Montréal: Cheneliére éducation.

Anzieu, D., & Martin, J. Y. (1990). *Dinamica dei piccoli gruppi.* Milano: Borla.

Association Rallye Mathématique Transalpin (2015, 23, 24, 25 ottobre). 19° incontro internazionale ARMT. Presentazione Sedilo Pesci – Polo (consultato il 23.01.2018).

Cacciamani, S. (2008). *Imparare cooperando. Dal cooperative learning alle comunità di ricerca.* Roma: Carocci.

Comoglio, M. (s.d.). *Insegnare e valutare competenze*. Disponibile in http://www.fermimn.gov.it/formazione/materiali/comoglio_insegnare-e-valutare-competenze.pdf. (consultato il 09.12.2017).

Comoglio, M., & Cardoso, M. A. (1996). *Insegnare e apprendere in gruppo*. Roma: LAS.

Comoglio, M. (2000). *Educare insegnando. Apprendere ad applicare il cooperative learning*. Roma: LAS.

DECS. (2015). *Piani di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Lugano: Società d'arti grafiche già Veladini & co SA.

Dozza, L. (1999). *Il lavoro di gruppo tra relazione e conoscenza*. Firenze: La Nuova Italia.

Dozza, L. (2006). *Relazioni cooperative a scuola, Il «lievito» e gli «ingredienti»*. Trento: Edizioni Erickson.

Grugnetti, L., & Jaquet, F. (Eds.). (1999). *Le Rally mathématique transalpin. Quels profits pour la didactique?* Bologna: Pitagora.

Jaquet, F. (A cura di). (2011). *Editoriale. La Gazzetta di Transalpino. N° 1*. Disponibile in: www.armtint.org (consultato il 23.01.2018).

Johnson, D.W., Johnson, R.T., & Holubec, E.J. (2015). *Apprendimento cooperativo in classe. Migliorare il clima emotivo e il rendimento. (2a ed.).* Trento: Edizioni Erickson.

Pontecorvo, C., Ajello, A. M., & Zucchermaglio, C. (1995). *Discutendo si impara. Interazione sociale e conoscenza a scuola. (4a ed.)*. Roma: La Nuova Italia Scientifica.

Stelli, L. (2012). C'è problema e…problema. La Gazzetta di Transalpino. N° 2. Disponibile in www.armtint.org (consultato il 23.01.2018).

Tardif, J. (2006). *L'évaluation des compétences: documenter le parcours de développement*. Montréal: Cheneliére éducation.

Telatin, G. (2013). Uso dei problemi del RMT in classe. La Gazzetta di Transalpino. N° 3. Disponibile in www.armtint.org (consultato il 23.01.2018).

Autore/Silvia Magnone
Scuola elementare di Castel San Pietro, Canton Ticino – Svizzera
silvia.magnone89@gmail.com

Algoritmi spontanei in classi multiculturali

Spontaneous algorithms in multicultural classes

Giovanni Giuseppe Nicosia
Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica, Bologna – Italia

ESPERIENZA DIDATTICA

Sunto / Si presenta una lettura delle proposte spontanee per algoritmi aritmetici fornite da studenti provenienti da famiglie di cultura italiana o non italiana. Tali algoritmi vengono poi usati in un'attività etnomatematica mirata a costruire un sapere matematico interculturale a disposizione di tutti. La teoria del contratto didattico di Brousseau in tale contesto si rivela un utilissimo quadro di riferimento.

Parole chiave: algoritmi; classi multiculturali; cultura familiare; etnomatematica; contratto didattico.

Abstract / This is the report of an attempt to understand spontaneous proposals for arithmetic algorithms coming from students with Italian and non Italian family background in Italian school. These algorithms are then used in an ethnomathematical activity aimed at constructing a cross-cultural mathematic knowledge available to everybody. Brousseau's didactic contract is found to be an useful framework.

Keywords: algorithms; multicultural class; family background; ethnomathematics; didactic contract.

1 Da una diversità interna a classi internazionali e multiculturali

Negli ultimi venticinque anni i processi di globalizzazione e i flussi migratori hanno cambiato significativamente la composizione culturale della scuola italiana. Nei primi anni novanta le classi erano piene di studenti che parlavano una stupefacente varietà di dialetti e lingue e credevano in alcuni diversi sistemi valoriali, ma la larghissima maggioranza apparteneva a comunità con antiche radici in Italia. C'erano alcuni studenti di cittadinanza non italiana, e tra loro alcuni che avevano anche una diversa cultura di riferimento, ma il loro numero totale nel 1997 si aggirava attorno alle 50.000 unità. Si trattava prevalentemente di studenti eritrei o della riva meridionale del Mediterraneo, provenienti da paesi con particolari legami storici col nostro paese. Dopo una decina di anni di rapidissima crescita dei flussi migratori dal Marocco, dai paesi dell'Europa Orientale (in special modo Romania, Albania e Ucraina), dalla Cina e da molti altri paesi, nel 2007 il MIUR censiva più di 500.000 studenti di cittadinanza non italiana nel nostro sistema scolastico infrauniversitario (contando anche la scuola dell'infanzia). Nel 2012 il numero era salito a 786.630, cioè l'8,8% del totale degli studenti del sistema (Colombo & Ongini, 2014).
La maggior parte degli studenti di cittadinanza non italiana che troviamo oggi nelle scuole italiane è nata in Italia da genitori stranieri. Si tratta quindi di giovani membri delle comunità locali, in special modo nei piccoli centri e nelle periferie delle città maggiori, appartenenti a culture storicamente diverse da quella italiana. Sono nuove identità culturali che fanno da cerniera tra visioni, aspettative e sistemi di valori, non senza conflitti interiori e relazionali. Molti di loro non hanno visto il paese d'origine dei genitori se non durante brevi vacanze ed hanno una complessa varietà di atteg-

giamenti in relazione ai valori familiari.
La grande maggioranza degli studenti di cittadinanza non italiana nella scuola secondaria di secondo grado italiana frequenta scuole professionali o tecniche statali costituite da una grande varietà di corsi quinquennali. A volte la loro formazione viene dirottata, al compimento dell'età legale, presso istituti di formazione professionale gestiti da enti pubblici e privati in collaborazione con gli enti locali, che erogano corsi triennali di qualifica in diversi campi.
Gli obiettivi più diffusi sembrano essere quelli di una qualificazione che consenta un rapido accesso al lavoro. Una delle cause di tale afflusso verso scuole professionalizzanti è la posizione sociale delle famiglie, che hanno spesso il lavoro ed il salario come bisogno ed orizzonte immediato. Un'altra causa è lo stile retorico-testuale della didattica più diffusa nella scuola italiana, consistente in lezioni frontali, spiegazioni orali, letture e testi da memorizzare e ripetere, riassunti, scrittura di testi, esercizi ripetitivi, grande rilevanza attribuita all'esposizione orale (tipicamente nell'interrogazione) e scritta, e lo scarso rilievo delle esperienze laboratoriali. Tale modello, improntato dunque ad un massiccio uso di strumenti linguistici, limita in modo evidente l'accesso di studenti stranieri ad una formazione classica o scientifica che non è aprioristicamente preclusa a studenti di madrelingua italiana. Questo modello risale alla filosofia idealistica che caratterizzava il quadro teorico dei fondatori della scuola italiana, nei primi decenni del secolo XX, e persiste ancora oggi nonostante le obiezioni della ricerca pedagogica e didattica.
Le classi degli istituti professionali sono, così, comunità variegatissime in cui si incontrano tante lingue, culture e modi di vedere. Secondo le ipotesi fondamentali dell'etnomatematica, studio scientifico delle matematiche prodotte dai diversi gruppi socioculturali (D'Ambrosio, 2001), la cultura familiare e l'esperienza scolastica precedente offrono ai nostri studenti schemi e modelli per analizzare e organizzare nelle loro menti le conoscenze, i concetti e le procedure che dovrebbero apprendere nell'educazione formale. Le aspettative di studenti e famiglie e le loro convinzioni sulla scuola, sui processi educativi (incluse la didattica ed i sistemi di apprendimento) e sulla matematica stessa danno un quadro ideale per sistematizzare idee intuitive e congetture provenienti dal contesto di vita reale e dalle proposte scolastiche.
In questa visione l'insegnante che abbia a che fare con classi multiculturali, come appunto accade oggi nelle scuole secondarie tecniche e professionali in Italia, potrebbe essere interessato alle proposte spontanee di concetti e procedure che emergono dagli studenti o da competenze apprese al di fuori della scuola, al fine di valorizzarle nell'azione didattica e identificare eventuali misconcezioni e modelli parassiti da far evolvere.

2 Gli studenti e lo strumento di indagine

Nell'anno scolastico 2007 una scheda contenente operazioni aritmetiche venne proposta ad un campione di 50 studenti appartenenti a due classi prime di un istituto professionale meccanico ed elettronico di Bologna (Italia settentrionale). Tali dati non sono mai stati analizzati prima d'ora, ma possono risultare interessanti anche alla luce di un confronto con indagini analoghe attuali.
Gli studenti avevano 13 o 14 anni. 25 di loro provenivano da famiglie italiane, 25 da famiglie immigrate (6 dalle Filippine, 5 dal Marocco, 4 dalla Romania, 2 dal Ban-

gladesh, 2 dall'Eritrea, 2 dalla Tunisia, 1 da Capo Verde, 1 dall'India, 1 dalla Polonia, 1 dallo Sri Lanka). 16 di questi ultimi avevano studiato in scuole italiane almeno nei precedenti 3 anni mentre 9 erano "NAI" (Neo arrivati in Italia), con grandi problemi linguistici e uno status particolare (potevano seguire corsi di lingua speciali e venivano sottoposti ad una valutazione biennale) ai sensi di un'apposita legge (DPR 394/1999). La maggior parte dei 25 studenti "immigrati" viveva in piccoli comuni di montagna o nel territorio e aveva esperienze lavorative nell'allevamento, nel commercio o nell'artigianato.
La maggior parte degli studenti "italiani" era costituita da migranti interni provenienti dalle regioni meridionali, soprattutto Puglia, Campania e Sicilia.
Molti di questi studenti presentavano inoltre problemi specifici di apprendimento, DSA, disabilità o difficoltà socio-economiche, cosa del resto diffusissima in quella scuola.
La scheda venne proposta nel novembre 2007, dopo un mese e mezzo dall'inizio delle lezioni e consisteva in 5 operazioni. La consegna era "Calcola nel modo che preferisci queste operazioni: 152 + 37; 341 – 73; 137 × 12; 105 : 15; 231 : 23". Questi numeri erano stati scelti in modo da sfavorire il ricorso al calcolo mentale, per far sì che gli studenti usassero algoritmi scritti.
Nella scheda erano poi presenti due domande a risposta chiusa che miravano a determinare il loro atteggiamento nei confronti della materia e il loro senso di autoefficacia: "Ti piace la matematica?", "Sei bravo in matematica?". Si trattava di domande chiuse, che non richiedevano ulteriori motivazioni, dato che quest'ultime avrebbero necessitato di competenze linguistiche maggiori rispetto a quelle possedute dagli allievi.
Gli insegnanti assicurarono oralmente che non si trattava di una verifica con valutazione, quindi gli studenti erano liberi di scrivere ciò che realmente pensavano e sentivano. L'unica richiesta è stata di scrivere ogni passaggio per far capire come facevano i calcoli.
L'obiettivo era quello di riconoscere un eventuale uso di algoritmi il più possibile spontanei tratti dal contesto familiare o dall'esperienza scolastica precedente e ricercare qualche correlazione con atteggiamenti positivi o negativi nei confronti della materia.

3 Le aspettative e i risultati

Si prevedeva che non si sarebbero rilevate significative differenze negli algoritmi di addizione e sottrazione, ma che se ne sarebbero notate molte nelle moltiplicazioni e divisioni.
Un'altra ipotesi era che i 25 studenti di famiglia italiana avrebbero usato gli algoritmi usualmente insegnati nella scuola locale, mentre i 9 appena arrivati in Italia avrebbero prodotto qualcosa di diverso, derivato dal loro contesto culturale d'origine; infine i 16 studenti di famiglia di cultura non italiana ma che avevano studiato in Italia avrebbero potuto scegliere tra le proposte della cultura familiare e gli algoritmi studiati a scuola.
Vediamo nella Tabella 1 che cosa è emerso dall'analisi dei risultati della prima operazione proposta: 125 + 37:

Operazione 1: 125 + 37	Usa l'algoritmo insegnato in Italia	Usa altri algoritmi	Scrive solo il risultato	Non calcola	Errori
Famiglia italiana	15 (30%)	0	10 (20%)	0	1 (2%)
Famiglia non italiana ma studi in Italia	12 (24%)	0	3 (6%)	1 (2%)	0
Appena arrivati	8 (16%)	0	1 (2%)	0	1 (2%)
TOTALI	35 (70%)	0	14 (28%)	1 (2%)	2 (4%)

Tabella 1
Risultati ottenuti dall'operazione 125 + 37.

Per l'addizione nessuno studente ha usato algoritmi diversi da quello insegnato usualmente in Italia. Si noti che molti studenti (il 28%) non mostrano l'algoritmo utilizzato.

Vediamo i risultati ottenuti per la sottrazione 341 - 43 (Tabella 2):

Operazione 2: 341 – 43	Usa l'algoritmo insegnato in Italia	Usa altri algoritmi	Scrive solo il risultato	Non calcola	Errori
Famiglia italiana	15 (30%)	0	10 (20%)	0	15 (30%)
Famiglia non italiana ma studi in Italia	11 (22%)	0	4 (8%)	1 (2%)	11 (22%)
Appena arrivati	7 (14%)	0	2 (4%)	0	7 (14%)
TOTALI	33 (66%)	0	16 (32%)	1 (2%)	33 (66%)

Tabella 2
Risultati ottenuti dall'operazione 341 - 43.

Anche in questo caso nessuno usa algoritmi diversi da quelli tradizionali italiani e un numero maggiore di studenti, pari al 32%, non mostra l'algoritmo utilizzato. Si verificano molti errori (66%) soprattutto legati al prestito: mentre quasi tutti riconoscono la necessità del prestito per la sottrazione tra unità, ben 26 (il 52%) dimenticano di aver tolto una decina dal minuendo quando la sottrazione è tra le decine, e scrivono 4 – 4 = 0. Gli altri 7 commettono errori meno chiari da decodificare, forse dovuti a mancanza di attenzione.

Esaminiamo i risultati della moltiplicazione 137 × 12 (**Tabella 3**):

Operazione 3: 137 × 12	Usa l'algoritmo insegnato in Italia	Usa altri algoritmi	Scrive solo il risultato	Non calcola	Errori
Famiglia italiana	18 (36 %)	0	7 (14 %)	0	18 (36 %)
Famiglia non italiana ma studi in Italia	13 (26 %)	0	3 (6 %)	0	13 (26 %)
Appena arrivati	8 (16 %)	0	1 (2 %)	0	8 (16 %)
TOTALI	39 (78 %)	0	11 (22 %)	0	39 (78 %)

Tabella 3
Risultati ottenuti dall'operazione 137 × 12.

Anche in questo caso non vengono scelti algoritmi particolari. 39 studenti scrivono quello usualmente insegnato nelle scuole italiane, mentre 11 omettono l'algoritmo scrivendo solo il risultato. 8 di questi ultimi sbagliano, non permettendoci di interpretare i loro errori, gli altri 31 errori sono di varia natura, in buona parte derivati dall'errato incolonnamento dei due prodotti parziali da sommare.

Si riportano di seguito i risultati della divisione 105 : 15 (**Tabella 4**):

Operazione 4: 105 : 15	Usa l'algoritmo insegnato in Italia	Usa altri algoritmi	Scrive solo il risultato	Non calcola	Errori
Famiglia italiana	10 (20%)	2 (4%)	8 (16%)	5 (10%)	0
Famiglia non italiana ma studi in Italia	7 (14%)	2 (4%)	4 (8%)	3 (6%)	2 (4%)
Appena arrivati	2 (4%)	4 (8%)	3 (6%)	0	2 (4%)
TOTALI	19 (38%)	8 (16%)	15 (30%)	8 (16%)	4 (8%)

Tabella 4
Risultati ottenuti dall'operazione 105 : 15.

Compaiono i primi algoritmi non insegnati in Italia, che esamineremo successivamente, ma la reticenza a mostrare il procedimento resta al 30% e l'omissione totale al 16%. Gli errori sono pochi e forse legati alla confusione che si manifesta nel corso dell'algoritmo sulle posizioni in cui scrivere i risultati parziali via via calcolati.

Riportiamo di seguito i risultati della divisione 231 : 23 (**Tabella 5**):

Operazione 5: 231 : 23	Usa l'algoritmo insegnato in Italia	Usa altri algoritmi	Scrive solo il risultato	Non calcola	Errori
Famiglia italiana	13 (26%)	0	5 (10%)	7 (14%)	3 (6%)
Famiglia non italiana ma studi in Italia	9 (18%)	0	3 (6%)	4 (8%)	4 (8%)
Appena arrivati	2 (4%)	2 (4%)	3 (6%)	2 (4%)	5 (10%)
TOTALI	24 (48%)	2 (4%)	11 (22%)	13 (26%)	12 (24%)

Tabella 5
Risultati ottenuti dall'operazione 231 : 23.

Anche in questo caso compaiono alcuni algoritmi alternativi a quelli tradizionali italiani, ma in sorprendente bassa quantità. Questa operazione deve essere stata percepita come particolarmente complessa, almeno a giudicare dall'alto numero di reticenze che portano a scrivere solo il risultato (22%) e omissioni totali (26%). Sono molti anche gli errori emersi (24%).

Veniamo ai risultati delle domande a risposta chiusa. La prima era "Ti piace la matematica?" (**Tabella 6**).

Domanda 6: "Ti piace la matematica?"	Si	No	Non risponde
Famiglia italiana	12 (24%)	11 (22%)	2 (4%)
Famiglia non italiana ma studi in Italia	7 (14%)	6 (12%)	3 (6%)
Appena arrivati	6 (12%)	1 (2%)	3 (4%)
TOTALI	25 (50%)	18 (36%)	8 (14%)

Tabella 6
Risposte alla domanda: "Ti piace la matematica?".

La seconda domanda posta era "Sei bravo in matematica?". Si riportano di seguito i risultati (**Tabella 7**):

Domanda 7 "Sei bravo in matematica?"	Si	No	Non risponde
Famiglia italiana	16 (32%)	8 (16%)	1 (2%)
Famiglia non italiana ma studi in Italia	7 (14%)	6 (12%)	3 (6%)
Appena arrivati	2 (4%)	4 (8%)	3 (4%)
TOTALI	25 (50%)	18 (36%)	7 (14%)

Tabella 7
Risposte alla domanda: "Sei bravo in matematica?".

Metà degli studenti afferma di essere bravo in matematica e di apprezzarla, dati che sembrano contrastare con il notevole numero di omissioni e di errori rilevati nelle domande precedenti.

4 Considerazioni critiche

Il dato più sorprendente che emerge da queste rilevazioni è l'alto numero di omissioni, cioè di casi in cui gli allievi non scrivono risultati o li scrivono omettendo gli algoritmi con cui li hanno ottenuti. Per spiegare questa situazione possiamo ricorrere ad una delle più potenti teorie sulle dinamiche di classe, cioè quella del *contratto didattico* di Guy Brousseau, colui che è ritenuto il fondatore della moderna didattica della matematica. Del contratto didattico, l'autore afferma:

> «L'insegnante è dunque implicato in un gioco con il sistema delle interazioni dell'allievo con i problemi che egli propone. (…) Il contratto didattico è la regola del gioco e la strategia della situazione didattica».
>
> (Brousseau, 2008, p. 3)

Ci sono alcune *clausole* implicite che provengono dalle mutue interazioni, dalla reciproca osservazione e generalizzazione di ciò che accade in classe, dalle interpretazioni di affermazioni dell'insegnante o del libro di testo, da opinioni ed aspettative sulla matematica, sulla scuola e sulla didattica.
Una diffusa clausola implicita che può aver inciso sulle risposte degli studenti è la seguente: "A scuola si usano solo procedimenti e concetti appresi a scuola e niente altro". Essa crea un solco tra il mondo della scuola e la realtà sociale circostante e limita la fantasia degli studenti nel risolvere problemi e nell'immaginazione.

In questo modo si potrebbero creare negli allievi due idee assai pericolose: che la matematica sia qualcosa di avulso dalla realtà, e in particolare dalla loro realtà e che il loro sentire matematico, il modo per loro più immediato di affrontare i problemi e di modellizzare i fenomeni sia di scarso valore, e con esso anche tutto il mondo che essi costruiscono sulla base della loro cultura d'origine.
Nel nostro caso, nonostante gli insegnanti tentassero di assicurare che durante quei calcoli gli studenti erano liberi di scegliere l'algoritmo, l'imperativo implicito sopra riportato continuava a far sentire il suo potere, svalutando le conoscenze e competenze del loro ambiente familiare.

5 Gli algoritmi emersi

Esaminiamo alcuni degli algoritmi scritti dagli studenti. In alcuni casi le differenze rispetto alle scelte più diffuse nella scuola italiana sono solo grafiche, come il meno nell'esempio che è prima del sottraendo (**Figura 1**), laddove nella scuola italiana si mette solitamente a destra del minuendo. Manca anche l'uguale che solitamente si scrive a destra del sottraendo.

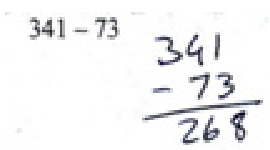


Figura 1
Esempio di algoritmo della sottrazione.

Gli algoritmi per addizioni e sottrazioni sono fondamentalmente gli stessi per tutti gli studenti esaminati. Ci sono differenze più cospicue nell'algoritmo di divisione. Si vedano i seguenti esempi (**Figura 2**):

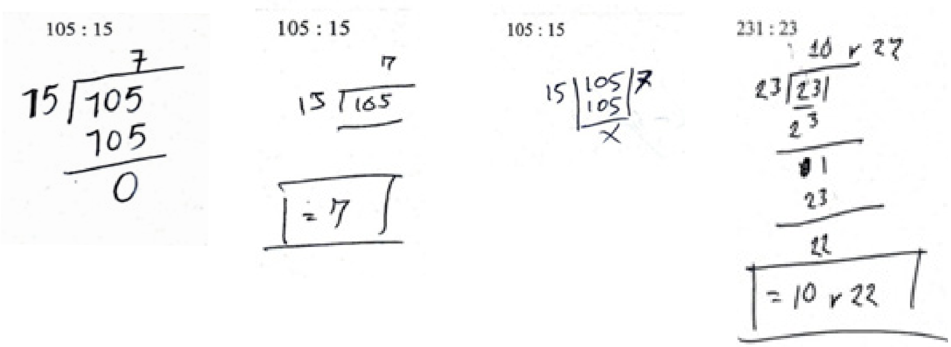


Figura 2
Esempi di algoritmi della divisione.

Prima di esaminarli dettagliatamente ricordiamo che nella scuola elementare italiana si insegna agli allievi l'algoritmo a *danda*, che risale ai libri contabili dei primi del quindicesimo secolo. La versione più usata è quella breve. Si riportano due esempi di seguito (**Figura 3**):

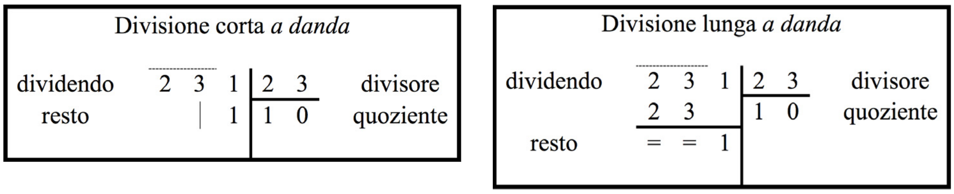
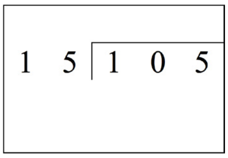


Figura 3
Esempi di algoritmi della divisione a *danda*.

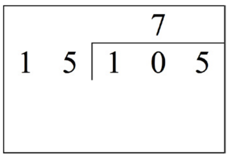
Solitamente gli studenti delle scuole italiane apprendono con fatica questo algoritmo, per dimenticarlo presto appena hanno l'opportunità di usare macchine calcolatrici. Esso risulta complesso anche perché contiene diversi sottoalgoritmi di sottrazione, addizione e controllo.

Esaminiamo in dettaglio gli algoritmi riportati in Figura 2; per quanto concerne il primo:

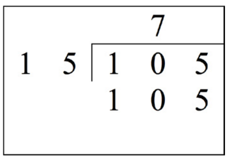
Scriviamo il dividendo 105 ed il divisore 15 come nello schema qui sotto.
Cerchiamo quante volte il 15 sta nel 105. Vediamo se possiamo cominciare solo con le prime cifre.
Il 15 nell'1 e nel 10 non ci può stare, quindi consideriamo tutto il 105.



Tentiamo di moltiplicare 15 per qualche numero per ottenere dei numeri vicini a 105 ma minori: dopo qualche tentativo scopriamo che 105 × 7 = 105.
Scriviamo 7 sopra la riga.



Moltiplichiamo 15 × 7 = 105 e scriviamo questo numero sotto il dividendo.



Facciamo la sottrazione tra il dividendo e il numero ottenuto.
Dato che abbiamo ottenuto un resto minore del divisore (0 < 15) abbiamo finito e possiamo concludere che 105 = 105 × 7.

			7	
1	5	1	0	5
	-	1	0	5
		0	0	0

Il secondo algoritmo della **Figura 2** è uguale al precedente, se non per qualche dettaglio grafico.
Il terzo algoritmo della **Figura 2** differisce per quanto concerne la posizione del quoziente:

1	5	1	0	5

1	5	1	0	5	7

1	5	1	0	5	7

1	5	1	0	5	7
		1	0	5	
			0		

Lo studente al posto dello 0 finale ha scritto una X.
L'ultimo algoritmo della **Figura 2** mostra un uso errato dell'algoritmo della **Figura 1**. La forma corretta sarebbe la seguente:

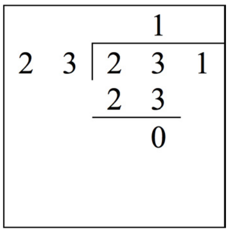
Scriviamo dividendo e divisore nelle consuete posizioni.

2	3	2	3	1

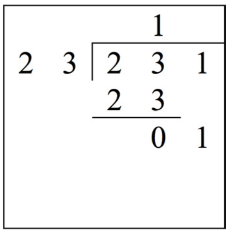
Consideriamo le prime due cifre perché sufficienti. Nel 23 il 23 ci sta 1 volta e scriviamo questo numero sopra la riga.

			1	
2	3	2	3	1

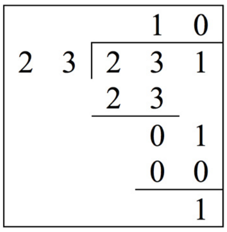
Il quoziente trovato, 1 moltiplicato per il divisore 23 fa 23, che scriviamo sotto il dividendo parziale 23. Facciamo la sottrazione e troviamo 0 indicato sotto l'apposita riga.



Abbassiamo l'ultima cifra del dividendo, 1. Il nuovo dividendo è 1. 23 ci sta 0 volte. Scriviamo 0 al di sopra della riga.



0 × 23 = 0 che scriviamo sotto il dividendo. È qui che lo studente ha sbagliato, moltiplicando per il divisore il quoziente precedente 1.
La sottrazione dà sempre 1. Questo numero è minore del divisore e quindi abbiamo finito. Il resto è 1.



6 Socializzazione di conoscenze e pratiche

Nel caso della presente indagine, dopo aver esaminato le schede compilate dagli studenti, gli insegnanti delle due classi coinvolte scelsero alcuni algoritmi, in particolar modo per la divisione ed invitarono chi li aveva scritti a spiegarli pubblicamente. Questa era la prima fase di un'attività di socializzazione di conoscenze e pratiche individuali tratte da particolari contesti familiari o da esperienze personali. L'obiettivo era quello della costruzione collettiva di una nuova cultura scolastica, propria di quelle due classi.
Naturalmente la spiegazione non bastò perché gli altri studenti potessero assimilare il nuovo algoritmo, così si proseguì con un'attività per gruppi, in cui quattro studenti per gruppo lavoravano per realizzare una presentazione di un algoritmo, con qual-

che giustificazione matematica ed alcuni esempi numerici.
Ciò permise successivamente una discussione su questi e altri elementi matematici che caratterizzano alcune delle culture rappresentate in quelle classi. Riflettemmo poi insieme anche sui modelli di scuola.
In questo modo un variegato gruppo di studenti (1"esperto" bengalese, 1 di famiglia tunisina e 2 italiani) fece una presentazione sulla scuola in Bangladesh con fotografie che mostravano scuole bengalesi di ambiente urbano, organizzate su modelli inglesi, e scuole rurali costruite con pannelli in asbesto, con studenti seduti su grandi tappeti che scrivevano su lavagnette e contavano con i bastoncini numerici.
In questa presentazione è stato anche esposto un sistema di conteggio digitale, con algoritmi di addizione e sottrazione, molto diffuso nel subcontinente indiano. Nella figura seguente sono riportate alcune immagini tratte dal lavoro degli studenti:

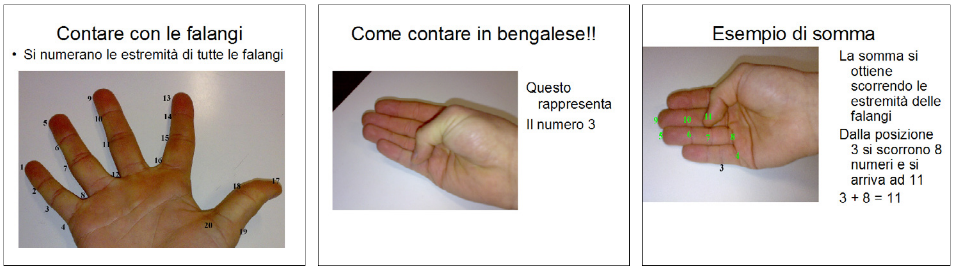


Figura 4
Sistema di conteggio digitale bengalese.

Questo sistema è legato alla religione islamica e viene insegnato ai bambini dai 6 o 7 anni per consentire loro di non confondersi nell'enumerazione liturgica dei 99 nomi di Dio, che ne costituiscono altrettanti importanti attributi. La mano è usata, cioè, come il rosario nel cattolicesimo. La rappresentazione numerale si basa sul principio del successivo (4 è rappresentato dalla quarta giuntura toccata) e, dunque, unisce aspetti cardinali ed aspetti ordinali dei numeri naturali e presenta i due consueti limiti strutturali di ogni sistema di questo tipo: la difficoltà di rappresentare lo 0 ed il limite del massimo numero rappresentabile, che è 40. Per conteggiare 99 nomi si devono fare più di 2 giri. I bambini pakistani, indiani e bengalesi sono molto rapidi con le dita nello scorrere avanti per sommare e indietro per sottrarre, avendo in quest'ultimo caso cura di non uscire dall'insieme dei naturali.

Un altro gruppo di studenti lavorò sulle tecniche di calcolo digitali molto comuni nella scuola filippina per moltiplicare rapidamente numeri naturali in uno specifico intervallo (da 6 a 10). Le immagini della **Figura 5**, tratte dalle presentazioni mostrate in classe, ne spiegano il funzionamento.

Figura 5
Tecniche di calcolo digitali usate nella scuola filippina.

Un altro gruppo espose un algoritmo ghanese (detto *onko*) per calcolare il minimo comune multiplo di numeri naturali, su suggerimento di uno studente ghanese di un'altra classe che aveva sentito che qualcuno stava cercando algoritmi interessanti.

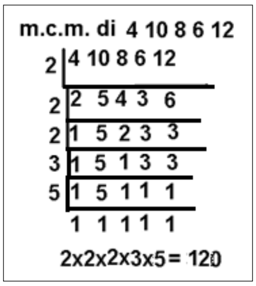


Figura 6
Algoritmo ghanese (detto *onko*) per calcolare il minimo comune multiplo.

Seguiamo l'algoritmo passo passo. Vogliamo scoprire il minimo comune multiplo di 4, 10, 8, 6 e 12. Si noti che il loro ordine non ha alcuna importanza. Si devono trovare i numeri primi che compongono tutti questi numeri senza fare la scomposizione di ognuno.

Scritti i numeri a destra di una riga scriviamo un numero primo che certamente divide il 4 (che è scritto in prima posizione). 2 divide 4 e lo scriviamo.

2	4	10	8	6	12

Dividiamo i numeri che abbiamo per il numero trovato, 2, e scriviamo i quozienti al di sotto. Se un numero non si divide lo scriviamo sotto tale quale. In questo caso non succede.

2	4	10	8	6	12
	2	5	4	3	6

2 divide il primo numero, 2, e lo scriviamo al di qua della riga. Facciamo la divisione come nel passo precedente di tutti i numeri della riga per il numero trovato. 5 e 3 li scriviamo semplicemente sotto.

2	4	10	8	6	12
2	2	5	4	3	6
	1	5	2	3	3

2 divide ancora uno dei numeri della riga, per cui ripetiamo la divisione.

2	4	10	8	6	12
2	2	5	4	3	6
2	1	5	2	3	3
	1	5	1	3	3

2 non divide più nessun numero. Passiamo a 3.

2	4	10	8	6	12
2	2	5	4	3	6
2	1	5	2	3	3
3	1	5	1	3	3
	1	5	1	1	1

3 non divide più nessun numero. Passiamo a 5.
Dopo la divisione restano solo degli 1: abbiamo finito.

2	4	10	8	6	12
2	2	5	4	3	6
2	1	5	2	3	3
3	1	5	1	3	3
5	1	5	1	1	1
	1	1	1	1	1

Moltiplichiamo i numeri trovati sulla colonna di sinistra e sotto l'ultima riga e abbiamo il minimo comune multiplo cercato.

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$$

Per meglio apprezzare l'impegno di questi studenti si consideri che nel 2007 i giovani in Italia non avevano l'attuale familiarità con le reti informatiche o social media e che quasi nessuno aveva telefonini in grado di reperire informazioni. Questi ragazzi hanno ricordato la loro esperienza, hanno chiesto alle loro famiglie o in qualche caso hanno persino telefonato in paesi lontani.

7 Conclusioni

Le attività di socializzazione delle conoscenze tratte dai diversi contesti hanno accresciuto la conoscenza dell'intera comunità di allievi e insegnanti in quella scuola e hanno fatto sentire agli studenti di cultura non italiana che la scuola come istituzione era interessata alla loro cultura familiare. Hanno, cioè, percepito il nostro rispetto e la nostra attenzione verso la loro storia e le loro origini; contrastando la rottura tra casa e scuola si è costruito un sapere matematico comune particolarmente ricco, in cui ogni studente potesse riconoscere una parte di sé.
Gli aspetti epistemologici di una tale pratica sono molteplici: gli allievi arrivano a scuola con una visione del mondo che traggono dalla loro esperienza diretta e dall'ambiente culturale in cui vivono ricca di conseguenze sul piano scientifico e matematico; da essi gli allievi costruiscono una loro epistemologia.
Anche l'insegnante ha la sua epistemologia, costruita tramite personali esperienze, i suoi studi e le sollecitazioni del suo ambiente. Dato che esso contiene quantomeno una buona parte di studi formali, questa epistemologia è ricca di conoscenze, abilità, competenze ed istanze proprie della matematica accademica.
La scuola è inoltre un ambiente molto sollecitato dalle esigenze e richieste del contesto culturale locale e nazionale e da tutte le istituzioni culturali, in primis quelle in cui si prevede che gli studi proseguano o che arrivino cittadini dotati di particolari competenze. Essa è il luogo in cui le diverse epistemologie possono e debbono incontrarsi.
Riteniamo quindi che la scuola multiculturale di oggi abbia tra i suoi tanti compiti anche quello di costruire ponti tra epistemologie diverse nel senso di una comune e più generale visione della scienza e della vita e in questo la matematica può rappresentare un significativo veicolo di condivisione e unione.

Bibliografia

Booker, B., & Windsor, W. (2005) An Historical Analysis of the Division Concept and Algorithm Can Provide Insights For Improved Teaching of Division. In B. Bartlett, F. Bryer & D. Roebuck (Eds.), *Stimulating the "action" as participants in participatory research*. Volume 3 (pp. 172-184). Brisbane: Griffith University.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Colombo, M., & Ongini, V. (2014). *Alunni con cittadinanza non italiana*. Milano: Fondazione ISMU.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Ongini, V. (2011). *Noi domani. Un viaggio nella scuola multiculturale*. Bari: Laterza.

Scandiuzzi, P. (2010). Accepting the Other: Different Division Expression. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 3*(1), 67-78.

Vygotskij, L. S. (2007). *Pensiero e linguaggio*. Firenze: Giunti.

Autori/Giovanni Giuseppe Nicosia
Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica, Bologna – Italia
gg.nicosia@gmail.com

"Quale mestiere farò nel mio futuro?"

"What will be my future job?"

Monica Ronco
Docente di matematica della Scuola Media di Gordola – Svizzera

Sunto / L'esperienza presentata vuole mostrare come un percorso didattico costituito da situazioni – problema in matematica, situate nei mestieri che gli allievi desiderano fare in futuro, permetta di sostenere gli allievi nell'imparare a informarsi e a decidere e sia un mezzo di crescita, di orientamento e di motivazione verso lo studio della matematica. Il lavoro è stato proposto agli studenti di una IV media ticinese di un corso base[1] di matematica. Le attività proposte legate ai mestieri sono risultate sfide contestualizzate alla portata degli allievi: hanno suscitato interesse e adesione e hanno consentito agli allievi di mobilitarsi per elaborare in gruppo strategie e soluzioni.

Parole chiave: mestieri; situazione – problema; motivazione.

Abstract / This article aims at showing how the experience of teaching Mathematics through situations related to the jobs that students want to do in their future helps them learn to collect information and make decisions. Furthermore, it is a valuable approach to help them learn, guide them in their career choices and motivate them to study Mathematics. This experience has been carried out in a Swiss Middle School with a small sample of fourth year students who attend the basic[2] Mathematics lessons. Results show that the job related activities appeared like challenges to the students: they were sincerely interested in finding strategies and solutions with their classmates.

Key words: jobs; realistic situations; motivation.

1 Introduzione

L'esperienza di insegnamento/apprendimento da cui è tratto questo lavoro è iniziata a settembre 2016 con un piccolo gruppo di studenti in una III media, corso base: dal punto di vista dell'insegnante, si è trattato di un primo approccio a studenti con così tante difficoltà in matematica e con un conseguente sentimento di distacco nei confronti di questa materia, che sentivano davvero estranea rispetto a loro. Volendo indagare metodi e strategie per rendere efficace l'insegnamento, si è cercato di puntare sugli aspetti motivazionali legati al rapporto fra la matematica e il mondo. In questo senso, l'esperienza condotta ha permesso di approfondire le dinamiche del processo di insegnamento/apprendimento e di ideare un percorso incentrato sull'orientamento professionale.
Questo materiale è stato preparato a partire dai mestieri che gli allievi desideravano fare in futuro e sono state create. Si è scelto di partire dai mestieri che gli allievi desideravano fare in futuro e sono state create delle situazioni reali o realistiche che mostrassero come la matematica sarebbe rientrata anche nel loro futuro professionale.

1. In Canton Ticino a partire dalla terza media gli allievi vengono inseriti in corsi base e attitudinale in funzione delle competenze matematiche raggiunte alla fine della seconda.
2. In Canton Ticino starting from 8th grade the students are inserted into basic and attitudinal courses depending on the mathematical skills reached at the end of the 7th grade.

Questo lavoro si pone dunque l'obiettivo di sostenere gli allievi di una classe quarta media, corso base di matematica, nell'imparare a informarsi, a decidere e a "prendersi in mano", utilizzando lo strumento delle situazioni – problema in matematica come mezzo di crescita e orientamento e di motivazione verso lo studio della matematica.[3]

Approfondimento – corsi base nella scuola media ticinese.
In Canton Ticino, nel secondo biennio delle scuole medie, in alcune materie (attualmente tedesco e matematica) sono previste classi di due livelli di difficoltà: il livello base con esigenze elementari e il livello attitudinale con esigenze estese (Legge della Scuola Media del 1974). In particolare, gli allievi che frequentano il corso base di matematica sono esclusi dalle scuole medie superiori (Licei o Scuola Cantonale del Commercio) a meno di superare gli esami di ammissione. Di conseguenza, potranno frequentare una scuola professionale a tempo pieno oppure a tempo parziale, abbinata ad un apprendistato.

2 Quadro teorico: l'utilità della matematica

Nel 1968, durante una conferenza di benvenuto ad una settimana di incontri a tema matematico in Olanda, il matematico Hans Freudenthal sottolineò che non è necessario soffermarsi eccessivamente sul perché la matematica sia utile: essa si è dimostrata indispensabile per comprendere e controllare non solo il mondo fisico ma anche la struttura sociale. Quello su cui bisogna mettere l'accento è la necessità di insegnare la matematica affinché sia utile: spesso, in passato, la matematica è stata una scienza astratta, ma se si tiene a mente quale sia l'ampio uso della matematica, allora risulta evidente che essa non sia utilizzata solo da pochi, ma virtualmente da tutti.
La matematica, spiegò Freudenthal, è diversa dalle altre materie perché la sua ampiezza sta soprattutto nella varietà di situazioni a cui si applica, non tanto nel corpus di teorie su cui si fonda. La matematica moderna tende a ridurre quanto più possibile l'impianto teorico al fine di aumentarne la flessibilità. Insegnare una matematica utile, tuttavia, porta a situazioni spinose: da un lato è indubbio il fatto che più la disciplina è astratta, più essa risulta flessibile, ma così si perde di vista la sua applicabilità; d'altra parte, però, se insegnare la matematica utile significa limitarsi ad un contesto pur specializzato ma non generalizzabile, allora si vanno a perdere proprio le più grandi virtù della matematica, ovvero la sua flessibilità, adattabilità ed elasticità.
Tra queste due attitudini estreme, Freudenthal afferma che si potrebbe essere inclini a cercare il seguente compromesso: insegnare dapprima la matematica pura e successivamente mostrare come applicarla. A suo avviso, tuttavia, questo sembra essere l'ordine sbagliato. L'approccio più indicato è quello di partire dal concreto, andare all'astratto e ritornare al concreto ogni volta che lo si ritiene opportuno (Freudenthal, 1968). Partire dal concreto significa ragionare sul fatto che c'è una vita fuori e dopo la scuola, nella quale si impara molto; l'insegnamento formale scolastico si potrebbe quindi costruire in modo radicato alla quotidianità fuori dalla scuola, considerando

3. Lavoro di Diploma: Ronco, M. (2017/2018). "Quale mestiere farò nel mio futuro? Percorso di orientamento alla professione tramite la matematica". Dipartimento formazione e apprendimento. Relatori: Luciana Castelli, Silvia Sbaragli, disponibile in: http://tesi.supsi.ch/2183/.

come punto di partenza la cosiddetta matematica informale.
È questa anche l'idea di Comoglio quando propone un insegnamento che chiama "insegnamento-ponte" (2004, p. 54): in tale approccio prevale una logica di interazione e integrazione tra saperi pratici e saperi teorici, al fine di partire da un'esperienza reale e vicina al vissuto degli studenti per poi prendere le distanze da essa, osservarla e comprenderla più in profondità, ritornando al contesto reale ogni volta che è necessario. L'insegnamento-ponte è centrato sullo studente che sviluppa la propria conoscenza attorno a temi o problemi stimolanti, fatti di esperienze dirette dallo studente (interessato e responsabilizzato) e facilitate dall'insegnante. Una delle risorse primarie in questo approccio è il gruppo classe, ritenuto da Castoldi «amplificatore e collezionatore delle potenzialità individuali» (2015, p. 114).
Castoldi sottolinea quindi l'importanza per ogni docente di

> «riflettere sui rapporti da instaurare tra scuola e vita, tra riflessione ed esperienza; in altre parole si tratta di riconoscere i link esistenti tra le modalità di conoscenza proprie della scuola e la complessità del mondo reale. (…) La sfida per l'apprendimento scolastico consiste nel non separarsi dalla realtà e dalle esperienze di vita», nel fare in modo che il docente non si chiuda in se stesso autolegittimandosi, bensì mantenga «una relazione costante con l'esperienza reale, con il vissuto dell'allievo, in grado di restituire un senso all'apprendimento, anche il più formalizzato, e di ricollegarlo alle esperienze di vita, alla sua potenziale ricaduta nei contesti di realtà».
>
> (Castoldi, 2015, p. 113)

Tutto questo è stato ampiamente considerato nella stesura del nuovo *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015), in cui si sottolinea proprio che

> «nella scuola, la matematica è chiamata a fornire le risorse necessarie per affrontare con successo situazioni sia concrete, attinenti alla vita quotidiana, sia più astratte, attraverso la capacità di descrivere scientificamente il mondo tramite la modellizzazione dei fenomeni che lo caratterizzano».
>
> (DECS, 2015)

Come indicazione metodologica e didattica, si suggerisce ai docenti quanto sia

> «auspicabile che l'acquisizione di competenze da parte degli allievi avvenga a partire da situazioni – problema efficaci, significative e stimolanti, a volte più vicine alla vita quotidiana a volte più intrinseche alla matematica stessa e che acquistino senso per gli allievi».
>
> (DECS, 2015)

3 Metodologia

Il lavoro presentato è stato proposto ad una classe di IV media corso base di matematica di Gordola costituita da 9 alunni. Tutte le attività sono state svolte in piccoli gruppi eterogenei che cambiavano di attività in attività sulla base delle competenze degli allievi nei singoli ambiti disciplinari.

Il lavoro complessivo si è svolto in tre fasi:

1. somministrazione agli studenti al termine della terza media di un questionario al fine di avere una panoramica rispetto a quali mestieri gli allievi ipotizzavano di svolgere al termine della scuola dell'obbligo;
2. progettazione e svolgimento di un itinerario didattico, realizzato durante la quarta media, incentrato sugli interessi lavorativi futuri degli studenti desunti dal questionario iniziale e in cui emergeva il collegamento tra la matematica e la loro futura vita professionale;
3. somministrazione di un questionario finale al termine della scuola media per verificare l'impatto dell'itinerario sulla consapevolezza e autoefficacia degli allievi.

Nel lavoro di diploma si sono riportati i risultati ottenuti dall'analisi e confronto dei due questionari.[4] In questo articolo viene presentato il percorso didattico realizzato. 4

4 Descrizione dell'intervento

4.1 Questionario iniziale

Il questionario, svolto al termine del penultimo anno di scuola media, era diviso in due parti: la prima costituita da domande chiuse per indagare i costrutti psicologici di autoefficacia e di prospettiva temporale; la seconda incentrata su quale mestiere gli alunni credevano di voler svolgere da grandi e le sue connessioni con la matematica. È la seconda parte del questionario, in particolare la domanda "Qual è il mestiere che pensi di riuscire a fare da grande?", che ha dato avvio alla progettazione del percorso didattico che ha rappresentato la seconda fase dell'intervento. Dal questionario è emerso che 3 allievi desideravano fare un mestiere in ambito sanitario (fisioterapista, infermiere e aiuto-veterinario), 2 volevano diventare meccanici, 1 architetto – spinto dalla passione per il disegno –, 1 studentessa voleva studiare politica per cambiare la situazione nel suo paese d'origine (Afghanistan) e infine 1 studente risultava indeciso dichiarando "purtroppo non lo so ancora", ma forse aveva un'idea, quella di fare l'informatico, che è anche il mestiere auspicato da un altro suo compagno.

4.2 Percorso didattico

Il percorso didattico realizzato è costituito da 7 situazioni – problema legate ai mestieri indicati dagli allievi nel questionario iniziale e ha avuto una durata di 6 mesi (da ottobre 2017 a marzo 2018). Di seguito viene proposta una breve descrizione delle singole situazioni – problema, un loro inquadramento secondo il *Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) in termini di ambiti e aspetti di competenza coinvolti e traguardi di competenza che si auspicava di raggiungere con le diverse attività e il materiale didattico usato in classe. In aggiunta alle specifiche situazioni che tutti gli allievi hanno svolto nelle ore ad esse dedicate, sono stati assegnati degli esercizi rientranti negli itinerari didattici facenti parte della programmazione annuale, sempre legati a questi mestieri che vengono proposti di seguito. In questo modo, si è cercato di dare continuità e fornire diversi spunti che enfatizzassero il ruolo della

4. Per maggiori informazioni si prenda visione del seguente link: http://tesi.supsi.ch/2183/

matematica in queste professioni. Nel percorso si è deciso di non porre l’accento sulla valutazione dell’apprendimento, ma solo per l’apprendimento: gli allievi hanno così potuto concentrarsi sulla matematica presente nei singoli mestieri e svolgere le attività sentendosi liberi di porre domande ed esprimere eventuali perplessità, senza sentirsi giudicati.
Come conclusione del lavoro, sono state dedicate 4 ore-lezione affinché ciascun allievo preparasse una presentazione del mestiere prescelto e dei suoi legami con la matematica; tale presentazione doveva poi essere mostrata ai compagni di un’altra quarta base della stessa sede. Per fare ciò sono stati lasciati liberi nella scelta di materiali e forme di esposizione.

4.2.1 Inquadramento nel *Piano di Studio della scuola dell’obbligo ticinese*

Nella **Tabella 1** (pagina seguente) viene riportato, in modo schematico, l’inquadramento di ciascuna delle attività del percorso didattico nel *Piano di Studio della scuola dell’obbligo ticinese* (DECS, 2015) evidenziando quali ambiti di competenza vengano toccati e quale siano le competenze focus. Nel caso di due mestieri, viene inoltre indicato il Contesto di Formazione generale coinvolto.

		Mestieri						
		Architetto	Fisioterapista	Meccanico	Informatico	Veterinario	Infermiere	Politico
Ambiti di competenze	Numeri e calcoli		Eseguire le operazioni di base con i numeri in forma percentuale			Testare una congettura al fine di trovare un procedimento risolutivo o per generalizzare la situazione	Eseguire operazioni con numeri reali espressi in forma […] scientifica	
	Funzioni							
	Probabilità e statistica					Analizzare e tradurre problemi combinatori di vita reale in procedure di conteggio sistematico		Prelevare in modo pertinente informazioni da dati presenti in testi, tabelle, diagrammi e presentarli in modo comprensibile e utilizzabili da altri
	Geometria	Analizzare e modellizzare una situazione concernente oggetti […] dello spazio applicando […] i criteri della similitudine, passando da un registro semiotico all'altro al fine di prendere decisioni e di determinare una procedura risolutiva		Calcolare volumi di cilindri				
	Grandezze e misure	Prelevare in modo pertinente e presentare in modo comprensibile e utilizzabile da altri misure adeguate […]	Prelevare in modo pertinente […] misure adeguate da testi […]; Interpretare, riflettere e verificare la pertinenza di affermazioni […] e risultati concernenti situazioni legate a grandezze […]	Esplorare relazioni tra grandezze dello stesso tipo […] e relazioni tra grandezze diverse […] in situazioni significative				
Contesti di formazione generale			Salute e benessere: Sensibilizzare l’allievo alla conoscenza del contesto in cui vive		Tecnologie e media: Non bisogna dimenticare l’importanza attribuita alla sperimentazione e all’impiego di semplici procedure di programmazione per la realizzazione di applicazioni multimediali (coding)			

Tabella 1
Inquadramento nel *Piano di Studio della scuola dell’obbligo ticinese* (DECS, 2015) delle attività del percorso didattico.

4.2.2. Primo intervento: mestiere dell’architetto

La situazione legata al mestiere dell’architetto (si veda il materiale didattico nell’Allegato 1) aveva come obiettivo quello di creare un preventivo per la ristrutturazione dell’aula in cui si svolgono le lezioni di matematica. In particolare, a coppie o a gruppi di tre, gli allievi hanno dovuto fare un disegno in scala dell’aula, scegliere alcuni mobili dal catalogo dell’Ikea (cattedra, mobili per il materiale dei docenti, scaffali per i classificatori degli allievi), ricavare le misure di tali mobili dal catalogo e dei banchi tramite la misurazione dal vivo e riportarli nel disegno in scala, scegliere le piastrelle dal catalogo fornito e determinare quante piastrelle servissero per piastrellare il pavimento dell’aula, scrivere un’email formale all’addetto alle vendite affinché fornisse il prezzo di tali piastrelle e, infine, preparare un preventivo completo da presentare alla direzione.

Tempistiche e materiale

Tale situazione – problema ha richiesto 5 ore-lezione per il suo completo svolgimento ed è stata svolta utilizzando il seguente materiale:

- strumenti per la misurazione: metri dell’Ikea; decametri; metro della lavagna;
- carta millimetrata o in alternativa fogli a quadretti (scelta lasciata agli studenti);
- catalogo Ikea;
- catalogo piastrelle ProCasa;
- forbici, colla, fogli bianchi e colorati per il preventivo;
- computer per scrivere l’email.

Tracce del lavoro realizzato in classe

Questa situazione – problema ha globalmente coinvolto tutta la classe; in particolare, l’alunno che aveva segnalato di voler fare questo mestiere si è subito mostrato estremamente entusiasta e ha condiviso con la classe la ricerca personale effettuata sul sito www.orientamento.ch, per esplicitare quali fossero le possibilità e le scelte che doveva compiere per realizzare il suo sogno.
La fase di misurazione dell’aula ha visto maggiormente coinvolti i maschi della classe ma tutti hanno dovuto trasformare le misure reali secondo una scala data. A posteriori, avrebbe potuto essere interessante scegliere con gli studenti una scala opportuna, anziché indicarla a priori, in modo da poter ragionare su quale fosse il rimpicciolimento adeguato da effettuare per poter disegnare l’aula su un foglio A4.
La creazione del preventivo ha visto particolarmente attivi il futuro architetto e un’altra allieva che ama gli aspetti grafici e artistici: questi due allievi hanno suggerito alle altre coppie di lavoro come creare un preventivo esteticamente elegante.
Una coppia di allievi ha terminato prima degli altri. Sono quindi stati incaricati di scrivere un’email formale all’addetto alle vendite delle piastrelle a nome dell’intera classe affinché potessimo avere il prezzo scontato per la scuola: le istituzione pubbliche hanno infatti prezzi agevolati rispetto a quelli di listino e un addetto alle vendite di ProCasa si era reso disponibile nel rispondere a tale email per rendere la situazione ancora più realistica. I due studenti erano preoccupati di questa responsabilità perché hanno dichiarato di non essere bravi in italiano, ma in realtà sono stati precisi e formali e la classe ha richiesto solo alcune modifiche alla loro proposta di email.
Grazie alla risposta dell’addetto alle vendite delle piastrelle, gli allievi hanno recepito l’ultima informazione necessaria per terminare il preventivo.

Figura 1
Un esempio di preventivo completo.

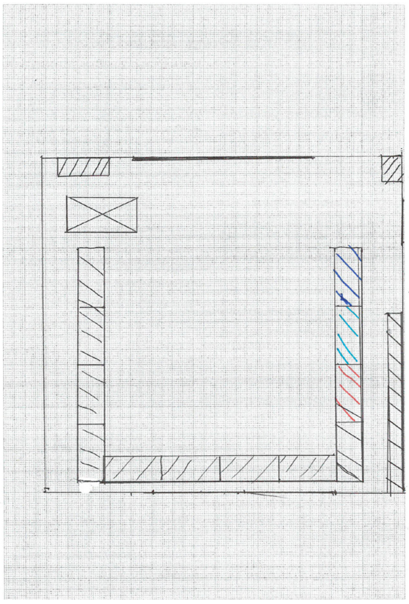


Figura 2
Un esempio di piantina in scala con i mobili scelti e i banchi disposti a piacere dall'allievo.

Ulteriore attività di approfondimento sul tema

In aggiunta alla situazione – problema, viene documentata un'altra breve attività che si situa all'interno di un itinerario didattico nell'ambito di competenza *Geometria*, relativo alla similitudine e al rapporto di scala (**Allegato 2**). Agli allievi è stato chiesto di aiutare un architetto nella progettazione della ristrutturazione del piano terra di una villetta di Locarno, effettuando il disegno in scala della villa, procurandosi la quantità corretta di materiale (pittura) e calcolando alcuni prezzi sulla base delle quantità necessarie (piastrelle). Gli allievi hanno svolto tale attività con piacere e senza difficoltà: è stata fatta al termine dell'itinerario didattico sulla similitudine quindi è stata usata come esercizio di applicazione di quanto appreso.

4.2.3. Secondo intervento: mestiere del fisioterapista

La situazione legata al mestiere del fisioterapista ha richiesto agli studenti innanzitutto di quantificare, grazie a un dato empirico europeo, quanti siano gli abitanti dell'Europa, dell'Italia, della Svizzera e della Francia che soffrono di lombalgia o dolore cervicale almeno tre volte all'anno e successivamente quanti tra questi chiedano supporto al fisioterapista in Svizzera. A livello teorico, si è ipotizzato che queste percentuali di persone siano distribuite omogeneamente nelle varie nazioni europee. In secondo luogo, gli studenti hanno dovuto pesare il loro zaino e verificare se fosse "troppo pesante" e argomentare riguardo a come eventualmente alleggerirlo. Infine, nell'ultima parte dell'attività, dopo aver scoperto come funziona la Cassa Malati (Assicurazione Sanitaria) in Svizzera, è stato chiesto di aiutare il signor Luigino nel comprendere quanto gli verrà rimborsato dalla sua Cassa Malati a fine anno per dei trattamenti fisioterapici o osteopatici a cui si sottopone ogni mese (Allegato 3).

Tempistiche e materiale

Tale attività ha richiesto 2 ore-lezione per il suo completo svolgimento ed è stata svolta utilizzando:

– bilancia pesapersone meccanica;
– listino prezzi del centro della salute Viverbene di Lugano.

Tracce del lavoro realizzato in classe

Per quanto concerne la prima attività, gli allievi hanno fatto un po' fatica nella parte legata alle percentuali prevalentemente per due motivi:

– 4 alunni su 9 non hanno letto con attenzione il testo e quindi non trovavano l'informazione "una persona su quattro" che permetteva di svolgere la prima attività; 3 alunni su 9 hanno fatto fatica a trasformare questo dato in percentuale;
– una lettura disattenta ha precluso il corretto completamento dell'affermazione "In Svizzera, il 15% delle persone che lamentano dolori alla schiena o alla cervicale, chiedono supporto a fisioterapisti o osteopati, cioè . . . . persone all'anno". Quasi tutti gli allievi (7 su 9) hanno considerato come valore su cui far agire la percentuale il numero totale di abitanti della Svizzera, anziché il numero che avevano trovato essi stessi.

Tutti gli allievi si sono rivelati curiosi di svolgere la seconda attività al fine di scoprire se il loro zaino o borsa fosse da ritenere troppo pesante. Inoltre un allievo ha giustamente sottolineato come il peso dello zaino non fosse il solo fattore rilevante ma anche il modo di portare lo zaino (ad esempio su una o due spalle). Tutta la classe ha infatti concordato nel suggerire di non usare una borsa che poggi su una spalla sola, ma di prediligere un peso equamente diviso sulla schiena. Come si evince dal piccolo estratto del protocollo che segue (si veda la Figura 3), gli allievi hanno utilizzato correttamente la "regola" sul peso adeguato dello zaino e hanno poi fatto il raffronto con il peso del proprio zaino, quantificato con una bilancia. Si può notare, tuttavia, l'errore ancora molto frequente di usare l'uguale con il suo significato procedurale anziché relazionale: tale imprecisione risulta più marcata quando gli allievi si immergono realmente nella situazione scordandosi che "stanno facendo matematica".

Figura 3
Protocollo di un allievo per calcolare il peso massimo ideale del proprio zaino.

Infine, l’attività concernente la Cassa Malati ha riservato sorprese. La settimana precedente era emerso come, eccetto 2 allievi stranieri che se ne occupano personalmente in casa, gli studenti non sapessero assolutamente nulla riguardo al sistema sanitario svizzero. L’attività sarebbe dunque dovuta iniziare con una spiegazione frontale e semplificata dall’insegnante di tale argomento, ma non è stato necessario: oltre ai 2 ragazzi stranieri, anche altri 2 allievi avevano domandato ai propri genitori come funzionasse e, tramite esempi che loro stesso hanno portato, sono riusciti a presentare il funzionamento della Cassa Malati ai propri compagni.

Ulteriore attività di approfondimento sul tema

È stata inoltre svolta un’altra breve attività concernente l’indice di massa corporea (IMC) che si situa all’interno di un itinerario didattico nell’ambito di competenza *Grandezze e misure*, riguardante i rapporti tra grandezze non omogenee (si veda l’**Allegato 4** per il materiale didattico). Si è deciso di lasciar calcolare agli allievi il proprio indice di massa corporea perché in questa classe gli allievi sono magri o di corporatura normale, quindi si è ipotizzato che non ci sarebbero stati problemi al riguardo. Poiché si è previsto che alcuni alunni potessero risultare sottopeso, si è sottolineato che in realtà le scale legate all’indice di massa corporeo sono calibrate su adulti che hanno terminato il loro sviluppo fisico. L’esercizio conclusivo della scheda prevedeva la lettura e comprensione di dati da un grafico a barre concernente la distribuzione dell’IMC della popolazione adulta in Svizzera in base a genere, regione linguistica ed età, quindi l’attività coinvolgeva anche l’ambito *Probabilità e statistica*.

4.2.4. Terzo intervento: mestiere del meccanico

La situazione legata al mestiere del meccanico, documentata nell’**Allegato 5**, è stata incentrata sulla storia di Riccardo, un ragazzo che ha sempre sognato di fare il meccanico e che ha quindi iniziato, fin da piccolo, a interrogarsi riguardo agli oggetti che si muovono. Attraverso un video,[5] gli allievi hanno dapprima dovuto scoprire quali potrebbero essere i possibili rapporti tra gli ingranaggi della bicicletta di un bambino di nome Riccardo e, con il più duro di essi, capire quanti giri completi dei pedali dovesse fare Riccardo per andare da casa a scuola. La scelta di inserire questa prima richiesta, non prettamente legata al mestiere del meccanico, è stata dettata da due esigenze: 5

- ancorare queste attività alla realtà di tutta la classe (5 alunni su 9 venivano a scuola in bicicletta e gli altri avevano tutti fatto l’esperienza di un giro in bicicletta);
- creare un passaggio graduale dai rapporti tra grandezze omogenee (che i ragazzi avevano compreso bene) e i più difficili rapporti tra grandezze non omogenee.

In seguito alla visione di un altro video[6] nel quale si vede Riccardo immerso nella sua attività lavorativa, gli allievi hanno potuto affrontare quattro diverse sfide legate al mondo dell’officina meccanica, toccando i seguenti argomenti: 6

- la concentrazione percentuale volume su volume di una soluzione;
- la conversione tra unità di misura della pressione (bar, atmosfere e Pascal);
- la densità di diversi liquidi tipici del lavoro con le auto;
- il consumo di diverse macchine.

5. Il video è tratto da https://collezioni.scuola.zanichelli.it/collections/category:matematica-secondaria-di-primo-grado
6. Il video è disponibile in: https://www.youtube.com/watch?v=iPFLfl_6LWQ

Tempistiche e materiale

Questa attività ha richiesto 2 ore-lezione per il suo svolgimento e una breve ripresa nella lezione successiva per rispondere ad alcune domande riguardanti la concentrazione percentuale volume su volume di una soluzione e la conversione delle unità di misura relative alle pressioni. Per lo svolgimento di quest'attività è stato necessario l'utilizzo della lavagna interattiva per la visione dei due video.

Tracce del lavoro fatto in classe

Il mestiere del meccanico ha fortemente motivato uno dei due allievi che aveva segnalato questa professione come quella dei suoi sogni: questo allievo, infatti, molto debole matematicamente e che fatica a mantenere la concentrazione, è stato l'elemento trainante del suo gruppo durante lo svolgimento dell'attività.
Il secondo video dell'attività, dal titolo "il lavoro che vorrei", ha fatto riflettere la classe sul passaggio dal mondo della scuola al mondo del lavoro. In particolare, alcuni studenti sono rimasti colpiti dalle affermazioni di Riccardo che nel video dice che «non è proprio tutto come ti dicono a scuola e sei tu che devi andare a capire qual è il problema della macchina». Riccardo consiglia di «aprire la propria mentalità e imparare giorno dopo giorno. Ci vuole umiltà perché serve esperienza e l'esperienza si fa col tempo». Gli allievi hanno successivamente iniziato a lavorare su alcuni esercizi legati all'officina, ma in un paio di gruppi gli allievi hanno continuato a discutere ancora di questo argomento, lavorando in seguito con grande entusiasmo.
Due delle attività (quella riguardante la concentrazione volume su volume e quella riguardante le unità di misura della pressione) sono state percepite come un po' più difficili delle altre. Diversi gruppi le hanno lasciate da parte e sono state riviste insieme in un secondo momento grazie all'aiuto di un allievo che era riuscito a svolgerle. Uno dei futuri meccanici ha detto che proporrà a tutte le case automobilistiche di scrivere la pressione delle gomme in bar direttamente sulle portiere delle macchine per non dare lavoro matematico in più ai meccanici.
Analogamente all'attività del fisioterapista, si può notare dalla **Figura 4** come gli allievi abbiano da un lato risolto in modo corretto il problema, ma d'altro canto abbiano perso ogni formalità (ad esempio mancano le unità di misura e spiegano «ho fatto 3 km/300'000cm», mettendo il simbolo "/" anziché il corretto simbolo di uguaglianza). Sembra emergere come, "entrando" nella situazione, prevalga l'aspetto procedurale su quello formale.

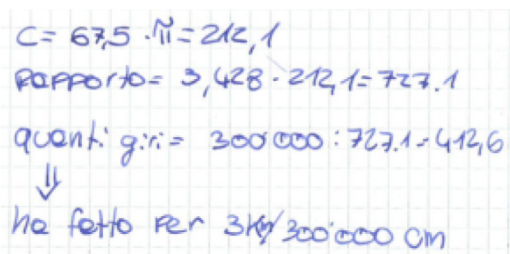


Figura 4
Il protocollo di un'allieva.

I maschi, appassionati di autovetture, hanno contestato la scelta delle auto nell'ultima parte dell'attività, affermando che non erano realmente delle "belle" auto. Sfruttando il computer in aula, gli allievi hanno potuto cercare i consumi delle auto dei loro sogni che si sono rivelate molto più dispendiose della Mazda, costringendo così gli allievi a rassegnarsi sulla scelta iniziale. È stato però interessante vedere come

svolgevano le ricerche in rete, mostrando di avere una buona dimestichezza con i siti di confronto delle auto e, allo stesso tempo, si è messo in luce come siti diversi portino consumi leggermente diversi.
Questa situazione – problema riguardante la professione del meccanico andrebbe in parte rivista cercando, da una parte, di darle una maggiore coesione interna (è stata percepita da alcuni allievi come una serie di esercizi scollegati tra loro) e, dall'altra, di trovare attività più accessibili per un corso base di matematica.

Ulteriore attività di approfondimento sul tema

Relativamente al mestiere del meccanico, gli allievi hanno anche svolto un'attività riguardante la lettura e la stesura di una fattura: tale proposta si situa all'interno di un itinerario didattico nell'ambito di competenza *Grandezze e misure*, relativa al tempo espresso sia nel sistema metrico decimale sia nel sistema sessagesimale. Gli allievi hanno fatto un po' fatica con questa attività ed è emersa in modo evidente la classica misconcezione 1,5 ore = un'ora e 50 minuti. È risultato quindi necessario riprendere bene in classe il confronto tra i due sistemi (decimale e sessagesimale). Il materiale didattico relativo a questa attività si trova nell'Allegato 6.

4.2.5. Quarto intervento: mestiere dell'informatico

La situazione – problema legata al mestiere dell'informatico, documentata nell'Allegato 7, è stata strutturata in attività che si alternavano tra carta e computer, basate sul sito https://studio.code.org/hoc/1.
Il corso a cui si accede dal sito web ha come scopo principale quello di imparare alcuni costrutti alla base della programmazione e della comunicazione in generale (se… allora…altrimenti…) e esplorare alcuni flussi che permettono la ripetizione ciclica di eventi *(ciclo for, ciclo while ecc.)*. Il programma utilizza un linguaggio di programmazione a blocchi (Blockly) che usa, appunto, blocchi colorati da unire tra loro per creare i programmi. In realtà si compone sempre un codice di programmazione.
Inoltre, si è optato per questo sito di coding sia perché utilizza personaggi dei cartoni animati noti agli studenti (Angry Birds, Era Glaciale) sia perché è corredato da video di alcuni VIP (Mark Zuckerberg, creatore di Facebook, Chris Bosch, campione dell'NBA).

Tempistiche e materiale

L'itinerario della durata di 3 ore-lezione ha richiesto l'uso dell'aula informatica (meglio se ogni allievo ha il proprio computer su cui lavorare) e l'utilizzo di cuffie in modo tale da consentire ad ogni allievo di procedere alla propria velocità, ascoltando i video in completa autonomia.

Tracce del lavoro realizzato in classe

La prima ora dedicata all'itinerario non si è svolta nel migliore dei modi: gli allievi sono stati molto poco indipendenti nel loro percorso di programmazione e alcuni di loro si sono mostrati annoiati, non comprendendo l'utilità dell'attività, quindi hanno chiacchierato e disturbato. I due allievi interessati al mestiere di programmazione e altri due ragazzi si sono divertiti e hanno proceduto velocemente, alternando attività al computer ad attività su carta, anche se si è dovuto controllare in maniera molto attenta che svolgessero correttamente le attività con l'ordine previsto.
Per riprendere il lavoro in modo migliore nella lezione successiva si è fornito a ciascuno allievo un feedback personale sull'operato dell'ora precedente, suggerendo

quindi come riprendere le attività. Inoltre, per ovviare al problema di poca autonomia degli allievi, si è optato per proiettare il seguente schema che illustra la corretta sequenza delle attività.

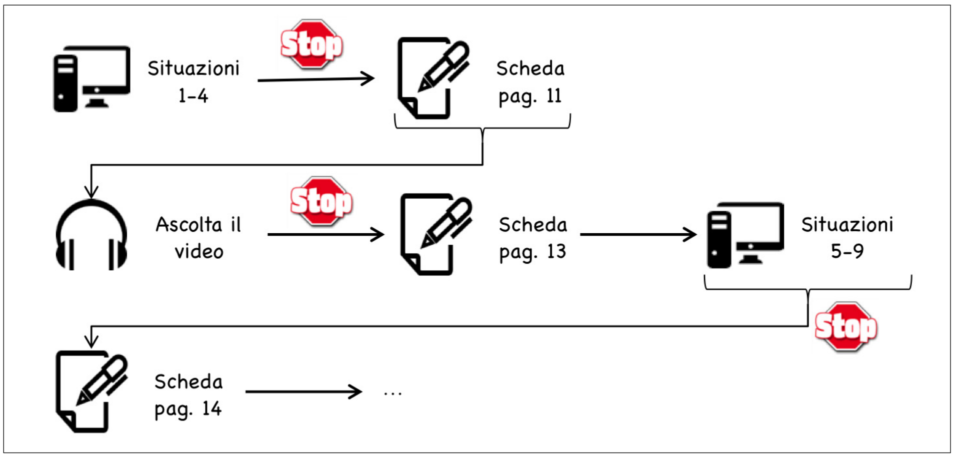


Figura 5
Schema proiettato alla lavagna per illustrare la corretta sequenza tra lavoro cartaceo e informatico.

Grazie a questi accorgimenti, gli allievi hanno lavorato in autonomia domandando solo qualche aiuto per le attività più difficili. I due allievi "informatici" hanno anche più volte domandato chiarimenti sul linguaggio di programmazione mostrando un sincero interesse nella parte tecnica. Uno di essi aveva anche aperto il traduttore automatico di Google e ha cercato i termini in inglese che non conosceva (come "path"), per comprendere bene il codice.

Ulteriore attività di approfondimento sul tema

L'attività aggiuntiva legata al mestiere di informatico si situa all'interno di un itinerario didattico nell'ambito di competenza *Grandezze e misure* sulla quantità di dati trasmessa o memorizzata all'interno di dispositivi elettronici e della velocità di trasmissione. Tale attività prevede, inoltre, alcuni esercizi marginali che permettono di contare il numero di sequenze con un certo numero di bit, coinvolgendo così anche l'ambito di competenza *Numeri e calcolo*. Tutto il materiale inerente a questa attività si trova nell'**Allegato 8**.

4.2.6. Quinto intervento: mestiere del veterinario

La situazione – problema legata al mestiere del veterinario, documentata nell'**Allegato 9**, ha messo gli allievi di fronte a tre attività legate al mondo animale. La prima riguarda la cura di un cavallo ferito: si domanda agli allievi di calcolare il costo dell'antibiotico necessario per curare l'animale e quanto ne verrà sprecato; si richiede quindi che gli allievi sappiano usare rapporti di grandezze non omogenee e percentuali. La seconda attività riguarda la riproduzione dei conigli e quindi la sequenza di Fibonacci: si ipotizza che gli allievi non abbiano mai visto tale sequenza prima d'ora, quindi viene riportata la storia tratta dal *Liber Abaci* di Fibonacci (tradotta in italiano) e li si aiuta fornendo loro una tabella che riporta il numero di coppie adulte, di coppie giovani e di coppie totali per i primi mesi e anche uno schema che illustra la riproduzione, sempre per i primi mesi. Gli allievi devono quindi comprendere il procedimento, continuare lo schema e la tabella e poi astrarre il procedimento finché sapranno dire dopo quanti mesi ci saranno in tutto esattamente 377 coppie di conigli. Infine, l’ultima attività è legata al pernottamento di animali in una clinica veterinaria e la conseguente decisione della veterinaria di come disporli nelle gabbie. Gli allievi non si erano mai approcciati a questi aspetti iniziali di calcolo combinatorio, perciò si è scelto inizialmente di lasciarli esplorare e procedere per tentativi per cercare una strategia di risoluzione adeguata e, in un secondo momento, mostrare loro l’albero delle possibilità.

Tempistiche e materiale

Tale attività ha richiesto 2 ore-lezione per il suo completo svolgimento e ha richiesto solo l’uso delle schede didattiche e di alcuni fogli bianchi per disegnare gli alberi delle possibilità.

Tracce del lavoro realizzato in classe

Per quanto concerne l’attività riguardante la sequenza di Fibonacci: solo 1 allievo su 9 ha dedicato del tempo per leggere attentamente l’estratto dal *Liber Abaci* di Fibonacci, tutti gli altri si sono invece concentrati con interesse direttamente sulla tabella o sul disegno per capire la logica.
L’attività riguardante il pernottamento degli animali ha colto gli allievi di sorpresa. Si sono lasciati gli allievi inizialmente liberi di cercare delle strategie risolutive: un gruppo ha proposto di elencare tutte le possibili permutazioni. Dopo una decina di minuti di ragionamenti nei singoli gruppi, si sono messe in comune le varie strategie emerse e infine si è proposto lo strumento che abbiamo chiamato “albero delle possibilità”. Questo è stato facilmente compreso da tutti gli allievi, che ne hanno colto la meccanicità, consentendo di lavorare molto bene per risolvere i problemi legati ai primi due giorni della settimana. Si è dovuto solo fare un ulteriore ragionamento in plenaria per modellizzare il pernottamento di più animali nella stessa gabbia. Alcuni allievi non hanno pensato bene a come dividere gli spazi sul loro foglio A4 per rappresentare gli alberi più grandi: questo ha quindi reso difficile rispondere adeguatamente ad alcune domande. Un’alunna non ha voluto rappresentare l’albero perché lo riteneva in questa attività inutile: ha lasciato lavorare le compagne su questo aspetto più meccanico e ha cercato altre strategie numeriche per rispondere ai quesiti. È riuscita a comprendere l’idea alla base delle permutazioni di 3 e 4 elementi, ma non ha saputo generalizzare ai casi più complessi. Poiché gli aspetti di formalizzazione del calcolo combinatorio sono argomento delle scuole medie superiori si è preferito non insistere troppo su questo approccio.

Ulteriore attività di approfondimento sul tema

È stata proposta anche un’altra attività legata al mestiere di veterinario che si situa all’interno di un itinerario didattico nell’ambito di competenza *Probabilità e statistica* – tale attività è documentata nell’**Allegato 10**. Si richiede agli allievi di saper leggere i dati del rapporto “Statistica sulla salute animale del 2016”, pubblicato ad aprile 2017, comprenderli e riorganizzarli in alcune tabelle per specie animale secondo alcune indicazioni percentuali fornite. Una volta compilate le tabelle, gli allievi dovevano autonomamente visionare un video che insegna come creare un areogramma in Excel e poi crearlo.
Questa attività è risultata difficile a causa della lettura dei dati iniziali e della loro riorganizzazione. Si potrebbe modificare cercando di dare più senso alla costruzione di areogrammi, facendo domande mirate di confronto tra le diverse specie animali.

4.2.7. Sesto intervento: mestiere dell'infermiere

La situazione – problema legata al mestiere dell'infermiere è stata incentrata sul cercare di quantificare alcuni numeri molto grandi legati al nostro corpo, in particolare quante volte il cuore batte in una vita media, quanto sangue viene spostato in un giorno e la somma delle lunghezze di tutti i vasi sanguigni di una persona. L'attività per gli allievi prende avvio dalla visione di un video tratto da Youtube dal titolo "Lo spettacolo del cuore",[7] nel quale vengono fornite diverse informazioni riguardanti il corpo umano, concernenti in particolare il cuore e il sangue. A partire da tre dati numerici forniti, gli allievi erano tenuti a svolgere tre attività: in primis dovevano confrontare il battito del proprio cuore misurato empiricamente con il battito medio previsto dal video; successivamente dovevano poi capire quanti contenitori cilindrici sono stati usati alla mostra Body Worlds di Gunther von Hagens per quantificare il sangue presente nel corpo in un giorno; infine, dovevano comprendere se l'unione di tutti i vasi sanguigni del corpo creano una cintura sufficientemente lunga per avvolgere l'equatore terrestre. Il materiale didattico inerente a questa attività si trova nell'**Allegato 11**.

Tempistiche e materiale

La situazione è durata 2 ore-lezione e ha richiesto solo un proiettore per vedere il video di input.

Tracce del lavoro realizzato in classe

La situazione dell'infermiere ha catturato l'attenzione di tutti gli allievi grazie al video iniziale sul cuore. I 3 allievi alloglotti arrivati nel 2016 in Svizzera hanno guardato e ascoltato con curiosità il video perché, essendo esonerati da scienze fino allo scorso anno, non conoscevano le informazioni contenute nel video. Gli altri allievi invece hanno ascoltato con attenzione e si sono mostrati molto pronti sull'argomento: hanno addirittura dato alcune informazioni in più sulla circolazione sanguigna e sui ventricoli del cuore.

Alla fine delle diverse attività ho ricevuto due interessanti feedback:

– un allievo ha affermato come sia riuscito a capire davvero quanto fossero "grandi" alcuni numeri scritti in notazione scientifica. Questa osservazione è particolarmente significativa perché indica come gli allievi riescano a imparare a passare dalla notazione scientifica a quella standard (e viceversa) e a fare anche calcoli con la notazione scientifica, ma poi non ne comprendano realmente l'utilità e le applicazioni in campo scientifico;
– un altro allievo ha affermato che, nonostante gli facesse impressione pensare di "mettere in fila tutti i suoi vasi sanguigni", era molto sorpreso dal fatto che formassero una cintura per la Terra. La collega di scienze (che ha avuto questo allievo l'ora successiva) ha poi riportato il fatto che ne abbiano continuato a parlare in classe. Questa considerazione mostra come l'interdisciplinarità sia veramente un punto a favore dell'educazione dei ragazzi.

Infine, in questa attività ho potuto notare una vera collaborazione in un gruppo: un allievo calciatore ha insegnato ai compagni quali sono i punti "strategici" per contare i battiti del cuore e ha aiutato un compagno, di solito chiuso e taciturno, a trovare il punto giusto nel polso cercandolo prima lui stesso sul polso del compagno e quindi mostrandoglielo.

7 Il video è disponibile in: https://www.youtube.com/watch?v=su8YKGGP-K0

7. Il video è disponibile in: https://www.youtube.com/watch?v=su8YKGGP-K0

Ulteriore attività di approfondimento sul tema

È stata proposta un'altra attività rientrante all'interno di un itinerario didattico concernente l'ambito di competenza *Numeri e calcolo*. Come si può vedere dall'**Allegato 12**, si richiede agli allievi di mettere in pratica le abilità acquisite nell'ambito delle percentuali per completare la tabella che dà le informazioni sul sangue prelevato a Martina in una analisi di routine e poi di partecipare a un quiz sulle percentuali trovato in internet previsto per gli studenti di infermieristica che richiede capacità di base sulle frazioni e sulle percentuali, la comprensione di alcune situazioni legate alla concentrazione di un principio attivo e la messa in pratica delle proprie conoscenze nel settore specifico.

4.2.8. Settimo intervento: mestiere del politico

La situazione – problema si basa sull'idea che un politico debba possedere un ampio bagaglio di strumenti scientifici e competenze specifiche indispensabili per la comprensione dei fenomeni economico-politici legati alla complessità del mondo in cui viviamo. Per questo motivo, traendo ispirazione da una situazione – problema ideata da due docenti della scuola media di Bellinzona 1 (Vittoria Bollini e Giovanna Lepori), si è deciso di proporre agli allievi di scoprire alcuni aspetti di 7 diverse nazioni al fine di riuscire a indovinare di quali nazioni si tratti. Tale attività ha richiesto una grande ricerca di dati attendibili e il più recenti possibili[8] al fine di costruire 5 schede differenziate, ciascuna su un aspetto da analizzare (demografia, educazione e cultura, economia, salute e territorio). La metodologia di lavoro cooperativo *jigsaw* è quella consigliata per tale attività: la classe viene divisa in 5 gruppi omogenei al loro interno, ciascuno dei quali si specializza su uno degli argomenti. Mettendo in comune tutte le informazioni, tramite una discussione collettiva che mette in evidenza i fattori rilevanti sotto i diversi punti di vista coinvolti per ogni nazione, si cercherà di indovinare il paese in questione. La scelta delle nazioni è legata alla conoscenza dei ragazzi (Svizzera, Italia, Germania, Francia e Austria) o alla provenienza (Afghanistan e Siria). Questa analisi vuole anche inserirsi in un contesto più ampio di educazione alla cittadinanza, cercando di sensibilizzare gli allievi a diverse problematiche del mondo in cui viviamo e della conseguente necessità di accogliere e integrare coloro che sono meno fortunati di noi (**Allegato 13**).

Tempistiche e materiale

L'attività è durata 2 ore-lezione e sono state utilizzate la lavagna interattiva e la lavagna standard per la messa in comune.

Tracce del lavoro realizzato in classe

Questa situazione – problema è risultata molto ricca. Gli allievi, suddivisi in cinque gruppi omogenei, si sono avventurati nell'indagare un particolare aspetto delle nazioni da scoprire. Ciascun gruppo ha cercato di elaborare una classifica delle nazioni secondo il criterio assegnato, ma si sono trovati in difficoltà a farlo perché ritenevano che alcuni dati potessero avere una molteplice interpretazione. Dal gruppo di quelli matematicamente più forti è arrivata la proposta di annotarsi le caratteristiche rile-

8

8. Tale ricerca è stata effettuata principalmente sui siti https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/ e http://www.google.com/publicdata/directory

vanti deducibili dai dati per ogni nazione, piuttosto che stilare una classifica. Così hanno proceduto tutti i gruppi e nella mezz'ora finale abbiamo creato un unico foglio che mettesse insieme tutte le informazioni dedotte. Utilizzando questi dati, e alcune altre informazioni generiche che tutti hanno ricevuto, gli studenti sono riusciti a indovinare di quali nazioni si trattasse. La classe ha interagito in maniera esemplare in queste due ore lezione e gli screzi tra compagni sono pressoché spariti poiché hanno capito che collaborare era fondamentale per riuscire nel compito. Inoltre, i ragazzi di una delle tre classi di provenienza si sono mostrati estremamente competenti sull'analisi dei dati e sul riuscire a fornirne un'interpretazione valida: da un confronto successivo con la docente di geografia è emerso infatti che il suo obiettivo per questi ragazzi era che riuscissero a ascoltare un telegiornale e leggere un giornale con occhio critico, facendosi un'idea propria della situazione.
La struttura portante di questa attività era stata ideata per il co-teaching unendo un corso attitudinale e un corso base. Per questo alcune attività erano molto più guidate di altre. A posteriori, sarebbe opportuno rendere più facili le attività dei gruppi 1-3 affinché un corso base riesca ad essere autonomo nello svolgimento. Per come era strutturata l'attività è stata necessaria una presenza e una guida costante durante il lavoro.

Ulteriore attività di approfondimento sul tema

Si è deciso di non fare un'ulteriore attività sul tema perché, in accordo con i docenti di geografia delle 3 classi di provenienza dei ragazzi, quello di conoscenza delle nazioni e di consapevolezza nella lettura e analisi di un quotidiano, è tra gli obiettivi di IV media della loro disciplina.

4.2.9. Presentazioni ad un'altra classe di IV media, corso base

Come conclusione del percorso, ciascun allievo, eventualmente in coppia con un compagno che aveva scelto lo stesso mestiere, ha preparato una presentazione per un altro gruppo di corso base sui mestieri che avrebbero svolto l'anno successivo. Era obbligatorio includere nella presentazione quale fosse la formazione post-obbligatoria da seguire per svolgere il suddetto mestiere e quale matematica sarebbe stata presente. Gli allievi hanno lavorato duramente nelle 4 ore di preparazione di tali presentazioni, facendo ampie ricerche sui diversi aspetti legati al loro mestiere. Il giorno della presentazione gli allievi erano quasi tutti molto agitati, perché sapevano che sarebbero stati valutati sulla presentazione stessa dai compagni sulla base di criteri scelti da loro stessi:

- la presentazione era completa (cioè c'erano tante informazioni sugli argomenti e il presentatore le ha sintetizzate bene);
- il presentatore guardava il pubblico negli occhi (non il foglio);
- il presentatore era chiaro nella spiegazione;
- l'esposizione era accattivante;
- il relatore mostrava sicurezza (non si muoveva troppo, non tremava…).

Gli allievi hanno preso con serietà queste presentazioni e anche il pubblico è stato ricettivo e partecipe, facendo domande pertinenti, frutto di sincera curiosità. A posteriori hanno tutti affermato che, nonostante fossero timorosi, è stata una bella esperienza formativa poter prima approfondire il proprio mestiere e poi raccontare quello che hanno imparato.

4.3. Questionario finale

La struttura del questionario finale, somministrato al termine del percorso descritto, è analoga a quella del questionario iniziale, suddivisa in due parti. La seconda, in particolare, è servita per poter trarre delle conclusioni sul lavoro proposto. Nel dettaglio, si è voluto indagare un eventuale cambiamento nella scelta degli allievi sul mestiere che andranno a fare e cosa ha fatto loro cambiare o confermare l'opinione. Inoltre, si è domandato se credevano di dover ancora imparare qualcosa, se si sentivano preparati per la nuova sfida e se ritenevano che vi potessero essere degli ostacoli. Infine, le ultime tre domande si concentravano sugli aspetti matematici che gli allievi percepivano di trovare nei mestieri che pensano di fare: si è chiesto se credevano che ci fosse della matematica, quali sarebbero stati gli argomenti matematici più utili e se ritenevano di saperli adeguatamente padroneggiare.

Dai risultati[9] è emerso che gli allievi si sono resi conto che la matematica permea il mondo e dunque sarà in qualche modo presente in tutti i loro futuri mestieri. Nel preparare la presentazione finale da proporre ai compagni della scuola, inoltre, hanno avuto il tempo per approfondire il loro mestiere grazie a ricerche sul sito www.orientamento.ch e insieme abbiamo riflettuto con molti di loro riguardo ad eventuali esemplificazioni qualora avessero scelto di svolgere un mestiere diverso rispetto a quello inizialmente indicato.

Inoltre, osservando lo svolgimento delle diverse attività proposte, si è notato come gli allievi si siano immedesimati molto nelle situazioni: non facevamo più "matematica" ma entravamo in una realtà lavorativa. Pertanto, si ritiene che essi abbiano acquisito una migliore consapevolezza su quali siano gli argomenti e gli ambiti disciplinari maggiormente coinvolti nei loro possibili futuri mestieri e, allo stesso tempo, sia aumentata la loro motivazione nello studio di questi stessi argomenti.

5 Conclusioni

I risultati emersi dal confronto tra il questionario iniziale e quello finale e dall'osservazione continua in classe mostrano che la metodologia di lavoro tramite situazioni – problema riguardante il mestiere auspicato ha permesso agli allievi di acquisire maggiore consapevolezza e di migliorare la percezione della propria autoefficacia. Le attività legate ai mestieri sono sempre state sfide contestualizzate alla portata degli allievi: hanno suscitato interesse e adesione, gli allievi si sono mobilitati per elaborare in gruppo strategie e soluzioni. Inoltre, spesso vi è stato lo spazio per una riflessione metacognitiva, alla ricerca del senso della situazione proposta.

Gli allievi hanno inoltre affermato di aver beneficiato delle occasioni di riflessione sui mestieri segnalati nel questionario iniziale e i loro legami con la matematica. Un limite di questo lavoro è stato la sua poca flessibilità: negli ultimi anni di scuole medie gli allievi svolgono diversi stage e, solo dopo svariati cambiamenti, affinano la loro idea sul mestiere che idealmente svolgeranno. Pertanto, sarebbe più utile per gli allievi se in qualche modo si potesse tenere in considerazione il loro intero processo decisionale, proponendo attività legate ad un maggior numero di mestieri. Questo

9. Si veda il lavoro di diploma completo al link http://tesi.supsi.ch/2183/ per ulteriori dettagli.

chiaramente è difficilmente applicabile per due motivi: si rischia di non riuscire a svolgere il programma previsto per la disciplina e di non avere il tempo per progettare varie situazioni in base ai cambi decisionali. Un possibile sviluppo di questo lavoro potrebbe essere di pensare di inserirlo all'interno del progetto di Educazione alle Scelte previsto nelle scuole medie del Canton Ticino, ampliando questo progetto sui quattro anni.
Altro limite di questo lavoro è stata la scelta personale di non valutare le singole attività: si sarebbero potute valutare tramite delle rubriche valutative che sarebbero quindi andate oltre la sola verifica di conoscenze o abilità. Valutare per competenze le singole attività potrebbe essere un possibile ulteriore sviluppo, anche se, in tal caso, bisognerebbe prestare attenzione al fatto che la valutazione (anche se formativa) non distolga l'interesse degli allievi dalla situazione, inficiando l'immedesimazione nel mestiere.
Questo lavoro ha certamente permesso di approfondire il legame tra la matematica e molti mestieri e di cercare di dare ancora più senso alla disciplina che insegno, avvicinandola ad allievi che in essa hanno delle grandi difficoltà. Ciò su cui infatti si è deciso di puntare maggiormente l'attenzione è permettere agli allievi di raggiungere uno dei traguardi di competenza previsti al termine del 3° ciclo per la matematica:

> «L'allievo manifesta, con sempre maggiore convinzione, un atteggiamento positivo rispetto alla matematica per mezzo di esperienze significative e comprende come molti dei saperi matematici appresi siano utili per operare nella realtà».
>
> (DECS, 2015, p. 149)

Bibliografia

Castoldi, M. (2015). *Didattica Generale*. Milano: Mondadori Education.

Comoglio, M. (2004). *Insegnare e apprendere con il Portfolio*. Milano: Fabbri Editore.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*, (consultato in agosto 2017). Tratto da http://www.pianodistudio.ch

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics So as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*(1/2), 3-8.

Autore/Monica Ronco
Docente di matematica della Scuola Media di Gordola – Svizzera
monica.ronco@edu.ti.ch

Recensioni

DdM

Lolli, G. (2018). *La matematica come narrazione. Raccontare la matematica*. Bologna: Il Mulino.

> «Quello che fa buona una poesia, una grande poesia,
> è che in essa c'è una ingente quantità di pensiero
> espressa in poche parole. Le formule sono come le poesie»
> Lipman Bers

Fra le molte, e di vario argomento, nostre letture estive, quest'anno c'è stato anche un bel libro di Gabriele Lolli, intitolato *Matematica come narrazione* (sottotitolo, appunto, *Raccontare la matematica*). Gabriele Lolli, studioso di logica e di filosofia della matematica, è uno dei non molti matematici italiani che posseggano, e volentieri esercitino, una prolifica capacità di scrittura rivolta anche al grande pubblico dei non specialisti (purché, naturalmente, siano abbastanza colti e curiosi). Negli anni più recenti, Lolli sembra particolarmente attratto dall'interrogarsi sui rapporti – che valuta, giustamente, molto stretti anche se troppo spesso ignorati dal mondo della scuola – fra matematica e letteratura: ha pubblicato, infatti, *Discorso sulla matematica. Una rilettura delle 'Lezioni americane' di Italo Calvino*, Bollati Boringhieri, Torino, 2011, *Ambiguità. Un viaggio tra letteratura e matematica*, Il Mulino, Bologna, 2017 e adesso questo *Matematica come narrazione. Raccontare la matematica*, Il Mulino, Bologna, 2018.
Per illustrare sinteticamente – com'è doveroso in una recensione – il contenuto di questa più recente opera – la quale, come avverte fin dall'inizio il suo autore, parla molto «di matematica e soprattutto di dimostrazioni» – utilizzeremo ampiamente la Premessa, breve ma succosa, che egli stesso pone all'inizio di essa. Scrive Lolli:

> «Lo scopo della riflessione qui proposta è quello di mostrare e convincere che il modo naturale di concepire una dimostrazione è costruirla come un racconto... Raccontare la matematica non vuol dire parlare dell'ambiente, delle persone che si sono dedicate alla matematica, creandola o insegnandola, delle loro vedute. I matematici non sanno la storia d'ieri (come i figli dei partigiani nella canzone *Oltre il ponte* di Italo Calvino) e neanche la vita di coloro di cui citano i teoremi. Raccontare non significa neanche fare un riassunto di quello che ormai è acquisito, fuori discussione e inanimato: questa forse è divulgazione. Raccontare la matematica significa esporne il contenuto reale, spiegarla».

Il senso degli eventi – così matematici come anche storici o artistici o letterari – sta proprio nei racconti che li spiegano, li riferiscono, li raccontano appunto. In tal senso, citando e condividendo un libro di Apostolos Doxiadis (che è un matematico e un narratore greco), Lolli scrive:

> «Doxiadis presuppone che la disponibilità a narrare, nel senso di rappresentare azioni e stati, sia una capacità cognitiva di base; egli vede nell'antica Grecia un espandersi della manifestazione di tale capacità che muove dalle storie poetiche a quelle storiche all'argomentazione retorica e alla dimostrazione matematica...».

Senza racconto, senza narrazione, tali eventi diventano materiali inerti, muti, inutilmente silenti. Lolli aggiunge, a questo proposito:

> «Come ci confortano anche i critici letterari che discutono di fantasia creativa (…) anche la matematica, imprigionata nei suoi simboli e nelle sue figure, non dice nulla né a chi la inventa né a chi l'ascolta, se il suo senso non è raccontato in una storia. (…) L'essere umano non è un animale razionale ma essenzialmente un animale affabulatore, che si esprime raccontando storie. (…) Non potrebbe un matematico raccontare storie per dare un senso al suo lavoro? Se prova a esprimerne il senso, non può che iniziare una narrazione nella quale si mescolano intenzioni, obiettivi, progetti, desideri, conoscenze, azioni, convenzioni, interpretazioni. Queste sono le passioni che lo guidano».

La matematica, così creata da un io narrante, utilizza le forme espressive che le sono offerte dalla tradizione culturale in cui si è sviluppata. Esse sono varie, come avviene anche in letteratura, la quale trova a propria disposizione così il romanzo come il racconto breve come la poesia in versi e così via. Prosegue Lolli:

> «Particolarmente pertinente per la matematica è il modello della fiaba. Le fiabe sono una guida spirituale dell'umanità, insieme ai racconti fantastici e alla poesia, poiché sono un deposito di mondi inventati, mondi in parallelo o intrecciati a quello in cui viviamo, senza temere le palesi incoerenze; i mondi possibili rivelano il modo come gli esseri umani hanno vissuto, pensato, sperato, capito o contestato quello che era intorno a loro».

Anticipando le conclusioni a cui il proprio libro condurrà i lettori, Lolli chiude la Premessa in maniera quasi solenne e comunque assai affascinante:

> «Dobbiamo crescere anche noi senza fratture dall'età delle fiabe a quella della conoscenza scientifica. Se si studia l'evoluzione della civiltà occidentale, si riconosce che tra la letteratura e la matematica non sussiste solo un'analogia ma un'influenza diretta: dai miti cosmogonici all'epica omerica, alla lirica, alla tragedia greca, alla retorica e alla storia i greci hanno raffinato e perfezionato linguaggio e ragionamento, fino a codificare la logica; le tracce di questo percorso portano diritte alle dimostrazioni di Euclide, dove si vedono all'opera le prime regole logiche la cui ascendenza nella poesia e nella retorica è documentabile e trasparente».

Un bel libro, insomma, la cui lettura consigliamo vivamente a chiunque si interessi, tanto più se professionalmente le deve insegnare, così di matematica come di letteratura, in tal modo facendo comprendere ai loro allievi come i canali di scambio e di comunicazione tra le cosiddette due culture siano, e soprattutto siano sempre stati, aperti e vasti e reciprocamente arricchenti.

P.S.

Omaggio a due matematici

Vogliamo cogliere l'occasione della recensione del libro di Gabriele Lolli, che tratta del raccontare la matematica e dunque anche dei rapporti tra matematica e letteratura, per rendere omaggio a due matematici ossia Maurice e Michéle Audin. Algerino lui, docente presso l'Università di Algeri, nel 1957 fu nottetempo sequestrato – in quanto sospettato di collaborazione con il FLN – da un gruppo di paracadutisti francesi, ferocemente torturato e poi scomparso per sempre. Franco-algerina lei, sua figlia – aveva tre anni all'epoca del rapimento mortale – e anch'ella docente di matematica (prima all'Università di Parigi-Sud e poi di Ginevra) e ricercatrice in geometria simplettica (una branca della topologia differenziale) presso l'IRMA (Istituto di Ricerca Matematica Avanzata presso l'Università di Strasburgo) nonché narratrice di vari romanzi (mai tradotti in italiano) e membro dell'Oulipo (la nota associazione, di cui fece parte anche Italo Calvino, di matematici e letterati intenzionati ad esplorare il potenziale creativo della reciproca collaborazione). Michéle peraltro, per tutta la sua vita, oltre che di matematica e di letteratura si è occupata della ricerca della verità sulla morte del padre ossia di costringere il governo francese a riconoscere le responsabilità dirette dei proprio esercito nella tortura e negli omicidi commessi durante la lotta di liberazione algerina. Nel 2009, a causa della mancata risposta alle molte lettere inviate da Josette, la vedova di Audin, la figlia rifiutò sprezzantemente la Legione d'onore, assegnatale per i suoi meriti scientifici. Finalmente, il 13 settembre di quest'anno, il presidente francese Emmanuel Macron, facendo visita alla signora Josette, le ha chiesto perdono a nome della Repubblica Francese, dichiarando ufficialmente che suo marito «è morto sotto la tortura, la quale fu istituzionalizzata in Algeria dalla Francia». Michéle Audin ha alfine risolto il più grande teorema cui abbia mai lavorato: quello della ricerca sulle cause della morte di suo padre, avvenuta 61 anni fa.

Maria Paola Nannicini e Stefano Beccastrini
Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica
e Divulgazione della Matematica, Italia

D'Amore B., Sbaragli S. (2018). *La matematica e la sua storia. Dagli ultimi bagliori della Grecia antica alla fine del Medioevo*. Bari: Edizioni Dedalo.
La matematica è considerata una delle massime espressioni del pensiero umano e, con l'introduzione del metodo scientifico galileiano, la regina di tutte le scienze. Eppure, troppo spesso, vive una sorta di isolamento culturale. Nella scuola superiore, la separazione, del tutto ingiustificata, tra le discipline umanistiche e quelle scientifiche è particolarmente marcata. Nei percorsi universitari ci si concentra soprattutto sugli aspetti tecnici e formali della matematica, se non si considerano gli indirizzi di studio che richiedono gli approfondimenti storici e fondazionali. Occorre ricordare che la matematica è un'esperienza umana, inscindibile dal clima sociale, storico e culturale in cui è nata e in cui successivamente si è sviluppata. Un clima fatto di visioni del mondo, convinzioni, credenze, valori, passioni, bisogni ideali e materiali … Per dirlo con le parole di Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, tratte dalla premessa al primo volume de *La matematica e la sua storia*, «per noi la matematica è un umanesimo».
Senza questa consapevolezza, perdiamo la ricchezza e la profondità della matematica che, non a caso, è troppo spesso considerata una disciplina arida, un mero calcolo formale. Invece, come ci insegna Luis Radford, la matematica è un'attività umana che si sviluppa in virtù dell'utilizzo di artefatti culturali, materiali e ideali. La complessa trasformazione di segni che caratterizza il pensiero matematico non può e non deve dimenticare che tali segni condensano il lungo e millenario percorso che l'uomo ha compiuto nell'interpretare e dare significato matematico alla sua esperienza del mondo. La scuola spesso dimentica la densità culturale intrinseca ai segni e agli

artefatti utilizzati nella pratica matematica in aula, con due conseguenze importanti sull'apprendimento degli studenti:

– allo sviluppo cognitivo dell'alunno mancano alcuni passaggi chiave per costruire la complessa rete concettuale che caratterizza il sapere matematico;
– gli allievi percepiscono la matematica come arida, insignificante e "disincarnata", e la studiano con una relazione affettiva negativa caratterizzata da rifiuto, paura, mancanza di motivazione e volizione.

Questo secondo volume de *La matematica e la sua storia* introduce il lettore alla ricchezza e alla profondità della matematica, accompagnandolo nella complessità del suo sviluppo storico che include aspetti filosofici, scientifici, letterari, artistici, politici … Se il primo volume ha analizzato lo sviluppo della matematica dalla sua nascita fino alle vette raggiunte dalla matematica greca, il secondo ne descrive gli ultimi bagliori per spostare poi l'attenzione del lettore su quella etrusca e latina fino al Medioevo. È particolarmente interessante la parte dedicata alla matematica dell'Asia (India e Cina) e delle Americhe (Maya, Aztechi e Inca). Uno sguardo interculturale che apre interessanti considerazioni concettuali, didattiche e pedagogiche.

Il testo permette di rivivere la genesi dei più importanti concetti matematici e di considerarli da più punti di vista, tenendo come riferimento l'essere umano, sempre inserito nel suo specifico contesto sociale, storico e culturale. Per esempio, l'opera permette un confronto tra la logica aristotelica, quella megarico-stoica e la logica indiana *nyaya*. Un confronto che, oltre all'interesse storico e concettuale, apre considerazioni molto profonde sulla didattica della dimostrazione. Lo stesso vale per il confronto, che l'opera permette di sviluppare, tra il concetto di numero nelle diverse civiltà; trovo di particolare interesse didattico l'approfondimento sullo sviluppo dei sistemi di numerazione nelle Americhe proprio per la profondità delle riflessioni sugli aspetti concettuali, algoritmici e semiotici dell'apprendimento che se ne possono ricavare e utilizzare in classe.

Gli aspetti matematici sono spiegati in modo chiaro ed esaustivo, rimandando anche ad una ricca bibliografia. Il testo può essere letto come una storia della matematica ma anche come un libro di storia narrato con gli occhi della matematica.

Un libro che mi sento di consigliare a chiunque nutra interesse per la matematica, in particolare al docente di matematica. Egli potrà approfondire la sua preparazione disciplinare e, al contempo, trovare spunti per migliorare la propria didattica e strumenti per comprendere alcune delle difficoltà di apprendimento dei suoi studenti.

Giorgio Santi
Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica di Bologna, Italia

Prieto Fandiño, J. L. (2018). *La componente rappresentativa dell'architettura*. Bologna: Pitagora.

Fra tutti i domini artistici, l'architettura è quella che maggiormente usa conoscenze geometriche. L'originalità di questo libro è di guardare alla grande diversità delle rappresentazioni che devono essere messe in atto prima che inizi la costruzione di un'opera destinata a compiere una funzione simbolica, culturale o economica nella vita sociale. Queste rappresentazioni, che vanno dalla concezione alla costruzione dell'opera, sono rappresentazioni semiotiche, alcune ovviamente geometriche e le altre, altrettanto importanti, no. Questo fatto pone tre domande per capire il lavoro

di creazione e produzione in architettura. Quali tipi di rappresentazioni semiotiche? Per quale funzione esse vengono prodotte? Infine: In quale ordine il lavoro di creazione progredisce, fino alla costruzione reale?
Questo libro si concentra sulle prime due domande. Tutte le rappresentazioni prodotte per l'elaborazione e la realizzazione di un progetto sono analisi in funzione di tre tipi di attività cognitivamente ed epistemologicamente diverse: vedere, rappresentare e costruire. Ciò porta a privilegiare la questione della funzione delle rappresentazioni rispetto a quella della loro natura, come i singoli titoli dei capitoli opportunamente indicano. E, attraversando tutti i capitoli, si ritrova proprio la varietà semiotica delle rappresentazioni prodotte: rappresentazioni iconiche strumentalmente disegnate per il piano di un edificio o per la sua facciata; schemi non iconici a mano libera per evocare la forma globale vista in prospettiva; figure geometriche per calibrare, per esempio, il rigonfiamento delle colonne in modo tale che, a distanza, esse appaiano perfettamente diritte; prospettiva cavaliera dei solidi che saranno costruiti; ecc. L'ultimo capitolo, e soprattutto le pagine 97–100, fornisce una risposta alla terza domanda sistemando, secondo un ordine logico, i diversi tipi di rappresentazioni semiotiche prodotte per elaborare e realizzare un progetto in architettura.
La lettura di questa opera solleva due domande.
La prima riguarda l'ordine logico presentato. Non potrebbe essere quello opposto? Perché è necessario partire dal modo in cui l'opera, quando sarà materialmente costruita, apparirà allo sguardo dall'esterno, e anche all'interno, quando vi si entrerà. In definitiva, non ci potrebbe essere un'interazione tra la fase finale e ciascuna delle fasi precedenti?
La seconda domanda è essenziale e va ben oltre il lavoro dell'architetto, perché tutte le rappresentazioni sono semioticamente di natura diversa. Alcune sono rappresentazioni piane (2D/2D) e altre sono rappresentazioni in prospettiva (3D/2D). Inoltre, alcune sono rappresentazioni iconiche, altre sono schemi e altre ancora sono figure geometriche. In che modo tutte queste rappresentazioni si articolano l'una con l'altra per mostrare o concepire quello stesso oggetto che sarà poi l'edificio costruito?
Queste domande mostrano le strade che forse questo libro apre per la ricerca non solo in didattica dell'architettura, ma sicuramente per quella sull'insegnamento della geometria.

Raymond Duval
Université du Littoral-Côte-d'Opale, Francia

Benuzzi, F. (2018). *La legge del perdente: la matematica come vaccino contro l'azzardopatia*. Bari: Edizioni Dedalo.
Chi ha visto uno spettacolo di Federico Benuzzi sa che quest'uomo poliedrico – insegnante, giocoliere e divulgatore – riesce a svolgere con garbo e rigore una lezione di fisica mentre esegue esercizi di giocoleria impressionanti. Chi non conosce il soggetto, invece, resterà sorpreso nel leggere questo libro, in cui l'autore snocciola con noncuranza argomenti di combinatoria mentre ci porta a spasso fra i portici e i locali della sua amata Bologna. Con lui ci sono Fazioli, un pensionato che Federico teme sia preda del demone del gioco, e Andrea, un giovane e sveglio barista. L'autore dichiara fin dall'inizio, arginando così le accuse di plagio da parte di Galileo, chi sia il Salviati della situazione; Sagredo e Simplicio si mescolano invece in entrambi gli interlocutori di Federico.

La campagna bellica dell'autore è rivolta contro quella che chiama "azzardopatia"; infatti come può un giocoliere come lui parlare di "ludopatia", cioè parlare del gioco come qualcosa che ci fa star male? Uno per uno vengono analizzati i luoghi comuni, le false credenze a cui i giocatori d'azzardo si affidano per giustificare la propria rovina. Con tono lieve Federico ci fa fare i conti, riporta episodi, costruisce confronti che non lasciano dubbi; ci rivela gli sporchi trucchi psicologici con cui chi gestisce Gratta-e-vinci o slot machine ci fa credere di essere vicini ad una vincita importante.
Quando ho avuto occasione di parlare con l'autore del suo libro, gli ho spudoratamente chiesto se davvero ci fosse bisogno di un altro trattato sull'argomento. La risposta è stata che era lui, Federico, a sentire il bisogno di scriverlo, sapendo di tante vite rovinate da questa dipendenza dilagante, anche nell'inquietante consapevolezza che le istituzioni, lungi dal combatterla, addirittura la favoriscono.
Quanto al bacino di utenza, appare chiaro che sia soprattutto quello degli insegnanti: molto spesso Federico parla in tono ispirato della natura profonda dell'insegnamento; inoltre, solo a un collega potrebbe ragionevolmente proporre tutta quella mole di calcolo; sarà poi l'insegnante stesso a selezionare e dosare conoscendo la propria classe.
L'organizzazione del libro è graduale: ci fa ragionare in termini di probabilità su un dado e su testa-o-croce, poi ci aiuta a capire e valutare la grandezza dei numeri al di là della loro semplice espressione in cifre. Dedica molta cura a farci capire la differenza fra impossibile e improbabile e a leggere correttamente le statistiche. Pian piano, i calcoli si fanno più complessi, si contano anagrammi (anche con lettere ripetute!) spunta perfino il segno di limite, ma l'autore, con i suoi due compari, riesce a sdrammatizzare e a farci arrivare "da soli" a conclusioni ineccepibili. Con coraggio, riconosce che ci sono stati casi sporadici di metodi per vincere, ma rivela che erano legati ad anomalie o a difetti che poi sono stati eliminati. L'autore è giustamente impietoso nei confronti degli inganni psicologici che però si mantengono nei confini della legalità. Ridendo e scherzando, alla fine del libro abbiamo passato al microscopio Superenalotto, Win for Life, roulette, poker e molto altro. Gli esempi pratici sono molti e significativi; il mio preferito è quello del polpo Paul; ve lo ricordate? Era quell'animale che indovinava i risultati delle partite dei mondiali di calcio del 2010; bene, facendo un semplice conto vediamo che la probabilità di questo successo combinato, che fece scalpore in tutto il mondo, è di 1/256, quindi maggiore della probabilità di fare un misero 3 al Superenalotto.
Concludendo, il libro è una lettura piacevole di per sé, e che ha l'ulteriore vantaggio di fornire argomenti di riflessione e magari strumenti professionali a insegnanti sensibili e attenti a fare della matematica anche uno strumento per svincolare la realtà da atteggiamenti ingenui e superstiziosi.

Massimo Ferri
Università di Bologna, Italia

Zellini P. (2018). *La dittatura del calcolo*. Milano: Adelphi, VIII edizione.
È un libretto della collana Piccola Biblioteca, impegnativo e affascinante. Di che cosa parla? Dell'algoritmo, o, meglio, degli algoritmi, poiché questo oggetto del pensiero, dalla sua nascita all'interno della matematica come procedimento di calcolo numerico, ha conosciuto uno sviluppo incredibile dentro e fuori dalla matematica, aprendo

tematiche filosofiche e sociologiche attualmente di fondamentale importanza nelle attività umane.
Cosa del tutto nuova per un concetto così complesso è il fatto che, grazie soprattutto al ruolo che ha assunto in informatica e quindi nelle applicazioni della vita quotidiana (previsioni meteorologiche, diagnosi mediche, indagini di ogni genere, e via dicendo), il vocabolo "algoritmo" è entrato nel linguaggio comune. Molte interpretazioni che concernono la vita di tutti vengono fatte risalire a un algoritmo. Da un lato il fenomeno è affascinante e rappresenta uno dei risultati più eclatanti della creazione umana; dall'altro però – e questo ce lo fa ben capire l'Autore in molti passaggi della sua opera – è preoccupante, tocca il tema centrale del rapporto uomo-macchina fino ad arrivare al punto nevralgico, a sapere fino a quando l'uomo potrà mantenere il controllo degli odierni algoritmi sempre più raffinati e invasivi.
A grandi linee, il discorso che Zellini ci propone tocca importanti tematiche della società odierna e le collega in modo opportuno ad elementi di storia del pensiero umano, mostrando come i frutti dell'albero della scienza hanno sempre radici molto lontane nel tempo.
Agli inizi gli algoritmi furono pensati come procedimenti di calcolo (i primi cenni risalgono ad almeno quattro millenni fa, alla civiltà babilonese, e concernevano soprattutto la costruzione di altari), come quelli a noi familiari del calcolo indo-arabico (a scuola detti "operazioni in colonna"). Questi algoritmi antichi ci fanno ricordare il matematico e astronomo arabo al-Khwarizmi (IX secolo), con le sue algebra (*al-jabr*) e *muqabala*, (tecnica basilare di risoluzione delle equazioni) dal quale si fa appunto risalire il termine "algoritmo". Dalle nostre parti gli algoritmi arabici, relativi alle quattro operazioni dell'aritmetica, giunsero solo nel XIII secolo grazie a Leonardo Pisano (noto per lo più col soprannome di Fibonacci) e impiegarono la bellezza di due secoli per diventare conoscenza comune. Ma Fibonacci lo si ricorda anche per il suo famoso problema della riproduzione dei conigli, che introduce una novità nell'algoritmo risolutivo: la ricorsività della successione espressa dalla formula $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ con i valori iniziali $f(0)=0$ e $f(1)=1$. Questa successione è *effettivamente* calcolabile per qualunque valore di n, ma ci si può chiedere se il calcolo è anche *efficiente*, cioè se è eseguibile in un numero finito (ragionevolmente limitato) di operazioni. Nel caso della successione di Fibonacci si conosce anche una forma analitica di $f(n)$, ma ciò non vale per tutte le successioni ricorsive. Inoltre il risultato è funzione del numero aureo Φ, notoriamente irrazionale e quindi aritmeticamente esprimibile con un serie infinita di cifre, che costituisce un problema per il calcolo digitale. La questione è attuale perché distinguendo tra *effetto* (procedura) e *valore* (risultato di un calcolo «che si svolge nel tempo e nello spazio di memoria del *computer*») si arriva a capire come oggi per aumentare l'efficienza risolutiva non sia sufficiente costruire computer sempre più potenti ma spesso è più utile concentrarsi sulla dimensione dell'algoritmo per cercare di ridurla.
In questa problematica entrano anche i concetti di *calcolabilità* (nel senso di Turing) e *decidibilità*. Da quando Cantor (XIX secolo) ha dimostrato col noto procedimento diagonale che l'insieme dei numeri reali ha potenza maggiore del numerabile, risultò chiaro che il computer (la macchina di Turing) dovesse per forza limitarsi ad eseguire simulazioni di calcoli che in teoria si svolgono in un insieme numerico «molto più ampio e strutturato».
Oggi i limiti della calcolabilità pongono problemi paragonabili alla crisi dei fondamenti della matematica a cavallo del 1900 (il sogno di Hilbert e la disillusione portata dai lavori di Gödel). Più in generale, la questione consiste nel capire se esiste la

possibilità di un controllo computazionale dell'intero universo, ciò che attualmente sembra essere utopistico.
Nel XVIII secolo Leonhard Euler sosteneva che nel mondo non accade nulla senza che intervenga una qualche regola di minimo o di massimo. Oggi la teoria della complessità si occupa del problema di minimizzare tempo e capacità delle memorie del computer per eseguire determinati algoritmi. Questioni complesse, ma che fondamentalmente si basano su aspetti che si trattano già nelle scuole superiori: risoluzione di un sistema di equazioni lineari, prodotto di numeri reali o complessi e le basi del calcolo matriciale. Si studiano, insomma, algoritmi che vanno oltre quelli computabili con una macchina di Turing. In questo ambito il calcolo matriciale occupa un ruolo predominante e l'informazione contenuta in una matrice comprende anche una misura dello spazio di memoria e dati riguardanti il numero minimo di operazioni necessarie e sufficienti per poterla moltiplicare per un'altra matrice. Le operazioni che una macchina deve eseguire, dette "operazioni minute", sono il frutto di complesse astrazioni matematiche.
Tutto ciò non deve trarre in inganno e far pensare che la scienza possa essere completamente deterministica. Esiste un «imperscrutabile principio di libertà» col quale occorre fare i conti, un principio che si basa «sulla nostra incrollabile certezza che noi siamo responsabili delle nostre azioni». Ma il nostro arbitrio diventa sempre più ampio, più articolato e indecifrabile e allora non resta che aggrapparsi «all'impressionante utilità e pervasività degli algoritmi in ogni settore della scienza applicata» che danno forza all'irrinunciabilità effettiva delle procedure di calcolo. Da qui deriva «il carattere virtualmente dispotico degli algoritmi».

Gianfranco Arrigo
Società matematica della svizzera italiana (SMASI)
Lugano, Svizzera