Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 05

# Didattica della Matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula



DOI: 10.33683/ddm.18.5

ISSN 2504-5210

**Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Repubblica e Canton Ticino, Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport (DECS).



**Grafica:**
Jessica Gallarate
Servizio Comunicazione del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

**Impaginazione:**
Luca Belfiore



Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
Matematica

05

Maggio 2019

# Editoriale

> «Bisogna apprendere a navigare in un oceano di incertezza attraverso arcipelaghi di certezza. Bisognerebbe insegnare dei principi di strategia, che permettano di affrontare l'alea, l'inatteso e l'incerto e di modificare il loro sviluppo, grazie a informazioni acquisite strada facendo. Non si elimina l'incertezza, si negozia con essa».
>
> (Morin, 2015, p. 35)

Il mondo della didattica è un mondo complesso e articolato, in particolare quando si parla di matematica, dove tutte le figure coinvolte, docenti, ricercatori, studenti, sono unite da uno stesso fine comune: cercare strade, vie, metodologie, modelli, … da testare e validare con efficacia. È un mondo nel quale i tentativi sono quotidiani, e purtroppo non sempre di successo, ma in cui la vera sfida, la vera linfa, è insita nel saper apprendere a navigare in un oceano di incertezza con la perseveranza e la spinta di voler trovare "arcipelaghi di certezza", dai quali ripartire per intraprendere un nuovo viaggio. Con le sue parole, Edgar Morin, uno tra i più importanti filosofi e sociologi del secondo '900, descrive in modo significativo lo spirito che abita i luoghi del mondo dell'educazione. Si tratta appunto di cercare quelle isole, quei punti di terraferma nei quali poter fare affidamento e grazie ai quali poter navigare, con qualche strumento in più, le acque incerte della realtà. Non sono certo luoghi facili da trovare, un po' per la fatica della navigazione stessa, un po' perché si tratta di isole solitamente nascoste ad una vista superficiale.

La rivista *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* è parte di tutto questo, grazie ai contributi di ricercatori e insegnanti, i quali si implicano nel tentativo di individuare arcipelaghi riguardanti processi di insegnamento/apprendimento della matematica, con il contributo degli studenti. In questo senso, la didattica della matematica è solo uno dei tanti oceani della ricerca e delle pratiche in ambito educativo, ma è sicuramente un oceano ampio che bagna molti continenti ed è attraversato da diverse correnti. Il quinto numero della rivista è un chiaro esempio della complessità di questo oceano, e al contempo della sua incredibile varietà, ricchezza e bellezza.

Nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli che descrivono alcuni di questi luoghi metaforici. Il primo contributo rientra all'interno di un progetto interdisciplinare dal titolo: "Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico" che si focalizza sul rapporto fra la lingua e la matematica, identificando nei processi legati alla lettura la "porta d'entrata" alla comprensione del problema di matematica. Nel contributo vengono anche proposti spunti, riflessioni e attività significative indirizzati a quegli insegnanti che intendono affrontare in modo critico e consapevole i processi legati alla comprensione di un testo di matematica. Il secondo articolo concentra l'attenzione sulle differenze di genere nell'apprendimento della matematica: i maschi ottengono risultati migliori delle femmine nella maggior parte dei Paesi e a tutti i livelli scolastici. Attraverso un'analisi delle rilevazioni italiane e internazionali relative alle differenze di genere in matematica concernenti le prove standardizzate, vengono presentate le cause alla base del *gender gap* in matematica. Nel terzo contributo viene descritto nel dettaglio il "Progetto ArAl, Percorsi nella didattica per favorire il pensiero prealgebrico", nato negli anni '80 in Italia. Partendo dall'ambito teorico dell'*early algebra* si argomenta in modo convincente, grazie a decenni di ricerca e esperienze condotte da insegnanti e ricercatori, come sia possibile e opportuno anticipare l'approccio e lo sviluppo del pensiero algebrico a 6 anni, invece che attendere i 13-14 anni come avviene abitualmente.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro contributi. Nel primo si descrive un percorso in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola elementare: lungo tutto un anno scolastico, i bambini hanno collaborato e lavorato alla progettazione e costruzione di un carretto per trasportare materiali tra i due livelli scolastici, mobilitando così diverse competenze trasversali e matematiche; il secondo contributo descrive un percorso didattico incentrato sul teorema di Pitagora realizzato seguendo l'approccio flipped classroom in una scuola media: oltre ad un bilancio dell'esperienza, vengono presentate le lezioni realizzate sull'argomento e resi disponibili i materiali utilizzati, al fine di favorire la replicabilità dell'esperienza; nel terzo articolo viene descritto un percorso realizzato con allievi di terza elementare, incentrato sul tema della percezione soggettiva del tempo: grazie alle affermazioni degli allievi estrapolati da diari, questionari, interviste e discussioni, si fornisce un significativo quadro delle convinzioni dei bambini su questo complesso e inafferrabile tema; nell'ultimo contributo della sezione, infine, viene descritto un percorso didattico sulla circonferenza alla scuola dell'infanzia, progettato secondo il quadro teorico della Mediazione Semiotica: vengono analizzati gli artefatti utilizzati dai bambini, il ruolo dell'insegnante, e i processi di trasformazione che consentono il passaggio da segni e artefatti percettivi e motori a segni matematici.

La varietà e la sostanza dei contributi di questo numero non fanno che confermare quanto affermato all'inizio: il mondo della ricerca in didattica della matematica è un mondo complesso, ricco e sfaccettato. Noi crediamo che rendere conto di questa complessità sia un passo fondamentale per riuscire a indagarla, per trovare alcuni dei punti fermi, degli arcipelaghi nei quali poter sostare e riposare un poco, prima di riprendere il viaggio in mare con maggiore forza e sicurezza.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Bibliografia

Morin, E. (2015). *Insegnare a vivere. Manifesto per cambiare l'educazione*. Milano: Raffaello Cortina Editore.

# Editorial

> «We should learn to navigate on an ocean of uncertainties, sailing in and around archipelagos of certainty. We should teach strategic principles for dealing with chance, with what is unexpected and uncertain, as well as ways to adapt these strategies in response to continuing acquisition of new information. We cannot eliminate uncertainty, we have to negotiate with it».[1] 1
>
> (Morin, 2015, p. 35)

The world of education is a complex and articulated world, especially when it deals with mathematics, where all the involved figures, teachers, researchers, students, pursue jointly the same common goal: to find paths, ways, methodologies, models, etc. to be effectively tested and validated. It is a world where attempts are daily made, and unfortunately not always successfully, but the real challenge, the real nourishment, is inherent in knowing how to learn to sail in a sea of uncertainty with perseverance and with the motivation to find "archipelagos of certainty", from which to start again to undertake a new journey. In his words, Edgar Morin, one of the most important philosophers and sociologists of the second half of the 20th century, significantly describes the spirit that inhabits the places of the world of education. It is a matter of looking for those islands, those mainland points that you can rely on and that enables you to navigate, with a few more tools, on the uncertain waters of reality. They are certainly not easy places to find, partly because of the effort of navigation itself, partly because they are islands usually hidden from a surface view.

The journal *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* takes part in all this, thanks to the contributions of researchers and teachers, who are engaged in trying to identify archipelagos regarding processes of teaching/learning mathematics, with the help of students. In this sense, mathematics education is only one of the many oceans of research and practice in education, but it is certainly a wide ocean that brushes several continents and is crossed by various currents. The fifth issue of the journal is a clear example of the complexity of this ocean, and at the same time of its incredible variety, richness and beauty.

The *Research and reflection* section presents three articles describing some of these metaphorical places. The first contribution is part of an interdisciplinary project titled: "*Italmatica*. Understanding mathematics at school between common language and specialist language", which focuses on the relationship between language and mathematics, identifying processes related to reading as the "gateway" to understanding mathematics problems. The contribution also proposes ideas, reflections and significant activities addressed to those teachers who intend to deal critically and consciously with the processes related to the understanding of a mathematical text. The second article focuses on gender differences in mathematics learning: males perform better than females in most countries and at all school levels. Through an analysis of Italian and international surveys related to gender differences in mathematics in the context of standardized tests, the article

1. Translated by the author from the Italian version: «Bisogna apprendere a navigare in un oceano di incertezza attraverso arcipelaghi di certezza. Bisognerebbe insegnare dei principi di strategia, che permettano di affrontare l'alea, l'inatteso e l'incerto e di modificare il loro sviluppo, grazie a informazioni acquisite strada facendo. Non si elimina l'incertezza, si negozia con essa».

presents the causes underlying the gender gap in mathematics. The third contribution describes in detail the "ArAl Project, Didactic paths to promote pre-algebraic thinking", born in the '80s in Italy. Starting from the theoretical field of the early algebra and thanks to decades of research and experience conducted by teachers and researchers, the article convincingly argues how it is possible and appropriate to approach and develop the algebraic thinking earlier in primary school, instead of waiting that students are 13-14 years old as is usually the case.
The *Teaching and learning experiences* section proposes four contributions. The first describes a path in continuity between kindergarten and primary school: throughout a school year, the children collaborated and worked on the design and construction of a trolley cart to transport materials from one school to the other, thus mobilizing different transversal and mathematical skills; the second contribution describes a didactic path, centered on the Pythagorean theorem, carried out following the flipped classroom approach in a lower secondary school: besides a balance of the experience, the article presents the lessons realized on the topic and provides the used materials, in order to facilitate the replicability of the experience; the third article describes a path proposed to third grade students, focusing on the theme of the subjective perception of time: thanks to the students' statements extrapolated from diaries, questionnaires, interviews and discussions, it provides a significant picture of children's beliefs on this complex and elusive theme; the last contribution of the section, finally, describes a didactic path on the circumference at kindergarten, designed according to the theoretical framework of Semiotic Mediation: the article analyses the artifacts used by children, the role of the teacher, and the processes of transformation that allow the transition from perceptual-motor signs and artifacts to mathematical signs.

The variety and substance of the contributions in this issue only confirm what we stated at the beginning: the world of research in mathematics education is a complex, rich and multifaceted world. We believe that accounting for this complexity is a fundamental step to manage to investigate it, to find some of the fixed points, namely the archipelagos where to stop and rest for a while, before resuming the journey by sea with greater strength and confidence.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

References
Morin, E. (2015). *Insegnare a vivere. Manifesto per cambiare l'educazione*. Milano: Raffaello Cortina Editore.

Riflessione e ricerca

DdM

# La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo

## The Entrance Door to Understand a Mathematical Problem: Reading the Text

**Silvia Demartini e Silvia Sbaragli**
Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI di Locarno, Svizzera

**Sunto** / In questo articolo vengono proposte alcune riflessioni legate al ruolo della lettura concepita come prima e inevitabile "porta d'entrata" per comprendere un problema matematico espresso attraverso un testo, con il fine di risolverlo. L'articolo inizia con un'analisi delle diverse fasi della risoluzione di un problema proposte dalla letteratura in didattica della matematica e si concentra poi su che cosa significa leggere un testo per capirlo; successivamente, si illustrano le diverse modalità di lettura in funzione del tipo, del genere di testo e dei suoi scopi. In particolare, vengono mostrati il ruolo cruciale della lettura intensiva per poter comprendere il testo di un problema matematico e le possibili pratiche didattiche che possono aiutare il docente a favorire questo tipo di lettura in classe. Si conclude l'articolo ribadendo l'importanza di "prendersi il tempo": per il docente di proporre un percorso didattico rivolto alla comprensione del testo e per gli allievi di leggere il testo, in modo da interrogarlo e valutarlo in profondità. Ciò per scoprire attraverso l'esperienza come una migliore lettura potenzi l'efficacia nel *problem solving*.

Parole chiave: matematica; italiano; problem solving; lettura; comprensione.

**Abstract** / This paper presents some reflections on the role of reading conceived as the first and inevitable "entrance door" to understand a mathematical word problem, with the aim of solving it. We start from an analysis of the different phases required to solve a problem, shown by the research in Mathematics Education, and then we focus on what it means to read and comprehend a text; afterwards, we illustrate the different types of reading depending on the type and the purposes of a text. Particular attention is given to the role of intensive reading in understanding the text of a mathematical problem, and some possible didactic practices are shortly described to help teachers to improve this reading strategy at school. We conclude the article by stressing the importance of "taking the time": time for teachers to propose interactive didactic paths focused on understanding and discussing texts, and time for pupils to read, question and evaluate texts in depth. This practice will lead students to discover through experience how a better reading can have a positive impact on problem solving.

Keywords: Mathematics; Italian Language; Problem Solving; Reading; Understanding.

## 1 Introduzione

L'articolo si inserisce all'interno della ricerca *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica), ideata e condotta da due centri di competenza[1] del Dipartimento Formazione e Apprendimento (DFA) della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana (SUPSI). Il progetto, il cui svolgimento è previsto su tre anni accademici (2018-2021), è il naturale proseguimento di studi precedenti, che hanno confermato la necessità di indagare la comprensione in am-

1

1. Si tratta dei Centri competenze Didattica della Matematica (DdM) e Didattica dell'italiano lingua di scolarizzazione (DILS).

bito matematico con particolare riferimento agli aspetti linguistici.[2] 2
La letteratura nel campo della didattica della matematica e la nostra pratica di ricerca hanno spesso mostrato come le difficoltà nell'apprendimento e nella mobilitazione delle competenze in tale disciplina non siano unicamente ascrivibili alla matematica stessa, ma siano spesso collegate a difficoltà di comprensione linguistica, specialmente quando si opera in contesti complessi e ampi come quello della risoluzione di problemi. Tra i recenti risultati di ricerca ottenuti in tal senso, citiamo la valutazione didattica della prova standardizzata di matematica somministrata nel maggio 2015 a tutti gli allievi di quinta elementare del Canton Ticino, che mostra come le risposte sbagliate di diversi studenti siano legate a difficoltà nella comprensione del testo dell'item, in particolare a difficoltà di interpretazione linguistica (Sbaragli & Franchini, 2017; Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2017).
Nel rapporto riferito a tale ricerca (Sbaragli & Franchini, 2017) si è messo in evidenza come la risoluzione di problemi, scelti in modo da essere creati sulle competenze degli allievi, coinvolga il processo *Matematizzare e modellizzare*, che rappresenta una competenza chiave per la formazione del pensiero matematico dell'allievo e uno dei quattro processi cognitivi dell'area matematica del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015). Tale processo si riferisce all'attività di organizzazione e analisi di qualsiasi situazione di realtà attraverso strumenti matematici, cioè alla traduzione, riorganizzazione e (ri)costruzione di un problema all'interno del contesto reale nel mondo simbolico della matematica, e viceversa (Jupri & Drijvers, 2016).

## 2 Il ciclo della matematizzazione

Per quanto concerne la matematizzazione, PISA, *Programme for International Student Assessment* (OECD, 2004; 2013; 2016), ha messo in evidenza un ciclo, detto appunto *ciclo della matematizzazione*, che è possibile riassumere nei seguenti aspetti:

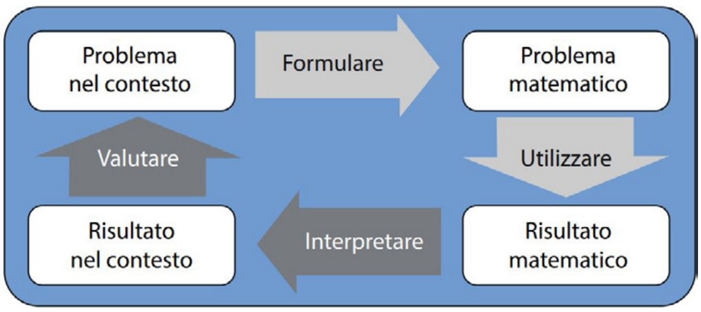



Figura 1
Il ciclo della matematizzazione tratto da OECD (2013).

- si parte da un problema situato nella realtà ("problema nel contesto");
- si organizza il problema in base a concetti matematici e si identificano gli strumenti matematici pertinenti;

2. Gli esiti delle indagini preliminari sono illustrati in una serie di pubblicazioni: Demartini, Fornara & Sbaragli (2017; 2018; in corso di stampa), Demartini & Sbaragli (2015a; 2015b), Fornara & Sbaragli (2013; 2016; 2017).

– si eliminano progressivamente gli elementi della realtà attraverso processi quali fare supposizioni, generalizzare e formalizzare, che mettono in evidenza le caratteristiche matematiche della situazione e trasformano il problema reale in uno matematico che rappresenti fedelmente la situazione di partenza (tramite questa fase e la precedente si passa al "problema matematico" grazie al processo "formulare");
– si risolve il problema matematico (si passa al "risultato matematico" grazie al processo "utilizzare");
– si interpreta la soluzione matematica in termini di situazione reale, individuando anche i limiti della soluzione proposta (si passa al "risultato nel contesto" e si ritorna al "problema nel contesto", grazie ai processi "interpretare" e "valutare").

Nella terminologia proposta dall'OECD, tale ciclo è quindi descritto attraverso l'identificazione di alcuni processi che sono ritenuti fondamentali per la gestione del problema: *formulare* il problema, ovvero trasporlo dal linguaggio naturale al linguaggio formalizzato della disciplina; *utilizzare* i propri saperi per dare una risposta al problema che si è identificato; *interpretare* e *valutare* la pertinenza della soluzione ipotizzata in rapporto al contesto di realtà da cui si è partiti. Per un approfondimento sul tema si veda Franchini, Lemmo & Sbaragli (2017).
L'esplicitazione di queste fasi permette di analizzare in modo più mirato e consapevole le competenze degli allievi necessarie per risolvere un problema e di prevedere eventuali azioni di intervento specifiche in caso di difficoltà.
In questo articolo ci concentreremo in particolare sul primo processo, *formulare*, che coinvolge la comprensione del "problema nel contesto" con il fine di trasformarlo in "problema matematico", cioè gestibile attraverso strumenti, concetti e procedure proprie della matematica. Per risolvere un problema è infatti necessario identificare le informazioni rilevanti, depurandole da tutto ciò che è ininfluente alla soluzione, per poi individuare una struttura, un *modello* astratto e ideale della situazione (ad esempio una formula, un'espressione o equazione algebrica, uno schema) basato sulle ipotesi elaborate, sui concetti e sulle relazioni individuate. Per fare ciò è dunque necessaria una *comprensione profonda* della situazione, che includa il riconoscimento delle diverse informazioni trasmesse dal testo (anche quelle sottintese) espresse in varie forme (linguistica, aritmetica, algebrica, grafica ecc.). Questo processo coinvolge la comprensione del "problema nel contesto", quindi la comprensione anche linguistica della situazione, con il fine di trasformarlo in "problema matematico": è dunque collegato con la lettura del testo, oggetto di questo articolo.

## 3 Il processo *formulare* a confronto con alcune teorie della risoluzione di problemi

L'intento di questo paragrafo è di collegare il primo processo del ciclo della matematizzazione (*formulare*) con alcune fasi delle più classiche teorie legate alla risoluzione dei problemi (individuate da Polya, 1945 e Schoenfeld, 1983), arrivando così a definire la "porta d'entrata" della risoluzione di un problema: la lettura del testo.

### 3.1 La teoria del *problem solving* di Polya

Nel 1945, George Polya, uno dei più grandi studiosi della teoria del *problem solving*, analizza puntualmente la risoluzione di un problema matematico identificando le quattro seguenti principali fasi nell'azione di risoluzione:

1) la comprensione del problema, per cui è necessario conoscere chiaramente quanto richiesto;
2) la compilazione di un piano che prevede la scoperta dei legami che intercorrono fra le varie informazioni, fra i dati e l'incognita;
3) lo sviluppo di un piano che comporta l'applicazione di regole, algoritmi e procedure;
4) la verifica del risultato, per cui si richiede di esaminare la soluzione ottenuta e di procedere alla verifica e alla discussione.

Le fasi non si susseguono in maniera lineare, ma secondo un ciclo iterativo che si ripete, nel quale il risolutore si muove alla ricerca della soluzione. Inoltre, il passaggio da una fase all'altra non avviene per tutti allo stesso modo: c'è infatti chi si sofferma maggiormente su una fase e chi su un'altra. Va anche aggiunto che tali fasi sono accompagnate da domande chiave che il bravo solutore di problemi si pone in modo spontaneo, così da stimolare le operazioni mentali utili per la risoluzione e per suggerire delle euristiche. Le domande che il bravo risolutore si pone si susseguono con una certa regolarità in corrispondenza di momenti diversi del processo risolutivo. Polya, nel suo progetto didattico, ha cercato di insegnare agli allievi repertori di domande per mettere in gioco le strategie opportune per la risoluzione di un problema. Sull'importanza di porsi domande durante il processo risolutivo dovremo tornare in seguito, tenendo anche conto del fatto che quest'attitudine può essere incentivata e consolidata attraverso mirate attività preparatorie di lettura e lavoro sui testi.

È possibile riscontrare le stesse azioni proposte da Polya all'interno del ciclo della matematizzazione dell'OECD presentato precedentemente, come riportato nel seguente schema.

Tabella 1
Processi del ciclo della matematizzazione a confronto con le fasi della risoluzione di un problema proposte da Polya.

| Fasi nel ciclo della matematizzazione | Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya |
|---|---|
| Formulare | Comprensione del problema<br>Compilazione di un piano |
| Utilizzare | Sviluppo di un piano |
| Interpretare<br>Valutare | Verifica del risultato |

### 3.2 Gli "episodi" di Schoenfeld

Per sottolineare meglio l'importanza delle decisioni strategiche all'interno di un comportamento risolutivo, un altro importante ricercatore, Schoenfeld (1983, p. 17), propone di suddividerlo in «frammenti macroscopici di comportamento coerente», detti "episodi", caratterizzati nel modo seguente:

1) Lettura
2) Analisi
3) Esplorazione
4) Pianificazione
5) Implementazione
6) Verifica
7) Transizione

In questi episodi si riconoscono facilmente le quattro fasi di Polya:

| Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya | Episodi nella risoluzione di un problema secondo Schoenfeld |
|---|---|
| Comprensione del problema | Lettura<br>Analisi<br>Esplorazione |
| Compilazione di un piano | Pianificazione |
| Sviluppo del piano | Implementazione |
| Verifica del risultato | Verifica<br>Transizione |

Tabella 2
Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya a confronto con gli episodi nella risoluzione di un problema secondo Schoenfeld.

Le differenze maggiori tra le due impostazioni risiedono principalmente nell'individuare nella comprensione del problema tre fasi (episodi): "lettura", "analisi" ed "esplorazione", e nell'introdurre l'episodio "transizione", che consiste in controlli e valutazioni che il soggetto compie durante il processo risolutivo. Va sottolineato come per Schoenfeld la porta d'entrata per la risoluzione di un problema sia la "lettura", che rappresenta la prima e inevitabile fase che l'allievo deve gestire attivando strategie adeguate al contesto.

### 3.3 Decisioni strategiche nella risoluzione dei problemi

Risulta interessante citare anche la ricerca condotta da Schoenfeld nel 1992 – basata sull'osservazione del comportamento di soggetti durante la risoluzione di problemi non standard –, in cui viene messa in evidenza una differenza notevole nella quantità e nella qualità delle decisioni strategiche attivate. Nelle **Figure 2** e **3** sono riportati i diagrammi che mostrano tale differenza. A essere particolarmente poco efficaci nei "cattivi solutori" sono la lettura, molto rapida, e la gestione del tempo dedicato a esplorare un unico approccio: nello specifico, i cattivi solutori di problemi (**Figura 2**) riservano tanto tempo all'esplorazione, dedicandone poco alla comprensione del testo. Un simile comportamento non appare generalmente quando gli studenti affrontano esercizi di routine, dal momento che il contesto in questo caso informa direttamente gli studenti su quali tecniche utilizzare. Per contro, i "bravi solutori" (**Figura 3**), i solutori esperti, non passano subito all'azione, ma usano parte del tempo per riflettere e per organizzare le informazioni reperite, ponendosi varie domande del tipo *Che cosa sto facendo?, Perché lo sto facendo?, Che cosa me ne faccio del risultato?* ecc. e decidendo come procedere di conseguenza. Dall'osservazione del grafico (**Figura 3**) emerge proprio il fatto che il "bravo solutore", in questo caso un matematico posto di fronte a un problema difficile, ha speso più della metà del tempo a sua disposizione cercando di dare un senso al problema, dedicandosi cioè alla lettura e all'analisi delle informazioni in esso veicolate. Inoltre, un bravo solutore considera ed esplora con consapevolezza diversi approcci risolutivi possibili, anche quelli sbagliati, passando da un episodio all'altro in funzione della bontà o meno della soluzione trovata. Egli non porta mai fino in fondo gli approcci sbagliati, pur esplorandoli, come fanno invece i cattivi solutori, perché è «tanto inesorabile nel controllare e rifiutare idee quanto ingegnoso nel generarle» (Schoenfeld, 1987, p. 194), attivando così continui processi di controllo e autoregolazione che coinvolgono monitoraggio, valutazione e correzioni (revisioni/ritocchi), in altre parole abilità metacognitive. Schoenfeld esplicita quanto queste competenze possono essere insegnabili.

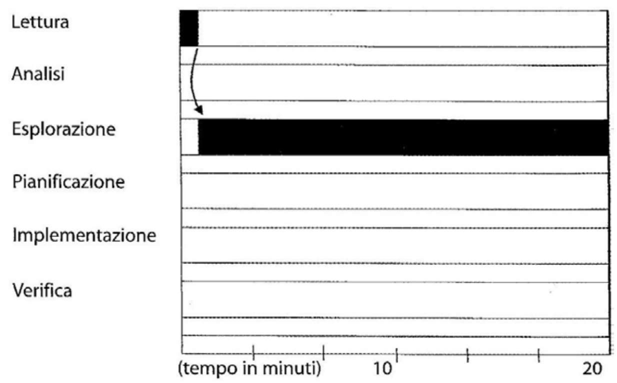



Figura 2
Grafico della linea temporale di un cattivo solutore che risolve un problema (Schoenfeld, 1992, p. 61).

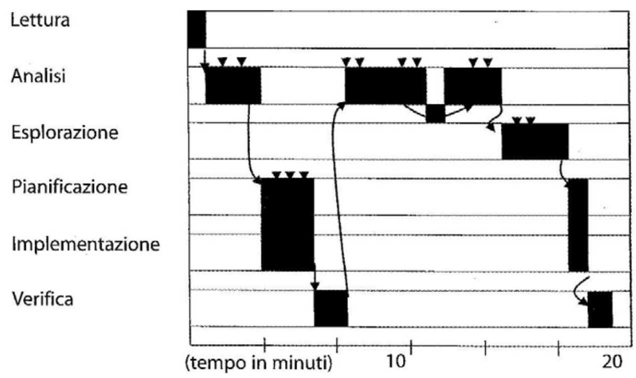



Figura 3
Grafico della linea temporale di un bravo solutore che sta lavorando a un problema complesso (Schoenfeld, 1992, p. 62).

In particolare, Schoenfeld sottolinea come la differenza principale tra il buon solutore e il cattivo solutore è relativa alle domande che il soggetto si pone durante la risoluzione, domande che sono il frutto di un'efficiente attività metacognitiva, e cioè della capacità di riflettere su ciò che si sta facendo e su come lo si sta facendo.

Nel merito specifico della lettura del testo – oggetto di questo articolo – come sostiene Giasson (2003), la metacognizione è un aspetto decisivo: spesso, infatti, un lettore la cui comprensione del testo è debole presenta anche una metacognizione debole, cioè una scarsa capacità di valutare con obiettività la qualità della propria attività di lettura e comprensione del testo. Il ruolo dei fattori metacognitivi nella risoluzione dei problemi è riconosciuto ormai da più di trent'anni. Fin dal 1987, infatti, Lester evidenzia cinque grandi categorie interdipendenti di parametri che influiscono sull'attività di risoluzione di problemi:

– conoscenza (comprende i "mezzi" a disposizione quali definizioni, algoritmi, euristiche ecc., ma anche il modo in cui un soggetto organizza, rappresenta e quindi utilizza la propria conoscenza);
– controllo (comprende decisioni esecutive riguardo alla pianificazione, alla valutazione e alla regolazione della conoscenza);
– fattori affettivi;
– convinzioni (il modo in cui un soggetto *vede* la matematica);
– condizioni socioculturali.

I fattori metacognitivi sono in genere quelli relativi al controllo, alla rappresentazione e alla regolazione della conoscenza, e alle convinzioni; i fattori affettivi, invece, comprendono emozioni e atteggiamenti, fra i quali assumono particolare importanza le motivazioni e gli interessi. Un insieme analogo di elementi personali gioca un ruolo cruciale nell'approccio alla letto-scrittura e nella costruzione stessa del concetto di "lettura", su cui le concezioni evolvono durante il percorso di crescita e di scolarità (Ferreiro & Teberosky, 1982).

A livello procedurale, in analogia con quanto anticipato da Polya e Schoenfeld, anche in Lesh (2006) e in Sriraman e Lesh (2006) viene evidenziato come l'attività di risoluzione dei problemi includa un certo numero di cicli iterativi e di passaggi da una fase all'altra, nei quali gli allievi si muovono per arrivare alla soluzione, tornando indietro per riflettere sulle ipotesi formulate, affinando ciò che hanno individuato, procedendo attraverso diverse strategie. Non si tratta dunque di un approccio lineare che dai dati porta direttamente al risultato, bensì di un percorso circolare, riconducibile a quello illustrato sulla matematizzazione, e in ciò assume un ruolo fondamentale la lettura del testo e quindi l'importanza di sviluppare negli allievi competenze di tipo trasversale. Risulta ad esempio molto interessante analizzare i processi decisionali che portano un allievo ad adottare una strategia piuttosto che un'altra nella risoluzione di un problema.
I comportamenti fallimentari nella risoluzione di problemi non dipendono quindi solo dalla carenza di conoscenze: la poca efficienza rispetto ai processi di controllo attivati o la loro mancata attivazione influiscono in modo determinante sull'efficacia dell'azione del solutore. In maniera analoga, la mancata consapevolezza delle risorse di cui si dispone comporta l'incapacità di valutare in modo attendibile diversi aspetti, tra i quali il tempo necessario per svolgere un certo compito. Appare dunque importante che l'insegnante sia consapevole di ciò e che presti attenzione a questi aspetti, ovvero che curi, oltre alle risorse cognitive, anche la loro gestione nei processi decisionali. Tutto ciò incentiverebbe il recupero e il potenziamento delle competenze degli allievi nella risoluzione di problemi.

### 3.4 La "gerarchia degli errori" di Newman e Clements

Nell'ottica proposta ricordiamo anche lo studio condotto da Clements (1980), sempre negli anni '80, basato su una "gerarchia degli errori" detta "di Newman e Clements", secondo la quale l'errore può manifestarsi in una delle seguenti fasi:

1) Lettura

2) Comprensione
3) Trasformazione del testo in un modello matematico
4) Applicazione di procedure aritmetiche o altro
5) Codificazione della risposta

In questa proposta, la lettura viene separata dalla comprensione, dando alla prima sì un ruolo importante per la risoluzione dei problemi, ma, allo stesso tempo, presentandola come un'azione a sé. Da questo punto di vista, ricerche più recenti hanno invece ampiamente confermato che la lettura è essa stessa parte di un processo interpretativo complesso (p. es. Giasson, 1995; Filippini & Segreto, 1999; D'Amico & Devescovi, 2013), che non può essere quindi inteso come disgiunto dall'atto del "comprendere": piuttosto, è un'abilità funzionale e simultanea all'operazione stessa di comprensione. Basti ricordare l'assunto chiave per cui la lettura non coincide solo con la decodifica di segni linguistici (cioè con la riconduzione dei segni grafici ai suoni corrispondenti e con il riconoscimento di parole), ma, come vedremo meglio in seguito, prevede l'attivazione di una serie di schemi mentali e di risposte cognitive fondamentali per la comprensione e quindi, nel nostro caso, per l'adeguata scelta e mobilitazione di concetti matematici.

Al di là della scelta, non per forza condivisibile, di considerare la lettura come separata dalla comprensione, la tesi di Clements è quanto mai interessante e valida: egli sostiene infatti, contrariamente a quanto si è soliti ritenere, che il fallimento dei bambini che non riescono a risolvere problemi avviene nelle prime tre fasi, cioè in quelle *precedenti* l'applicazione di tecniche matematiche. A proposito di questa tesi, D'Amore sostiene:

> «credo che qualsiasi buon insegnante di scuola primaria, anche senza compiere apposite ricerche, ne abbia la convinzione:
> - il bambino legge il testo ma non lo capisce;
> - lo capisce ma non lo coglie in un tutto unico;
> - per mancanza di motivazione, non ha stimoli per una completa volizione;
> - per mancanza di immaginazione, non sa tradurre il testo scritto in lingua comune in qualche cosa di matematico (grafico o operazione);
> - gli manca l'intuizione nell'immaginare la situazione eventualmente tradotta;
> - non sa scegliere il modello matematico idoneo:
>   – non sa crearsi un modello;
>   – se ne crea uno non adatto, che quindi non lo aiuta nella soluzione.
>
> In fondo, la parte matematica esplicita, che sarebbe comunque l'ultima a comparire, sembra essere l'ostacolo più remoto: arrivarci è già molto, superarlo è ostico (…)».
>
> (D'Amore, 2014, p. 171)

Questa tesi è stata confermata da molte ricerche in didattica della matematica (Mayer, 1982; De Corte & Verschaffel, 1985; Laborde, 1995; D'Amore, 2000; 2014; Verschaffel, Greer & De Corte, 2000; Ferrari, P. L., 2004; 2012; Zan, 2007; 2016; Fornara & Sbaragli, 2013; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016), che hanno mostrato come tante difficoltà nella risoluzione dei problemi siano legate a componenti linguistiche (lessicali, sintattiche, testuali) che influenzano la rappresentazione, la comprensione e l'interpretazione della situazione. Tra queste incidono le variabili redazionali e gli

atteggiamenti che gli studenti hanno elaborato nel tempo nei confronti del testo di un problema, e, in particolare, come ci si approccia alla lettura di un problema.
Come si è detto, gli insegnanti sono ben consapevoli di questo stato di cose, e notano facilmente che l'allievo spesso legge il testo, una o anche più volte, ma non lo capisce a fondo, non ne mette adeguatamente in relazione le parti oppure non lo coglie nel suo essere un "tutto unico" dotato di senso globale. Ma perché si realizza questa situazione così di frequente? In che modo (o in quali modi) gli allievi tendono a leggere il testo di un problema? Ovvero, come gestiscono questa "porta d'entrata" per raggiungere, interpretare e mettere in gioco gli aspetti matematici?

# 4 Leggere un testo per comprenderlo

## 4.1 Che cos'è un testo e che cosa significa comprenderlo

Quando la comprensione di un problema deve passare attraverso la lettura silenziosa di un testo – e non attraverso altre forme come, ad esempio, l'oralità – il problema di come gli allievi affrontano la lettura è strettamente collegato a due questioni di più vasta portata: che cos'è un testo e come funziona, in generale, la sua comprensione da parte del lettore. Queste questioni vanno poi riconsiderate alla luce delle peculiarità del genere testuale "problema matematico", rispetto al quale ogni aspetto assume determinate specificità.
Per prima cosa, va sottolineato che leggere un testo (anche, apparentemente, bene), di per sé, non significa automaticamente capirlo a fondo: è importante cioè distinguere tra un lettore fluente nella lettura ad alta voce e un lettore efficiente, cioè un lettore che comprende e agisce opportunamente sul testo, perché non è detto che le due cose coincidano. Come sottolinea Colombo (2002, p. 8), «una buona esecuzione orale, con intonazioni e pause adeguate, può essere indizio di una buona comprensione, ma non sempre lo è: si può anche leggere "bene" (in questo senso) senza capire molto». Infatti, leggere un testo per comprenderlo non significa solo decodificarlo con sicurezza, ma ricostruire il suo significato d'insieme collegando le varie parti portatrici di significato. Non a caso, come dice la parola stessa, il *testo* (dal latino *textus*, "tessuto") rimanda all'idea di vari fili intrecciati a formare un tutto unico, che sta insieme: tale è, o meglio dovrebbe essere, qualsiasi testo ben formato, efficace per i propri fini comunicativi.
In particolare, le due proprietà base per l'analisi di un testo sono *coerenza e coesione*.[3] La coerenza si ha se le varie parti del testo cooperano a costruire un contenuto informativo d'insieme individuabile e tematicamente legato, ed è una caratteristica cruciale affinché la comprensione si realizzi agevolmente. Ciò perché 3

> «il ricevente di un testo ne presuppone (…) la coerenza adottandola come principio-guida della sua interpretazione: data una particolare sequenza di frasi, provvederà via via a scegliere quell'interpretazione e a integrare quelle informazioni implicite che contribuiscono a definirne la coerenza».
>
> (Ferrari, A., 2010a, p. 219)

3. Per un quadro aggiornato delle proprietà del testo secondo la prospettiva di analisi della linguistica testuale si vedano Ferrari, A. (2014), Palermo (2013) e Andorno (2003).

Mentre legge, quindi, il lettore orienta la sua comprensione dapprima intuendo, poi costruendo man mano la coerenza del testo. Ciò avviene in un processo percepito come unico, ma che consiste nell'interpretazione delle microstrutture testuali (cioè le parole, le frasi, i numeri, le figure ecc.) da legare, poi, in macrostrutture, al fine di stabilire un senso d'insieme, attivando «una molteplicità di processi che avvengono talvolta in parallelo, talvolta in sequenza» (Kintsch & Van Dijk, 1978, p. 364, traduzione delle autrici).
La coesione è la manifestazione linguistica dei legami del testo (Ferrari, A., 2010b) e a essa possono cooperare in misura più o meno evidente ed esaustiva tutti i livelli della lingua (morfo-sintattico, lessicale, interpuntivo), anche per quanto riguarda il testo dei problemi matematici. Per fare qualche esempio, sono particolarmente significativi i connettivi (parole o locuzioni che individuano le relazioni tra frasi o parti di testo, come *perché, poiché, quindi, di conseguenza* ecc.), i deittici (forme linguistiche strettamente ancorate alla situazione espressa dal testo, come avverbi quali *là, qua, ora*, forme pronominali e tempi verbali) e le riprese anaforiche (vale a dire le espressioni che richiamano qualcosa di già detto sia attraverso riprese pronominali come *ne*, *lo* ecc., sia attraverso variazioni lessicali; ad esempio, in un testo una *classe* può essere chiamata "classe", ma anche "gruppo" o ancora "insieme di studenti", e sta al lettore cogliere la coreferenza, ossia il rinvio a uno stesso elemento). È superfluo rimarcare come la padronanza di simili aspetti, fondamentale per l'interpretazione di qualsiasi testo, sia determinante per comprendere il senso esatto di un problema matematico (Orsolini, Fanari & Maronato, 2005).
Sia sul piano del contenuto, sia su quello della forma, i "fili" del testo che permettono a chi legge di costruirne il significato sono però solo in parte esplicitamente veicolati dalle parole scritte. Infatti, per esigenze di economia della comunicazione (Levinson, 2000), la lingua non dice sempre tutto: molti fili restano nascosti, e sta a una raffinata e allenata abilità cognitiva del lettore ricostruire la trama completa. Prendiamo un semplicissimo esempio come "Ha corso, ma il treno era già partito": per ricostruire una (sensata) interpretazione possibile, ciò che c'è scritto non basta; dobbiamo immaginarci un contesto noto che permetta di stabilire il soggetto (o referente) del testo, dobbiamo comprendere la relazione di significato fra gli elementi citati (che potrebbe essere così riformulata: "sebbene abbia corso, non è arrivato in tempo per prendere il treno"), dobbiamo inferire che il referente "quindi ha perso il treno", e, non da ultimo, dobbiamo possedere sufficienti conoscenze su "come va il mondo" per sapere che spesso per prendere il treno si corre.
Insomma, come scriveva Umberto Eco (1994, p. 34), il testo è generalmente una «macchina pigra», su cui, affinché funzioni, il lettore deve intervenire aggiungendo conoscenze, colmando lacune e producendo inferenze. Il problema matematico non si sottrae quasi mai a questa caratterizzazione – quando ha un contesto non esclusivamente matematico – e ciò porta a una conseguenza: per questa tipologia di testi, il problema matematico non è mai un problema *solo* matematico.
Va considerato che nella scuola elementare in continuità con la scuola media si privilegiano problemi a contesto non solo matematico nella convinzione che possano favorire l'interpretazione delle situazioni legate al reale o che possano aiutare l'allievo. Un'accorta riflessione sugli aspetti linguistici mette però in evidenza che non sempre questa tipologia di testi è di aiuto agli studenti: ciò dipende da come il problema è formulato, in quanto la lingua può sì aiutare, ma anche portare nuovi elementi di ambiguità e potenziale difficoltà (o quantomeno di riflessione).

### 4.2 Il genere testuale “problema matematico”

Il problema matematico classico è un testo particolare, tipologicamente ibrido, che rappresenta per alcuni un vero e proprio "genere letterario" (Gerofsky, 1996; Zan, 2007; 2016). Solitamente si tratta di testi misti, che non possono prescindere dall'interazione tra informazioni rappresentate secondo diversi registri semiotici (aritmetico, algebrico, figurale ecc.), fra le quali l'occhio del lettore deve muoversi per metterle in relazione; inoltre, sono testi che possono includere porzioni di tipo *non continuo* (cioè forme testuali come grafici e tabelle). A livello di contenuto, per la comprensione di questi testi è spesso richiesto al lettore-solutore di attingere sia dal magazzino delle sue conoscenze disciplinari (semantiche e procedurali), sia da quello delle sue conoscenze generali (cose e situazioni della realtà). A livello pragmatico, va poi considerato che questo genere testuale è di solito *eteroposto*, in quanto chi deve risolvere il problema (l'allievo) è una persona diversa da chi lo propone (l'insegnante), e questo incide sulla possibile difficoltà dell'allievo a capire il senso della domanda posta (ad esempio se non riconosce la situazione problematica descritta).
Tale genere testuale può realizzarsi in diversi sottogeneri. In particolare, si possono avere problemi assimilabili a meri elenchi di dati e problemi di tipo più narrativo, in cui i dati sono veicolati attraverso una trama testuale che vorrebbe essere maggiormente articolata, caratterizzata dalla presenza di personaggi che compiono azioni mosse da scopi; oltre a questi due sottogeneri, altri problemi si trovano a metà strada tra l'elencativo e il narrativo: questi rappresentano la tipologia più ricorrente tra le proposte scolastiche. Occorre considerare che modelli di problema diversi portano a processi risolutivi diversi.
Greer, Verschaffel e De Corte (2002) definiscono il genere testuale "problema matematico" nel seguente modo:

> «un testo (tipicamente contenente informazioni quantitative) che descrive una situazione ritenuta familiare a chi legge, e che pone una domanda quantitativa, la cui risposta può essere ottenuta eseguendo operazioni matematiche sui dati forniti dal testo, o ricavati in altro modo».
>
> (Greer, Verschaffel & De Corte, 2002, p. 271)

Si tratta di un genere stabilmente presente nell'immaginario scolastico di tutti, che mostra spesso caratteristiche cristallizzate. In particolare, nei problemi sono solitamente riconoscibili questi elementi: una situazione familiare sintetica, che spesso fa riferimento al vissuto extrascolastico, scelta per contestualizzare la struttura matematica su cui si vuol far lavorare gli allievi (che di solito però non è veramente problematica), alcune informazioni quantitative e una o più domande. Queste risultano però spesso artificiose, poiché sono legate quasi esclusivamente ai processi risolutivi più che agli aspetti narrativi della situazione proposta, e che richiedono di solito l'uso di più dati numerici per essere risolte (Zan, 2016). In pratica, l'attenzione dell'autore del testo è di solito rivolta alla struttura matematica, e in particolare alla coerenza logica fra i vari dati forniti dal testo, e non alla struttura narrativa del problema: gli aspetti matematici e quelli narrativi risultano così generalmente poco legati tra loro, cosa che può far perdere di vista la richiesta del problema e provocare una "sospensione di senso" per gli allievi (Schoenfeld, 1991); tale sospensione crea una significativa frattura tra il modo di affrontare i problemi reali e quello in cui si affrontano i problemi scolastici. In particolare, la mancanza o la debolezza di un collegamento

intrinseco tra contesto e domanda fa sì che la comprensione del testo, nel caso di tali problemi, sia particolarmente focalizzata sulla sola comprensione della domanda, senza che l'allievo si possa appoggiare al "senso" della situazione descritta; di solito, infatti, manca il legame temporale e di causalità che caratterizza le azioni, e gli scopi che le motivano, cioè manca un autentico collegamento con la storia nel suo complesso (Zan, 1998).
Nello specifico, le interpretazioni dei ricercatori portano l'attenzione sul fatto che i testi dei problemi scolastici presentano solitamente alcuni stereotipi, legati sia alla formulazione linguistico-testuale, sia alla struttura matematica: come anticipato, struttura narrativa che non sostiene adeguatamente la domanda, ma che funge da semplice contenitore di dati (evocando, al più, un contesto); presenza esatta di tutte e sole le informazioni e i dati necessari per risolverlo; presenza di una sola soluzione; parole scelte in modo da aiutare intuitivamente a individuare il procedimento risolutivo, senza stimolare una lettura critica del testo e della situazione; dati numerici presenti, così come quelli dei risultati, studiati appositamente per essere dei "bei dati", ossia per essere nella maggioranza dei casi numeri interi; poca coerenza del contesto e debole coesione del testo con la struttura matematica in gioco; esclusivo utilizzo di conoscenze scolastiche acquisite precedentemente; ecc. (si veda ad esempio Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000; Zan, 2007). Questi aspetti non esauriscono tuttavia la problematica; viene infatti anche messa in evidenza la responsabilità delle modalità con cui viene gestita in classe l'attività di risoluzione di problemi, cioè delle norme più o meno implicite che la governano: dare poco tempo a disposizione per risolverlo; applicare solo conoscenze o abilità acquisite da poco tempo; dare poca importanza alla lettura nella comprensione del testo; non favorire processi di controllo ecc.
In sostanza, il processo di lettura e comprensione dei testi è fortemente condizionato sia dall'abitudine a certe caratteristiche testuali ricorrenti, sia dalle esperienze iterate che con determinati testi si fanno. Pertanto, i testi tipici dei problemi matematici e le prassi stereotipe con cui si affrontano favoriscono comportamenti irrazionali negli allievi nell'approcciarsi alla risoluzione, che consistono nel combinare in modo casuale testo, dati e scorciatoie cognitive che hanno interiorizzato nella loro esperienza scolastica precedente. Ciò fa allontanare gli studenti da quell'atteggiamento attivo, critico e costruttivo che favorirebbe lo sviluppo di processi di pensiero significativi, i quali a loro volta consentirebbero di saper prendere decisioni qualitative in base al contesto, oltre che quantitative.

### 4.3 Leggere e comprendere un problema matematico: un'attività strategica

Appurate la natura e le caratteristiche dei testi dei problemi, è evidente che la loro comprensione non può scaturire da una lettura superficiale: questa, al più, come spesso accade, porta a una rappresentazione semantica approssimativa e alla combinazione acritica dei dati matematici. Lavorare per migliorare la comprensione del testo significa offrire agli allievi uno strumento efficace in prospettiva transdisciplinare, e in particolare proprio per quanto riguarda la matematica (lo conferma ad esempio lo studio di Glenberg, Willford, Gibson, Goldberg & Zhu, 2011).
Includere questo aspetto nella didattica significa anzitutto prendere atto della sua complessità. Infatti, anche per leggere e comprendere un problema matematico vale ciò che è illustrato da molti studi (come De Mauro, 1994; Levorato, 2000; Zanetti & Miazza, 2004; Lumbelli, 2009; D'Amico & Devescovi, 2013; specifico sui problemi,

Zan, 2016), e cioè che "leggere per comprendere" è un processo complesso e multicomponente, cioè un processo che prevede il ricorso, più o meno automatico, a una serie di *risorse cognitive* e di *processi cognitivi* (D'Amico & Devescovi, 2013). Tali componenti possono essere così sintetizzate:

Risorse cognitive
- memoria, in particolare quella di lavoro (elabora piccole parti di informazione letta e le trattiene per collegarle alle altre, in modo da costruire una rappresentazione sensata del significato);
- conoscenze legate alle forme testuali (cioè alle "grammatiche" dei testi, alle loro strutture: si può pensare ad esempio a quella di un racconto che parla di matematica, ma anche a quelle dei problemi tradizionali);
- competenze e conoscenze linguistiche generali e specialistiche (grammaticali, lessicali, stilistiche ecc.);
- conoscenze concettuali (nel caso specifico quelle matematiche);
- conoscenze enciclopediche (conoscenze generali derivanti dal vissuto o dallo studio, ad esempio che cos'è qualcosa cui il testo fa riferimento);
- conoscenze relative agli *script* (o *sceneggiature comuni* rispetto a comportamenti in situazioni specifiche caratterizzate da condotte ricorrenti, su cui Schank, 1982).

Processi cognitivi
- inibizione di informazioni irrilevanti o non pertinenti e riconoscimento di quelle rilevanti;
- formulazione di ipotesi, anticipazioni, presupposizioni e inferenze;
- gestione e, se possibile, integrazione degli impliciti e dei non detti;
- metacomprensione (forma di metacognizione preposta al monitoraggio della comprensione durante e dopo la lettura).

Inoltre, per quanto riguarda più nello specifico la gestione degli aspetti testuali, è ancora esaustivo l'elenco delle competenze necessarie stilato alcuni decenni fa da Bertocchi (1983, cit. in Colombo, 2002):

- *competenza tecnica:* riconoscere il rapporto tra segni e suoni (cioè saper decodificare il codice alfabetico e le sue peculiarità ortografiche);
- *competenza semantica:* attribuire significati pertinenti alle parole nel contesto e nel cotesto;
- *competenza sintattica:* cogliere i rapporti degli elementi costitutivi delle frasi e dei periodi;
- *competenza testuale:* individuare il tipo di testo, formulare inferenze, ipotesi e anticipazioni;
- *competenza pragmatico-comunicativa:* ricostruire l'intenzione comunicativa dell'emittente e gli elementi di contesto;
- *competenza rielaborativa e valutativa:* utilizzare il testo per uno scopo, ponendosi domande su di esso e rielaborandolo in modo opportuno.

Tenere conto delle risorse e dei processi prima elencati, e delle competenze che occorre mobilitare, significa considerare l'atto di leggere un problema matematico nella sua reale complessità. Spesso, invece, nella quotidianità scolastica, la lettura del problema è avvertita come un'ovvia condizione di partenza per poterlo, poi, risolvere; un passaggio che si dà per scontato o di cui ci si limita a individuare, genericamente, l'inefficacia. Al contrario, la lettura andrebbe sempre intesa e proposta come intimamente funzionale al successo o all'insuccesso delle azioni che si dovranno compiere su un testo (ad esempio eseguire, applicare, riassumere, validare, interpretare, ricordare, o, nel nostro caso, risolvere ecc.), come mostra, in relazione alla matematica, lo studio di Barton e Heidema (2002).

Questo stesso studio sottolinea che la lettura di testi matematici è una lettura che necessita di concentrazione e di attenzione. Non a caso, solitamente l'atto di leggere un problema è un'operazione silenziosa, per la quale non è richiesta una prestazione ad alta voce (meno adatta a una riflessione profonda tipicamente individuale): come sostiene un allievo di quarta elementare in una ricerca condotta da Zan (1998, p. 45), «Per me un problema e un testo che si deve fare da soli».[4] Il punto è che di fronte a questo "fare da soli" e in silenzio, gli allievi spesso si trovano privi di strategie e di mezzi, che, invece, andrebbero costruiti e affinati. Insomma, leggere per comprendere non è un mero processo meccanico, ma «un'attività strategica» (Chauveau, 2000, p. 109), cioè «una condotta che coordina più operazioni o più "strumenti" in vista di uno *scopo*» e che impegna cognitivamente il lettore in modo articolato e complesso: è a questa attività che vanno allenati gli allievi. 4

In matematica, se lo scopo è arrivare correttamente all'"interpretazione della situazione", è essenziale stimolare nei lettori l'aspetto *interattivo* (*o dialettico*) della lettura, che consiste nel riuscire a mettere efficacemente in relazione aspetti linguistici, altre forme di rappresentazione presenti nel testo (grafici, figure, schemi, formule ecc.) e aspetti specifici in senso matematico stretto (concetti, relazioni logiche, dati, procedimenti risolutivi ecc). Tutto ciò, nel contesto della realtà extra-linguistica evocata dal problema. Questi aspetti peculiari della lettura per comprendere – che risulta essere intensiva e analitica – permettono di interpretare più a fondo l'episodio dell'*analisi* proposto da Schoenfeld (**par. 3.3**), basato sul porsi domande. Al di là di una prima *lettura*, è infatti proprio attraverso l'*analisi* che la lettura diventa, per il solutore, oggetto da indagare e approfondire attraverso interrogativi sul testo nella sua globalità; non a caso, nella Figura 3, relativa al bravo solutore, la lettura e l'analisi ricoprono la maggior parte del tempo dedicato alla risoluzione del problema, mentre nella Figura 2, relativa al cattivo solutore, la fase di analisi viene addirittura saltata.

Qui si celano diversi aspetti da considerare: in particolare, lo scopo dell'allievo di fronte a un testo di un problema è davvero quello di "interpretare la situazione" per il fine di doverlo risolvere? Quali modelli concettuali e quali schemi interpretativi di problema matematico possiedono gli allievi? Le ricerche in didattica della matematica hanno messo in evidenza le convinzioni degli allievi nei confronti del problema matematico (Zan, 1998; 2007), che influiscono sul modo di approcciare questo genere testuale.

Le convinzioni degli allievi inerenti lo scopo del problema matematico sono solitamente rivolte all'atto del risolvere o al mettere in campo conoscenze e abilità, più che alla comprensione della situazione; quest'ultima è di solito lasciata implicita o addirittura omessa nelle considerazioni degli studenti. «Per me un problema è una cosa che bisogna saper risolvere. Un problema è un esercizio-prova per vedere se

4. Qui e in seguito, le formulazioni linguistiche sono quelle originali degli allievi (errori inclusi), così come riportati negli studi di Rosetta Zan.

una persona ha afferrato l'argomento» (III el.); «Il problema per me è un quiz che serve per vedere che, sea capito quello che li anno insegnato» (V el.); «Il problema per me è una serie di domande che formano un test, che serve per vedere le capacità di un bambino» (V el.) (Zan, 1998, pp. 41-42). L'attenzione dell'allievo nei confronti del testo risulta quindi direttamente collegata con il processo *utilizzare* del ciclo della matematizzazione, invece di essere inizialmente rivolta al processo *formulare*, che prevede la comprensione del testo. Questo tipo di convinzioni, che influenzano gli atteggiamenti e i comportamenti messi in atto durante la risoluzione dei problemi, dipendono da diversi fattori, come ad esempio la tipologia limitata e stereotipata di problemi proposti e le abitudini e le attese del docente, spesso focalizzate sul risultato, piuttosto che sulla situazione o sul processo. Basta riflettere sul fatto che è un'attività didattica assai rara fornire un testo di un problema matematico con il fine di comprenderlo o riformularlo, piuttosto che risolverlo. È significativa, da questo punto di vista, la ricerca condotta da Kilpatrick (1987) con allievi di età compresa tra i 5 e i 12 anni, a cui sono state sottoposte storie senza domande inserite in un gruppo di problemi scolastici; per queste storie la maggior parte degli allievi più grandi ottiene in qualche modo un risultato, pur non essendoci nei testi richieste esplicite in tal senso.

Lo scopo che emerge dalle convinzioni degli allievi è intimamente collegato con ciò che gli allievi pensano essere un problema matematico: "un insieme di dati da mettere insieme con un'operazione"; ciò porta l'allievo a concentrarsi quasi esclusivamente sui dati numerici del testo, sulle parole che aiutano a intuire l'operazione risolutiva e sulla domanda, piuttosto che sulla situazione, dunque sull'intero testo preso come un tutt'uno. Riportiamo qualche frase significativa degli allievi tratta da Zan (1998, pp. 36-37): «Per me un problema è una domanda da risolvere con un'operazione» (IV el.); «Per me il problema è una cosa che seguendo i dati impari le operazioni» (II el.); «Un problema è quando abbiamo del materiale e dobbiamo moltiplicarlo, dividerlo, levarci qualcosa o aggiungerci qualcosa» (III el.).

Le convinzioni e gli atteggiamenti che gli allievi si sono formati nel tempo nei confronti del problema matematico sono coerenti con i fini e con la struttura dei testi stereotipati solitamente proposti. Questi testi sono creati appunto in modo che i dati e la breve storia presente siano abbinati al fine di essere utilizzati per rispondere a una domanda, che consente di applicare particolari conoscenze e abilità. Significativa da questo punto di vista è la seguente convinzione di un allievo di quarta elementare (Zan, 1998, p. 34-35): «Mi fa venire in mente problema di una storietta corta dove finita la storia bisogna risolverla e quando non riesco a concentrarmi sul problema mi immagino sempre: ecco perché l'hanno chiamata problema» (IV el.). È evidente che il genere testuale "problema", con le sue caratteristiche stereotipate prima descritte, è già ben interiorizzato da questo bambino di quarta, ed entra per così dire in conflitto con le strutture di altri testi (nella fattispecie narrativi): l'allievo fa infatti riferimento a una "storietta corta", che però non è una vera storia da capire, ma una sorta di pretesto per chiedergli una risoluzione matematica.

Da queste concezioni sul genere testuale e sulle attese didattiche a esso collegate deriva la messa in campo da parte degli allievi di un "rituale scolastico" (Nesher, 1980) per poter risolvere un problema matematico, che non permette di "penetrare nella situazione problematica" (Boero, 1986): «Nel risolvere un problema scolastico molti bambini sembrano procedere in modo casuale, combinando numeri secondo strategie dettate da inferenze dal testo o da schemi risolutivi interiorizzati nella loro precedente esperienza (…)» (Zan, 1998, p. 27), creando così una frattura tra mondo

reale e mondo scolastico, essendo quello scolastico un rituale assai distante dalla competenza di *problem solving* necessaria per gestire e risolvere problemi reali. È in effetti ormai assodato che i bravi e i cattivi solutori di problemi possiedono sistemi di convinzioni diversi e che comportamenti all'apparenza irrazionali risultano comprensibili se interpretati secondo scopi e contesti diversi.
Dal punto di vista didattico occorre quindi lavorare sulle convinzioni e sugli atteggiamenti degli allievi nei confronti del problema matematico: che cos'è, come è fatto, perché viene proposto, come può essere, come lo interpretiamo, come possiamo affrontarlo ecc., fornendo un ampio, variegato, ricco e aperto ventaglio di considerazioni, approcci, tipologie testuali, formati, soluzioni e situazioni che consentano di sviluppare negli allievi competenze legate all'attività di *problem solving*. In tale percorso occorre dedicare tempo e valore alla comprensione del testo (anzi, dei testi), in particolare alla lettura come porta d'entrata per la comprensione, che rappresenta una fase indispensabile per la risoluzione di un problema.

### 4.4 Lettura: una o molte?

Occorre a questo punto affrontare un altro nodo cruciale quando si parla di lettura come competenza trasversale. Una convinzione comune è che esista un solo tipo di lettura e che, quindi, di fronte al testo di un problema matematico l'approccio sia identico a quello ad altri testi. È invece errato considerare la lettura come un'azione sempre uguale a sé stessa, senza differenze di procedura e di scopo: sarebbe più corretto parlare di *letture*, cioè di operazioni in parte diversificate a seconda del testo e del suo scopo (cioè di che cosa dobbiamo fare con il testo in questione). Pensiamo a come leggiamo la mappa con le fermate della metropolitana o il tabellone con destinazioni e orari dei treni, e poi pensiamo a come abbiamo affrontato un testo di studio per preparare un esame: ci sarà facile avvertire anche intuitivamente qualche differenza. Il contatto con diversi tipi di testo e l'esercizio delle diverse *letture* e delle strategie a esse associate sono oggi ampiamente sostenuti e promossi sia dalle indagini di dimensione nazionale (come INVALSI, 2018), sia da quelle internazionali. Ciò in particolare al fine di proporre e di testare la lettura per ciò che realmente è, e cioè come «un'attività situata e dotata di senso» (OECD, 2018, p. 13, traduzione delle autrici).
La seguente classificazione dei diversi tipi di lettura – che ne mette in luce le peculiarità a confronto con testi e con scopi diversi – è stata proposta da Tanner e Green (1988), e poi spesso presa come riferimento dagli studi e dalle indagini sul tema:

1) *lettura esplorativa o orientativa* (*skimming*): consiste nello scorrere rapidamente e a balzi un testo per scoprire di quale argomento e sotto-argomenti tratta, e per capire se è centrato o no rispetto al proprio scopo di lettura. È una lettura molto utile in vari contesti, in quanto è idonea ad esempio a capire a grandi linee di che cosa parla un opuscolo o un articolo, per valutare se procedere con una lettura più approfondita;
2) *lettura selettiva* (*scanning*): consiste nel cercare informazioni e dati specifici in un testo (ad esempio, le parole in un dizionario, l'argomento poligoni in un testo scolastico di matematica, le pagine su Leopardi in un'antologia, ma anche i prezzi in un volantino o un nominativo in un elenco ecc.);
3) *lettura estensiva o globale* (*extensive*): ha carattere sequenziale (diversamente dalle precedenti) ed è quella che spontaneamente si impiega nella lettura per

piacere, ad esempio nella lettura di testi narrativi non troppo impegnativi; si può ricavare un certo tipo di apprendimento, in quanto è una lettura che porta comunque alla sedimentazione di memorie e informazioni (Day & Bamford, 2002);
4) *lettura intensiva o analitica* (*intensive or narrow*): è quella usata per capire a fondo e per interpretare al meglio le richieste del testo, ma anche per studiare e per imparare; prevede perciò che il lettore si soffermi maggiormente sul testo e ne rilegga certi passi. È una lettura in cui chi legge attua regressioni, ipotesi e anticipazioni per cogliere meglio il senso del testo stesso, considera altri elementi come immagini, simboli ecc. (se presenti), integra le informazioni che derivano dai dati testuali e le combina tra loro e a dati extra-testuali, e riflette a fondo sui significati delle parole.

Si può notare che le diverse modalità di lettura sono descritte in relazione ai tipi e ai generi di testo, e agli obiettivi di chi ne fruisce. Uno degli errori più comuni alla base di una lettura inefficace è, infatti, proprio quello di applicare un certo tipo di lettura a un testo che ne richiederebbe un'altra (o più di una): in particolare, leggere solo in modo selettivo testi che, invece, necessiterebbero di una lettura profonda e analitica (intensiva), che tenga conto delle varie parti, le gerarchizzi e le colleghi. Per contro, un lettore competente ed efficace sa adattare il proprio comportamento al testo e a ciò che con esso deve fare.
L'analisi resa possibile dalla lettura intensiva è fondamentale quando si affronta un problema matematico, che, come abbiamo visto, è un genere quanto mai esposto al rischio di una lettura affrettata e superficiale. Per comprendere davvero che cosa un problema esprime e chiede, è invece necessaria una piena comprensione difficilmente realizzabile attraverso la sola lettura esplorativa (utile per farsi un'idea globale) o selettiva (a salti). Eppure, come anticipato (Sowder, 1989; Zan, 2011), la strategia tipica degli allievi di fronte a un testo di matematica, in particolare se si tratta di un problema, è di effettuare proprio una lettura selettiva del testo, finalizzata all'applicazione di strategie alternative: ricerca di dati numerici da combinare per effettuare algoritmi matematici; prova di tutte le operazioni e scelta di quella che dà la risposta più "ragionevole"; ricerca delle "parole chiave" (ad esempio *tutti, insieme* vuol dire che bisogna sommare, *rimaste* occorre sottrarre) che suggeriscano il modo di combinare i dati; decisione a priori se la risposta dev'essere maggiore o minore dei numeri dati; ecc., attivando così «una rinuncia a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo» (Zan, 2011, p. 18). L'allievo tende quindi a non considerare i diversi elementi del testo, specialmente quelli linguistici, ma cerca di inferire il processo risolutivo solo sulla base di particolari elementi caratterizzanti (non di rado enfatizzati nei testi o proposti agli allievi come strategie necessarie per la risoluzione dei problemi: ad esempio sottolineare le parole chiave da associare alle operazioni risolutive), come segnala la letteratura in didattica della matematica.
Questa tendenza tipica della lettura dei problemi trova oggi terreno fertile. Infatti, le più recenti ricerche sull'evoluzione delle prassi di lettura (che avviene sempre più su schermo, spesso muovendosi, e con una concentrazione limitata) sembrano prospettare una generale ascesa della lettura a balzi, veloce, soprattutto nei giovani: «lo *skimming* (la lettura superficiale) è la nuova normalità nella nostra lettura digitale» (Wolf, 2018, p. 75; su questo anche Ziming, 2005; Rivoltella, 2018), e la cosa non può non avere ricadute su altre occasioni di lettura, che richiederebbero, invece, un approccio ben diverso. Poiché la scuola rimane, oggi, spesso, uno dei pochi ambienti in cui è pos-

sibile dedicare tempo all'incontro coi diversi tipi e generi testuali, la scoperta e la messa in pratica di diverse strategie di lettura per diversi scopi – tra i quali comprendere e risolvere un problema matematico – va favorita ed esercitata. Ciò per costruire quella competenza di lettura (*reading literacy*) auspicata dagli standard educativi attuali, che significa saper «comprendere, usare, valutare i testi, saper riflettere su di essi e saper entrare in relazione con essi» (OECD, 2018, p. 11, traduzione delle autrici).

### 4.5 "Cattivi" e "bravi" lettori

Per quanto non sia semplice standardizzare le pratiche di lettura efficaci o poco efficaci (in quanto c'è un'importante componente individuale), la ricerca nel campo della lettura e della comprensione del testo ha una storia lunga, che si è intensificata a partire dalla metà degli anni '70. Ciò perché (secondo Duke & Pearson, 2002) c'è sempre stata una consonanza di vedute tra ricercatori e insegnanti circa l'opportunità di insegnare a comprendere una lettura (Ferreri, 2002): essa è di fatto una competenza indispensabile e trasversale alle varie discipline (si veda il volume di Colombo & Pallotti, 2014).

A questa presa di coscienza condivisa, è conseguito il tentativo di provare a individuare e ad affrontare le difficoltà più ricorrenti nei cattivi lettori. Gli studi hanno dimostrato che, comunemente, i cattivi lettori mostrano scarse capacità soprattutto ai seguenti livelli (Ryan, 1980), fondamentali per affrontare anche i problemi matematici: concettualizzare la lettura come ricerca del significato; verificare continuamente la comprensione per accertarsi di stare cogliendo il significato del testo; compiere inferenze e organizzare il contenuto di un brano; rilevare i passaggi più importanti e ordinarli una volta presenti in memoria; completare un testo incompleto, formulare ipotesi, associare appropriatamente un disegno a un messaggio; utilizzare strategie per dare significato al testo o per superare un ostacolo che ha determinato l'interruzione della comprensione; adattare la scelta delle strategie alle varie esigenze che pone la lettura del testo.

Inoltre, i cattivi lettori tendono a una lettura impulsiva e meccanica (ad esempio, omettono di controllare i titoli ed eventuali altre parti legate al testo), non conoscono o non riconoscono le diverse tipologie testuali (cosa che porta ad avere attese inadeguate o a non averne), non gerarchizzano (faticano a selezionare le informazioni: cercano ad esempio di trattenere tutto facendo molta fatica oppure, viceversa, perdono o trascurano elementi essenziali).

Preliminare a tutto ciò è, però, la capacità di scegliere, fra quelli descritti al paragrafo precedente, il tipo o i tipi di lettura adeguati. È quindi fondamentale impostare a scuola un percorso di educazione alla lettura che si proponga di aiutare gli allievi a correggere le abitudini non vantaggiose e a svilupparne di proficue. Un percorso che, a partire dal contatto con molti testi e molte richieste su di essi, miri prima ad aumentare la gamma di modalità di lettura a disposizione, poi a irrobustire la capacità di scegliere quale o quali adottare a seconda del testo e degli scopi. Si tratta, insomma, di arrivare a lavorare anche sulle competenze metastrategiche, cioè sulla capacità di riflettere per «selezionare le strategie più adeguate per lo svolgimento di un compito» (Daloiso, 2013, p. 72); nel nostro caso, la risoluzione di un problema.

Questa sensibilità ai tipi di lettura si sviluppa con l'esposizione a testi diversi sui quali interrogarsi. In concreto, esercitare gli allievi a diventare bravi lettori significa lavorare sulle *azioni* base della lettura enucleate da Chauveau (2000, p. 109), che qui si è provato ad adattare all'ambito matematico:

- *localizzare* il tipo di scritto (p. es. *È una storia, È un elenco di regole di un gioco, È un manuale scolastico, È un problema* ecc.);
- *interrogare* il contenuto del testo (p. es. *Che cosa chiede il testo?, Dove siamo?, Che cosa succede?, Che cosa fa X?, Che cosa mi fa capire che cos'è successo a Y?*, *A che cosa si riferisce questo elemento?, Che informazioni numeriche/geometriche sono presenti nel testo?, Che relazioni numeriche sono presenti nel testo?* ecc.), perché farsi domande opportune serve a capire a fondo e ad attivare scenari pertinenti. Come si è accennato al **par. 3.1**, il ruolo del porsi domande durante la risoluzione di un problema è particolarmente messo in evidenza da Polya tramite la seguente raccomandazione, che rivolge ai suoi lettori e soprattutto agli insegnanti di matematica:

> «Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale»;
>
> (Polya, 1945, p. 7)

- *esplorare* i testi scritti e le loro parti portatrici di senso: singole parole, sequenze di parole da interpretare insieme (come *in più di, tanti quanti*) e poi frasi o periodi, ma anche più frasi o più periodi in relazione fra loro. La progressione auspicabile si realizza a partire dal soffermarsi sui significati locali per poi metterli in relazione con quelli generali;
- *identificare* le forme grafiche: per quanto riguarda il codice lingua scritta si intendono lettere, sillabe, parole ecc., da collegare con informazioni rappresentate in modo semiotico diverso (un esempio su tutti è quello dei problemi con informazioni presenti anche in modo figurale/grafico, aritmetico, algebrico ecc.);
- *riconoscere* alcune parole (quelle che già fanno parte del proprio vocabolario) e individuare quelle di cui non si conosce il significato (sia specialistiche, sia della lingua comune), o di cui non si è certi, o che possono averne più di uno;
- *anticipare* elementi linguistici o, nel nostro caso, matematici facendo previsioni e ipotesi sul testo, per poi escluderli o confermarli in modo consapevole al procedere della lettura e dell'analisi. Ciò significa attivare campi semantici e concettuali plausibili in modo da ottimizzare la selezione e la ricerca di informazioni, sapendoli, però, escludere qualora, poi, non si rivelassero pertinenti;
- *organizzare* gli elementi del testo dal punto di vista logico e mettere in relazione le diverse parti: numeri, figure, parole, frasi ecc. (nell'insieme del testo e all'interno delle parti stesse);
- memorizzare (cioè trattenere) le informazioni semantiche per legarle ad altre attraverso la memoria di lavoro (preposta a trattenere e a manipolare l'informazione durante un compito cognitivo) in dialogo con quella a lungo termine; nel caso specifico, si tratta anche di riconoscere e di trattenere elementi e relazioni dal lato matematico.[5]

5

5. Nei macro-processi di lettura descritti in PISA (OECD, 2018, pp. 12-17), *text processing e text management*, si possono ritrovare, con altre parole, molte delle azioni qui elencate.

Queste azioni, lentamente automatizzate dal lettore esperto, dovrebbero rientrare nel bagaglio procedurale del buon lettore. Difficilmente, però, vengono attuate senza esercizio e senza riflessione: non dimentichiamo, infatti, che l'atteggiamento del lettore, soprattutto nei confronti di specifici tipi e generi testuali (ad esempio il problema), migliora sensibilmente solo con l'allenamento e con la motivazione. Valorizzare queste azioni, comprenderne l'utilità e i benefici, farne oggetto di lavoro, e concedere a esse attenzione e tempo adeguati è senz'altro utile per prevenire gli atteggiamenti di lettura negativi più diffusi negli allievi a confronto col problema matematico, e non solo.

# 5 Allenare la lettura per comprendere

Partendo dall'inquadramento teorico qui illustrato è possibile sperimentare in classe percorsi didattici finalizzati a portare gli allievi a concepire il ruolo chiave della lettura per affrontare i vari tipi e generi testuali, e per gestirne i diversi scopi. Nello specifico, il traguardo conclusivo è quello di arrivare a considerare la lettura (intensiva) del testo di un problema matematico come un atto cruciale in quanto finalizzato alla piena comprensione, imprescindibile per passare alla fase risolutiva.

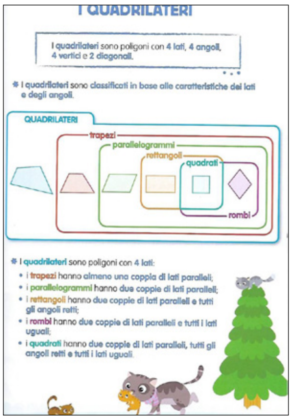
## 5.1 Il confronto spontaneo di diversi tipi e generi testuali

La sperimentazione potrebbe iniziare dalla terza classe di scuola elementare[6] attraverso il confronto spontaneo (a coppie o a gruppi) di allievi con svariati testi o stralci di testi appartenenti a diversi tipi, generi e anche formati (narrazioni matematiche; filastrocche matematiche; problemi di diverse tipologie, da quella di tipo più elencativo a quella più narrativa; sezioni espositive tratte da manuali scolastici; ma anche testi d'uso quotidiano come volantini, locandine, testi di istruzioni, enciclopedie o dizionari, giornali ecc.[7], eventualmente anche pagine di siti web), accomunati dalla caratteristica di veicolare contenuti o dati matematici in modo più o meno esplicito e diretto. 6 7

6. In generale, un percorso di esplorazione dei testi può iniziare anche molto presto: già dalla scuola dell'infanzia, infatti, è utile mettere a confronto i bambini con svariati testi, composti di parole, numeri, figure, da esplorare e scoprire nelle loro caratteristiche e funzionalità (facendo leva sull'«alfabetizzazione emergente», Clay, 1979, cioè sul sapere linguistico-testuale di cui il bambino dispone ancor prima dell'istruzione formalizzata). A seconda della classe, poi, si potranno variare la complessità e la ricchezza degli stimoli proposti, anche rispetto ai traguardi prefissati. In particolare, il percorso qui presentato è adatto dalla terza elementare in poi, quando le abilità di lettura di base (legate alla decodifica) sono generalmente consolidate, e non rappresentano più uno scoglio di per sé: bambini e ragazzi potranno quindi concentrarsi su aspetti più fini dell'interpretazione del testo; non ci sono, invece, limiti "verso l'alto" in quanto un percorso come questo può portare benefici anche a lettori esperti, come gli studenti di scuola superiore.

7. La proposta è in consonanza con le attuali documentazioni ufficiali in vigore nei diversi Paesi: ad esempio, le *Indicazioni Nazionali italiane* (MIUR, 2012, p. 37) ricordano che «la lettura va costantemente praticata su un'ampia gamma di testi appartenenti ai vari tipi e forme testuali (da testi continui a moduli, orari, grafici, mappe ecc.) per scopi diversi e con strategie funzionali al compito», e il *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015, p. 97) raccomanda il ricorso a «tipologie e generi differenti (…), comprese le forme testuali legate alle nuove tecnologie dell'informazione e della comunicazione, come pagine web, ipertesti e grafici».






| Testo della domanda |
| --- |
| D11. Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita. Restano due posti liberi. Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino? <br>A. ☐ 19 <br>B. ☐ 21 <br>C. ☐ 23 |
| **Caratteristiche** |
| **SCOPO DELLA DOMANDA** <br>Individuare tutti i dati rilevanti per la soluzione di un problema. <br><br>**Indicazioni nazionali** <br>Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. |

**3) UN PROGETTO COMPLESSO**

La giovane Sabina si è appena sposata e con il marito ha acquistato un terreno edificabile di forma quadrata che misura 23 m di lato. Dopo lunghe discussioni, durante un incontro con l'architetto, i due coniugi decidono di voler costruire una casa con pianta a forma trapezoidale. Inoltre il sogno di Sabina è quello di allevare delle galline per avere uova fresche tutti i giorni, questo dal momento che è un'ottima pasticcera e adora preparare dolci di ogni genere. È quindi necessario un piccolo pollaio che possa ospitare sei galline e questo deve avere forma rettangolare. Davanti alla casa ci deve poi essere un'area piastrellata quadrata sulla quale posizionare un fantastico grill di ultima generazione e un grande tavolo per le cene con gli amici. Infine, i due novelli sposi desiderano avere una piscina dal design innovativo a forma di rombo. Naturalmente deve però anche rimanere dello spazio libero che funga da giardino.

È possibile posizionare tutto all'interno del terreno acquistato? Se sì, se tu fossi l'architetto come posizioneresti i diversi elementi?

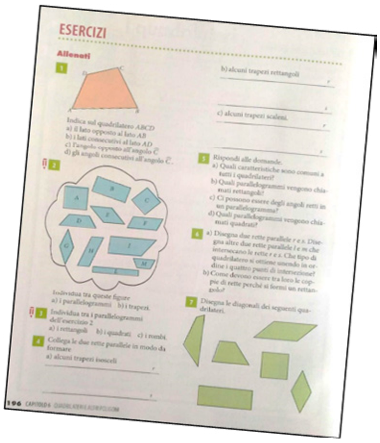




Figura 4
Diversi tipi e generi testuali.

Si chiede agli allievi di leggere i testi proposti, dando loro la possibilità di esplorarli muovendosi liberamente fra essi. Se la classe ha già affrontato una riflessione sul "come" leggere un testo e sui diversi tipi di lettura, nella consegna si può richiamare quanto fatto, chiedendo agli allievi in che modo pensano sia opportuno affrontare i diversi testi. Da questa prima fase, potrà emergere che certi tipi di testi sono meno noti di altri o non lo sono affatto, e andranno scoperti. Per esplorare più in profondità i testi, se ne è stato dato un buon numero, è anche possibile chiedere agli allievi di raggrupparli in base a tratti comuni (lasciando volutamente spontanea e aperta la classificazione): i testi potranno essere raggruppati per tipo, contenuto, lunghezza, formato, difficoltà di lettura, destinatari, presenza o assenza di figure (o di numeri), scopo ipotizzato o definito ecc. Non c'è una sola classificazione corretta, ma molte su cui poi discutere, a partire da somiglianze e differenze: le caratteristiche emerse potranno influire sul fine del testo e, quindi, sulla modalità di lettura. Se la consegna molto aperta dovesse risultare faticosa per studenti poco abituati a riflettere sui testi, si possono prevedere domande-stimolo, finalizzate a innescare la discussione (ad esempio, *Quali testi pensate abbiano delle caratteristiche in comune? Quali sono queste caratteristiche? Vi è già capitato di leggerne di simili? Se sì, quando?*).
Dopo di che, si può passare a porre ulteriori domande, sempre esplorative, accuratamente formulate per incentivare la riflessione su come è stato affrontato un testo e su che tipo di lettura è stata attuata, raccomandando di fornire motivazioni per le scelte; si tratta di domande-guida che stimolano l'attivazione cognitiva, del tipo *Qual è secondo voi lo scopo del testo (o l'intento dell'autore)? Che effetto fa al lettore? Sta chiedendo di fare qualcosa? Sta dando informazioni? Sta raccontando qualcosa? Come avete letto un certo testo? Perché avete fatto questa scelta? Avete letto tutti i testi allo stesso modo? Avete fatto fatica?* ecc. Da simili domande, scaturiranno anche le strategie spontanee di lettura, di cui andrà tenuta traccia per poi condividerle al fine di riflettere sulla loro efficacia (o inefficacia) in funzione dello scopo. Eccone alcune di bambini di quarta elementare scaturite da una sperimentazione: «Ho letto a voce un po' più alta ma senza disturbare», «Ho riletto tante volte», «Ho chiesto agli altri che cosa vuole dire questa parola», «Ho cercato di ricordarmi bene quello che avevo letto alla riga prima mentre leggevo la riga dopo perché erano collegate», «Ho segnato le frasi difficili ma che mi sembravano importanti per ricordarmi di andarle a rivedere», «Ho cerchiato le parole importanti, ma alla fine erano troppe», «Ho cercato di capire perché c'erano i numeri», «Ho cercato di capire come collegare tra loro i numeri» ecc. Come si può notare, i bambini, messi in situazione e chiamati a esplicitare quanto fatto, sono in grado non solo di attivare, ma anche di considerare criticamente alcune strategie basilari.

### 5.2 Letture diverse a seconda di vari testi e scopi

Per portare i gruppi a riflettere e a prendere coscienza delle diverse modalità di lettura per testi finalizzati a scopi diversi, è utile prevedere un lavoro specifico su testi identificabili e riconoscibili dal punto di vista del contesto in cui si trovano; ciascun alunno potrà così sperimentare diversi approcci di lettura, soprattutto se il lavoro è integrato da richieste (consegne) alle quali rispondere interagendo col testo: ad esempio, *Cercare l'argomento poligoni nel proprio manuale scolastico; Cercare il prezzo più economico dei cellulari presenti in vari volantini; Comprendere un argomento di un libro scolastico; Leggere e saper ripetere oralmente una filastrocca numerica; Leggere una locandina per scoprire quanto costa una settimana di corso per un ragazzino di*

*10 anni; Cercare nel dizionario la parola xxx, poi leggere e comprenderne il significato o i significati e in seguito produrre uno o più esempi d'uso della parola in contesto matematico; Dire ai compagni qual è il contenuto matematico della storia; Spiegare con le proprie parole che cosa chiede un problema; Risolvere un problema* e così via.
I gruppi di lavoro non dovrebbero solo fornire risposte alle richieste, ma dovrebbero anche capire e argomentare come sono arrivati a esse. In concreto, è utile che tengano traccia di come hanno effettuato la lettura, del tempo impiegato per rispondere alla consegna e delle eventuali difficoltà incontrate. Inoltre, riprendendo quanto sostenuto da Polya (**par. 3.1**) sull'importanza di porsi domande chiave in situazione di *problem solving*, sarebbe proficuo chiedere agli allievi di annotare che cosa si sono chiesti durante la procedura attuata per arrivare alla risposta. Che cosa devo chiedermi, ad esempio, per trovare l'argomento "poligoni" nel mio testo scolastico? Quali sono le potenziali difficoltà di questa richiesta? Che cosa potrei sbagliare? Che cosa devo sapere? Può non essere sufficiente, infatti, sapere che cos'è un indice e come funziona, in quanto potrebbe non essere banale consultarlo o determinare l'inizio e la fine della trattazione di quell'argomento a livello di contenuto. Se invece la richiesta è di spiegare con parole proprie il testo di un problema, potrei dovermi chiedere, ad esempio, se il sapere matematico in gioco è mantenuto correttamente anche se espresso in forma diversa, o se ho tralasciato parti o, ancora, se i legami fra esse sono rispettati. Anche l'interazione fra pari è un'occasione da sfruttare, poiché saper elaborare insieme richieste adeguate su un testo è indice che di quel testo si sono compresi gli scopi e si ha una buona padronanza; è quindi interessante chiedere agli allievi stessi di proporre consegne per gli altri, di verificarne le risposte, di discuterne le difficoltà. In questa fase, l'insegnante svolge un ruolo chiave: pone a sua volta domande, coglie e valorizza le curiosità, non stigmatizza le risposte non corrette, ma ne fa oggetto di discussione, rilancia i dubbi ascoltando il parere degli altri.
Si noterà come individui diversi, anche all'interno di uno stesso gruppo di lavoro, provino ad attuare strategie di lettura diverse, che si riveleranno più o meno (o per nulla) funzionali allo scopo. Le varie strategie non saranno accolte da tutti come convincenti: proprio per questo si tratta di una fase cruciale, perché attiva la riflessione sullo scopo dei testi e su ciò che il lettore deve fare con essi, ed è essenziale per operare scelte e strategie di lettura consapevoli. In particolare, sarà utile individuare e discutere quegli atteggiamenti di lettura non efficaci, per poter costruire assieme strategie alternative. È in questa fase che può essere utile fissare quanto si è scoperto con un sistema di simboli (di seguito porteremo simboli di animali, spesso usati nelle classi), che evocano le diverse modalità di lettura emerse (qui illustrate al **par. 4.4**): ad esempio, la lettura di un volantino per capire se contiene delle offerte di giocattoli sarà sicuramente *esplorativa*, a salti (una lettura che potremmo chiamare "a canguro"); invece, la lettura di una storia matematica, se ben scritta, sarà distesa, *estensiva*, veloce (come la corsa di un "ghepardo"), ma, a tratti, potrebbe dover essere necessario rallentare e soffermarsi meglio su parole, frasi, numeri o figure. Se poi si leggesse su un manuale scolastico uno specifico argomento matematico, la lettura dovrebbe proprio essere lenta e attenta, *intensiva* (una lettura a "lumaca", che procede piano e "striscia" fra le parole, i grafici, le notazioni matematiche ecc.). Ma è possibile utilizzare anche analogie e metafore di tipo diverso; in tal senso, durante una sperimentazione in una terza elementare, un'allieva ha associato la lettura di una narrazione matematica a una lettura "a coccole", una lettura calda, confortevole, che rilassa e non richiede troppa fatica, come quella che vive di sera prima di dormire, quando legge un libro sotto le coperte con la sua mamma.

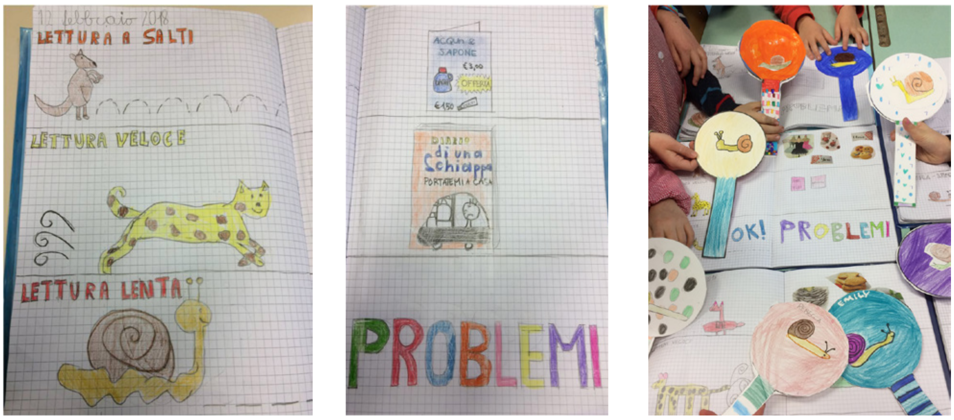



Figura 5
Immagini di una sperimentazione effettuata in una scuola elementare del gruppo "Matematica in rete" (https://rsddm.dm.unibo.it/).

E la lettura per capire e poi risolvere un problema matematico come sarà? Come agiranno spontaneamente gli allievi? Prima andranno veloce, come per leggere una narrazione scorrevole, e poi passeranno a una lettura lenta, per individuare e collegare informazioni utili per risolverlo? O leggeranno subito in modo lento e intensivo? Oppure eseguiranno una lettura a salti? Realizzeranno mappe, disegni o altro? Rileggeranno a voce un po' più alta? Gli atteggiamenti e i gesti saranno diversi, e più o meno efficaci. Occorre a questo punto sottolineare che le ricerche hanno, sì, delineato i principali tipi di lettura (qui illustrati al **par. 4.4**) in associazione a certi tipi di testo e a certi scopi, ma è fondamentale lasciare agli allievi la possibilità di scoprirli in autonomia (individuando eventualmente tipologie diverse da quelle convenzionali) o di applicare quelli noti con la possibilità di modificarli, provando e sbagliando, per costruire competenza: vanno quindi accettati i loro tentativi, le loro impressioni, ciò che scaturisce dalle esperienze dirette (fallimenti inclusi) e anche la loro terminologia per spiegarsi. Non esistono dunque una via giusta e una sbagliata in assoluto, ma esiste, e vale la pena di proporlo, un lavoro di sensibilizzazione consapevole per gli allievi, che può essere gestito dall'insegnante a seconda del suo stile e dei bisogni della classe.
È insomma significativo inquadrare questa proposta di lavoro nella prospettiva operativa che Trinchero (2012) chiama «ciclo di apprendimento esperienziale», che prevede un momento iniziale di *esperienza* (nel nostro caso, provare a leggere e a risolvere un problema), seguito da uno di *comunicazione* (dire che cosa si è fatto), poi dall'*analisi* di quanto effettuato (confrontare le strategie e i risultati, per cercare di capire quali sono le operazioni convincenti e quali quelle discutibili), dalla *generalizzazione* (sintetizzare ciò che si è scoperto, cioè come leggere il problema per capirlo a fondo) e dall'*applicazione* (sperimentare su altri problemi, in altri momenti didattici: cosa che determina il vero apprendimento). Ciò che qui è applicato alla lettura di un problema matematico può ovviamente essere sperimentato su altri generi di testo.

## 5.3 Le letture di un problema matematico

Durante il lavoro basato sul ciclo di apprendimento esperienziale, sarà possibile concentrarsi specificamente sulle diverse letture (o combinazioni di letture) utili per affrontare un problema matematico, partendo dall'intuizione che per questo particolare genere testuale occorre, prima o poi, passare a una lettura attenta e intensiva, finalizzata a comprendere a fondo. Se quest'intuizione non emerge spontanea-

mente dagli allievi, sarà utile mettere alla prova le altre modalità di lettura emerse; queste funzioneranno solo a volte, mentre in altri casi risulteranno inefficaci per la comprensione e quindi per la risoluzione, soprattutto se il testo del problema non è banale ma presenta qualche scoglio (ad esempio, lessico non noto la cui mancata conoscenza potrebbe compromettere la corretta rappresentazione della situazione; presenza di locuzioni del tipo *tanti quanti, non più di, almeno ecc.;* dati mancanti; relazioni numeriche complesse; domande non stereotipate ecc.).
In questa fase, è utile che l'insegnante abbia a disposizione e proponga ai gruppi alcuni problemi che presentano possibili difficoltà interpretative come quelle sopra citate. Si dà qui un caso di problema che, come hanno mostrato gli esiti delle prove standardizzate della quinta elementare proposte in Canton Ticino, presentava per i giovani solutori uno scoglio legato al lessico comune (Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2018):

> Un appartamento aveva 7 locali.
> Dal locale più grande sono state ricavate 2 camere.
> Quanti locali ha ora l'appartamento?
> Risposta: ………………………………………….

Dai risultati della somministrazione del problema e dalle interviste effettuate successivamente agli allievi emerge che, nella maggior parte dei casi, i bambini non disponevano delle conoscenze lessicali necessarie per comprendere la richiesta matematica. La sinonimia *locale-camera*, che realizza un richiamo anaforico poco trasparente, così come l'accezione qui pertinente del verbo *ricavare* non erano parte del magazzino lessicale di molti allievi: sono infatti impieghi lessicali propri del linguaggio specifico legato alla situazione (magari ancora ignota in quanto mai vissuta) della ristrutturazione di una casa. Eppure, la maggior parte dei lettori-solutori ha proceduto alla ricerca di un risultato senza cogliere lo scoglio che sarebbe dovuto emergere in fase di lettura, attribuendo alle diverse parole del testo significati personali ritenuti sensati (per un approfondimento, si veda Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2018, presente nel primo numero di questa stessa rivista). Fornendo agli allievi questo problema in un contesto scolastico diverso dalle prove standardizzate, potrebbe emergere la necessità di lentezza e di riflessione sul testo prima della risoluzione: un buon lettore-solutore, in questo caso, è chi sa fermarsi, capire le difficoltà e prendersi il tempo per provare a superarle (chiedendo i significati dei termini, cercandoli sul vocabolario ecc.). In questo caso, una lettura veloce, a salti, concentrata solo sui numeri, che può essere messa in atto dagli allievi, risulta essere una lettura fallimentare, non efficace in relazione allo scopo del testo. La discussione dei risultati non corretti che possono emergere da una lettura di questo tipo e, a ritroso, la riflessione su ciò che si è fatto per arrivare a essi, porterà l'attenzione all'indietro fino a individuare nella "lettura per comprendere" un passaggio chiave del ciclo della matematizzazione.
Questo semplice esempio ribadisce alcuni aspetti chiave emersi nel corso dell'articolo. Anzitutto, la necessità che le considerazioni sulle modalità di lettura di questo genere testuale siano affiancate a un lavoro quotidiano, critico e costruttivo sul concetto di problema, che contempli una definizione più generale e produttiva possibile di tale concetto, finalizzata a rompere la dicotomia tra problema reale e problema scolastico. Inoltre, occorre che il docente ridefinisca l'obiettivo dell'attività di risoluzione dei problemi in modo da non identificarlo con una prestazione volta a riconoscere le conoscenze e abilità degli allievi, ma come un'esperienza intellettuale stimolante, capace di far sviluppare competenze negli allievi; in questo modo

si darà un ruolo prioritario alla comprensione del testo nel processo risolutivo e di conseguenza alla sua lettura. Tale ampio obiettivo va poi condiviso con gli studenti e vissuto con loro quotidianamente. Ciò può essere favorito dalla proposta di problemi vari, coinvolgenti, operativi, che rendano l'allievo protagonista della situazione problema e che forniscano occasioni di reale *problem solving*, ponendo particolare attenzione ai processi, piuttosto che ai prodotti. Problemi, quindi, che portino gli allievi a uscire da certi automatismi improduttivi, a vantaggio di un atteggiamento flessibile e aperto, a partire dalla lettura.
In questa prospettiva l'insegnante – oltre a proporre una pluralità di testi e di attività – può anche stimolare gli studenti a costruire aiuti concreti per la lettura efficace del testo di un problema, così da superare una situazione ricorrente: quella della sola raccomandazione (pur utilissima!) *Rileggi,* che rischia di risultare sterile. Se l'allievo, pur mosso da buona volontà o da rispetto per le indicazioni dell'insegnante, dovesse rileggere come richiesto, ma senza migliorare l'efficacia della sua lettura, l'operazione potrebbe essere del tutto o in parte infruttuosa, e persino frustrante. Che cosa fare, allora?
Un primo suggerimento è quello di passare da indicazioni generali *(Leggi bene, Hai riletto?)* a indicazioni operative *(Prova a pensare a che cosa fare/a fare alcune cose quando leggi/rileggi)*, come suggerito anche in Barton e Heidema (2002). Ciò permette anzitutto all'allievo di attribuire rilievo al compito cognitivo della lettura per la risoluzione di un problema, cioè di non orientare la sua attenzione solo alla parte finale del testo, ovvero alla domanda o alle domande, come se fosse slegata dal resto. Per lavorare in questo senso, sarebbe interessante che gli allievi realizzassero una sorta di promemoria (spontaneo e sempre aggiornabile) degli aspetti su cui interrogarsi o delle azioni che potrebbero essere utili da fare prima di passare alla risoluzione di un problema. Il promemoria potrebbe contenere simili elementi*: controllo se ci sono parole che non conosco o che non mi sono chiare; controllo se ci sono frasi o parti di testo che non capisco bene; segnalo le eventuali relazioni numeriche che non comprendo; segno dove mi sono bloccato e cerco di capire perché; alla fine della lettura, scrivo con parole mie che cosa mi chiede il problema* ecc.
Se emergeranno aspetti di criticità, si dovrà lavorare su di essi prima di passare a risolvere il problema (ad esempio cercando i significati delle parole non note, sciogliendo eventuali costrutti sintattici o chiarendo le riprese anaforiche oscure o le relazioni matematiche coinvolte), in modo da rimuovere eventuali ostacoli che potrebbero interferire con la comprensione del contesto e dei processi risolutivi. Consideriamo ad esempio il seguente breve testo di un problema INVALSI del 2013 per il primo ciclo (seconda elementare):

> Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita. Restano due posti liberi. Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?
>
> a. 19
> b. 21
> c. 23

Limitandoci agli aspetti linguistico-enciclopedici, quali possibili ostacoli potrebbero interferire con la comprensione del testo, a una lettura veloce? Ad esempio, il significato della locuzione *in tutto*, ma anche l'anafora *viaggiatori*, che, tecnicamente, è

un *incapsulatore anaforico*, in quanto include in una sola parola *la classe di 9 maschi e le 10 femmine, e le due maestre*; e poi, siamo certi che per il bambino sia chiaro che l'autista o magari gli autisti (perché grazie alle mie conoscenze enciclopediche so che possono essere più di uno) non siano anche loro *viaggiatori*? Se per bambini e ragazzi diventa normale prendersi il tempo per leggere e per riflettere sul testo (fermarsi, riformulare con parole loro ecc.), questi aspetti potranno essere affrontati e sciolti prima di passare alle decisioni matematiche.
Oltre a questo lavoro preliminare, una pista operativa per mettere alla prova, con gli allievi, l'efficacia della loro lettura potrebbe essere quella di sfidarli con domande di comprensione non banali. Domande, cioè, che superino quelle spesso circolanti (sovente limitate alla richiesta di reperire informazioni nel testo), ma che richiedano di cogliere il significato di un testo in profondità, collegando opportunamente le informazioni, integrandole o inferendone di ulteriori. Dopo una prima lettura (libera) si potrebbe ad esempio chiedere *Di che cosa parla in generale il testo?, Sai dire che cosa ti chiede di fare?, Sai scrivere con parole tue la situazione descritta? Hai già vissuto una situazione simile?, Hai dubbi sul significato di qualche parola, frase o formula?, Hai incontrato informazioni matematiche che non conosci?, Secondo te nel testo manca qualche informazione importante?* E domande ancora più puntuali potrebbero essere le seguenti: *Chi è il protagonista/chi sono i protagonisti di questo testo? Che cosa deve/devono fare? Che cosa significa la parola matematica XXX o il simbolo YYY?, Quale di queste affermazioni non è corretta?* [scelta multipla], *Perché il personaggio X ha bisogno di…/dice…?, Che cosa rappresenta questa figura o questo grafico?, Quali relazioni ci sono tra questo testo e questo/a grafico/figura?, Perché ti viene fornita una certa informazione? È utile per risolvere il problema?* Poste dapprima dall'insegnante, le domande pian piano vengono interiorizzate dagli allievi, che arrivano a porsele da soli (secondo la filosofia di Polya) e che, in seguito, possono eventualmente idearne di ulteriori – adeguate a contesti specifici – e rivolgerle ad altri. La formulazione stessa delle domande ci dice qualcosa di come l'allievo sta affrontando il testo, poiché, sostengono gli studi, «una persona capisce qualcosa se è in grado di formulare le domande adeguate rispetto alle cose che deve capire» (Corno, 1990, p. 227; sull'argomento anche Corno, 1992).
Se la lettura è stata superficiale, frettolosa o a salti, alcune di queste domande imporranno necessariamente un ritorno accurato sul testo (cioè una lettura *intensiva*): sono infatti domande per le quali è difficile reperire la risposta (giusta) solo scorrendo il testo e le sue componenti grafiche, in quanto la formulazione della risposta stessa richiede un'elaborazione profonda dei contenuti. Sarà quindi interessante riflettere insieme sui limiti di efficacia di una lettura *esplorativa* o *selettiva*, e su quando, invece, è opportuno rallentare per essere sicuri di capire bene. Al di là di qualche eccezione, si scoprirà attraverso l'esperienza che per capire bene il testo e poi per rispondere alle domande dei problemi la via giusta per sbagliare di meno è procedere con lentezza.

Insomma, il senso dei suggerimenti qui proposti è così sintetizzabile: trasmettere agli studenti il messaggio che sui testi, tutti i testi, anche quelli dei problemi, si può (e si deve ed è utile) discutere e ragionare, arricchendo e migliorando, in questo modo, anche le emozioni e l'immaginario scolastico a essi legato; allenarli a leggere per comprendere, costruendo con loro una gamma di strategie; abituarli a verificare la comprensione prima di procedere con i tentativi di risoluzione, e a rimetterla in discussione anche nel corso del processo risolutivo. In particolare, lungo tutto il percorso e, in seguito, come pratica abituale, è utile dare importanza alle fasi di discussione e verbalizzazione, e incentivarle anche in situazioni didattiche in cui non sono abituali (come, appunto, la discussione rispetto a testi di contenuto matematico): ciò significa, in concreto, discutere in classe sia le caratteristiche e i contenuti dei testi, sia le decisioni prese per gestirli, in modo da esercitare su di esse un controllo metacognitivo. Come sottolinea Chambers (2015), la discussione è un atto fondamentale del *Reading Circle*, in quanto «alcune discussioni, nella misura in cui ci inducono a riflettere più attentamente e profondamente su quello che abbiamo letto, producono l'effetto di renderci più consapevoli» (Chambers, 2015, p. 18). Il messaggio che dovrebbe passare è che anche il problema è un testo con cui si può interagire, sul quale ci si può porre domande e rispetto al quale è possibile essere critici (per la formulazione di domande-stimolo per la riflessione si vedano Chambers, 2006 e Blezza Picherle, 2013).

## 6 Il tempo per concludere

In questo articolo abbiamo mostrato il ruolo inevitabile e decisivo della lettura del testo di un problema matematico allo scopo di risolverlo. Una via possibile per rendere più efficace questa fase potrebbe essere quella di sensibilizzare gli allievi sui diversi tipi di letture dei testi in funzione del contesto, arrivando a definire l'importanza di una lettura intensiva nel caso di problemi matematici, finalizzata alla comprensione. Tale proposta didattica va affiancata a un lavoro ampio e critico sul genere "problema matematico", che consenta di allargarne l'interpretazione da parte di docenti e allievi.
In questa prospettiva gioca un ruolo cruciale il tempo, in tutte le sue accezioni e rispetto a tutti gli attori coinvolti: il tempo che il docente si concede per proporre attività ricche e differenziate, per far leggere e interrogare i testi, per ascoltare i dubbi, per porre e rilanciare domande ecc.; il tempo che l'allievo si concede per affrontare un problema, in particolare per comprenderlo e per attivare strategie risolutive; il tempo per una didattica coraggiosa, che sappia dedicarsi a percorsi lunghi. Più in generale, il tempo necessario al lettore per entrare in relazione con un testo complesso, recuperando il gusto per i «pensieri lenti» (Rivoltella, 2018), indispensabili per riflettere. In questo senso, la neuroscienziata Maryanne Wolf (2018) ha sottolineato come la modalità di lettura intensiva sia un'autentica forma di allenamento del cervello a scavare in profondità, rafforzando le sue reti e i suoi processi, in modo che l'analisi e il ragionamento siano modalità operative disponibili anche nella vita di tutti i giorni.
Il tempo non dovrebbe in effetti rappresentare un vincolo per la comprensione di un testo. Ciò è in linea con quanto sostenuto dalla didattica proposta da Emma Castelnuovo basata sul rispetto dei tempi dell'alunno e del suo modo di mettersi alla prova, come spiega questa citazione a lei attribuita:

> «Lasciate ai ragazzi il "tempo di perdere tempo", nel senso di garantire loro l'opportunità di costruire soluzioni, anziché far loro usare soluzioni già pronte. Il che è come dire dare loro il tempo per riflettere, per pensare, per ipotizzare, per operare con la mente, per arrivare a capire e, quindi, a costruire conoscenze sicure».

Se si prende come assunto che la fase di lettura e comprensione di un testo è importante per la risoluzione dei problemi matematici, allora è fondamentale lasciare il tempo agli allievi di viverla e gestirla. Il bisogno di tempo per leggere è collegato in prima battuta a necessità fisiologiche, che molti studi recenti hanno permesso di scoprire a fondo (ad esempio Dehaene, 2009; Wolf, 2018): lettura e comprensione di un testo richiedono tempo e concentrazione perché l'atto stesso di leggere ci impegna fisicamente più di quanto avvertiamo. Basti ricordare che, leggendo, l'occhio compie ricorsivamente due tipi di azioni differenti: *saccadi* (numerosi movimenti per mettere a fuoco le parole nella fovea, la regione centrale della retina) e *fissazioni* (che durano in media 300 ms). Questo solo per ricostruire i segni scritti, cioè le parole, che poi saranno riconosciute e, se note (in quanto presenti nel magazzino lessicale), comprese, mentre, se non sono note, andranno decifrate e scoperte. E si è comunque solo all'inizio del processo di "lettura per comprendere": come si è illustrato al par. 4.3, i processi complessi seguono la fase di decodifica, poiché delle parole va poi individuato, se disponibile, il significato adatto al contesto, e le parole singole vanno poi messe in relazione fra loro e, se presenti, con altri tipi di segni (numeri, figure ecc.) per arrivare a una costruzione di senso soddisfacente. Per quanto un lettore possa diventare esperto, e quindi anche più veloce ed efficiente, leggere per comprendere in profondità è un processo che richiede tempo (lo mostra anche l'esperimento di Duggan & Payne, 2009), soprattutto quando si tratta di testi complessi come i problemi matematici, che, a livello di rappresentazione di senso, richiedono di pensare per far interagire adeguatamente conoscenze del senso comune e sapere disciplinare. Sul piano didattico in senso lato, il bisogno di tempo è illustrato con efficacia da D'Amore, che, a proposito dell'importanza di lasciare tempo per la risoluzione di un problema matematico, afferma:

> «È ben noto a qualsiasi insegnante che c'è un periodo più o meno lungo di latenza, molto differente da soggetto a soggetto; ed è anche ben noto che non sembra esservi una relazione tra durata del tempo di latenza e buona risoluzione del problema: essa sembra dipendere più dallo stile del risolutore, piuttosto che dalla sua minore o maggiore capacità. Tant'è vero che, se si stabiliscono durate di risoluzione fisse, vi sono bambini in difficoltà anche tra i buoni risolutori; anzi l'idea stessa di avere un tempo limitato a disposizione crea blocchi e mette in agitazione. (…) Ci sono bambini che hanno bisogno di questo tempo per vari motivi: scaricare tensione, cercare concentrazione, sentirsi rassicurati da una ricognizione su quel che fanno i compagni, ... In quel periodo, ben noto agli psicologi, si fa la punta alla matita in modo accuratissimo, si mettono in ordine di altezza le matite colorate dell'astuccio, si tolgono le "orecchie" dai quaderni ... (…) Sembra che il tempo di latenza sia necessario al bambino soprattutto per calmare il proprio stato di agitazione, per "estraniarsi" dal lavoro che sta per intraprendere: dunque, psicologicamente parlando, non è tempo buttato via, rientrando invece nel bisogno individuale».
>
> (D'Amore, 2014, pp. 101-102)

Il tempo, dunque, per gli allievi risulta fondamentale per una pluralità di ragioni, sia di tipo psicologico, sia di tipo organizzativo-procedurale. Lo testimoniano le convinzioni sul problema matematico tratte da Zan (1998, p. 44), dove la necessità di avere tempo e di affrontare la risoluzione con calma e tranquillità è citata esplicitamente: «Per me un problema è uno svolgimento di cui bisogna *riflettere, pensare*.

Ed è anche una lezione che si svolge nel quaderno di aritmetica, la parola problema mi fa venire in mente una cosa di cui *ha bisogno di tempo*, è una cosa che bisogna impegnarci capirla. (…)» (IV el.); «Per me un problema è una cosa da risolvere *con calma e ragionarci sopra*, prima di scrivere nel quaderno. Per capirlo bisogna rileggerlo fino a che non si capisce e se è con più domande farlo un po' alla volta, cioè leggere fino alla prima domanda e farlo, fino alla seconda e farlo e così via» (IV el.). Queste sensazioni e intuizioni dei bambini risultano fondamentali da tenere in considerazione anche alla luce delle ricerche attuali sul ruolo dei fattori affettivi nella risoluzione dei problemi di matematica: lo stato di ansia e di paura derivante anche dalla mancanza di tempo, infatti, incide negativamente sulle prestazioni degli allievi (Zan, 2007). Occorre quindi evitare che la risoluzione di un problema diventi per l'allievo una lotta solitaria contro il tempo, che genera un'alternanza di emozioni negative quali frustrazione, rabbia, ansia, che portano alla rinuncia o incidono profondamente sull'esito finale.
Occorre insomma dare tempo agli allievi di "prendersi il tempo" che ritengono necessario, ma anche provare a insegnare loro a gestirlo nel migliore dei modi durante la risoluzione, in modo che il tempo investito per determinate operazioni non sia "perso", ma "speso bene". Infatti, tra le decisioni strategiche che riguardano la gestione delle risorse durante il processo risolutivo e che indirizzano la direzione che prenderà una soluzione, vi sono anche le decisioni relative alla gestione del tempo (quelle su cui, come abbiamo visto, i cattivi solutori rivelano più difficoltà): quanto tempo dedicare a una fase, quando interrompere una fase per aprirne un'altra, quando chiudere un tentativo risolutivo e aprirne uno nuovo, se è più utile leggere tutti gli esercizi prima di cominciare una verifica o leggerne uno e direttamente risolverlo, valutare la difficoltà o il tempo necessario per ogni domanda, scegliere di dedicarsi solo ad alcuni esercizi ecc. E, prima e durante tutte queste decisioni, c'è la gestione del tempo dedicato alla lettura profonda e all'interrogazione del testo, che è tempo prezioso, su cui si poggia la base per passare con consapevolezza ai passi successivi.

## Bibliografia


Andorno, C. (2003). *Linguistica testuale. Un'introduzione*. Roma: Carocci.

Barton, M. L., & Heidema, C. (2002). *Teaching Reading in Mathematics*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Bertocchi, D. (1983). *La lettura*. Lecce: Milella.

Blezza Picherle, S. (2013). *Formare lettori, promuovere la lettura. Riflessioni e itinerari narrativi tra territorio e scuola*. Milano: Franco Angeli.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 9*(9), 48-93.

Chambers, A. (2006). *Il piacere di leggere e come non ucciderlo. Come imparare a leggere con i ragazzi*; traduzione, cura e aggiornamento di M.P. Alignani. Casale Monferrato: Sonda.

Chambers, A. (2015). *Il lettore infinito. Educare alla lettura tra ragioni ed emozioni*. Ed. italiana a cura di G. Zucchini. Modena: Equilibri.

Chauveau, G. (2000). *Come il bambino diviene lettore. Per una psicologia cognitiva e culturale della lettura*. Roma: Armando.

Clay, M. M. (1979). *Reading: the patterning of complex behaviour*. Auckland: Heinemenn.

Clements, M. A. (1980). Analysing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 1-21.

Colombo, A. (2002). *Leggere. Capire e non capire*. Bologna: Zanichelli.

Colombo, A., & Pallotti, D. (Eds.). (2014). *L'italiano per capire.* Roma: Aracne.

Corno, D. (1990). *La comprensione vista da vicino*. Italiano & Oltre, *5*, 225-227.

Corno, D. (1992). *A domanda risponde. Italiano & Oltre, 1*, 19-21.

Daloiso, M. (2013). Le difficoltà di comprensione del testo scritto in lingua materna e straniera. Un quadro teorico per il recupero della competenza metastrategica. EL.LE. *Educazione Linguistica, Language Education, 2*(1), 68-87.

D'Amico, S., & Devescovi, A. (2013). *Psicologia dello sviluppo del linguaggio*. Bologna: il Mulino.

D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica, 1*, 28-47.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Una formula per la misurazione oggettiva della difficoltà di comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti. *Uso valutativo e uso didattico. La matematica e la sua didattica, 1-2*, 59-78.

Day, R. R., & Bamford, J. (2002). Top Ten Principles for Teaching Extensive Reading. *Reading in a Foreign Language*. 14(2), Disponibile in http://nflrc.hawaii.edu/rfl/October2002/day/day.html (consultato il 29.03.2019).

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

De Mauro, T. (1994). *Capire le parole*. Roma-Bari: Laterza.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch (consultato il 29.03.2019).

Dehaene, S. (2009). *I neuroni della lettura*. Milano: Raffaello Cortina.

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). *Numeri e parole. Percorsi di lingua e matematica*. Firenze: Giunti scuola.

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2018). Dalla parola al termine. Il cammino verso l'apprendimento del lessico specialistico della matematica nelle definizioni dei bambini. In L. Corrà (A cura di), *La lingua di scolarizzazione nell'apprendimento delle discipline non linguistiche* (pp. 79-101). Roma: Aracne.

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (in corso di stampa). Se la sintesi diventa un problema.

Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica. In Atti del XV Congresso Internazionale SILFI "Linguaggi settoriali e specialistici: sincronia, diacronia, traduzione, variazione", Genova, 28-30 maggio 2018. Firenze: Cesati.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015a). Geometria e narrazione alla scuola dell'infanzia: un "binomio fantastico". In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento* (pp. 67-72). Bologna: Pitagora.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015b). Storie di figure, *Scuola dell'infanzia, 16*(4), 17-18.

Duggan, G. B., & Payne, S. J. (2009). Text skimming: The process and effectiveness of foraging through text under time pressure. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 15*, 228-242.

Duke, N. K., & Pearson, P. D. (2002). Effective practice for developing reading comprehension. In A.E. Farstrup & S. J. Samuels (Eds.), *What research has to say about reading instruction.* Newark, DE: International Reading Association, 205-242.

Eco, U. (1994). *Sei passeggiate nei boschi narrativi*. Milano: Bompiani.

Ferrari, A. (2010a). "coerenza, procedure di". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'italiano Treccani* (Vol. 1, pp. 219-222). Roma: Istituto dell'Enciclopedia.

Ferrari, A. (2010b). "coesione, procedure di". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'italiano Treccani* (Vol. 1, pp. 222-225). Roma: Istituto dell'Enciclopedia.

Ferrari, A. (2014). *Linguistica del testo. Principi, fenomeni, strutture*. Roma: Carocci.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Ferrari, P. L. (2012). Linguaggio, formalismo e costruzione del significato in matematica. In T. Pacelli, C. Coppola & G. Gerla (A cura di), *Logica, linguaggio e didattica della matematica* (Vol. 135, pp. 129-141). Milano: Franco Angeli.

Ferreiro, E., & Teberosky, A. (1982). *Literacy before schooling*. Ports mouth, NH: Heinemann Educational Books.

Ferreri, S. (A cura di). (2002). *Non uno di meno. Strategie didattiche per leggere e comprendere*. Firenze: La Nuova Italia.

Filippini, L., & Segreto, A. (1999). *Strategie per leggere*. Brescia: La Scuola.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula* (pp. 33-38). Bologna: Pitagora.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2016). Che problema, queste parole! *La vita scolastica, 2*, 16-18.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (A cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche* (pp. 211-224). Roma: Aracne.

Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalla ricerca* *alle pratiche d'aula, 1,* 38-63. Disponibile in http://www.rivistaddm.ch/index.php/2017-01-volume/2017-01-franchini-lemmo-sbaragli/ (consultato il 29.03.2019).

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the learning of mathematics, 16*(2), 36-45

Giasson, J. (1995). *La lecture: de la théorie à la pratique*. Montreal: Gaetan Morin.

Giasson, J. (2003). Metacognizione e comprensione della lettura. In O. Albanese, P. A. Doudin & D. Martin (A cura di), *Metacognizione ed educazione. Processi, apprendimenti, strumenti* (pp. 178-188). Milano: Franco Angeli.

Glenberg, A., Willford, J., Gibson, B., Goldberg, A., & Zhu, X. (2011). Improving Reading to Improve Math. *Scientific Studies of Reading*, 1-25.

Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). «The answer in really 4·5»: beliefs about word problems. In G. C. Leder, G. Pehkonen & G. Törner (Eds.). *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* (pp. 271-292). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

INVALSI. (2018). *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di italiano*. Disponibile in https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_ITALIANO.pdf (consultato il 10.04.2019)

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(9), 2481-2502.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Associates.

Kintsch, W., & Van Dijk, T.A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review, 85*(5), 363-394.

Kintsch, W. (1988). The use of knowledge in discourse processing: A construction-integration model. *Psychological Review, 95*, 163-182.

Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica, 2*, 121-135.

Lesh, R. (2006). New directions for research on mathematical problem solving. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Canberra, Vol. 1, pp. 15-34). Adelaide: MERGA.

Lester, F. (1987). Why is problem solving such a problem? *Proceedings PME XI*. Montreal.

Levinson, S. C. (2000). *Presumptive Meanings. The Theory of Generalized Conversational Implicature.* Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Levorato, M. C. (2000). *Le emozioni della lettura.* Bologna: il Mulino.

Lumbelli, L. (2009). *La comprensione come problema. Il punto di vista cognitivo*. Roma-Bari: Laterza.

Mayer, R. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In F. L. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving. Issues in research* (pp. 1-13). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

MIUR. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 28.03.2019).

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the learning of mathematics,* I, 41-48.

OECD. (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD Publishing.

OECD. (2013). *The PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OEC Paris: OECD Publishing.

OECD. (2016). *The PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.

OECD. (2018). *The PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing. Disponibile in https://www.oecd.org/pisa/data/PISA-2018-draft-frameworks.pdf (consultato il 27.03.2019)

Orsolini, M., Fanari, R., & Maronato, C. (2005). *Difficoltà di lettura nei bambini*. Roma: Carocci.

Palermo, M. (2013). *Linguistica testuale dell'italiano*. Bologna: il Mulino.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: University Press. [Traduzione italiana: 1967, Milano: Feltrinelli].

Ryan, M. L. (1980). Fiction, Non-Factuals, and the Principle of Minimal Departure. *Poetics, 9*, 403-422.

Rivoltella, P. C. (2018). Leggere e scrivere in digitale. Cosa cambia per il cervello? *Avvenire*, 5 ottobre 2018. Disponibile in https://www.avvenire.it/opinioni/pagine/leggere-e-scrivere-in-digitale-cosa-cambia-per-il-cervello (consultato il 28.03.2019).

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2017). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Schank, R. C. (1982). *Reading and Understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematics problem solving. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 345-395). New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: an informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In A. G. Douglas (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company. Disponibile in http://hplengr.engr.wisc.edu/Math_Schoenfeld.pdf (consultato il 16.04.2018).

Sowder, L. (1989). Searching for affect in the solution of story problems in mathematics. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 104-113). New York: Springer.

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 247-254.

Tanner, R., & Green, C. (1988). *Tasks for teacher education. A reflective approach*. Harlow: Addison Wesley Longman.

Trinchero, R. (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Milano: Franco Angeli.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Wolf, M. (2018). *Lettore, vieni a casa. Il cervello che legge in un mondo digitale*. Milano: Vita e Pensiero.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.

Zan, R. (2007). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 30 A-B, 6, 741-762.

Zan, R. (2011). L'errore in matematica: alcune riflessioni. *PQM 2010/2011*. Disponibile in http://www.liceocapece.gov.it/wp-content/uploads/2016/10/R.Zan-Lerrore-in-matematica-alcune-riflessioni.pdf (consultato il 20.08.2017).

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Roma: Carocci.

Zanetti, M. A., & Miazza, D. (2004). *La comprensione del testo. Modelli e ricerche in psicologia*. Roma: Carocci.

Ziming, L. (2005). *Reading behavior in the digital environment: Changes in reading behaviour over the past ten years. Journal of Documentation, 61*(6), 700-712.

**Autori/Silvia Demartini e Silvia Sbaragli**
Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI di Locarno, Svizzera
silvia.demartini@supsi.ch, silvia.sbaragli@supsi.ch

# Differenze di genere in matematica: dagli studi internazionali alla situazione italiana

Disponibile anche in inglese

## Gender differences in mathematics: from the international literature to the Italian situation

**Chiara Giberti**
Facoltà di Scienze della Formazione – Libera Università di Bolzano, Italia

**Sunto** / Dalle principali rilevazioni nazionali e internazionali emerge una forte disparità nei risultati di maschi e femmine nelle prove di matematica: gli studenti ottengono risultati migliori delle studentesse nella maggior parte delle nazioni e a tutti i livelli scolastici. Nel panorama internazionale, l'Italia risulta essere uno dei Paesi in cui i risultati relativi alle differenze di genere in matematica sono più allarmanti e i dati delle prove INVALSI confermano un gender gap molto marcato a favore dei maschi, presente a tutti i livelli scolastici. Questo articolo presenta la situazione internazionale relativa alle differenze di genere in matematica a partire dalle prove standardizzate, prestando particolare attenzione alla situazione italiana; quindi viene presentato un excursus dettagliato sulle cause alla base del gender gap in matematica, analizzando i principali studi sull'argomento e cercando di fornire una chiave di lettura completa, seppur complessa, di questo fenomeno.

Parole Chiave: differenze di genere; prove standardizzate; INVALSI; STEM.

**Abstract** / National and international surveys highlight a strong disparity in male and female results in mathematics: boys outperform girls in almost every country at all scholastic levels. In the international context, Italy appears to be one of the countries where the results related to gender differences in mathematics are more alarming and INVALSI test data confirm a very marked gender gap in favour of males at all scholastic levels. In this paper we present the international situation regarding gender differences in mathematics, starting from large-scale assessment and paying particular attention to the Italian context. We then present a detailed overview of the causes underlying the gender gap in mathematics, analysing the main studies on this issue and attempting to provide a complete, though complex, interpretation of this phenomenon.

Keywords: gender gap; large scale assessment; INVALSI; STEM.

## 1 Introduzione

Il numero di donne impegnate in materie STEM (acronimo di: Science, Technology, Engineering and Mathematics) negli ultimi anni risulta essere in aumento; nonostante ciò quantitativamente permane un forte squilibrio a favore della componente maschile sia nel numero di iscrizioni all'università in corsi scientifici, sia nelle posizioni lavorative legate alle STEM (Hill, Corbett & St. Rose, 2010; OECD, 2015).
Alcuni fattori che hanno portato a questa disparità di numero tra uomini e donne impegnati nelle materie scientifiche possono essere ricercati, in primo luogo, nella storia del costume e della società (MacKinnon, 1990; Leder & Forgasz, 2008). Storicamente, infatti, l'accesso alla cultura scientifica e, in particolare, lo studio della matematica era riservato quasi esclusivamente agli uomini e ben pochi nomi femminili vengono ricordati nella storia della matematica prima del secolo scorso (MacKinnon, 1990; Leder & Forgasz, 2008).

Dall'inizio del 1900, sono stati fatti grandi passi avanti per permettere alle donne uguali diritti di accesso all'istruzione e al mondo del lavoro e per combattere gli stereotipi legati al genere. Dagli anni '70, in molti Paesi sono state introdotte politiche educative finalizzate a incoraggiare le ragazze a studiare le scienze e la matematica e a garantire loro le stesse possibilità degli uomini anche nel mondo del lavoro (Leder & Forgasz, 2008); nonostante ciò differenze di genere nelle materie STEM sussistono ancora oggi (Hill et al., 2010).

Nel settore delle materie STEM la matematica risulta avere un ruolo fondamentale per lo sviluppo e la conoscenza anche delle altre discipline (Hill et al., 2010) e, per questo motivo, molti studi si sono focalizzati proprio sulle differenze di genere in matematica.

Negli ultimi anni, il tema delle differenze di genere è stato oggetto di numerosi studi condotti da diversi punti di vista. Sono numerose infatti anche le teorie che non rientrano nella ricerca in didattica ma che appartengono piuttosto ad altri settori quali la sociologia e la psicologia (Leder, 1992; Byrnes, 2005; Pajares, 2005). La psicologia, negli ultimi anni, ha sviluppato un ampio settore di ricerca proprio legato alle difficoltà di apprendimento della matematica da parte delle ragazze legando i minori risultati a fattori di tipo affettivo e psicologico come l'ansia e la sicurezza in se stessi (e.g. Primi, Busdraghi, Tomasetto, Morsanyi & Chiesi, 2014; Lindberg, Hyde, Petersen & Linn, 2010).

L'introduzione, a livello internazionale, di prove standardizzate volte a monitorare l'apprendimento della matematica e di altre discipline, ha permesso di studiare le differenti performance di maschi e femmine anche confrontando Paesi con culture e sistemi di istruzione molto diversi. In particolare, i risultati delle prove OECD PISA e IEA TIMSS hanno messo, negli ultimi anni, in grande risalto le differenze di genere e hanno permesso di studiarle attraverso la comparazione tra diverse aree geografiche e in relazione agli indici di status socio-economico e culturale.

Questo articolo si propone di fare un excursus delle ricerche sulle differenze di genere in matematica: la prima parte sarà dedicata all'analisi dei principali risultati delle prove standardizzate, mentre nei paragrafi successivi si andranno a ricercare le cause delle differenze emerse: saranno prese in considerazione soprattutto le ricerche provenienti dal settore della didattica della matematica, affiancate anche dai principali studi sul tema provenienti da altri settori.

## 2 Metodologia

In questo articolo, le principali ricerche in didattica della matematica sul tema delle differenze di genere saranno confrontate tra loro e integrate con studi provenienti da altri settori, in modo da fornire una visione complessiva di questo fenomeno.

Sono stati quindi presi in considerazione i principali articoli che trattano il tema delle differenze di genere in matematica presenti nelle riviste di classe A di didattica della matematica, secondo la classificazione (Törner & Arzarello, 2013) prodotta congiuntamente dai membri dell'ERME (Executive Committee of the European Society for Research in Mathematics Education) e dell'EMS (Education Committee of the European Mathematical Society). Molti di questi studi si riferiscono direttamente ai risultati delle rilevazioni su larga scala IEA TIMSS e OECD PISA e per questo motivo si

è deciso di presentare, innanzi tutto, i risultati di tali prove in termini di differenze di genere in matematica e commentare, in un secondo momento, tali risultati alla luce degli studi sopra descritti. Questa prima analisi permette di individuare le caratteristiche principali di questo fenomeno e, quando possibile in base ai risultati forniti dalle rilevazioni internazionali, di declinarle nelle diverse realtà nazionali.
A partire dalla selezione di articoli appartenenti al settore della didattica della matematica, la letteratura è stata ampliata sia approfondendo le ricerche citate in questi articoli, sia attraverso una ricerca indipendente dell'autrice al fine di comprendere meglio alcune delle evidenze emerse, anche analizzando studi provenienti da altri settori e riviste. Le caratteristiche così evidenziate relative alle differenze di genere in matematica possono essere prese in considerazione per fare uno stato dell'arte delle ricerche sul tema e possono fornire informazioni importanti per confrontare la letteratura relativa.

# 3 Studio delle differenze di genere attraverso le prove standardizzate

Leder e Forgasz nel 2008 forniscono una panoramica degli studi relativi alle differenze di genere nell'ambito della didattica della matematica e sottolineano l'importanza dell'uso delle prove standardizzate in questa direzione:

> «I risultati dei test internazionali su larga scala, incluso il Programma per la Valutazione Internazionale dell'Allievo (Programme for International Student Assessment - PISA), hanno attirato notevolmente l'attenzione della comunità dei ricercatori in didattica della matematica e anche di tutti coloro che hanno un particolare interesse per le differenze di genere nell'apprendimento della matematica».
>
> (Leder & Forgasz, 2008, p. 516, traduzione dell'autore)

## 3.1 Rilevazioni internazionali OECD PISA e IEA TIMSS

Le principali indagini internazionali volte a misurare gli apprendimenti della matematica e di altre discipline sono le prove PISA promosse dall'*Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD) e quelle TIMSS promosse dall'*International Association for Evaluation of Educational Achievement* (IEA).
Le principali caratteristiche e differenze dei due studi sono riportate nella tabella alla pagina successiva (particolarmente interessante è l'anno 2015, l'ultimo, ad ora, nel quale si sono svolte contemporaneamente le due rilevazioni):

| Prova | OECD PISA | IEA TIMSS |
|---|---|---|
| Prima edizione e cadenza | 2000; cadenza triennale | 1995; cadenza quadriennale |
| Ambiti di investigazione | Lettura, Matematica, Scienze e Financial literacy (ogni edizione si focalizza in particolare su un ambito) | Scienze e Matematica |
| Campione di riferimento | Studenti quindicenni scolarizzati (prove campionarie) | Studenti frequentanti il grado 4 e il grado 8 di scolarizzazione corrispondenti alla quarta classe di scuola elementare e alla terza media (prove campionarie)[1] |
| Finalità | Valutare l'acquisizione delle competenze chiave per la piena partecipazione alla società moderna[2] | Valutare l'acquisizione dei contenuti e delle abilità curricolari da parte degli studenti[3] |
| Partecipanti 2015 | 72 Paesi per un totale di circa 540 000 studenti coinvolti (di queste 35 sono nazioni OECD) | 57 Paesi (non tutti compresi in quelli partecipanti a OECD PISA) |

1

2 – 3

Tabella 1
Principali caratteristiche delle prove OECD PISA e IEA TIMSS.

### 3.2 Le differenze di genere nei risultati delle rilevazioni internazionali

L'uso delle prove standardizzate per la ricerca in didattica della matematica è aumentato negli ultimi anni, anche se le potenzialità che tali prove potrebbero avere non sono ancora pienamente sfruttate (Maffia & Giberti, 2016; Sfard, 2005). I risultati riportati nei prossimi paragrafi, sono tratti dai report delle prove TIMSS e PISA e provengono principalmente dalle rilevazioni del 2015 che, come già specificato, è un anno particolarmente interessante in quanto sono state svolte in concomitanza entrambe le rilevazioni.

#### 3.2.1 Risultati dell'indagine PISA 2015

Nel 2015 le nazioni OECD che hanno partecipato alle rilevazioni PISA di matematica sono state 35 e il punteggio medio ottenuto nella prova da queste nazioni è stato di 490 punti (per approfondire il modo in cui vengono attribuiti i punteggi nelle prove, a seguito dell'ancoraggio, si rimanda al rapporto tecnico: OECD, 2016d). Nel grafico seguente (**Figura 1**) sono riportati, nella seconda colonna evidenziata in azzurro, i punteggi medi ottenuti nella prova di matematica per ogni nazione partecipante e,

1. In Italia la scuola elementare viene detta scuola primaria, la scuola media, scuola secondaria di primo grado, la scuola medio-superiore viene detta scuola secondaria di secondo grado.
2. La definizione di *mathematical licteracy* assunta è la seguente (OECD, 2016c, p. 66, traduzione dall'autore): La *competenza matematica* è la capacità di un individuo di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in una varietà di contesti. Include ragionare in termini matematici e utilizzare concetti matematici, procedure, fatti e strumenti per descrivere, spiegare e predire fenomeni. La competenza matematica aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.
3. I test somministrati agli studenti sono relativi alle parti comuni dei curricula dei diversi Paesi.

a fianco, la differenza tra il punteggio medio ottenuto dagli studenti maschi e quello ottenuto dalle studentesse. L'istogramma mostra quindi un gap a favore dei maschi nel caso in cui la barra sia a destra della linea verticale e un gap a favore delle femmine nel caso in cui la barra si sviluppi a sinistra. I simboli, riportati anche in legenda, indicano inoltre le differenze di genere considerando esclusivamente i *lowest-achieving students* (che si posizionano al di sotto del decimo percentile) e gli *highest-achieving students* (che si posizionano al di sopra del novantesimo percentile). Nella figura i colori più scuri indicano una differenza statisticamente significativa, sia per quanto riguarda le barre del grafico sia per quanto riguarda i simboli relativi ai percentili.

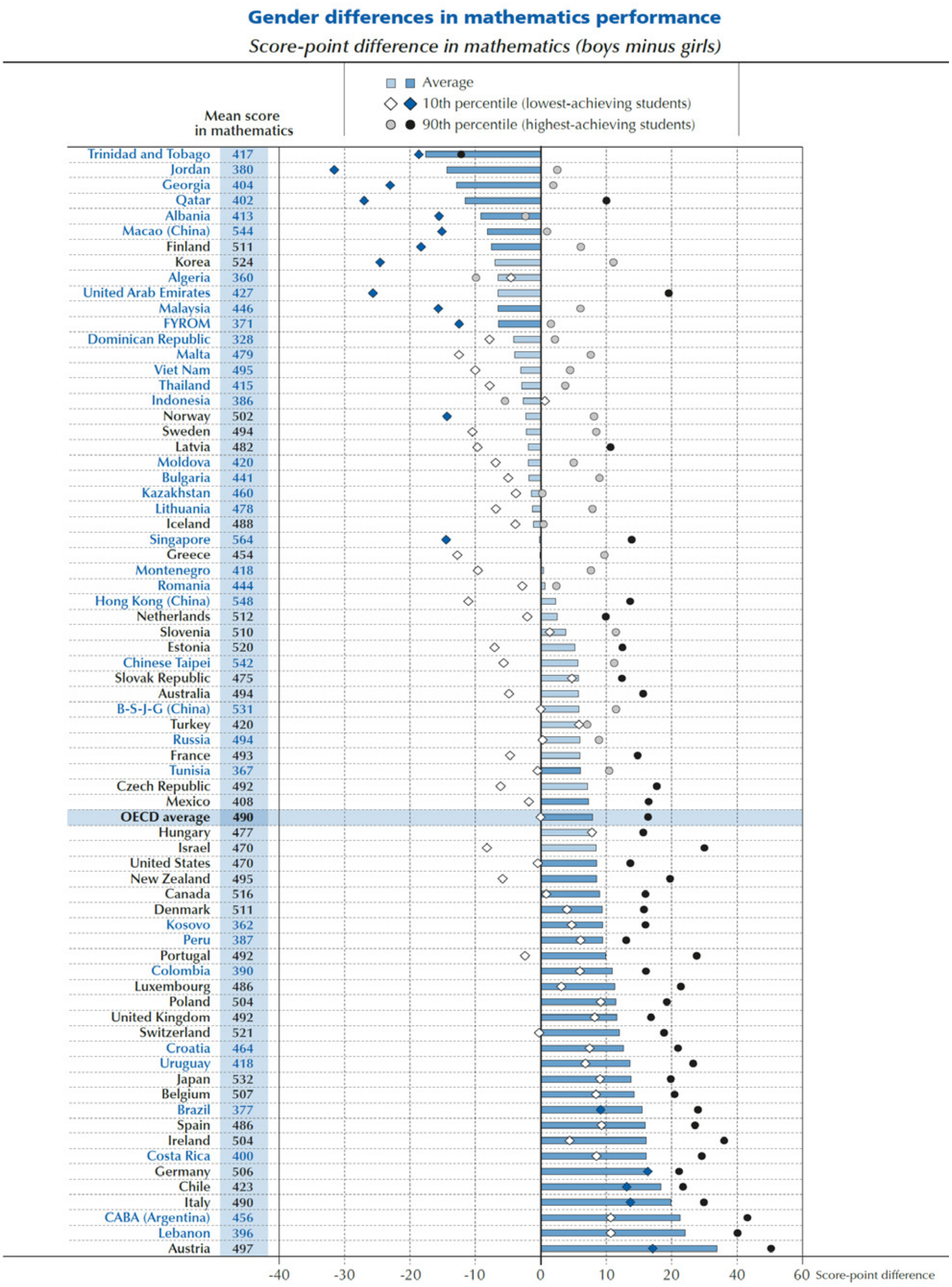



**Figura 1**
Differenze di performance in base al genere nelle prove PISA 2015 di matematica (OECD, 2016a). Fonte: *PISA 2015 Results, Excellence and equity in education* (Vol. I).

Se si considerano i risultati nel loro complesso, i maschi ottengono in media 8 punti in più rispetto alle coetanee (OECD, 2016a), le differenze però variano notevolmente di nazione in nazione.

Le differenze di genere nella prova di matematica non si manifestano in modo uniforme in tutti i Paesi coinvolti nella rilevazione: circa metà delle nazioni presenta un gap a favore dei maschi che è statisticamente significativo, in quasi altrettanti Paesi il gap non è statisticamente significativo e addirittura in alcuni Paesi i risultati delle ragazze superano quelli dei ragazzi. La disomogeneità del fenomeno è anche una delle cause per cui alcuni studi non riscontrano un gap significativo: in base alle nazioni coinvolte nelle rilevazioni, infatti, si possono riscontrare maggiori o minori differenze di genere. Inoltre queste differenze non sembrano strettamente legate al punteggio complessivo ottenuto nella prova: tra i Paesi che mostrano un gender gap molto marcato si possono individuare sia nazioni con punteggi superiori alla media OECD (e.g. Giappone) sia nazioni che ottengono risultati nettamente inferiori alla media OECD (e.g. Brasile) e lo stesso avviene per i Paesi in cui il gender gap non è significativo o è addirittura a favore delle ragazze.
Le prove PISA coinvolgono gli studenti quindicenni che frequentano la scuola e, come specificato anche nei report PISA (OECD, 2016c), il fatto di non raggiungere tutti i quindicenni ma solo quelli scolarizzati e le difficoltà che in alcuni Paesi si riscontrano nel raggiungere alcune regioni per effettuare le somministrazioni inficiano la rappresentatività del campione. Per questo motivo nell'interpretare i grafici sopra bisogna anche tenere conto del fatto che in alcuni Paesi la copertura della popolazione potrebbe non essere sufficiente e che il campione degli studenti coinvolti potrebbe essere rappresentativo dei quindicenni scolarizzati e non di tutti i quindicenni della popolazione (per tali informazioni specifiche di ogni Paese si rimanda alla tabella 11.11 del rapporto tecnico PISA 2015: OECD, 2016d). In alcuni Paesi, in cui solo una minoranza delle donne può avere accesso all'istruzione e proseguire gli studi fino ai 15 anni, questi fattori possono influenzare notevolmente la misura del gender gap in matematica.
Inoltre, come già messo in luce dalle rilevazioni precedenti, il gap tra maschi e femmine risulta più marcato se si considerano solo gli *highest-achieving students*. In questo caso, il gap medio nei Paesi oggetto di indagine è di 16 punti e, per tutti i Paesi in cui il gap è significativo e a favore dei maschi, la differenza di performance (indicata con il cerchio) tra gli studenti che superano la soglia del novantesimo percentile risulta essere sempre significativa (cerchio nero) e superiore al gap relativo all'intera nazione (OECD, 2016a).
Per quanto riguarda il contesto italiano, sebbene gli studenti ottengano un punteggio medio complessivo pari alla media OECD (**Figura 1**), si osserva un notevole divario, pari a 20 punti, tra le performance dei ragazzi e le performance delle ragazze (OECD, 2016b). L'Italia è quindi uno dei Paesi OECD in cui le ragazze sono maggiormente svantaggiate in matematica e dal 2012 al 2015 il gap risulta essere invariato se non leggermente aumentato mentre nella maggior parte dei Paesi il gap negli stessi anni è invariato o leggermente diminuito (OECD, 2015).

### 3.2.2 Risultati dell'indagine TIMSS 2015

Le osservazioni appena proposte vengono in buona parte confermate anche dai risultati delle prove TIMSS 2015 che indagano i livelli scolastici 4 e 8, corrispondenti alla classe quarta scuola elementare e alla classe terza di scuola media nel sistema scolastico italiano.
Nelle prove TIMSS la scala dei punteggi viene centrata sul 500 che corrisponde quindi al punteggio medio della prova considerando tutte le nazioni che partecipano all'indagine; le unità della scala vengono scelte in modo che 100 punti corrispondano alla de-

viazione standard della distribuzione dei punteggi (Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016). Nei grafici seguenti sono riportati i risultati delle prove TIMSS del 2015 somministrate per il grado 4 (**Figura 2**) e per il grado 8 (**Figura 3**). Per ogni nazione coinvolta nella rilevazione, vengono riportati il punteggio medio ottenuto dai maschi e dalle femmine, insieme alla percentuale di maschi e femmine presente nel campione. La differenza tra il punteggio medio ottenuto dai maschi e quello ottenuto dalle femmine viene riportato sia in termini numerici, sia attraverso l'istogramma nell'ultima colonna.
Anche in questi grafici, le differenze statisticamente significative vengono indicate in blu, mentre quando il gap non è significativo la barra dell'istogramma è grigia.
In calce ai grafici, è riportata la spiegazione dei simboli inseriti a fianco delle singole nazioni che indicano specificità legate alla rappresentatività del campione e le linee guida utilizzate da TIMSS per la creazione di un campione nazionale. Le informazioni relative al gender gap che possono essere estrapolate dai grafici devono essere lette, anche in questo caso, tenendo conto anche della rappresentatività del campione rispetto alla intera popolazione.

| Country | Girls | | Boys | | Difference (Absolute Value) |
|---|---|---|---|---|---|
| | Percent of Students | Average Scale Score | Percent of Students | Average Scale Score | |
| ψ Saudi Arabia | 49 (1.0) | 405 (4.4) | 51 (1.0) | 363 (6.5) | 43 (7.7) |
| Oman | 50 (0.7) | 436 (3.0) | 50 (0.7) | 415 (2.8) | 22 (2.9) |
| Jordan | 46 (2.4) | 399 (3.3) | 54 (2.4) | 379 (4.9) | 20 (5.8) |
| South Africa (5) | 48 (0.8) | 384 (3.8) | 52 (0.8) | 368 (4.4) | 15 (4.2) |
| 2 Bahrain | 50 (0.7) | 459 (1.7) | 50 (0.7) | 443 (2.3) | 15 (2.5) |
| ψ Kuwait | 51 (2.0) | 359 (5.4) | 49 (2.0) | 347 (5.6) | 12 (6.2) |
| Iran, Islamic Rep. of | 50 (0.9) | 437 (4.5) | 50 (0.9) | 426 (4.5) | 10 (6.3) |
| Indonesia | 48 (0.6) | 403 (4.0) | 52 (0.6) | 393 (3.9) | 10 (2.7) |
| Finland | 48 (0.8) | 540 (2.3) | 52 (0.8) | 531 (2.6) | 9 (2.9) |
| Bulgaria | 49 (0.8) | 527 (5.7) | 51 (0.8) | 522 (5.1) | 5 (2.9) |
| Norway (5) | 49 (0.9) | 551 (2.6) | 51 (0.9) | 547 (3.1) | 4 (2.9) |
| 2 Singapore | 48 (0.5) | 620 (3.9) | 52 (0.5) | 616 (4.3) | 4 (3.0) |
| United Arab Emirates | 48 (2.2) | 453 (3.9) | 52 (2.2) | 450 (3.4) | 3 (5.4) |
| 1 Georgia | 49 (0.9) | 465 (3.9) | 51 (0.9) | 461 (4.4) | 3 (4.0) |
| 3 Serbia | 48 (0.8) | 520 (3.7) | 52 (0.8) | 517 (4.7) | 3 (4.7) |
| Qatar | 51 (2.5) | 440 (4.1) | 49 (2.5) | 438 (4.9) | 3 (5.9) |
| 2 Lithuania | 50 (0.9) | 537 (2.8) | 50 (0.9) | 534 (3.1) | 2 (3.3) |
| Kazakhstan | 49 (0.8) | 546 (4.6) | 51 (0.8) | 543 (4.8) | 2 (2.8) |
| Morocco | 48 (0.7) | 378 (3.5) | 52 (0.7) | 377 (3.9) | 1 (2.8) |
| 2 Sweden | 49 (1.0) | 519 (3.2) | 51 (1.0) | 518 (3.2) | 1 (3.0) |
| Russian Federation | 49 (0.9) | 564 (3.7) | 51 (0.9) | 564 (3.7) | 1 (2.8) |
| Japan | 50 (0.5) | 593 (2.0) | 50 (0.5) | 593 (2.5) | 0 (2.3) |
| Chile | 49 (1.7) | 458 (2.8) | 51 (1.7) | 459 (3.0) | 1 (3.2) |
| Poland | 50 (0.8) | 534 (2.3) | 50 (0.8) | 536 (2.7) | 1 (2.5) |
| Turkey | 49 (0.6) | 482 (3.2) | 51 (0.6) | 484 (3.5) | 2 (2.7) |
| ‡ Northern Ireland | 50 (1.1) | 569 (3.8) | 50 (1.1) | 571 (3.1) | 2 (3.8) |
| New Zealand | 49 (0.7) | 489 (2.8) | 51 (0.7) | 492 (2.6) | 2 (2.8) |
| Germany | 48 (0.7) | 520 (2.4) | 52 (0.7) | 523 (2.3) | 3 (2.3) |
| Ireland | 47 (1.5) | 545 (2.6) | 53 (1.5) | 549 (2.9) | 4 (3.4) |
| Slovenia | 49 (0.8) | 518 (2.1) | 51 (0.8) | 522 (2.4) | 4 (2.6) |
| Chinese Taipei | 49 (0.6) | 594 (2.2) | 51 (0.6) | 599 (2.3) | 6 (2.5) |
| † Belgium (Flemish) | 50 (0.9) | 543 (2.4) | 50 (0.9) | 549 (2.4) | 6 (2.4) |
| Hungary | 49 (0.9) | 526 (3.4) | 51 (0.9) | 532 (3.8) | 6 (3.4) |
| France | 49 (0.7) | 485 (3.2) | 51 (0.7) | 491 (3.2) | 6 (2.8) |
| 2 † Denmark | 49 (0.8) | 536 (3.1) | 51 (0.8) | 542 (3.0) | 6 (2.8) |
| England | 51 (0.7) | 543 (3.0) | 49 (0.7) | 549 (3.3) | 6 (2.9) |
| Cyprus | 49 (0.7) | 520 (2.9) | 51 (0.7) | 526 (3.1) | 6 (2.7) |
| 2 † United States | 51 (0.6) | 536 (2.3) | 49 (0.6) | 543 (2.6) | 7 (1.9) |
| Czech Republic | 49 (0.9) | 525 (3.0) | 51 (0.9) | 532 (2.5) | 7 (3.2) |
| Korea, Rep. of | 48 (0.5) | 604 (2.3) | 52 (0.5) | 612 (2.5) | 7 (1.9) |
| † Netherlands | 50 (0.9) | 526 (1.8) | 50 (0.9) | 534 (2.2) | 8 (2.2) |
| Australia | 49 (1.0) | 513 (3.1) | 51 (1.0) | 522 (3.9) | 9 (3.5) |
| 1 2 † Canada | 49 (0.5) | 506 (2.5) | 51 (0.5) | 515 (2.6) | 9 (2.1) |
| † Hong Kong SAR | 46 (1.5) | 609 (3.8) | 54 (1.5) | 619 (2.8) | 10 (3.3) |
| 2 Portugal | 49 (0.8) | 536 (2.4) | 51 (0.8) | 547 (2.5) | 11 (2.2) |
| Slovak Republic | 48 (0.9) | 493 (3.0) | 52 (0.9) | 504 (2.6) | 11 (2.6) |
| 2 Spain | 49 (0.9) | 499 (2.7) | 51 (0.9) | 511 (2.7) | 12 (2.4) |
| Croatia | 49 (0.8) | 496 (2.1) | 51 (0.8) | 508 (2.3) | 12 (2.7) |
| 2 Italy | 49 (0.7) | 497 (2.7) | 51 (0.7) | 517 (3.0) | 20 (2.7) |
| International Avg. | 49 (0.2) | 505 (0.5) | 51 (0.2) | 505 (0.5) | |
| **Benchmarking Participants** | | | | | |
| 2 ψ Abu Dhabi, UAE | 47 (3.7) | 422 (8.0) | 53 (3.7) | 417 (6.6) | 4 (11.2) |
| 1 Florida, US | 49 (1.1) | 548 (4.9) | 51 (1.1) | 544 (5.5) | 4 (4.5) |
| Dubai, UAE | 48 (3.3) | 510 (3.1) | 52 (3.3) | 512 (2.7) | 2 (5.0) |
| Norway (4) | 49 (0.9) | 492 (2.9) | 51 (0.9) | 494 (3.0) | 3 (3.6) |
| Buenos Aires, Argentina | 50 (1.0) | 430 (3.5) | 50 (1.0) | 435 (2.9) | 5 (2.8) |
| Ontario, Canada | 49 (0.8) | 509 (2.6) | 51 (0.8) | 516 (2.8) | 7 (2.9) |
| ‡ Quebec, Canada | 50 (1.0) | 531 (3.9) | 50 (1.0) | 541 (4.8) | 11 (3.8) |

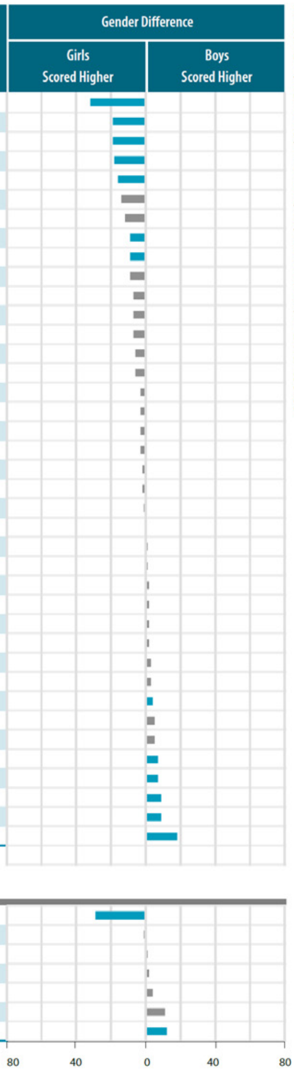
Legenda:

Figura 2
Differenze di performance in base al genere nelle prove TIMSS 2015 di matematica – grado 4. Fonte: *TIMSS 2015 International Results in Mathematics* (Mullis et al., 2016).

Ж Reservations about reliability because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 25%.
ψ Reservations about reliability because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 15% but does not exceed 25%.
1 National Target Population does not include all of the International Target Population.
2 National Defined Population covers 90% to 95% of the National Target Population.
3 National Defined Population covers less than 90% of the National Target population (but at least 77%).
TIMSS guidelines for sampling participation: The minimum acceptable participation rates were 85 percent of both schools and students, or a combined rate (the product of school and student participation) of 75 percent. Participants not meeting these guidelines were annotated as follows:
† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included.
‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates after replacement schools were included.
‡ Did not satisfy guidelines for sample participation rates.

■ Difference statistically significant
■ Difference not statistically significant

| Country | Girls: Percent of Students | Girls: Average Scale Score | Boys: Percent of Students | Boys: Average Scale Score | Difference (Absolute Value) |
|---|---|---|---|---|---|
| ψ Oman | 48 (1.7) | 420 (2.9) | 52 (1.7) | 388 (3.5) | 32 (4.6) |
| ψ Botswana (9) | 51 (0.6) | 400 (2.5) | 49 (0.6) | 381 (2.5) | 19 (2.9) |
| Ж Jordan | 50 (2.6) | 395 (4.0) | 50 (2.6) | 376 (5.4) | 19 (7.0) |
| Thailand | 54 (1.5) | 440 (5.2) | 46 (1.5) | 422 (5.7) | 18 (5.5) |
| Bahrain | 48 (0.9) | 462 (2.4) | 52 (0.9) | 446 (2.2) | 16 (3.6) |
| Ж Saudi Arabia | 51 (1.6) | 375 (5.1) | 49 (1.6) | 360 (7.1) | 14 (8.2) |
| United Arab Emirates | 50 (2.5) | 471 (3.5) | 50 (2.5) | 459 (4.0) | 12 (6.4) |
| Malaysia | 50 (1.8) | 470 (3.8) | 50 (1.8) | 461 (3.8) | 9 (2.8) |
| 2 Singapore | 49 (0.6) | 626 (3.4) | 51 (0.6) | 616 (3.8) | 9 (3.5) |
| ψ Egypt | 53 (2.3) | 397 (5.5) | 47 (2.3) | 387 (5.1) | 9 (6.7) |
| Ж South Africa (9) | 51 (1.1) | 376 (5.3) | 49 (1.1) | 369 (4.6) | 7 (4.1) |
| ψ Kuwait | 50 (2.5) | 396 (4.6) | 50 (2.5) | 389 (7.1) | 7 (7.5) |
| ψ Qatar | 50 (3.0) | 440 (3.2) | 50 (3.0) | 434 (4.5) | 7 (4.9) |
| Turkey | 48 (0.8) | 461 (4.8) | 52 (0.8) | 455 (5.3) | 6 (3.6) |
| Kazakhstan | 49 (0.9) | 531 (5.8) | 51 (0.9) | 525 (5.3) | 6 (3.7) |
| ψ Iran, Islamic Rep. of | 48 (0.9) | 438 (5.0) | 52 (0.9) | 435 (7.5) | 3 (8.9) |
| England | 51 (1.6) | 520 (5.2) | 49 (1.6) | 517 (4.8) | 3 (5.6) |
| Malta | 49 (0.3) | 495 (1.8) | 51 (0.3) | 492 (1.6) | 3 (2.8) |
| † New Zealand | 51 (2.0) | 494 (3.2) | 49 (2.0) | 491 (4.6) | 3 (4.2) |
| Japan | 51 (1.0) | 588 (3.1) | 49 (1.0) | 585 (3.0) | 2 (4.2) |
| Ж Morocco | 46 (0.7) | 385 (2.3) | 54 (0.7) | 384 (2.6) | 2 (2.0) |
| 1 2 Georgia | 47 (0.9) | 454 (3.9) | 53 (0.9) | 453 (4.0) | 1 (4.0) |
| Chinese Taipei | 49 (0.8) | 599 (2.6) | 51 (0.8) | 599 (3.0) | 0 (2.8) |
| Korea, Rep. of | 47 (0.5) | 605 (2.6) | 53 (0.5) | 606 (3.1) | 1 (2.7) |
| Norway (9) | 50 (0.7) | 511 (2.5) | 50 (0.7) | 512 (2.7) | 1 (2.6) |
| † United States | 50 (0.6) | 517 (3.3) | 50 (0.6) | 519 (3.2) | 2 (2.0) |
| Australia | 51 (1.6) | 504 (3.8) | 49 (1.6) | 506 (3.5) | 2 (4.0) |
| 3 Israel | 49 (1.2) | 510 (4.3) | 51 (1.2) | 512 (4.8) | 2 (3.9) |
| Slovenia | 48 (0.7) | 515 (2.4) | 52 (0.7) | 518 (2.5) | 2 (2.4) |
| Lebanon | 53 (1.6) | 441 (3.7) | 47 (1.6) | 444 (4.5) | 3 (3.9) |
| 2 Lithuania | 50 (0.8) | 510 (3.4) | 50 (0.8) | 513 (3.1) | 3 (3.4) |
| 1 † Canada | 51 (1.0) | 525 (2.0) | 49 (1.0) | 530 (2.7) | 4 (2.0) |
| Ireland | 50 (1.1) | 521 (2.6) | 50 (1.1) | 526 (4.0) | 5 (3.9) |
| Hong Kong SAR | 47 (2.1) | 591 (4.7) | 53 (2.1) | 597 (6.0) | 5 (5.7) |
| 2 Italy | 49 (0.8) | 491 (3.0) | 51 (0.8) | 498 (2.8) | 7 (2.8) |
| Sweden | 48 (1.0) | 497 (3.3) | 52 (1.0) | 504 (3.1) | 7 (3.2) |
| Hungary | 50 (0.9) | 510 (4.3) | 50 (0.9) | 519 (4.0) | 9 (3.4) |
| Russian Federation | 49 (0.9) | 533 (5.1) | 51 (0.9) | 543 (4.6) | 9 (2.9) |
| ψ Chile | 48 (1.8) | 418 (3.7) | 52 (1.8) | 436 (4.2) | 18 (4.9) |
| International Avg. | 50 (0.2) | 483 (0.6) | 50 (0.2) | 480 (0.7) | |
| **Benchmarking Participants** | | | | | |
| Abu Dhabi, UAE | 49 (4.4) | 457 (6.0) | 51 (4.4) | 427 (7.7) | 29 (10.7) |
| 1 Florida, US | 48 (1.3) | 494 (7.2) | 52 (1.3) | 493 (6.5) | 1 (4.7) |
| Norway (8) | 50 (0.7) | 486 (2.4) | 50 (0.7) | 487 (2.3) | 1 (2.5) |
| Ontario, Canada | 50 (1.2) | 521 (2.9) | 50 (1.2) | 523 (3.3) | 2 (2.6) |
| Dubai, UAE | 52 (3.7) | 510 (3.7) | 48 (3.7) | 514 (4.3) | 4 (6.9) |
| † Ж Buenos Aires, Argentina | 51 (1.7) | 391 (4.8) | 49 (1.7) | 401 (5.4) | 11 (5.8) |
| ‡ Quebec, Canada | 53 (1.9) | 538 (3.8) | 47 (1.9) | 550 (5.1) | 12 (4.6) |




SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2015

Legenda:

Figura 3
Differenze di performance in base al genere nelle prove TIMSS 2015 di matematica – grado 8 Fonte: *TIMSS 2015 International Results in Mathematics* (Mullis et al., 2016).

Ж Reservations about reliability because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 25%.
ψ Reservations about reliability because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 15% but does not exceed 25%.
1 National Target Population does not include all of the International Target Population.
2 National Defined Population covers 90% to 95% of the National Target Population.
3 National Defined Population covers less than 90% of the National Target population (but at least 77%).
TIMSS guidelines for sampling participation: The minimum acceptable participation rates were 85 percent of both schools and students, or a combined rate (the product of school and student participation) of 75 percent. Participants not meeting these guidelines were annotated as follows:
† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included.
‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates after replacement schools were included.
‡ Did not satisfy guidelines for sample participation rates.

■ Difference statistically significant
■ Difference not statistically significant

In entrambi i livelli, anche in questo caso, il gender gap non risulta uniformemente distribuito sulle diverse nazioni.

Le nazioni partecipanti nel 2015 per il grado 4 sono state 49 e in 18 di queste è presente una differenza tra i punteggi dei maschi e quelli delle femmine che risulta statisticamente significativa e, in media, di 9 punti a favore dei maschi. In 23 Paesi non si ha alcuna differenza significativa e solo in 8 le femmine ottengono risultati migliori. Nella prova del grado 8, invece, le differenze di genere risultano generalmente meno marcate e in 26 nazioni su 39 non si ha alcun divario statisticamente significativo.
Anche i risultati delle prove TIMSS 2015 confermano come, in termini di differenze di genere in matematica, la situazione dell'Italia sia ben delineata e critica. I risultati medi complessivi degli studenti italiani risultano, nelle prove di entrambi i livelli, vicini alla media dei Paesi coinvolti, ma si può notare che al grado 8 e ancor di più nella prova di grado 4, l'Italia mostra un forte divario di genere, uno dei più marcati in assoluto che è presente dai primi anni in cui sono state svolte le rilevazioni (Figura 4).

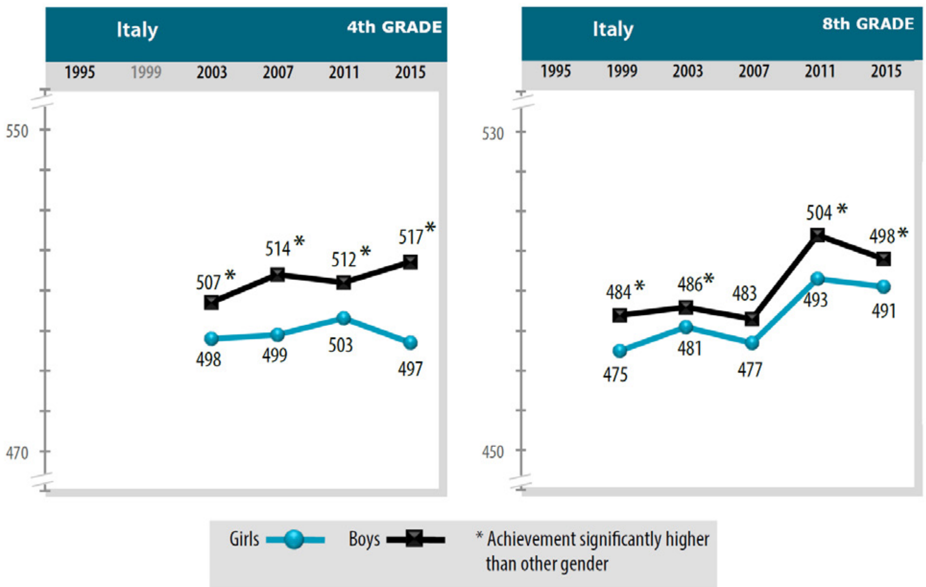



Figura 4
Evoluzione del gap di performance in base al genere nelle prove TIMSS di matematica dal 2003 al 2015 in Italia. Fonte: *TIMSS 2015 International Results in Mathematics* (Mullis et al., 2016).

### 3.3 Differenze di genere in Italia: dalle prove internazionali alle prove INVALSI

Come si è visto nei paragrafi precedenti, i dati descrivono la situazione italiana come una delle più allarmanti all'interno dello scenario internazionale: l'Italia è una delle nazioni in cui il gender gap è maggiormente marcato e il divario di genere in matematica viene anche confermato dai test INVALSI effettuati a livello nazionale (INVALSI, 2016; Contini, Di Tommaso & Mendolia, 2017).
In Italia dall'anno scolastico 2007/2008 sono state somministrate, in diversi livelli scolastici, prove standardizzate di matematica e italiano (grammatica e comprensione del testo) a cura del Servizio Nazionale di Valutazione (SNV) che fa capo all'Istituto INVALSI. L'obiettivo principale delle prove INVALSI è quello di valutare l'efficacia del sistema d'istruzione nazionale, attraverso il rilevamento di informazioni riguardanti gli apprendimenti degli studenti in matematica e italiano (dal 2018 la prova di terza media coinvolge anche l'inglese).
Le prove INVALSI sono dunque somministrate nelle scuole italiane da quasi un decennio e offrono un'enorme mole di dati relativi agli apprendimenti in italiano e in matematica degli studenti dalla scuola elementare alla scuola media. Nonostante ciò, l'uso di queste prove nel campo della ricerca in didattica della matematica risulta

ancora limitato (Maffia & Giberti, 2016) e, per quanto riguarda lo studio delle differenze di genere in matematica, questi dati vengono utilizzati quasi esclusivamente sul piano statistico: manca un'interpretazione in chiave didattica del fenomeno a livello nazionale. Nei Rapporti Nazionali INVALSI il gender gap viene solitamente presentato in termini di differenza tra il punteggio medio ottenuto dai maschi e quello ottenuto dalle femmine all'interno della prova.
Le ultime rilevazioni mostrano marcate differenze tra le performance di maschi e femmine in matematica e confermano quanto evidenziato dalle prove internazionali PISA e TIMSS.
Il grafico seguente (Figura 5) riporta i risultati delle prove INVALSI di matematica svolte nel 2017, nei diversi livelli scolastici. Per ogni grado scolastico è riportato il punteggio medio ottenuto dalle femmine (in rosa) e il punteggio medio ottenuto dai maschi (in azzurro), con i relativi intervalli di confidenza. I risultati, in accordo con quelli delle precedenti rilevazioni INVALSI, mostrano un gap di genere statisticamente significativo in tutti i livelli scolastici coinvolti: seconda e quinta scuola elementare, terza scuola media e seconda scuola media superiore.[4] 4

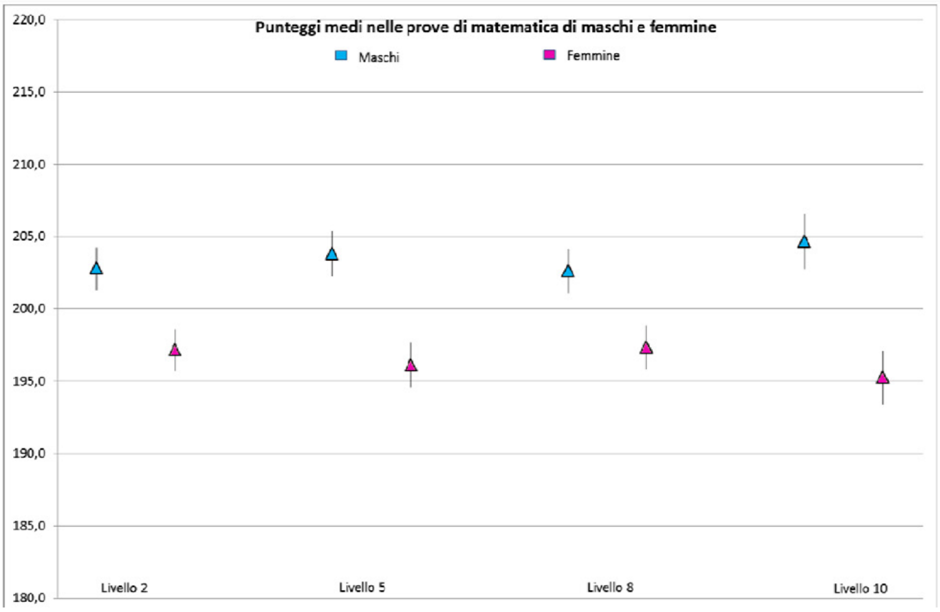



Figura 5
Risultati di maschi e femmine nelle prove INVALSI di matematica del 2017 nei diversi livelli scolastici. Fonte: *Rilevazione Nazionale degli apprendimenti 2016-17 – Rapporto Risultati* (INVALSI, 2017).

Per quanto riguarda i risultati del grado 10, inoltre, si osserva che il divario tra i maschi e le femmine è presente in tutte le tipologie di scuola medio-superiore ma risulta più marcato se si passa dai professionali, ai tecnici e infine ai licei (INVALSI, 2017).

4. In Italia vi sono tre anni di scuola media e cinque anni di scuola media superiore.

# 4 Differenze di genere in matematica: stato dell'arte

Lo studio delle differenze di genere in matematica è un tema molto dibattuto negli ultimi decenni e sono numerose le ricerche che hanno cercato di indagare le caratteristiche e le cause del gender gap in matematica a favore dei maschi (Leder & Forgasz, 2008; Forgasz, Becker, Lee & Steinthorsdottir, 2010; Forgasz & Rivera, 2012; Contini et al., 2017).
Nei prossimi paragrafi, sempre mantenendo un occhio di riguardo per la particolare situazione italiana, si cercherà di fornire una visione d'insieme delle caratteristiche del gender gap in matematica e dell'interpretazione delle sue cause per come emergono dalle principali ricerche sul fenomeno.

## 4.1 Evoluzione del gender gap nei diversi livelli scolastici

In base a quanto riportano diverse ricerche, le differenze di genere in matematica non sono già presenti in età prescolare ma emergono durante i primi anni di scuola. Al termine della scuola elementare il gap nelle performance di maschi e femmine è evidente e continua ad aumentare alle scuole medio-superiori (Fryer & Levitt, 2010; Hyde & Mertz, 2009; Hyde, Fennema & Lamon, 1990; Spelke, 2005).
Fryer e Levitt (2010) hanno analizzato le performance in matematica di bambini e bambine seguendoli dalla scuola dell'infanzia fino al termine della scuola elementare (grado 5). In questo modo hanno evidenziato che il gap inizia nei primi anni di scuola e aumenta con il passare degli anni.
Ad oggi, dopo diversi anni dalla loro introduzione, le prove INVALSI somministrate in Italia possono essere utilizzate per studi simili a quello di Fryer e Levitt, sviluppato negli USA. In un recente studio basato sulle prove INVALSI, Contini et al. (2017), osservano l'evoluzione del gender gap in matematica anche nel contesto italiano e notano un complessivo ampliamento del divario a favore dei maschi dal grado 2 al grado 10; l'aumento del gap risulta però concentrato negli anni della scuola elementare e nel passaggio dal grado 8 al grado 10, rimanendo pressoché stabile negli anni della scuola media.

## 4.2 Distribuzione del gender gap rispetto ai livelli di abilità

Le prove standardizzate e l'uso di modelli statistici per l'analisi dei dati permettono anche di mettere in evidenza facilmente se un gap è particolarmente marcato per determinati livelli di abilità degli studenti.
Sempre dallo studio di Fryer e Levitt (2010), emerge che il divario tra maschi e femmine, a favore dei primi, risulta essere maggiore se si confrontano i risultati di studenti con alti livelli di abilità in matematica. Se alla scuola dell'infanzia le bambine occupano il 45% dei 5 percentili più alti, dopo cinque anni di scuola solo il 28% dei 5 percentili più alti è formato da femmine.
Anche dall'analisi dei dati PISA 2009, emerge che nella maggior parte dei Paesi partecipanti vi è un significativo gender gap in matematica a favore dei ragazzi ed è più marcato proprio tra gli studenti con alti livelli di abilità (González de San Román & De La Rica, 2012). Questo dato viene confermato anche dai risultati dei test PISA 2012 e PISA 2015: pur osservando una notevole variabilità tra le nazioni coinvolte nell'indagine, le ragazze risultano sottorappresentate tra gli *highest-achieving students*

(OECD, 2016a; OECD, 2012). Come è stato precedentemente osservato, nel 2015 il gap medio tra le performance di maschi e femmine nei Paesi OECD è di 8 punti ma il divario raddoppia, se si considera solamente il 10% delle migliori performance maschili e il 10% delle migliori performance femminili (OECD, 2016a).
Dalle rilevazioni PISA, l'Italia è uno dei Paesi in cui questo fenomeno risulta più evidente e nel 2015 solo l'8% delle ragazze raggiunge il livello maggiore nella scala PISA contro il 13% dei ragazzi (OECD, 2016a). Contini et al. (2017) confermano questi risultati anche analizzando i dati INVALSI e, attraverso uno studio longitudinale delle prove dal grado scolastico 2 al grado 10, notano che al grado 2 il gap di genere non sussiste per i livelli di abilità più bassi ed è comunque poco marcato anche per i livelli di abilità medi e alti; con il passare degli anni questo gap compare anche per i livelli di abilità più bassi della distribuzione ma l'aumento del divario risulta molto più marcato per i livelli di abilità alti.
La ricerca sul tema del gender gap è molto controversa e in letteratura si trovano anche diversi studi che non evidenziano un gap statisticamente significativo. Come già sottolineato, i motivi possono essere legati alla non omogeneità geografica del fenomeno e quindi dagli stati coinvolti nelle rilevazioni, ma una seconda causa può anche essere la non omogeneità del gap rispetto al livello di abilità degli studenti. Un articolo che ha suscitato notevole scalpore in questo senso è stato quello pubblicato da Hyde, Lindberg, Linn, Ellis, e Williams nel 2008 sulla rivista Science. Hyde e colleghi, analizzando i dati di prove standardizzate degli Stati Uniti, concludono che «In contrasto con i risultati precedenti, questi dati non forniscono alcuna prova di una differenza di genere che favorisca i maschi e che emerga negli anni di scuola superiore» (Hyde et al., 2008, p. 494, traduzione dell'autore). Nello stesso anno, Leder e Forgasz (2008) mettono in luce le possibili cause che hanno portato Hyde e colleghi a risultati discordanti con la maggior parte delle ricerche nel settore. Tra le motivazioni riportate, la principale è quella per cui le differenze di genere si evidenziano per livelli alti di abilità. Leder e Forgasz spiegano che l'uso, da parte di Hyde e colleghi, di test formati soprattutto da item di livello cognitivo medio e basso, può essere la causa per cui non emerge gender gap.
Conoscere le peculiarità di questo fenomeno permette quindi anche una riflessione approfondita su quale sia uno strumento adatto per rilevarlo al meglio: la costruzione dei test dovrebbe sempre tenere conto anche di questi fattori.

### 4.3 Interpretazione dei fattori che influiscono sul gender gap

Per quanto riguarda l'individuazione dei fattori che sono alla base del gender gap, la letteratura è molto ampia e dibattuta: si possono trovare interpretazioni di natura biologica, sociale, culturale e psicologica che devono essere considerate congiuntamente per comprendere a pieno questo fenomeno. In particolare, è possibile distinguere tra fattori cosiddetti *interni* (o dipendenti dall'individuo) e fattori *esterni* (cioè dipendenti dal contesto socio-culturale e ambientale).

#### Fattori interni

Alcuni studi considerano tra i fattori interni anche differenze di tipo biologico e fisiologico (Baron-Cohen & Wheelwright, 2004; Gallagher & Kaufman, 2004) che permetterebbero ai maschi di sviluppare meglio alcune abilità legate all'apprendimento della matematica. D'altra parte la variabilità del fenomeno tra un Paese e l'altro (come restituita dalle rilevazioni internazionali) sembra mostrare i limiti di tale

interpretazione, almeno come interpretazione unica (Contini et al., 2017; OECD, 2016a; Hill et al., 2010).
Le differenze relative alle principali abilità cognitive non sembrano essere tali da spiegare il gender gap in matematica. Molti studi, infatti, sostengono che non esistano differenze significative in termini di abilità cognitive generali (Ruffing, Wach, Spinath, Brünken & Karbach, 2015; Halpern, Beninger & Straight, 2011). Solo nel caso delle abilità visuo-spaziali, alcune ricerche riscontrano migliori risultati da parte degli studenti maschi (Lawton & Hatcher, 2005). D'altra parte, tali abilità possono essere facilmente sviluppate attraverso un training mirato e di breve durata: il gap in questo settore potrebbe essere quindi facilmente colmato (Hill et al., 2010).
Tra i fattori strettamente collegati all'individuo che sono stati studiati in relazione al gender gap ci sono anche i fattori psico-sociali legati alle motivazioni, alle convinzioni degli studenti e alla fiducia nelle proprie capacità (Winkelmann, van den Heuvel-Panhuizen & Robitzsch, 2008). Già nella scuola elementare, si osserva una minore fiducia nelle proprie abilità in matematica da parte delle femmine e, anche quando i risultati tra i due generi sono simili, sembra che le studentesse tendano a sottostimare le proprie capacità rispetto ai coetanei maschi (OECD, 2015; Fredericks & Eccles, 2002; Herbert & Stipek, 2005).
In questa direzione, l'OECD analizza principalmente tre costrutti legati alla matematica: *math self-concept, math self-efficacy* e *math anxiety*.[5] I primi due costrutti rientrano all'interno di quelli che sono noti come *self-beliefs* e sono strettamente interconnessi pur riflettendo aspetti diversi riguardanti la sfera delle convinzioni, delle motivazioni e delle emozioni degli studenti in matematica. Infatti, la *self-efficacy* riguarda le sensazioni e le convinzioni degli studenti nel momento in cui devono risolvere uno specifico quesito (ad esempio risolvere un'equazione) mentre nel caso del *math self-concept* le domande rivolte agli studenti sono più generali e legate alla disciplina nel suo complesso, non a uno specifico task (Pajares & Miller, 1994). 5
Il ruolo della *self-efficacy* e del *self-concept* risulta essere fondamentale nell'apprendimento di qualsiasi disciplina e in particolare nel caso della matematica (OECD, 2015; Marsh & O'Mara, 2008): uno studente con scarsa fiducia nei propri mezzi, infatti, sarà meno sicuro davanti a un compito e, nel caso in cui si trovi in difficoltà, sarà meno propenso a perseverare per raggiungere l'obiettivo.
I risultati riportati relativi a questi fattori sono tratti dall'indagine PISA 2012 in quanto, essendo la matematica il focus dell'indagine di quell'anno, anche i questionari di contesto erano mirati a indagare aspetti relativi all'apprendimento della matematica. Da tali questionari è possibile quindi avere anche informazioni relative ad aspetti legati alla sfera psicologica e metacognitiva dell'apprendimento della matematica e, in particolare, nel rapporto OECD PISA 2012 emerge che, anche nella scuola medio-superiore, permane una notevole differenza tra ragazzi e ragazze sia in termini di *self-efficacy* sia in termini di *self-concept* in matematica.

5. Le definizioni fornite dall'OECD degli indici utilizzati per analizzare questi costrutti sono le seguenti (OECD, 2013, traduzione dell'autore):
- Mathematics self-concept: indice basato sulle risposte degli studenti riguardanti la loro competenza percepita in matematica.
- Mathematics self-efficacy: indice basato sulle risposte degli studenti riguardanti la loro abilità percepita nel risolvere una varietà di problemi di matematica pura e applicata.
- Mathematics anxiety: indice basato sulle risposte degli studenti riguardo alle sensazioni di stress e bisogno di aiuto nell'affrontare la matematica.

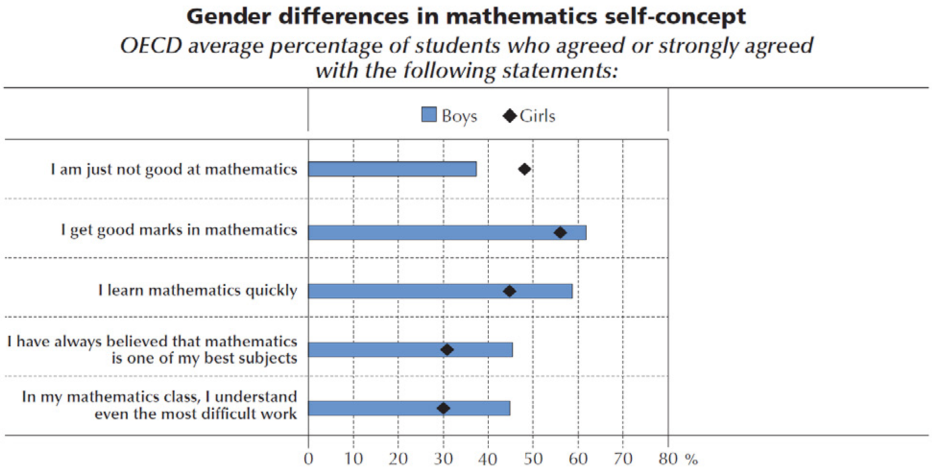



Figura 6
*Self-concept* in matematica in relazione al genere, dati relativi all'indagine OECD PISA 2012. Le differenze statisticamente significative sono evidenziate con colori più scuri (in questo caso risultano tutte significative). Fonte: *The ABC of Gender Equality in Education: Aptitude, Behaviour, Confidence.* (OECD, 2015).

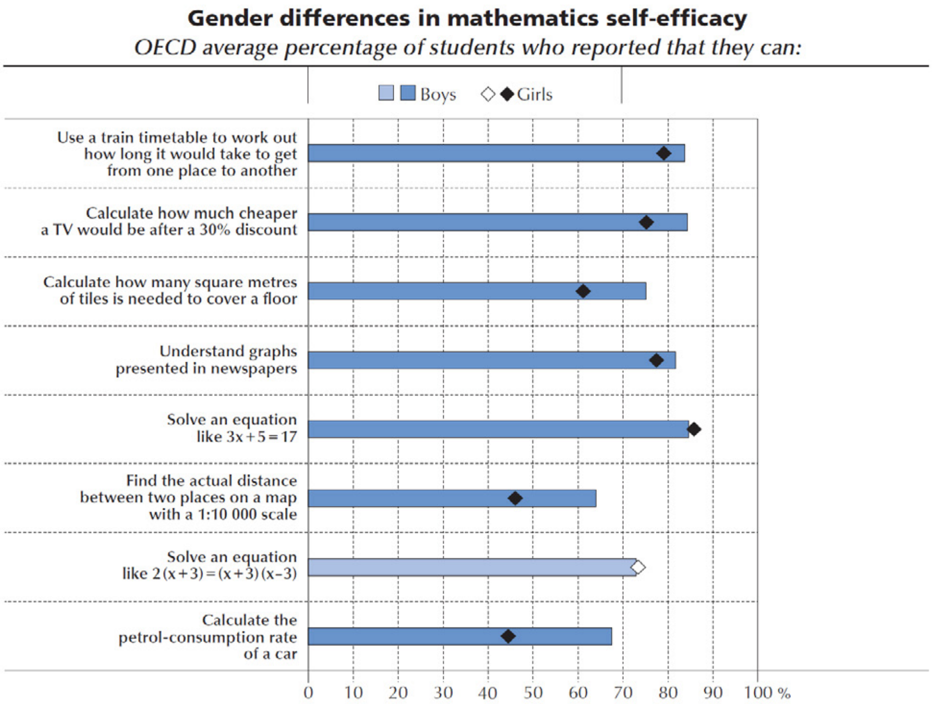



Figura 7
*Self-efficacy* in matematica in relazione al genere, dati relativi all'indagine OECD PISA 2012. Le differenze statisticamente significative sono evidenziate con colori più scuri. Fonte: *The ABC of Gender Equality in Education: Attitude, Behaviour, Confidence.* (OECD, 2015).

Come si osserva nei grafici sopra riportati (**Figura 6** e **Figura 7**), relativi all'indagine PISA 2012, in generale le ragazze mostrano una minor fiducia nelle proprie capacità in matematica.

Le studentesse si considerano meno brave in matematica rispetto agli studenti maschi, pensano di non essere veloci nell'apprendimento della disciplina e dicono di trovarsi in difficoltà specialmente davanti agli argomenti più complessi (**Figura 6**). Sempre dallo stesso grafico, relativo al *math self-concept*, si evince che le risposte di maschi e femmine sono quantitativamente più vicine solo nel caso in cui si chiede di rispondere basandosi su un riferimento esterno, come i voti scolastici. Dalle indagini OECD si desume inoltre che la differenza tra maschi e femmine relativamente al *math self-concept* è presente anche a parità di abilità in matematica o a parità di risultati nella prova e questi risultati sono in accordo con letteratura precedente relativa a *self beliefs* e gender gap in matematica (OECD, 2015; Jacobs, Lanza, Osgood, Eccles & Wigfield, 2002; Hill et al., 2010).

Per quanto riguarda la *math self-efficacy* è interessante notare (**Figura 7**) che gli unici due task in cui la differenza non è a favore dei maschi risultano essere quelli in cui si richiede di risolvere un'equazione: si tratta in questo caso di esercizi risolvibili attraverso l'applicazione di procedure di routine, già svolte in classe che, a quanto pare, permettono alle ragazze di avere una maggiore fiducia nelle proprie capacità di risoluzione.

Un altro costrutto molto importante per analizzare i diversi risultati in matematica di maschi e femmine è l'ansia matematica (*math anxiety*), definita come «una reazione emotiva avversa alla matematica o alla prospettiva di fare matematica» (Hembree, 1990, traduzione dell'autore).

Numerosi studi hanno mostrato quanto l'essere ansiosi, spaventati e tesi nell'affrontare un compito di matematica porti gli studenti ad ottenere risultati inferiori rispetto alle proprie abilità (Hembree, 1990; Ma, 1999; Dowker, Sarkar & Looi, 2016; Primi et al., 2014; OECD, 2015).

Dai risultati OECD relativi alla prova PISA del 2012 emerge una netta differenza nei livelli di ansia tra ragazzi e ragazze (**Figura 8**) confermata anche da numerosi altri studi sia a livello internazionale (Dowker et al., 2016; Hembree, 1990; Devine, Fawcett, Szűcs & Dowker, 2012), sia a livello nazionale (Primi et al., 2014; Cargnelutti, Tomasetto & Passolunghi, 2016).

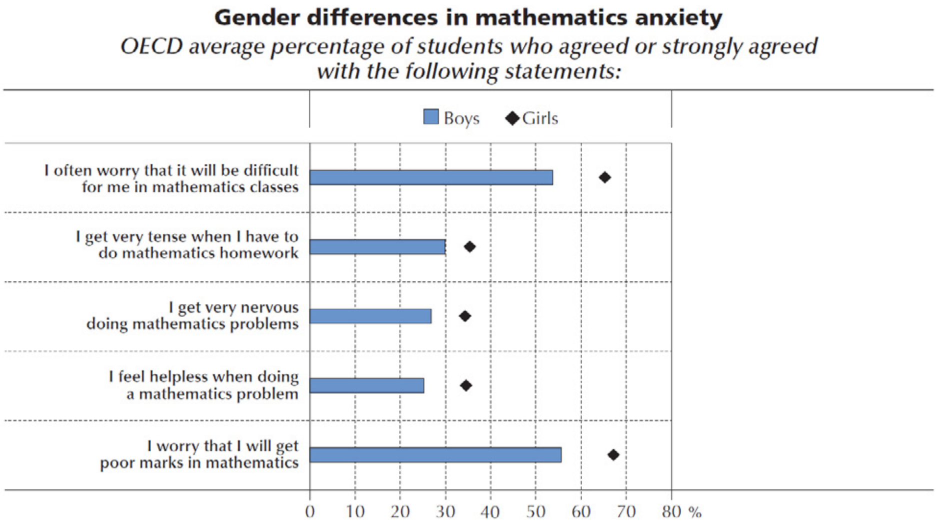



Figura 8
*Math anxiety* in relazione al genere, dati relativi all'indagine OECD PISA 2012. Le differenze statisticamente significative sono evidenziate con colori più scuri (in questo caso risultano tutte significative). Fonte: *The ABC of Gender Equality in Education: Aptitude, Behaviour, Confidence.* (OECD, 2015).

È interessante osservare che, se si considerano studenti e studentesse con pari livelli di math anxiety e math self-beliefs, il gap nei risultati dei test di matematica scompare (OECD, 2015).

Merita un discorso a parte l'analisi dei risultati in matematica in relazione al modello della self regulation, definita come l'abilità di controllare, dirigere e pianificare i propri pensieri, emozioni e comportamenti (Schunk & Zimmerman, 1997). Dal punto di vista della disciplina, del rispetto delle regole, della partecipazione e dell'autocontrollo le ragazze risultano in generale migliori dei ragazzi (OECD, 2015; Matthews, Ponitz & Morrison, 2009; Calkins, 2007; McClelland & Cameron, 2011) e questo le favorisce anche nel rendimento scolastico nelle diverse discipline e tra queste la matematica. In un recente studio svolto in Germania (Weis, Heikamp & Trommsdorff, 2013) viene evidenziato che, anche se non si riscontra una differenza di genere significativa considerando esclusivamente il rendimento in matematica, questo risultato può essere frutto anche di una migliore self-regulation da parte delle ragazze.

### Fattori esterni

Per spiegare le differenze di genere in matematica, i fattori interni, di natura biologica e psicologica, devono essere accompagnati da altri fattori, questa volta esterni all'individuo e legati al contesto sociale e culturale in cui lo studente vive. In questa prospettiva, sono diverse le ricerche che hanno messo in relazione il gender gap in matematica con i principali indici di equità di genere utilizzati in campo economico e sociale. Queste ricerche hanno mostrato che nelle società in cui vi è una maggiore parità rispetto al genere, il gap tende a scomparire (Guiso, Monte, Sapienza & Zingales, 2008; OECD, 2015; Cascella, 2017).

Uno studio particolarmente significativo in questo senso è quello di Guiso et al. (2008) basato sull'analisi della rilevazione OECD PISA del 2003. Gli autori mettono in relazione il gender gap in matematica e in italiano (grafico sopra in **Figura 9**) con uno dei principali indici utilizzati per evidenziare il gap di genere nella società: GGI – *World Economic Forum's Gender Gap Index* (grafico sotto in **Figura 9**). Questo indice riflette, per ogni nazione, la parità di genere in base alle condizioni economiche, politiche, educative e di salute.

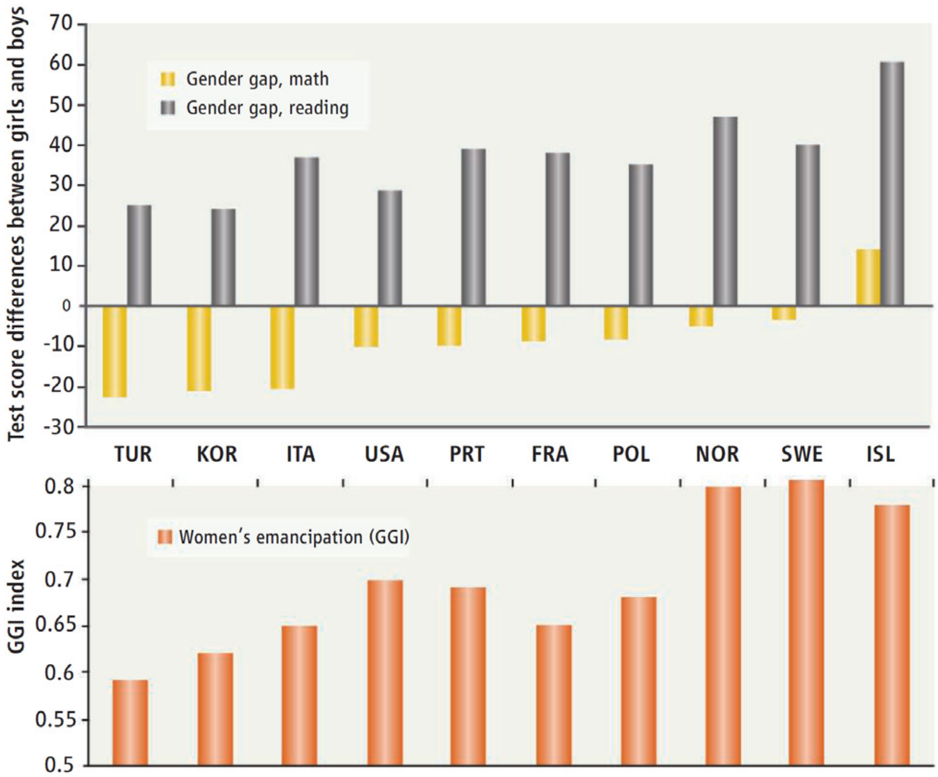



Figura 9
Analisi dei risultati del test PISA 2003 di comprensione del testo e di matematica in relazione al livello di parità dei generi nella società. Fonte: Guiso et al., 2008.

Nei grafici sopra si può confrontare, per ognuna delle nazioni prese in esame, il valore del Gender Gap Index (GGI) con i risultati del test PISA 2003 in termini di gender gap nella prova di matematica e lettura. Guiso et al. (2008) osservano che, nei Paesi in cui il ruolo della donna nella società ha raggiunto alti livelli di emancipazione (GGI maggiore), il gender gap in matematica tende ad annullarsi e il gap nella

comprensione del testo a favore delle ragazze incrementa. Questi risultati vengono confermati, nello stesso articolo, anche attraverso l'uso di altri indici statistici basati anche su fattori di natura culturale.
Dal 2006 al 2017, il Global Gender Gap Report mostra come l'Italia si trovi in una situazione piuttosto critica in fatto di parità di genere: nel 2017 l'Italia è risultata 82-esima su 144 Paesi, risultato di gran lunga peggiore rispetto alla maggior parte dei Paesi europei.
Le analisi di Guiso e colleghi sono state replicate anche da Fryer e Levitt (2010) e i risultati relativi all'indagine OECD PISA sono stati confermati. Le stesse analisi, però, sono state ripetute anche utilizzando i risultati dell'indagine IEA TIMSS 2003 e, in questo caso, non si riscontra la stessa correlazione tra la riduzione del gender gap in matematica e l'equità di genere nella società. Fryer e Levitt spiegano che queste differenze sono legate al fatto che sono diverse le nazioni che partecipano alle due indagini: restringendo i risultati del TIMSS alle nazioni che partecipano anche all'indagine PISA, la correlazione tra GGI e la diminuzione del divario in matematica emerge nuovamente. Le nazioni che partecipano esclusivamente alle prove TIMSS sono principalmente Paesi del Medio Oriente, in cui il ruolo della donna risulta essere molto svantaggiato nella società ma, inaspettatamente, i risultati in matematica non sembrano risentirne (Fryer & Levitt, 2010), probabilmente questo può essere anche dovuto a problemi di rappresentatività del campione, come già spiegato nei paragrafi precedenti.
Questi studi mostrano quanto sia fondamentale il ruolo della cultura e della società nell'educazione degli studenti e quanto raggiungere una reale parità sociale dei generi influisca positivamente sulle possibilità delle generazioni future. Alcune ricerche si sono occupate delle conseguenze economiche e sociali causate dalle disparità di genere nell'istruzione e, ad esempio, hanno riscontrato una minore crescita economica nei Paesi in cui le disuguaglianze sono maggiori (Klasen, 2002). Inoltre, politiche educative che mirano al raggiungimento di pari opportunità dei generi nel campo dell'istruzione vanno a vantaggio delle generazioni future in quanto si è visto che, se le donne e le madri raggiungono ruoli di maggiore emancipazione nella società, questo influisce positivamente sull'istruzione e sulla salute dei figli (Schultz, 2002; Doepke, Tertilt & Voena, 2011; Farré & Vella, 2013).
Sono molteplici gli studi che sottolineano l'importanza del ruolo che la madre assume all'interno della famiglia e della società e come questo influenzi le performance in matematica dei figli e in particolare delle figlie femmine (Fryer & Levitt, 2010; Jacobs & Eccles, 1992; González de San Román & De La Rica, 2012).
L'apprendimento della matematica e la disparità nei risultati in questa disciplina sono influenzati dal contesto, dalle caratteristiche socio-economiche e culturali dei singoli Paesi e dal ruolo della donna all'interno della società. Esistono anche studi basati su indagini più recenti che hanno confermato queste ipotesi e indagato approfonditamente il rapporto tra emancipazione della donna e gender gap in matematica. Ad esempio, nella ricerca di González de San Román e De La Rica (2012), attraverso l'analisi dei risultati PISA 2009, viene confermata la forte influenza delle norme sociali e culturali del Paese sulle differenze di genere riscontrate nei test.
Si considerano rilevanti, nel determinare le differenze di genere osservate, anche fattori legati maggiormente alle convinzioni e alla sfera psico-sociale di natura esterna all'individuo. Giocano infatti un ruolo fondamentale le convinzioni di insegnanti e genitori riguardo alle diverse abilità di maschi e femmine in matematica e gli stereotipi che vedono i ragazzi come più portati per le materie scientifiche men-

tre le ragazze favorite nelle materie letterarie.
Si è riscontrato che tutto ciò incide notevolmente sulla percezione degli studenti riguardo alle proprie possibilità (convinzioni su di sé) e influisce quindi sulle loro reali performance (Jacobs & Bleeker, 2004; Riegle-Crumb, 2005; Fryer & Levitt, 2010).
Gli stereotipi legati al genere che affondano le loro radici nella cultura del nostro Paese e di molti altri, portano avanti l'idea che i maschi siano *naturalmente* più portati per le materie scientifiche e influenzano anche il modo in cui i genitori si rivolgono ai figli fin dai primi anni di vita (Jacobs & Bleeker, 2004; Tomasetto, 2013; Tomasetto, Mirisola, Galdi & Cadinu, 2015). Questi hanno comportamenti e aspettative diversi nei confronti di un figlio maschio o di una figlia femmina e una percezione diversa relativamente alle loro abilità e ai successi in matematica (Tiedemann, 2000; Tomasetto, 2013). Tutto ciò si riflette sulla percezione che lo studente ha delle proprie abilità, andando quindi a sfavorire le ragazze nelle materie scientifiche e in particolare in matematica (Jacobs & Eccles, 1992; Spinath & Spinath, 2005; Tomasetto, 2013).
Risulta molto interessante anche il fatto che siano diverse, in base al sesso del figlio, le motivazioni che i genitori adducono per giustificare un successo o un insuccesso in matematica: i successi dei figli maschi vengono spesso associati ad una predisposizione naturale per la disciplina mentre per le femmine un successo è ritenuto più spesso frutto di impegno e costanza; per quanto riguarda gli insuccessi invece i genitori tendono a motivarli con una mancanza di impegno dei figli maschi e a una scarsa abilità delle figlie femmine (Eccles, Jacobs & Harold, 1990; Yee & Eccles, 1988; Tomasetto, 2013).
Gli stereotipi non riguardano però solamente i genitori; anche gli insegnanti infatti mostrano di essere influenzati dalle medesime convinzioni e tendono a considerare i maschi con maggiori abilità in matematica rispetto alle ragazze (Helwig, Anderson & Tindal, 2001; Li, 1999).
L'impatto che le convinzioni di insegnanti e genitori hanno, relativamente alle abilità degli studenti, è rilevante e il fatto che le studentesse vengano ritenute meno dotate in matematica rispetto ai coetanei maschi fa sì che esse stesse abbiano meno fiducia nelle proprie abilità e ottengano quindi risultati effettivamente minori (Lindberg et al., 2010).
Infine, anche fattori strettamente collegati al contesto scolastico e alle pratiche didattiche possono fornire una possibile chiave di lettura delle differenze di genere in matematica. In un articolo del 1992, Leder evidenzia tra le possibili cause delle differenze di genere in matematica anche variabili legate ai curricula specifici della disciplina: gli argomenti trattati, la tipologia di quesiti, i metodi di valutazione e insegnamento hanno un ruolo fondamentale nell'emergere delle differenze di genere in matematica. Studi più recenti hanno confermato questa ipotesi e hanno mostrato che, oltre a variabili connesse ai curricula, anche i metodi di insegnamento e di valutazione, le pratiche didattiche e le norme socio-matematiche che si instaurano nella classe hanno una notevole influenza sul gender gap in matematica (Leder & Forgasz, 2008; OECD, 2016; Giberti, Zivelonghi & Bolondi, 2016; Bolondi, Cascella & Giberti, 2017; Bolondi, Branchetti & Giberti, 2018; Ferretti, Giberti & Lemmo, 2018; Bolondi, Ferretti & Giberti, 2018).

### Learning abilities e learning strategies

Come detto, tra i fattori che influenzano il gender gap in matematica ci sono anche variabili legate ai contenuti specifici della matematica. Risulta quindi necessario analizzare il gender gap non solo da un punto di vista dell'intera disciplina, ma declinan-

do l'abilità matematica nelle sue molteplici componenti e considerando i diversi processi cognitivi che gli studenti devono attivare nella risoluzione di un task matematico. Le studentesse mostrano una maggiore difficoltà rispetto ai compagni maschi nell'approccio ad attività di problem solving, mentre mostrano capacità equivalenti o leggermente superiori in compiti che richiedono principalmente abilità di calcolo (Hyde et al., 1990; Byrnes & Takahira, 1993). Altri studi hanno dimostrato come maschi e femmine abbiano un modo diverso di affrontare attività di problem solving e adottino quindi strategie differenti: le ragazze tendono maggiormente a ripetere procedure di routine, algoritmi già utilizzati e conosciuti, strategie convenzionali, mentre i ragazzi, mostrando meno paura di sbagliare, tendono ad applicare anche nuovi metodi e approcci non convenzionali (Bell & Norwood, 2007; Gallagher, De Lisi, Holst, McGillicuddy-De Lisi, Morely & Cahalan, 2000; Gould, 1996; Fennema, Carpenter, Jacobs, Franke & Levi, 1998).
Queste evidenze, oggi confermate da recenti studi anche in ambito psicologico, erano già state presentate nel 1998 da Fennema e Carpenter, attraverso uno studio longitudinale riguardante i primi anni della scuola elementare. I ricercatori non riscontrano particolari differenze di genere se non nel caso di una tipologia di problemi *(extension problems)* ed esclusivamente a grado 3, al contempo però

> «in tutti i gradi scolastici sono state evidenziate differenze significative nelle strategie adottate in attività di problem solving. Le ragazze tendono a usare strategie risolutive concrete come la modellizzazione e il conteggio, mentre i ragazzi tendono a utilizzare strategie risolutive più astratte che riflettono una comprensione a livello concettuale».
>
> (Fennema & Carpenter, 1998, p. 4, traduzione dell'autore)

Anche in questo caso, le differenti strategie di problem solving non sembrano strettamente legate a caratteristiche biologiche diverse tra maschi e femmine ma piuttosto a fattori di tipo socio-culturale e legati alla sfera delle convinzioni. Tra questi ritroviamo sicuramente la minore fiducia nelle proprie abilità da parte delle ragazze, stereotipi largamente diffusi per cui, ad esempio, "le brave ragazze seguono le regole" ("good girls follow the rules" - Langer, 1997) e fattori legati alla didattica, al sistema scolastico e alle pratiche d'aula (Boaler, 1997).
In questa direzione risulta particolarmente interessante il confronto con altre ricerche legate alle strategie di apprendimento applicate dagli studenti nello studio delle diverse materie. Non si riscontrano differenze in termini di abilità cognitive (Halpern et al., 2011), si hanno però differenze di genere significative per quanto riguarda le strategie d'apprendimento (Kesici, Sahin & Akturk, 2009; Marrs & Sigler, 2012; Virtanen & Nevgi, 2010).
La letteratura mostra quanto abilità cognitive e strategie d'apprendimento abbiano una forte influenza sulle performance degli studenti; questo è vero anche quando si vuole predire il successo accademico (Rohde & Thompson, 2007; Richardson, Abraham & Bond, 2012). Un recente articolo Ruffing et al. (2015) trattano proprio le differenze di genere e le strategie di apprendimento in funzione del loro impatto sulle performance accademiche. Da questo articolo emerge che non vi sono particolari differenze in termini di abilità cognitive, ma che maschi e femmine mostrano un diverso approccio rispetto alle strategie di apprendimento prese in considerazione. In particolare, vengono considerate le seguenti strategie d'apprendimento:

- *Effort*
- *Attention*
- *Organization*
- *Relationship*
- *Rehearsal*
- *Critical evaluation*
- *Time management*
- *Learning environment*
- *Learning with fellow students*
- *Literature*
- *Meta-cognition*

Fra queste ritroviamo solo due strategie che risultano essere maggiormente utilizzate dai maschi rispetto alle femmine: *Relationship* e *Critical Evaluation*. Le ragazze, invece, mostrano un maggiore uso di molte delle rimanenti strategie: *Effort, Organization, Rehearsal, Time Management* e *Meta-Cognition* (Ruffing et al., 2015).
Le differenze nelle strategie di apprendimento possono chiaramente essere alla base di un apprendimento con caratteristiche molto diverse per maschi e femmine. Questi risultati potrebbero essere una possibile spiegazione di alcuni fenomeni osservati nell'apprendimento della matematica: le ragazze, concentrandosi soprattutto sull'impegno, sull'organizzazione dello studio e sulla ripetizione dei concetti, potrebbero essere maggiormente legate alle procedure già viste in classe o durante lo studio a casa ed essere meno pronte a rispondere a stimoli nuovi e che richiedono un apprendimento più basato sulla comprensione profonda dei concetti al fine di una rielaborazione.

# 5 Conclusioni

I risultati delle prove standardizzate risultano essere un ottimo strumento per lo studio del gender gap in matematica e permettono di evidenziare le principali caratteristiche di questo fenomeno. In particolare, dall'analisi delle prove PISA e TIMSS si evince che non in tutte le nazioni è presente un gender gap statisticamente significativo a favore dei maschi e questo porta a escludere, tra le principali cause delle differenze di genere, quelle di natura biologica, supportando invece l'ipotesi che la natura di questo divario sia piuttosto da imputare a fattori di natura sociale e culturale.
Le ricerche mostrano che non è possibile individuare un'unica causa del gender gap in matematica, ma che piuttosto vi sono molteplici e differenti fattori da considerare. Quelli sociali e culturali sono particolarmente importanti come, ad esempio, il livello di emancipazione della donna nella società. Gli stereotipi, legati alla storia e alla cultura della società e dello stesso nucleo familiare, sono un altro fattore importante perché hanno un impatto sull'approccio alla disciplina e sui fattori psicologici e metacognitivi. Questi fattori possono portare a un diverso approccio alla disciplina e influenzare anche il modo di affrontare una specifica consegna matematica.
Le differenze evidenziate in psicologia tra maschi e femmine, come una maggiore *math anxiety* e una minore fiducia nelle proprie capacità per le ragazze, accompagnate però da un maggiore controllo e disciplina, possono avere una notevole in-

fluenza sull'atteggiamento degli studenti in classe e sul rapporto che si instaura con l'insegnante e nei confronti della matematica.

Si riscontrano inoltre significative differenze in termini di strategie di apprendimento per maschi e femmine, una maggiore difficoltà da parte delle studentesse nell'affrontare attività di *problem solving* dovute anche a una maggiore paura di sbagliare e una maggiore reticenza nell'adottare nuove strategie risolutive a favore di algoritmi conosciuti e procedure di routine. Queste evidenze risultano particolarmente importanti per la ricerca in didattica e per gli insegnanti stessi che possono indirizzare l'azione didattica tenendo in considerazione queste differenze al fine di colmare questo divario.

Risulta infatti fondamentale affrontare questo fenomeno tenendo conto non solo delle cause di natura sociale e culturale a livello generale, ma anche di fattori micro-sociali, legati alle abitudini del contesto classe, al rapporto con l'insegnante e alle pratiche didattiche.

L'incidenza di fattori micro-sociali, legati alla didattica e alle pratiche d'aula, è supportata anche dal fatto che, come osservato nei paragrafi precedenti, le differenze di genere in matematica emergono durante i primi anni di scuola e aumentano con il passare degli anni ed è proprio a questo livello che l'azione del singolo insegnante può avere la massima efficacia.

Le prove PISA e TIMSS mostrano come in Italia il gap tra le performance dei maschi e delle femmine in matematica sia uno dei più marcati. Le prove nazionali INVALSI confermano questo divario che si presenta in tutti i livelli scolastici. In Italia, questo fenomeno è accompagnato da un peggioramento anche più generale del *Gender Gap Index*, che esprime la parità di genere prendendo in considerazione il divario tra uomini e donne in quattro ambiti: lavoro, istruzione, salute e rappresentanza politica.

Risulta quindi necessaria una riflessione su due piani differenti: il primo politico, per capire come mai l'Italia risulta ancora in una situazione tanto critica in termini di parità di genere, l'altro didattico, per indagare più approfonditamente come queste disparità vadano a incidere sul rendimento in matematica.

La consapevolezza della presenza di questo fenomeno, particolarmente marcato in Italia, può portare, gli insegnanti e gli educatori in generale, a riflettere sulle proprie convinzioni e sull'approccio alla disciplina. La collaborazione tra gli insegnanti e il mondo della ricerca in didattica può portare a individuare quali siano le difficoltà che ostacolano le ragazze in matematica e se queste siano legate a particolari contenuti o ad abilità trasversali. In questo modo sarà possibile elaborare una didattica mirata a superare tali difficoltà per chiudere il gap in matematica tra maschi e femmine.

## Bibliografia

Baron-Cohen, S., & Wheelwright, S. (2004). The empathy quotient: an investigation of adults with Asperger syndrome or high functioning autism, and normal sex differences. *Journal of autism and developmental disorders, 34*(2), 163-175.

Bell, K. N., & Norwood, K. (2007). Gender equity intersects with mathematics and technology: Problem-solving education for changing times. In D. Sadker & E. S. Silber (Eds.), *Gender in the classroom* (pp. 225-258). Mahweh: Lawrence Erlbaum Associates.

Boaler, J. (1997). Reclaiming school mathematics: The girls fight back. *Gender and Education, 9*(3), 285-305.

Bolondi, G., Branchetti, L., & Giberti, C. (2018). A quantitative methodology for analyzing the impact of the formulation of a mathematical item on students learning assessment. *Studies in Educational Evaluation, 58*, 37-50.

Bolondi, G., Cascella, C., & Giberti, C. (2017). Highlights on gender gap from Italian standardized assessment in mathematics. In J. Novotnà & H. Moravà (Eds.), D*iversity in Mathematics Education. Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching, SEMT 17*. Prague: Universita Karlova Press.

Bolondi, G., Ferretti, F., & Giberti, C. (2018). Didactic Contract as a key to Interpreting Gender Diffrences in Maths. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies (ECPS Journal), 18*, 415-435.

Byrnes, J. P. (2005). Gender Differences in Math: Cognitive Processes in an Expanded Framework. In A. M. Gallagher & J. C. Kaufman (Eds.), *Gender differences in mathematics: An integrative psychological approach* (pp. 73-98). New York, US: Cambridge University Press.

Byrnes, J. P., & Takahira, S. (1993). Explaining gender differences on SAT-math items. *Developmental Psychology, 29*(5), 805.

Calkins, S. D. (2007). The emergence of self-regulation: Biological and behavioral control mechanisms supporting toddler competencies. In C. A. Brownell & C. B. Kopp (Eds.), *Socioemotional development in the toddler years: Transitions and transformations* (pp. 261-284). New York, US: Guilford Press.

Cargnelutti, E., Tomasetto, C., & Passolunghi, M. C. (2016). How is anxiety related to math performance in young students? A longitudinal study of Grade 2 to Grade 3 children. *COGNITION & EMOTION, 31*, 755-764.

Cascella, C., (2017). Exploring the relationship between social roles in daily life and achievement gap between boys and girls in maths: empirical evidences from Italian primary school. In *11th annual International Technology, Education and Development Conference Proceedings* (pp. 9832-9841). Valencia: IATED Publisher. DOI: 10.21125/inted.2017.2339

Contini, D., Di Tommaso, M. L., & Mendolia, S. (2017). The gender gap in mathematics achievement: Evidence from Italian data. *Economics of Education Review, 58*, 32-42.

Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D., & Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and brain functions, 8*(1), 33.

Doepke, M., Tertilt, M., & Voena, A. (2011). The economics and politics of women's rights. *Annual Review of Economics, 4*, 339-372.

Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: what have we learned in 60 years?. *Frontiers in psychology, 7*, 508.

Eccles, J. S., Jacobs, J. E., & Harold, R. D. (1990). Gender role stereotypes, expectancy effects, and parents' socialization of gender differences. *Journal of Social Issues, 46*(2), 183-201.

Farré, L., & Vella, F. (2013). The intergenerational transmission of gender role attitudes and its implications for female labour force participation. *Economica, 80*(318), 219-247.

Fennema, E., & Carpenter, T. P. (1998). New Perspectives on Gender Differences in Mathematics: An Introduction. *Educational Researcher, 27*(5), 4-5.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Jacobs, V. R., Franke, M. L., & Levi, L. W. (1998). New perspectives on gender differences in mathematics: A reprise. *Educational Researcher, 27*(5), 19-21.

Ferretti, F., Giberti, C., & Lemmo, A. (2018). The Didactic Contract to Interpret Some Statistical Evidence in Mathematics Standardized Assessment Tests. EURASIA *Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14* (7), 2895-2906. Disponibile in https://doi.org/10.29333/ejmste/90988 (consultato il 05.09.2018).

Forgasz, H. J., Becker, J. R., Lee, K., & Steinthorsdottir, O. (Eds.). (2010). *International perspectives on gender and mathematics education*. Charlotte, NC: Information Age Publish

Forgasz, H. J., & Rivera, F. (2012). *Towards Equity in Mathematics Education*. Springer.

Fredericks, J. A., & Eccles, J. S. (2002). Children's Competence and Value Beliefs Childhood Adolescence: Growth Trajectories in Two Male-Sex-Typed Domains. *Developmental Psychology, 38* (2), 519-533. Disponibile in https://doi.org/10.1037/0012-1649.38.4.519 (consultato il 05.09.2018).

Fryer, R. G., & Levitt, S. D. (2010). An empirical analysis of the gender gap in mathematics. *American Economic Journal: Applied Economics, 2*(2), 210-240.

Gallagher, A. M., De Lisi, R., Holst, P. C., McGillicuddy-De Lisi, A. V., Morely, M., & Cahalan, C. (2000). Gender differences in advanced mathematical problem solving. *Journal of experimental child psychology, 75*(3), 165-190.

Gallagher, A. M., & Kaufman, J. C. (Eds.). (2004). *Gender differences in mathematics: An integrative psychological approach*. New York, US: Cambridge University Press.

Giberti, C., Zivelonghi, A., & Bolondi, G. (2016). Gender differences and didactic contract: analysis of two INVALSI tasks on powers properties. In C. Csikos, A. Rausch & J. Szitanyi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 275). Szeged: IGPME.

González de San Román, A., & De La Rica, S. (2012). Gender gaps in PISA test scores: The impact of social norms and the mother's transmission of role attitudes. *Estudios de Economía Aplicada, 34*(1).

Gould, S. L. (1996). *Strategies used by secondary school students in learning new concepts which require spatial visualization*. [Unpublished doctoral dissertation], Teachers College, Columbia University, New York.

Guiso, L., Monte, F., Sapienza, P., & Zingales, L. (2008). Culture, gender, and math. *Science-New York then Washington, 320* (5880), 1164.

Halpern, D. F., Beninger, A. S., & Straight, C. A. (2011). Sex differences in intelligence. *The Cambridge handbook of intelligence*, 253-272.

Helwig, R., Anderson, L., & Tindal, G. (2001). Influence of elementary student gender on teachers' perceptions of mathematics achievement. *The Journal of Educational Research, 95*(2), 93-102.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for research in mathematics education, 21*(1), 33-46.

Herbert, J., & Stipek, D. (2005). The emergence of gender differences in children's perceptions of their academic competence. *Journal of Applied Developmental Psychology, 26*(3), 276-295.

Hill, C., Corbett, C., & St. Rose, A. (2010). *Why So Few? Women in Science, Technology, Engineering, and Mathematics. Washington: American Association of University Women*. Disponibile in https://www.aauw.org/aauw_check/pdf_download/show_pdf.php?file=why-so-few-research (consultato il 12.09.2018).

Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: a meta-analysis. *Psychological bulletin, 107*(2), 139.

Hyde, J. S., Lindberg, S. M., Linn, M. C., Ellis, A. B., & Williams, C. C. (2008). Gender similarities characterize math performance. *Science, 321*(5888), 494-495.

Hyde, J. S., & Mertz, J. E. (2009). Gender, culture, and mathematics performance. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 106*(22), 8801-8807.

INVALSI. (2016). *Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2015-2016. Rapporto risultati.* Frascati, IT: INVALSI. Disponibile in http://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2016/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2016.pdf (consultato il 17.07.2018).

INVALSI. (2017). *Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2016-2017. Rapporto risultati.* Frascati, IT: INVALSI. Disponibile in https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/Rapporto_Prove_INVALSI_2017.pdf (consultato il 17.07.2018).

Jacobs, J. E., & Bleeker, M. M. (2004). Girls' and boys' developing interests in math and science: Do parents matter? *New directions for child and adolescent development, 2004*(106), 5-21.

Jacobs, J. E., & Eccles, J. S. (1992). The impact of mothers' gender-role stereotypic beliefs on mothers' and children's ability perceptions. *Journal of personality and social psychology, 63*(6), 932-944.

Jacobs, J. E., Lanza, S., Osgood, D. W., Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2002). Changes in children's self-competence and values: Gender and domain differences across grades one through twelve. *Child development, 73*(2), 509-527.

Kesici, S., Sahin, I., & Akturk, A. O. (2009). Analysis of cognitive learning strategies and computer attitudes, according to college students' gender and locus of control. *Computers in Human Behavior, 25*(2), 529-534.

Klasen, S. (2002). Low schooling for girls, slower growth for all? Cross-country evidence on the effect of gender inequality in education on economic development. *The World Bank Economic Review, 16*(3), 345-373.

Langer, E. J. (1997). *The power of mindful learning*. Reading, MA: Addison Wesley.

Lawton, C. A., & Hatcher, D. W. (2005). Gender differences in integration of images in visuospatial memory. *Sex roles, 53*(9-10), 717-725.

Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 597-622). New York: Macmillan.

Leder, G., & Forgasz, H. (2008). Mathematics education: new perspectives on gender. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(4), 513-518.

Li, Q. (1999). Teachers' beliefs and gender differences in mathematics: A review. *Educational Research, 41*(1), 63-76.

Lindberg, S. M., Hyde, J. S., Petersen, J. L., & Linn, M. C. (2010). New trends in gender and mathematics performance: a meta-analysis. *Psychological bulletin, 136*(6), 1123.

Ma, X. (1999). A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal for research in mathematics education, 30*(5), 520-540.

Mackinnon, N. (1990). Sophie Germain: or was Gauss a feminist? *Math Gaz, 74*(470), 346–351.

Maffia, A., & Giberti, C. (2016). Didattica della matematica e PISA: strade percorse e nuovi sentieri da battere. In L. Palmerio (A cura di), *PISA 2012. Contributi di approfondimento* (pp. 190-200). Roma: Franco Angeli.

Marrs, H., & Sigler, E. A. (2012). Male academic performance in college: The possible role of study strategies. *Psychology of Men & Masculinity, 13*(2), 227.

Marsh, H. W., & O'Mara, A. J. (2008). Reciprocal effects between academic self-concept, self-esteem, achievement, and attainment over seven adolescent years: Unidimensional and multidimensional perspectives of self-concept. *Personality and Social Psychology Bulletin, 34*, 542-552.

Matthews, J. S., Ponitz, C. C., & Morrison, F. J. (2009). Early gender differences in self-regulation and academic achievement. *Journal of educational psychology, 101*(3), 689.

McClelland, M. M., & Cameron, C. E. (2011). Self-regulation and academic achievement in elementary school children. *New Directions for Child and Adolescent Development, 2011*(133), 29-44.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center.

OECD. (2012). R*esults in Focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2013). *PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs*. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2015). *The ABC of Gender Equality in Education: Aptitude, Behaviour, Confidence*. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016a). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016b). *ITALY – Country Note – Results from PISA 2015*. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016c). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016d). PISA 2015 Technical report. Paris, FR: OECD Publishing.

Pajares, F. (2005). Gender Differences in Mathematics Self-Efficacy Beliefs. In A. M. Gallagher & J. C. Kaufman (Eds.), *Gender differences in mathematics: An integrative psychological approach* (pp. 294-315). New York, US: Cambridge University Press.

Pajares, F., & Miller, M. D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of educational psychology, 86*(2), 193.

Primi, C., Busdraghi, C., Tomasetto, C., Morsanyi, K., & Chiesi, F. (2014). Measuring math anxiety in Italian college and high school students: validity, reliability and gender invariance of the Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS). *Learning and Individual Differences, 34*, 51-56.

Richardson, M., Abraham, C., & Bond, R. (2012). Psychological correlates of university stu dents' academic performance: a systematic review and meta-analysis. *Psychological bulletin, 138*(2), 353.

Riegle-Crumb, C. (2005). The cross-national context of the gender gap in math and science. In L. V. Hedges & B. Schneider (Eds.), *The social organization of schooling,* (pp. 227-243). New York, US: Russell Sage Foundation.

Rohde, T. E., & Thompson, L. A. (2007). Predicting academic achievement with cognitive ability. *Intelligence, 35*(1), 83-92.

Ruffing, S., Wach, F. S., Spinath, F. M., Brünken, R., & Karbach, J. (2015). Learning strategies and general cognitive ability as predictors of gender-specific academic achievement. *Frontiers in psychology*, 6:1238.

Schultz, T. P. (2002). Why governments should invest more to educate girls. *World Development, 30*(2), 207-225.

Schunk, D. H., & Zimmerman, B. J. (1997). Social origins of self-regulatory competence. *Educational psychologist, 32*(4), 195-208.

Sfard, A. (2005). What Could be More Practical than Good Research?. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 393-413.

Spelke, E. S. (2005). Sex differences in intrinsic aptitude for mathematics and science?: a critical review. *American Psychologist, 60*(9), 950.

Spinath, B., & Spinath, F. M. (2005). Development of self-perceived ability in elementary school: The role of parents' perceptions, teacher evaluations, and intelligence. *Cognitive Development, 20*(2), 190-204.

Tiedemann, J. (2000). Parents' gender stereotypes and teachers' beliefs as predictors of children's concept of their mathematical ability in elementary school. *Journal of Educational psychology, 92*(1), 144.

Tomasetto, C. (2013). Matematica per i maschi, italiano per le femmine: Stereotipi di genere e atteggiamenti verso le materie scolastiche tra genitori e figli, *IN-MIND ITALIA, 5*, 19-24.

Tomasetto, C., Mirisola, A., Galdi, S., & Cadinu, M. (2015). Parents' math–gender stereotypes, children's self-perception of ability, and children's appraisal of parents' evaluations in 6-year-olds. *Contemporary Educational Psychology, 42*, 186-198.

Törner, G., & Arzarello, F. (2013). Grading mathematics education research journals. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 39*(95), 31-34.

Virtanen, P., & Nevgi, A. (2010). Disciplinary and gender differences among higher education students in self-regulated learning strategies. *Educational Psychology, 30*(3), 323-347.

Weis, M., Heikamp, T., & Trommsdorff, G. (2013). Gender differences in school achievement: The role of self-regulation. *Frontiers in Psychology, 4*, 442. Disponibile in http://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00442 (consultato il 28.08.2018).

Winkelmann, H., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2008). Gender differences in the mathematics achievements of German primary school students: Results from a German large-scale study. *ZDM, 40*(4), 601-616.

Yee, D. K., & Eccles, J. S. (1988). Parent perceptions and attributions for children's math achievement. *Sex Roles, 19*(5), 317-333.

**Autore/Chiara Giberti**
Facoltà di Scienze della Formazione – Libera Università di Bolzano, Italia
chiara.gib@gmail.com

# Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebrica

## The ArAl project for a relational approach to teaching in the arithmetic-algebraic area

**Giancarlo Navarra**
Insegnante ricercatore, già professore a contratto – Università di Modena e Reggio Emilia, Italia

**Sunto** / Nell'articolo si presenta il "Progetto ArAl, Percorsi nella didattica per favorire il pensiero prealgebrico" e si introduce l'ambito teorico all'interno del quale esso si colloca, l'*early algebra*: un campo relativamente nuovo di ricerca e pratica didattica che contrappone alla didattica tradizionale, che fa iniziare l'algebra verso i 13-14 anni di età, l'ipotesi che sia non solo possibile, ma anche opportuno, spostare questo inizio ai 6 anni, con un'attenzione crescente verso gli alunni "grandi" della scuola dell'infanzia (5 anni). Si riportano numerosi episodi di classe (alunni fra i 6 e i 15 anni) relativi in parte a classi "inesperte" e in parte a classi "esperte". I commenti che li accompagnano illustrano i punti chiave del quadro teorico, la prospettiva linguistica che contraddistingue le radici epistemologiche del progetto, le differenze più significative fra l'*early algebra* e l'insegnamento tradizionale dell'aritmetica e dell'algebra.

Parole chiave: Early algebra; progetto ArAl; balbettio algebrico; pensiero relazionale; formazione dei docenti.

**Abstract** / The paper presents the "ArAl Project, Arithmetic pathways aimed at facilitating pre-algebraic thinking" and introduces early algebra, the theoretical framework within which it is placed. Early algebra is a relatively new field of research and teaching practice. Unlike the traditional teaching, where the study of algebra begins at the age of 13-14, our hypothesis is that not only is it possible, but also appropriate, to anticipate the teaching of algebra at the age of 6, with an increasing attention towards the "great" pupils of the kindergarten (5 years old). Many class episodes (pupils aged 6 to 15) are reported, related partly to "inexperienced" classes (teachers are novices of the project) and partly to "expert" classes (skilled teachers who have been collaborating with the project for many years).

Keywords: Early algebra; ArAl Project; algebraic babbling; relational thinking; teacher training.

# 1 Breve storia del progetto ArAl

Il *Progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico* nasce dai lavori condotti dai primi anni '80 dal GREM (Nucleo di ricerca in Educazione Matematica) operante presso il Dipartimento di matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia, sotto la direzione scientifica di Nicolina A. Malara[1]; si sviluppa grazie alle opportunità di distacco all'università offerte dal MIUR e alla collaborazione iniziale con una rete di 12 scuole distribuite in due regioni, il Veneto e l'Emilia Romagna. Negli anni '90 le premesse sociali e culturali del progetto si evolvono attraverso attività sperimentali svolte in compresenza da docenti e ricercatori in classi di scuola dell'infanzia, elementare e media proiettandosi sempre più verso la didattica dell'a- 1

1. Nicolina A. Malara, già professore ordinario presso l'Università di Modena e Reggio Emilia.

ritmetica e dell'algebra e collocandosi all'interno dell'area di ricerca denominata a livello internazionale *early algebra*. In questo contesto il progetto esplora possibilità e opportunità per lo sviluppo del pensiero prealgebrico fin dalla prima elementare, con una crescente attenzione verso gli alunni "grandi" della scuola dell'infanzia (5 anni). Nel 2001 il progetto ArAl vince il concorso nazionale SeT (Progetto per lo sviluppo Scientifico e Tecnologico) su più di 600 concorrenti (reti di scuole coordinate da istituti di ricerca pubblici o privati) e si aggiudica un finanziamento complessivo di 84 milioni di lire. Inizia la collaborazione con scuole o reti di scuole che negli anni successivi si amplia coinvolgendo quasi tutte le regioni italiane. Nel 2003 inizia la pubblicazione della Collana ArAl con la Pitagora Editrice di Bologna, composta attualmente (2018) dal testo introduttivo "Quadro teorico e Glossario" e da 13 Unità (AA.VV., 2003-2018). Dal 2001 il progetto è partner in progetti europei, partecipa a convegni nazionali e internazionali, corsi di formazione; la raccolta quasi completa delle pubblicazioni è consultabile nel sito del progetto. Tra il 2008 e il 2013 sviluppa in collaborazione con il GISCEL il progetto MTPAL (applicazione della Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate in Ambito Linguistico, **par. 3.1**) (Navarra, 2009; Deon & Navarra, 2014; Navarra, 2016). Nel 2011 e nel 2018 il progetto ArAl viene invitato a partecipare a due importanti raccolte di articoli che illustrano il panorama internazionale delle principali ricerche sull'*early algebra* (Cusi, Malara & Navarra, 2011; Malara & Navarra, 2018). Nel 2015 viene aperta la quarta versione del sito Progetto ArAl; nello stesso anno viene attivato in Facebook il gruppo Progetto ArAl (attualmente di quasi 3000 membri). Nell'anno scolastico 2017/2018 il progetto ha collaborato con istituti e reti di scuole in Friuli-Venezia Giulia, Veneto, Emilia Romagna, Toscana, Liguria, Puglia. Nicolina Malara è la responsabile scientifica, Giancarlo Navarra è co-responsabile scientifico e coordinatore nazionale del progetto.

## 2 Il progetto ArAl e l'*early algebra*

L'ipotesi di base del progetto ArAl è che i principali ostacoli cognitivi nell'apprendimento dell'algebra derivino da un insegnamento dell'aritmetica *troppo focalizzato, dalla prima elementare, su calcoli e risultati*, che in questo modo influenza lo sviluppo del pensiero matematico generando difficoltà di carattere sia cognitivo che emozionale. Si ritiene cioè che la consueta didattica dell'aritmetica induca negli alunni un imprinting che condiziona, o addirittura impedisce, nel corso degli studi – in modi spesso anonimi, sotterranei, difficilmente individuabili da parte dei docenti – la costruzione di competenze stabili e significative nell'ambito matematico. La ricerca a livello internazionale, a partire dai primi anni '80, mette in evidenza come studenti introdotti all'algebra solo verso la fine della scuola media mostrino un'interpretazione inadeguata del segno uguale, manifestino difficoltà con la comprensione delle lettere soprattutto quando hanno il significato di variabile, trovino ostacoli nel produrre o nell'interpretare un'espressione algebrica come risposta valida alla soluzione di un problema, sbaglino nel risolvere equazioni con una presenza di lettere in entrambi i lati del segno "=" (questi e altri aspetti vengono trattati ampiamente in Carraher & Schliemann, 2018). Al contrario, uno spostamento dell'attenzione *dalla ricerca dei risultati alla riflessione sui significati* è il fattore decisivo per portare con gradualità alunni impegnati nello studio dell'aritmetica a *cogliere il generale anche*

*operando su casi particolari* e per avvicinarli alla rappresentazione simbolica di relazioni e proprietà, gettando così le basi per il consolidarsi del pensiero relazionale e quindi per la comprensione del linguaggio algebrico.
Lo stesso David Carraher (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2007), ricercatore impegnato da tempo in questo campo, titola significativamente un capitolo del suo libro *Algebra in the early grades: Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early.* Per comprendere il gioco di parole, bisogna capire cosa si intenda per *early algebra.* Si potrebbe tradurre con "approccio precoce all'algebra", ma l'aggettivo *precoce* non convince perché riconduce ad una ipotetica norma che sancirebbe un momento *giusto* per la sua introduzione. Nemmeno "approccio anticipato all'algebra" va bene perché anche *anticipato* ha in sé una valenza di *prima del dovuto* che si potrebbe interpretare come *tentativo azzardato*. Riteniamo che traduzioni adeguate siano "algebra degli inizi" o, per gli alunni di 5-7 anni, "la prima algebra", con una connotazione quasi affettuosa e una sfumatura marcatamente ludica, del genere "il mio primo libro", "la mia prima bambola"[2]. Quindi, "algebra degli inizi" non significa *iniziare prima l'algebra* ma *percorrere l'aritmetica in modi tali da favorire lo sviluppo del pensiero prealgebrico*, scoprire quindi il volto algebrico di ciò che spesso è visto solo come aritmetica (per una breve storia dell'*early algebra* e della sua evoluzione, v. Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016).
Nell'ottica del progetto ArAl, questo sviluppo avviene gradualmente lungo la progressione temporale illustrata in **Figura 1**:

<table>
<tr><td colspan="10">Early Algebra (EA)</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr>
<tr><td colspan="6">EA</td><td colspan="4">EA-PA</td><td colspan="4">PA</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="8">Pensiero Algebrico (PA)</td></tr>
</table>

Figura 1
Progressione e intrecci fra l'*early algebra* e lo sviluppo del pensiero algebrico.

La fase dell'*early algebra* (EA) riguarda gli alunni fra i 5 e i 14 anni, lo sviluppo del pensiero algebrico (PA) quelli dagli 11 anni in poi; il periodo scolastico fra gli 11 e i 14 anni è molto delicato perché è quello in cui avviene il passaggio graduale tra le due fasi (EA-PA). La differenza profonda tra la didattica tradizionale dell'aritmetica e dell'algebra e la prospettiva rappresentata dall'*early algebra* è quindi che mentre la prima vede l'algebra introdotta *successivamente* all'aritmetica a partire dalla terza media, la seconda sostiene una didattica costruita, sin dall'inizio, sull'*intreccio* fra le due discipline. Sviluppare con gradualità il pensiero algebrico in tale contesto significa costruire negli studenti l'attitudine verso l'esplorazione di regolarità, relazioni e proprietà, la capacità di riflettere su di esse e rappresentarle *prima* attraverso il linguaggio naturale e *poi* attraverso quello algebrico, le competenze nel concepire e nell'usare, da parte degli alunni più grandi, il linguaggio algebrico come strumento di pensiero (questa panoramica viene illustrata con esempi di attività e analisi di episodi di classe in Carpenter, Frank & Levi, 2003).

2. Nella Collana ArAl (**par. 1**) due Unità su 13 sono dedicate alla scuola dell'infanzia / prima elementare; hanno l'obiettivo di mostrare come la prima costituisca, a tutti gli effetti, il primo gradino della scala che vede aritmetica e algebra intrecciate sin dall'inizio del percorso educativo: l'Unità 10, *Qual è il colore della sedia? Successioni modulari e forme embrionali di generalizzazione* e l'Unità 13, *La Matematochetta. Gioco dell'aggiungere e del togliere in preparazione all'addizione e alla sottrazione*.

In questa concezione è fondamentale il ruolo svolto nell'insegnamento della matematica dal linguaggio o, meglio, dai linguaggi, a cominciare da quello naturale. È da qui che nasce il costrutto che abbiamo chiamato balbettio algebrico, un processo attraverso il quale il bambino, in analogia con quanto avviene nell'apprendimento del linguaggio naturale, si appropria poco alla volta, sin dai primi approcci all'aritmetica, dei significanti, dei significati e delle regole che supportano il linguaggio algebrico, in un ambiente educativo tollerante verso i tentativi, la creatività, l'imitazione, gli errori che contraddistinguono l'apprendimento di un qualsiasi linguaggio. Questo percorso non è semplice per l'insegnante perché, come vedremo, esso costituisce una sorta di rivoluzione copernicana nelle sue conoscenze e nella sua didattica dell'aritmetica e dell'algebra. Nel progetto ArAl sono stati concepiti numerosi strumenti per aiutarlo a padroneggiare il balbettio algebrico e le modalità per favorirlo. Il cuore teorico di tali strumenti è costituito dal *sistema dei Glossari*: sono quattro, per un complesso di più di 200 termini o costrutti, collegati fra loro da una fitta rete di link. L'esplorazione dei glossari è una lenta avventura intellettuale dell'insegnante, che costruisce i suoi personali itinerari scegliendo di volta in volta i link che attirano maggiormente la sua attenzione. Qualsiasi percorso egli compia conduce comunque, attraverso ampliamenti e approfondimenti successivi, ad una visione relazionale dei termini chiave che compongono i glossari, e quindi ad una comprensione della teoria.
Quadro teorico e Glossari aiutano a capire come la costruzione di competenze matematiche in una prospettiva algebrica (**Figura 2**) poggi, sin dalle fasi iniziali, su solide basi di carattere linguistico, supportate a loro volta da presupposti di natura sociale e psicologica e da una serie di concetti di tipo generale.

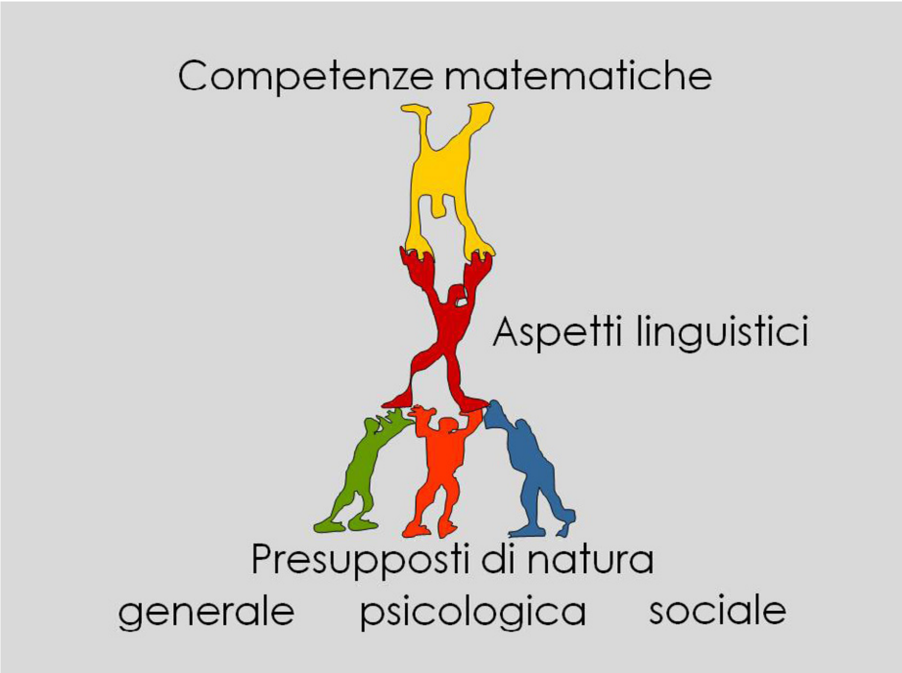



Figura 2
La "piramide" del balbettio algebrico.

Prima di proseguire nell'analisi dei punti chiave che possono favorire o ostacolare lo sviluppo del pensiero aritmetico verso quello algebrico, presentiamo una sintesi dei principali strumenti operativi del progetto ArAl che supportano i docenti nella comprensione delle interazioni fra prassi e teoria.

# 3 Principali strumenti del progetto ArAl per favorire le competenze dei docenti nell'ambito dell'*early algebra*

### 3.1 La Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate (MTP):

favorisce la riflessione sull'attività di classe dal punto di vista matematico, linguistico, metodologico attraverso trascrizioni (chiamate *diari*) di audio o video registrazioni di episodi. Ogni autore, dopo aver commentato il diario, lo invia al suo *e-tutor* che lo commenta a sua volta, spesso invitando altri ricercatori o docenti esperti a fare altrettanto; a questo punto il diario viene ritrasmesso all'autore e ad altri docenti appartenenti ad istituti che collaborano con il progetto ArAl. I diari si prefigurano così come strumenti di mediazione fra teoria e prassi su più piani:

- diagnostico, forniscono un quadro delle competenze e della sensibilità dell'insegnante (il concetto di "sensibilità" viene illustrato nel par. 6.1);
- formativo, consentono all'insegnante di riflettere sulla qualità della sua azione didattica;
- valutativo, danno a insegnanti e ricercatori elementi per valutare le ricadute della teoria sulla pratica d'aula;
- sociale, favoriscono, mediante la loro diffusione, la condivisione dei saperi in gioco.

### 3.2. Gli interventi di un esperto ArAl in classe:

in genere è un ricercatore-formatore. Spesso questa figura coincide con quella dell'*e-tutor* prevista dalla MTP; svolgono questo ruolo anche insegnanti che si sono dotati di competenze riconosciute nel corso di collaborazioni pluriennali con il progetto ArAl. In occasione degli incontri di formazione (par. 3.3) l'esperto gestisce delle attività in classi dall'infanzia alla terza media (della durata di una normale lezione) alla presenza dell'insegnante di classe e, spesso, di altri osservatori (colleghi dello stesso o di altri istituti, ricercatori, tirocinanti, laureandi, qualche volta genitori). L'esperto nei suoi interventi opera esplicitamente in funzione dei docenti che assistono, svolgendo il ruolo di *modello* e mostrando come sia possibile stimolare negli alunni atteggiamenti che favoriscano lo sviluppo del balbettio algebrico attraverso una didattica impostata in chiave socio-costruttivista.

### 3.3. Gli incontri di formazione:

per la maggior parte si svolgono all'interno delle collaborazioni pluriennali fra istituti o reti e il progetto ArAl; durante il loro svolgimento si approfondiscono e si ampliano assieme agli insegnanti, anche in forme laboratoriali, aspetti matematici, linguistici o metodologici del progetto e dell'*early algebra*, si organizzano riflessioni comuni sui diari (par. 3.1) e sugli spunti derivanti dagli interventi degli esperti nelle classi (par. 3.2), configurando così un *sistema formativo integrato*.[3] Altri incontri vengono promossi da enti, associazioni o istituti secondo modalità organizzative più tradizionali. 3

3. Ogni anno scolastico questi incontri sono almeno tre, di due giorni consecutivi ciascuno; al mattino l'esperto svolge interventi in classi dalla scuola dell'infanzia alla terza media; il pomeriggio incontra i docenti. I tre incontri si svolgono a distanza di tempo di circa due mesi l'uno dall'altro; durante questi intervalli docenti impegnati nella collaborazione redigono diari MTP.

# 4 I punti chiave del passaggio dalle concezioni più diffuse nella didattica dell'aritmetica e dell'algebra all'*early algebra*

Ogni insegnante è plasmato dal suo retroterra culturale definito da conoscenze, convinzioni, esperienze, abitudini, stereotipi. È decisiva in questo quadro la sua formazione all'origine, maturata nell'ambiente familiare prima e negli anni della scuola poi, sino al compimento del ciclo di studi superiori: un imprinting che determina il rapporto *profondo* che ha stabilito – nel bene e nel male – con la matematica, e che influisce sul suo insegnamento.

Analizzerò di seguito alcuni concetti radicati nell'insegnamento tradizionale dell'aritmetica collegandoli – spesso contrapponendoli – ai corrispondenti costrutti teorici del progetto ArAl. Farò vedere come e perché essi possano rappresentare degli ostacoli allo sviluppo del pensiero algebrico e come questi ostacoli possano essere affrontati per indurre, negli stessi docenti prima e negli alunni poi, *concezioni favorevoli alla promozione del pensiero algebrico sin dalla prima elementare*. Li illustrerò attraverso l'analisi di episodi di classe relativi alla scuola elementare (P1 sta per Prima
Elementare e così via sino a P5) e alla scuola media (M1-M4)[4], estrapolati da diari 4
MTP (par. 3.1).[5] 5

Dividerò gli episodi in due gruppi, relativi rispettivamente a: A. classi "inesperte" e B. classi "esperte" nell'ambito dell'*early algebra*. Definisco classi "inesperte" quelle guidate da insegnanti all'inizio di un rapporto di collaborazione con il progetto ArAl, che quindi possiedono prevalentemente modelli di pensiero condizionati dal retroterra culturale *standard* descritto all'inizio di questo paragrafo. Definisco al contrario classi "esperte" quelle il cui docente, attraverso più anni di collaborazione con il progetto ArAl, abbia maturato una conoscenza sempre più ampia e approfondita dei suoi costrutti e delle prospettive aperte dall'*early algebra* in termini di contenuti e di metodi.

## 4.1. Episodi relativi a classi "inesperte"

### 4.1.1 (P1, verso la fine dell'anno scolastico)

> Alla LIM si è giunti alla scrittura 11 + 7 = 18. Si propone, accanto ad essa, 18 = 11 + 7 e si chiede alla classe se vada bene. La risposta è un vibrato e collettivo «No!». Si invita Gaia a spiegare il perché del *suo* No. Gaia rimane incerta e poi dice che sì, «11 più 7 fa 18, ma 18 uguale a 11 più 7 non va bene com'è scritta perché i numeri sono scambiati».

La classe di Gaia non accetta 18 = 11 + 7 perché non capisce come sia possibile che il risultato stia a *sinistra* e l'operazione a *destra*. È abituata ad *operare* sulle scritture matematiche, non a *riflettere* su di esse. In questa concezione l'uguale possiede il significato di *operatore direzionale*, con una connotazione spazio-temporale: prepa-

4. L'unico episodio indicato con M4 si riferisce ad una classe prima di scuola secondaria di secondo grado, detta anche scuola superiore in Italia, che corrisponde al quarto anno di scuola media in Ticino.
5. Dal 2002, anno in cui è iniziata ufficialmente la pratica dei diari, ad oggi (2018) sono stati redatti quasi 300 diari, ognuno dei quali è corredato mediamente da 30-40 fra commenti e meta-commenti. Per un totale di più di 4500 commenti.

ra il finale di una storia che inizia a sinistra con dei calcoli e si conclude a destra con un risultato. Il simbolo "=", per come viene concepito da questi alunni, è veicolo di significati poveri; non possiede un significato relazionale, nel senso che non indica l'equivalenza fra due quantità. È la pura traduzione della voce verbale "fa": "11 più 7 *fa* 18" (e 18 "non fa" 11 più 7).

#### 4.1.2 (P2, inizio anno scolastico)

> Si chiede a Rita di scrivere "36 - 24"; l'alunna scrive "36 - 24 =" e chiede «Devo trovare quanto fa?» Di fronte al silenzio dell'insegnante dopo l'uguale scrive 12.

Rita esprime un disorientamento analogo a quello manifestato da Gaia nell'esempio precedente: "36 - 24" anche per lei è un'operazione, cioè una scrittura "in attesa". L'invito "Scrivi 36 - 24" viene interpretata come "*Calcola* 36 - 24". Di conseguenza Rita inserisce il simbolo "=" per preparare il risultato, perché la scrittura 36 - 24, da sola, è qualcosa di provvisorio e come tale è un oggetto povero di significato: Rita è abituata al fatto che, prima o poi, le verrà chiesto "Quanto fa?". Dei ricercatori hanno chiamato il bisogno di inserire comunque il segno "=" sindrome da mancanza di risultato.

#### 4.1.3 (P3, inizio anno scolastico)

> Si propone, nel corso di un'attività sul significato attribuito al segno "=", la frase:
>
> 14 + 21 = 39.
>
> Dopo un po' si sentono delle voci «No!», «Non va bene!», «È sbagliato!».
> Si chiede come si potrebbero tradurre in linguaggio matematico queste prese di posizione. Qualcuno propone di correggere a destra il risultato e scrivere 35.
> Si chiede in quale altro modo si potrebbe fare. Qualche alunno suggerisce di modificare la parte sinistra in 18 + 21, altri in 14 + 25.

Gli alunni intervengono sull'operazione o sul risultato perché sono abituati a correggere degli errori nei calcoli. Non sono stati educati a vedere ai lati dell'uguale le rappresentazioni di due numeri (il concetto verrà approfondito nel **par. 5.c**), e quindi a riflettere sulla loro uguaglianza esprimendo ad un livello metacognitivo l'esito del confronto, prima in linguaggio naturale, ad esempio «Non è vero che 14 + 21 è uguale a 39» oppure «14 + 21 non è uguale a 39», e poi con la sua traduzione in linguaggio matematico: $14 + 21 \neq 39$. In questo modo mostrerebbero familiarità anche con il simbolo "≠", raramente introdotto nella scuola elementare proprio perché non viene favorita la riflessione sulle scritture ma l'esecuzione di un calcolo. L'uguale mantiene quindi nei primi anni di scuola un significato procedurale. Un contratto didattico che invece promuova l'analisi delle scritture per confrontare il loro valore condurrebbe gli alunni a proporre di rappresentare la stessa relazione anche come $14 + 21 < 39$, puntualizzando così ulteriormente la disuguaglianza fra i due numeri.

#### 4.1.4 (P4, anno scolastico avanzato)

> Si presenta la scrittura 11 + 4 = 7 + 8. Molti alunni dicono che va bene ma altri non sono d'accordo. Il clima generale è poco convinto. La discussione fa emergere un conflitto di percezioni che porta ad una instabilità concettuale: la scrittura sì, andrebbe bene, ma…

Il conflitto che si manifesta è strettamente legato agli episodi precedenti; lo illustriamo evidenziando con coloriture diverse le due diverse percezioni che si intersecano generando dei cortocircuiti logici:

(a) 11 + 4 = 7 + 8 (b) 11 + 4 = 7 + 8

In (a) è evidenziata in giallo l'interpretazione spontanea da parte di un alunno: opacizza "+8", percepisce "11 + 4 = 7" come "operazione = risultato", ma non gli suona bene perché 7 non è il risultato corretto. Una conferma di tale ambiguità interpretativa è data dal fatto che una frase come "11 + 4 = 15 + 8" viene sentita invece da molti come corretta perché 15 è percepito come risultato di 11 + 4, anche se poi c'è quel "+ 8" che non si sa bene come decifrare. Una tale interpretazione rientra nella categoria che abbiamo chiamato Lettura partigiana del testo. Com'è evidenziato in celeste in (b), è necessario che gli alunni spostino l'attenzione verso la relazione che collega "11 + 4" e "7 + 8", e quindi verso il simbolo "=" che la rappresenta, e vedano la frase "11 + 4 = 7 + 8" come oggetto *unico*, cioè come uguaglianza fra due rappresentazioni dello stesso numero (15). Devono superare il punto di vista procedurale – operativo, fattuale – e dotarsi di uno relazionale. È questa prospettiva che permette di spostare l'attività su un livello metacognitivo, portando gli alunni a valutare la correttezza dell'uguaglianza attraverso il confronto fra le due scritture ai lati dell'uguale. È necessario quindi costruire il passaggio dal significato operativo-aritmetico dell'uguale come operatore direzionale a quello relazionale-algebrico dell'uguale come indicatore di equivalenza fra due quantità.

#### 4.1.5 (M2, inizio anno scolastico)

> L'insegnante propone agli studenti l'esplorazione delle piramidi di numeri.[6] 6
> Presenta tre minipiramidi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | | 37 | | 52 | |
| 13 | 20 | 19 | 18 | 41 | 11 |

> Chiede di individuare la "regola delle piramidi" e di verbalizzarla. La classe perviene a questa definizione «Per trovare il numero in alto bisogna sommare i due numeri nei mattoni in basso». Opportunamente guidati, gli alunni giungono ad una nuova enunciazione che dice non *come si trova* ma *cos'è* il numero in alto: «In una minipiramide il numero in alto è la somma dei numeri

6. Vedi Unità 5, Le piramidi di numeri, 2003, p. 55.

scritti nei mattoni alla base». Si propone una minipiramide con alla base 25 e 67 e si chiede di scrivere nel mattone in alto in linguaggio matematico la traduzione di quest'ultima regola. Gli studenti scrivono "25 + 67" e dopo un veloce calcolo mentale aggiungono "= 92".

25 + 67 = 92

25 67

Si stupiscono quando si chiede perché secondo loro sia necessario aggiungere "= 92". Si guardano l'un l'altro e spiegano «Ma è ovvio, che domanda è? Abbiamo scritto il risultato».

Il condizionamento visto negli episodi precedenti grava anche su questi studenti (con sette anni di scuola alle spalle): per loro 25 + 67 è un'operazione e *deve portare ad un risultato* che non può che essere esplicitato, e infatti aggiungono "= 92". 25 + 67, da solo, non significa nulla perché è loro estraneo il concetto di scrittura matematica come *rappresentazione di un numero*. Una scrittura, per così dire, ontologicamente compiuta.
Per quanto concerne le due diverse definizioni, la prima dice ciò che bisogna *fare*, esprime cioè un punto di vista procedurale, che è quello che porta ad aggiungere "= 92"; la seconda spiega *cos'è* il numero in alto, ed enuncia la struttura additiva della sua rappresentazione. Ma siccome la classe incontra per la prima volta la dualità procedurale / relazionale e non ha confidenza con il termine "rappresentare" (e quindi con la dualità rappresentazione canonica / non canonica di un numero, **par. 5.c**) continua a chiamare la scrittura 25 + 67 *operazione*; il termine "somma" usato nella frase "25 + 67 è la somma fra 25 e 67" continua ad essere visto come prodotto, non come processo. Ci troviamo in presenza di quello che è stato chiamato da Malara (1994) "dilemma processo-oggetto":

«Come sottolineato da A. Sfard (1991), la costruzione dei concetti algebrici si sviluppa per successivi livelli di astrazione ma prevalentemente attraverso processi computazionali, pertanto ogni oggetto matematico viene a riassumere in sé due aspetti complementari, quello di processo e quello di oggetto, come due facce di una stessa moneta. Nel primo aspetto prevale il punto di vista operazionale che è dinamico e sequenziale, nel secondo l'oggetto è visto come entità statica e fuori dal tempo e si considera da un punto di vista strutturale (si pensi ad esempio all'equazione vista come procedimento di codifica delle relazioni espresse da un problema ed all'equazione vista come oggetto di studio in sé). Lo sviluppo del pensiero algebrico, e più in generale della matematica, è caratterizzato da questo passaggio dal procedurale allo strutturale».

(Malara, 1994, p. 68)

### 4.1.6 (M3, seconda metà anno scolastico)

Lara ha imparato con la sua insegnante che $a^2 - b^2$ è "la differenza fra due quadrati". Le si chiede «Cos'è $5^2 - 3^2$?» e Lara risponde «16». Non si sogna di dire «$5^2 - 3^2$ è la differenza fra il quadrato di 5 e il quadrato di 3».

L'abitudine ad operare in senso procedurale ostacola la concettualizzazione di cosa siano gli oggetti su cui si opera e delle loro proprietà. Questo spiega la mancata interpretazione da parte di Lara di $5^2 - 3^2$ in termini di "differenza di quadrati" e la tendenza da parte sua a vedere questa scrittura come un insieme di operazioni da svolgere secondo un determinato ordine che lei mostra di conoscere giungendo al risultato corretto 16. Portare l'attenzione di alunni giovani verso le rappresentazioni di un numero ha ricadute importantissime su altri temi, come ad esempio sulla soluzione dei problemi (v. la dualità rappresentare / risolvere nel **par. 6.1.1** e nel **par. 7**).

#### 4.1.7 (M4, inizio dell'anno scolastico)

> In una batteria di prove d'ingresso (in tutto 12 batterie centrate sulle competenze legate al tradurre frasi dal linguaggio naturale a quello algebrico e viceversa, all'esprimere relazioni fra dati, all'argomentare) organizzate da un gruppo di docenti della scuola superiore coordinati da un'esperta ArAl viene proposto il seguente quesito:
>
> Traduci in linguaggio matematico: "Il successivo di *r*".
>
> Gli studenti scrivono nei commenti alle prove (vi erano nelle schede spazi appositi in questo senso) di aver incontrato difficoltà in questa traduzione perché non ricordano né il significato di "successivo di un numero" né il senso della precisazione "di un numero naturale"; in genere lasciano in bianco la risposta; una traduzione che compare più volte è: $r + r$.

Gli studenti, per capire cosa significa tradurre una frase, dovrebbero saperla interpretare, cioè attribuire un significato alla sua struttura e quindi alle relazioni fra i suoi termini. Se sono abituati – solo o prevalentemente – alla logica del *fare* non sono educati a ragionare sul *senso delle scritture*, siano esse in linguaggio naturale oppure matematico. Non sono quindi abituati a concepire due frasi come traduzioni l'una dell'altra. Per fare questo, dovrebbero essere guidati, sin dalla prima elementare, a vedere nella matematica un nuovo linguaggio, dotato – come qualsiasi linguaggio – di una semantica e una sintassi; un linguaggio per comunicare, attraverso il quale costruire e interpretare frasi e produrre parafrasi sia in linguaggio naturale che matematico; le parafrasi nel linguaggio naturale diventano mediatori verso la loro traduzione in linguaggio matematico (e viceversa). Nell'episodio, durante la discussione sugli esiti delle prove, gli studenti definiscono il termine "successivo" attraverso una circonlocuzione del tipo: «Che viene dopo» oppure portando un esempio: «Dopo 24 c'è 25». La traducibilità della prima frase è resa impossibile dall'opacità – in termini di *traghetto semantico* verso il linguaggio matematico – delle parole "che viene dopo". Un'attenzione proiettata verso gli aspetti della matematica come linguaggio e le mutue relazioni fra linguaggio naturale e linguaggio matematico guiderebbe a formulare parafrasi complete (in termini di soggetto, predicato, complemento) e funzionali all'individuazione della traduzione. Ad esempio, in questo caso, la frase «Il successivo di un numero naturale è la somma fra il numero stesso e 1» porterebbe a concludere che, poiché il successivo di 24 è esprimibile in forma non canonica (**par. 5.c**) come 24 + 1, il successivo di r sarà rappresentabile (si può parlare di traduzione letterale) come $r + 1$.

# 5 Sintesi dei punti chiave che emergono nei primi sette episodi

Prima di passare agli episodi del gruppo B (classi esperte), tiriamo le fila dei discorsi fatti sinora concentrandoci sui principali aspetti emersi.

a. **L'argomentazione.** Gli atteggiamenti di tutti gli alunni citati mostrano i depositi di ciò che resta, nel profondo, delle conoscenze acquisite dall'inizio della loro educazione matematica, legate soprattutto al *fare* e al *calcolare*. Essi sono abituati ad operare sulle scritture matematiche, non ad argomentare su di esse. Le spiegazioni, come si è visto, molto spesso non sono semplici, ma proprio per questo bisogna concordare con la classe un contratto didattico che superi gli "iceberg linguistici", quelle situazioni cioè nelle quali, per un tacito accordo fra alunni e docente, sono ritenute sufficienti poche (spesso pochissime) parole per esprimere la parte sommersa. Solo quando l'argomentazione diventa una pratica sociale condivisa nella classe – e quindi un valore comune – essa può esprimere il ruolo di traghetto verso la *generalizzazione*, e gli studenti possono essere gradualmente resi consapevoli del ruolo che essa gioca nello sviluppo della loro capacità di riflettere sulle proprie conoscenze matematiche (Cusi & Navarra, 2012).

b. **L'uguale nell'accezione procedurale e in quella relazionale.** Emerge, con sfumature diverse, il condizionamento indotto dall'idea tradizionale dell'aritmetica – insistiamo su questo aspetto cruciale – del *fare*. Un'operazione *fa* un risultato: ciò che sta a sinistra e ciò che sta a destra dell'uguale sono cose ontologicamente *diverse*; l'uguale non attira l'attenzione degli alunni perché sono concentrati sui calcoli. Quando si incontra l'algebra, invece, l'uguale assume un significato del tutto diverso, di tipo relazionale: indica l'equivalenza e, per simmetria, l'interscambiabilità di due rappresentazioni di una stessa quantità (ma la proprietà simmetrica dell'uguaglianza non viene quasi mai affrontata nei primi otto anni di scuola). Gli studenti della scuola media degli episodi **4.1.6** e **4.1.7.** si muovono in modo inconsapevole (perché nessuno li ha "avvertiti" del cambiamento) in un universo concettuale del tutto differente da quello aritmetico al quale sono abituati. Si adeguano, ma nella maggior parte dei casi rimangono poveri sul piano del controllo dei significati degli oggetti e dei processi. Se per loro "somma" è il nome del risultato di un'addizione, come interpretano il concetto di "somma tra variabili"? Non sono stati provvisti dei necessari traghetti semantici: se fossero abituati ad interpretare, ad esempio, $5 + 8$, come somma fra 5 e 8, sarebbe più semplice per loro concepire come somma la scrittura $a + b$ (**par. 6.1.1.iv**) perché presenterebbe un'analogia strutturale con $5 + 8$, analogia che manca nel confronto con la rappresentazione canonica 13.

c. **La rappresentazione.** Alcuni fra i principali traghetti semantici sono le dualità forma canonica / forma non canonica di un numero, processo / prodotto, trasparente / opaco: *la forma non canonica* di un numero (ad esempio $5 + 8$) è *trasparente* in termini di significato perché ha un *senso* in relazione al contesto e al *processo* soggiacente, ed esprime (in questo caso) una rappresentazione additiva del numero 13. Viceversa, la *forma canonica* di un numero (ad esempio 13) è *opaca* in termini di significato perché non dice nulla rispetto al *processo* soggiacente.

   Questa difficoltà interpretativa è diffusa anche in studenti della scuola superiore e in insegnanti in formazione. Di fronte alla domanda «Cos'è $[(11 + 7) : 9]^2 \times 3$?» rispondono: «Sono operazioni», «Sono calcoli», «È un'espressione da risolvere», «Devo trovare quanto fa», «Prima si trova la somma, poi si divide… »: l'imprinting del fare. Per recuperare il significato di *numero* – o, se si preferisce, di rappresentazione di un numero – è necessario introdurre gli alunni ai concetti di forma (o rappresentazione) canonica / non canonica. A questo scopo ricorriamo, a cominciare dalla prima elementare, alla strategia di trascrivere alla LIM, accanto al nome di un alunno, delle informazioni che lo riguardano: Laura, Sorella di Aldo, Amica del cuore di Julia, Padrona del cane Flic, eccetera. Laura è il nome proprio e le altre sono rappresentazioni che la definiscono offrendo informazioni che il nome non dà. Per i numeri – spieghiamo – la situazione è analoga: ogni numero può essere rappresentato in infiniti modi diversi. Per esempio "dodici" può essere rappresentato con la scrittura "12", ossia in forma canonica, oppure mediante delle espressioni equivalenti come "$3 \times 4$", "$(2 + 2) \times 3$", "$36 / 3$", "$10 + 2$", "$3 \times 2^2$", sue forme non canoniche, ognuna delle quali ha un senso legato al processo che la caratterizza (triplo di 4, quadruplo di 3, rapporto fra 36 e 3, somma fra 10 e 2, ecc.). Saper riconoscere e interpretare sin dai primi anni di scuola le forme non canoniche di un numero costruisce la base per comprendere scritture come $ab$, $- 4p$, $x^2y$, $k/3$. Essere guidati a sviluppare il pensiero *relazionale* significa saper interpretare e definire $[(11 + 7) : 9]^2 \times 3$ ad esempio come "Il quadrato di un quoziente moltiplicato per 3"; ma potrebbe anche essere "Il prodotto fra un quadrato e 3", oppure "Il triplo del quadrato di un quoziente", o un più evoluto "Un multiplo di 3". Rimanere confinati in un ambito *procedurale* significa per lo studente limitarsi ad una descrizione dei calcoli: «Sommo 11 e 7, poi divido per 9, poi faccio il quadrato e infine moltiplico per 3». Per far sì che uno studente sia in grado di costruire definizioni relazionali è necessario che egli venga guidato sin dai primi anni di scuola a comprendere la *struttura* degli oggetti matematici su cui dovrà operare. Essere in grado di produrre e interpretare parafrasi è una delle principali premesse ad una buona competenza linguistica (in senso lato), perché in questo modo si affina anche il controllo dei termini appropriati.

## 6 Episodi relativi a classi esperte

Gli episodi che presento ora sono tratti da diari di attività svolte in classi del secondo biennio della scuola elementare (quarta e quinta) che sin dalla prima operano in ambiente *early algebra*, e hanno avuto quindi il tempo di maturare con gradualità la qualità del loro balbettio algebrico. Il livello dell'esperienza è favorito da molti fattori che riguardano l'insegnante: la durata della collaborazione con il progetto ArAl, l'intensità dello studio dei suoi contenuti, la disponibilità a mettersi in gioco anche redigendo dei diari (**par. 3.1**), la coerenza con cui in classe sa mantenere l'equilibrio fra teoria e prassi, la maturazione di una sensibilità che gli consenta di assumere, di fronte alle *micro-situazioni* che si presentano di continuo nella classe, opportune *micro-decisioni* coerenti con il percorso che ha scelto di seguire. John Mason descrive così questo concetto:

> «Ogni professionista, indipendentemente dall'ambito in cui opera, desidera saper cogliere le possibilità, essere sensibile alle situazioni e rispondere in modo appropriato. Ma ciò che si considera appropriato dipende da ciò a cui

> si attribuisce valore, che dipende sua volta da ciò che si è capaci di notare. (...) [Nel caso dell'insegnante] notare ciò che gli alunni fanno o come rispondono, valutare ciò che dicono anche contro le proprie aspettative e i propri criteri di valutazione e considerare ciò che potrebbe essere detto o fatto in seguito. È sin troppo ovvio dire che non si può intervenire su ciò che non si nota; non si può scegliere di fare qualcosa se non si ravvisa l'opportunità di farlo».
>
> (Mason, 2002, p.7, traduzione dell'autore)

I primi due episodi che illustrerò riguardano due quarte; sono centrati su situazioni problematiche (da noi considerevolmente ampliate rispetto a spunti illustrati in Steinweg, Akinwunmi & Lenz, 2018) facenti parte dell'attività che abbiamo chiamato "Scatole & Biglie", avviata nel 2017 in classi dalla scuola dell'infanzia alla terza media. L'ambiente riguarda due amici che giocano con biglie che possono tenere sciolte (e quindi visibili), oppure dentro scatole chiuse. L'attività, che si sviluppa con modalità concrete per i più piccoli e attraverso rappresentazioni iconiche per i più grandi, ha due regole: (1) in ogni situazione presentata i due bambini hanno un numero uguale di biglie; (2a) scatole dello stesso colore contengono lo stesso numero di biglie e, viceversa, (2b) scatole di colore diverso contengono numeri diversi di biglie.[7] 7

Ogni situazione è accompagnata da quattro consegne (talvolta sono cinque, come nel **par. 6.1.1**, situazione 3):

A. Descrivi la situazione che vedi;
B. Quante biglie contiene/contengono la/e scatola/e? Argomenta la tua risposta;
C. Rappresenta la situazione in linguaggio naturale;
D. (per gli alunni più grandi) Rappresenta la situazione in linguaggio matematico per Brioshi (questo personaggio viene illustrato nel **par. 6.1.1.v**).

In alcune classi "esperte" gli insegnanti hanno condotto l'attività intrecciandola con quella della bilancia a piatti[8], utilizzando entrambe come approccio all'equazione. 8

### 6.1.1 (P4, fine dell'anno scolastico)

> L'insegnante propone, una alla volta, tre situazioni; si eseguono collettivamente le prime tre consegne, la quarta è il frutto di attività individuali i cui esiti vengono poi confrontati, discussi ed eventualmente migliorati collettivamente prima di essere inviati Brioshi. Alcuni esempi di protocolli nella pagina successiva:

7. Agli alunni più grandi (dalla quarta-quinta elementare) si chiede di ipotizzare cosa succede se si cancella la frase "scatole di colore diverso contengono numeri diversi di biglie", cioè se rimane solo l'implicazione diretta "Se le scatole hanno lo stesso colore allora hanno lo stesso numero di biglie". Gli alunni scoprono che, in questo caso, in una situazione dove vi siano due scatole di colore diverso di cui si conosca il numero totale delle biglie, esse possono contenere comunque un numero uguale di biglie. Questo passaggio è importante ma è tutt'altro che banale sul piano didattico; presuppone un breve percorso di formazione per gli insegnanti sui nodi logici che stanno alla base delle regole 2a e 2b, che dia loro delle pur embrionali competenze nel comprendere la differenza fra implicazione diretta e doppia implicazione.
8. Vedi Unità 6, Dalla bilancia a piatti all'equazione, 2003, p. 55

(1)

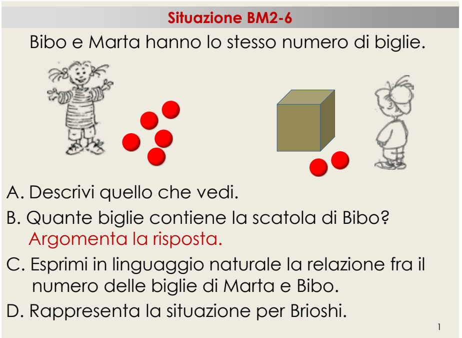



Figura 3
Situazione problematica 1.

C. «Il numero delle biglie di Marta è uguale alla somma fra il numero delle biglie nella scatola e quello delle biglie di Bibo che si vedono».
D. $5 = a + 2$.

(2)

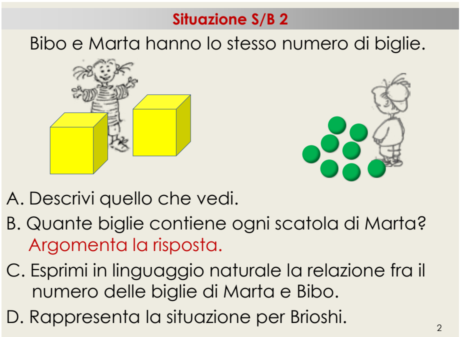



Figura 4
Situazione problematica 2.

C. «Il doppio del numero delle biglie di una scatola è uguale al numero delle biglie di Bibo»;
D. Viene tradotta come $a + a = 8$ e $a \times 2 = 8$. Si riflette su rappresentazioni additive e moltiplicative.

(3)

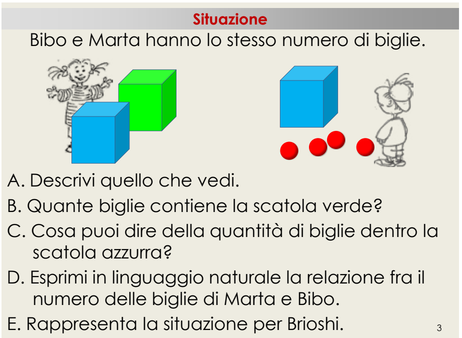



Figura 5
Situazione problematica 3.

C. «La somma fra i numeri delle biglie nelle scatole di Marta è uguale alla somma fra il numero di biglie nella scatola e quello delle biglie fuori dalla scatola»;
D. $b + v = b + 4$. Nel corso della discussione gli alunni capiscono che nella scatola verde ci sono 4 biglie e in quelle blu «c'è lo stesso numero ma non si può sapere quale».
Si propone poi una sfida che, sulla base di precedenti esperienze in altre classi,

è considerata piuttosto complessa anche perché "rompe" con la prima regola del gioco che, come si vede nella parte alta della slide, questa volta viene posta in modo interrogativo:

(4)


Figura 6
La sfida.

Al momento della risposta alla consegna D. 20 alunni su 24 scrivono nel giro di pochi secondi:
$a \neq a + 1$.

L'insegnante partecipa da molti anni al progetto ArAl; i concetti chiave vengono affrontati e discussi nella classe all'interno di un contratto didattico che prevede anche una parziale, ma significativa, condivisione del quadro teorico con gli alunni. I principali concetti sono:

**i.** le diverse rappresentazioni di un numero, canonica / non canonica e la loro interpretazione; ad es. in (1) la scrittura a + 2 viene descritta in termini relazionali come "somma fra il numero delle biglie nella scatola e quello delle biglie che si vedono";

**ii.** l'uguale come indicatore di equivalenza: nel concepire le rappresentazioni delle situazioni di Scatole & Biglie gli alunni esprimono l'interiorizzazione del suo significato relazionale (**par. 5.b**);

**iii.** la dualità rappresentare / risolvere: la classe dell'episodio rappresenta in modo trasparente le relazioni (di volta in volta additiva, moltiplicativa, di uguaglianza) fra gli enti in gioco. Alunni inesperti risolvono invece il problema eseguendo un'operazione; nella situazione (1), per esempio, rispondono semplicemente "3", limitandosi al risultato di un calcolo. Se si chiede loro di spiegarsi, rispondono: «Ho fatto 5 meno 2». Come si è già evidenziato, il concetto di *rappresentazione* di una situazione problematica è loro estraneo. Ci si può chiedere allora quale significato attribuiscano studenti di scuola media, che non abbiano mai incontrato l'*early algebra*, ad una frase come $5 \times h/2 = 35$, in cui 5 sia la base di un triangolo e 35 l'area, nel momento in cui il loro imprinting li porta a vederla come "operazioni a sinistra e risultato a destra" piuttosto che come uguaglianza fra due rappresentazioni diverse dell'area di quel triangolo, espresse rispettivamente: a sinistra, come rappresentazione dell'area della classe dei triangoli di base 5 ed altezza indeterminata, definibile come "prodotto fra la base (5) e la metà dell'altezza" e, a destra, in forma canonica (35);

**iv.** la conquista della lettera, e quindi la possibilità di rappresentare mediante un simbolo un numero sconosciuto (come nelle prime tre situazioni), o un numero qualsiasi (come nella quarta). Gli alunni dell'episodio hanno incontrato l'incognita in prima elementare, attraverso attività e riflessioni alle quali fanno riferimento molte Unità della Collana ArAl; la lettera è l'ultimo passo di un lenta conquista che si evolve attraverso l'invenzione di altri simboli, metafore del numero sconosciuto: un fantasmino, una macchia, un punto interrogativo, un simbolo qualsiasi. La conquista graduale dei diversi significati che una lettera può assumere è un esempio di evoluzione del balbettio algebrico, (**par. 2**). La competenza nell'uso della lettera anche come variabile può portare una classe che, per esempio, esplori le piramidi (come quella esaminata nel **par. 1.4.5**) ad esprimere in linguaggio matematico la regola «In una minipiramide il numero in alto è la somma dei numeri scritti nei mattoni alla base» in questo modo:

$a + b$

$a$ | $b$

Questo passaggio ha implicazioni importanti sul piano matematico e linguistico man mano che aumenta il numero dei piani della piramide e gli alunni devono individuare una nuova regola (Cusi & Navarra, 2012);

**v.** l'approccio al codice algebrico attraverso Brioshi[9], per il quale si chiede di rappresentare la situazione: Brioshi è un alunno virtuale giapponese, di età variabile a seconda di quella dei suoi interlocutori, che conosce solo la sua lingua ma sa usare molto bene il linguaggio matematico. Viene introdotto come "amico di penna matematica" per avvicinare alunni fra i 6 e i 14 anni alla semantica e alla sintassi del linguaggio matematico. Ad esempio, nel caso della situazione (2), nel corso della discussione attorno alle rappresentazioni individuali, gli alunni hanno dovuto confrontare, fra le altre, due tipi di rappresentazioni: $a \times 2 = 8$ e $8 : 2 = a$. Poiché la situazione è stata descritta come «Il doppio del numero delle biglie di una scatola di Marta è uguale al numero delle biglie di Bibo», hanno convenuto che sono entrambe corrette, ma che a × 2 = 8 è la sua traduzione in linguaggio matematico, mentre 8 : 2 = a rappresenta l'operazione che permette di trovare il numero delle biglie di una scatola e i compagni che l'hanno proposta hanno lavorato nella prospettiva del risolvere, non del rappresentare. Nel primo caso ($a \times 2 = 8$) sanno che Brioshi dovrebbe *risolvere un'equazione* (non la chiamano così ma le esperienze con la bilancia a piatti li hanno avvicinati agli embrioni di quelli che poi diverranno i principi di equivalenza), nel secondo ($8 : 2 = a$) dovrebbe semplicemente *eseguire la divisione* 8 : 2, e sarebbe quindi un compito aritmetico, non algebrico. Questo gioco di ruolo funziona sempre, indipendentemente dall'età degli alunni, e Brioshi costituisce un richiamo forte alla correttezza e alla trasparenza delle scritture matematiche; 9

**vi.** interpretare in senso relazionale il significato di una scrittura in linguaggio matematico: nel corso dell'esplorazione della situazione (4) gli alunni (con sincero stupore dell'*e-tutor*, presente alla lezione) esprimono in termini relazionali i numeri di biglie dei due ragazzi, rispettivamente con a e $a + 1$, e rappresentano con il simbolo ≠ la loro disuguaglianza; giustificano $a \neq a + 1$, dicendo che «Bibo ha una biglia in più di Marta qualunque sia il numero di biglie nelle due scatole, che comunque è ogni volta uguale perché sono dello stesso colore». Rivolti all'insegnante osservano con aria sorniona «Volevi prenderci in giro ma non ci siamo

9. Vedi Unità 1, Brioshi e l'approccio al codice algebrico, 2003.

cascati!». È interessante notare che in questo caso gli alunni non passano attraverso il linguaggio naturale, come hanno fatto nei tre casi precedenti, come traghetto semantico verso la rappresentazione in linguaggio algebrico, ma lo usano per spiegare, a posteriori, le ragioni della scrittura che hanno proposto. È importante inoltre anche il fatto che alunni di classi "esperte" abbiano capito che devono usare la stessa lettera per rappresentare il numero delle biglie in ognuna delle scatole di Bibo e Marta, numero che sapevano essere lo stesso.

### 6.1.2 (P4, fine dell'anno scolastico)

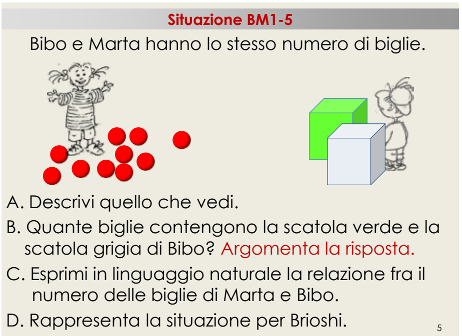



**Figura 7**
Situazione problematica 4.

Anche questa classe è impegnata con una situazione problematica dell'attività Scatole & Biglie; gli alunni lavorano seguendo le regole (2a) e (2b) (**par. 6.1**), che comprende la frase "scatole di colore diverso contengono numeri diversi di biglie", quindi non contemplano il caso 5-5.

Le argomentazioni relative al quesito B. sono collettive. Inizialmente gli alunni propongono in modo disordinato coppie pur corrette di numeri, poi qualcuno fa riferimento alla rappresentazione tabulare per organizzare una ricerca ordinata delle coppie di numeri che soddisfano alla condizione $10 = a + b$ (si sa che una scatola può anche essere vuota):

(1)

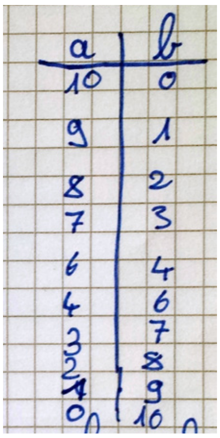
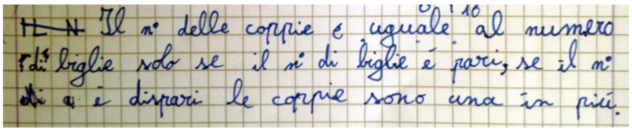



**Figura 8**
Ricerca ordinata dei valori di *a* e *b*.

Dopo aver fatto analizzare alcune situazioni simili cambiando i numeri delle biglie di Marta, si chiede se sia possibile individuare una legge che permetta di stabilire quante sono le coppie di valori per un numero qualsiasi di biglie. Gli alunni lavorano individualmente. Le argomentazioni più complete sono simili e presentano delle sfumature attorno alle quali l'insegnante promuove la riflessione; due esempi:

(2)


Il n° delle coppie è uguale al numero di biglie solo se il n° di biglie è pari, se il n° di q. è dispari le coppie sono una in più.

(3)

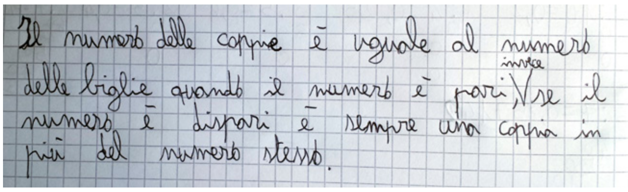

Il numero delle coppie è uguale al numero delle biglie quando il numero è pari, invece se il numero è dispari è sempre una coppia in più del numero stesso.

Figura 9
Esempi di argomentazioni.

Si confrontano i termini "solo se" (2) e "quando" (1), si riflette sulla necessità o meno del termine "sempre" (2), si valuta se le parole "in più" acquistino maggiore chiarezza con la specificazione "del numero stesso" (3). Si conclude che le due frasi sono equivalenti.

La richiesta fatta alla classe – se sia possibile trovare una legge che permetta di stabilire quante sono le coppie per un numero qualsiasi di biglie – ha l'obiettivo di promuovere *l'approccio alla generalizzazione attraverso la riflessione sulla struttura delle rappresentazioni in linguaggio matematico*. Modificare il proprio insegnamento nella prospettiva dell'*early algebra* significa dare agli alunni l'opportunità di attivare differenti modi di pensare come: esplorare situazioni, analizzare relazioni tra quantità, prevedere, generalizzare, modellizzare, giustificare, verificare. Tale approccio è importante per promuovere lo sviluppo del pensiero algebrico sfruttando anche piccole opportunità che possono emergere in ambienti aritmetici e costituisce una preparazione fondamentale per il successivo studio dell'algebra (Cooper & Warren, 2011). Impegnare alunni sin dalla scuola elementare in attività mirate alla generalizzazione è vitale, perché questo rinforza le loro competenze nel filtrare le informazioni matematiche in base alle loro caratteristiche comuni e nel progettare conclusioni in forma di rappresentazioni generali (Blanton & al., 2018).

### 6.1.3 (P4, metà anno scolastico)

Il terzo episodio si riferisce ad un problema del Rally Matematico Transalpino (RMT) interpretato e svolto collettivamente dagli alunni in chiave ArAl. Si tratta di un brano piuttosto lungo estratto da un diario (**par. 3.1**) in cui si è preferito mantenere la numerazione degli interventi per favorire la lettura dei commenti dell'insegnante (C-I) e dell'*e-tutor* (C-ET) riferiti ad essi.

Andrea e Giacomo hanno da poco iniziato a collezionare figurine dei Pokemon.
Ieri Andrea aveva 5 figurine in meno di Giacomo.
Oggi Giacomo ha ancora lo stesso numero di figurine che aveva ieri, invece Andrea ne ha ricevute in dono 21 e ora ha il doppio del numero di figurine di Giacomo.
Rappresenta la situazione in linguaggio matematico in modo che Brioshi possa trovare il numero delle figurine che ha oggi Andrea.

L'insegnante (I) lancia una sfida:

1. I: «Potremmo trovare una soluzione pensando alla bilancia?»
2. Andrea: «Mettiamo da una parte le figurine di Giacomo e dall'altra quelle di Andrea».
3. Gaia: «Ma non sappiamo quante figurine ci sono in un piatto e quante nell'altro».
4. Anna: «Però sappiamo che Andrea aveva 5 figurine meno di Giacomo, quindi lui ne ha 5 in più».
5. Mayssa: «Sappiamo anche che alla fine Andrea avrà il doppio delle figurine di Giacomo».
6. Gaia: «I due piatti allora non sono in equilibrio!»
7. Francesco: «Quindi non si può usare la bilancia!»
8. Sebastiano: «Sì, c'è uno squilibrio!»
9. I: «Come possiamo rappresentarlo allora?» [C1-I]

*C1-I: Il tentativo è di far sì che il problema sia affrontato non per tentativi ma con una modalità prealgebrica utilizzando i principi della bilancia (familiari agli alunni).*

10. Adele: «Io pensavo di disegnare lo stesso la bilancia».
11. Mayssa: «All'inizio Giacomo ha più figurine quindi…».
12. Gaia: «Ma non sappiamo il numero di figurine che avevano all'inizio!»
13. Amel: «Allora usiamo una lettera».
14. Aurora: «Per esempio f di figurine». [C2-ET]

*C2-ET: È sempre opportuno far esplicitare il significato delle lettere usate, per evitare che si formi il misconcetto che esse indichino persone, oggetti, colori e così via.*

15. Amel: «Il piatto più pesante alla fine è quello di Andrea, il più leggero è quello di Giacomo». [C3-ET]

*C3-ET: L'osservazione di Amel è corretta. Sarebbe stata opportuna una domanda che gli facesse esplicitare in base a quale informazione abbia ipotizzato che il piatto di Andrea è più pesante di quello di Giacomo. La risposta sarebbe stata importante per lui e per i compagni.*

16. Mayssa: «Andrea ha il doppio delle figurine, ma 21 non si divide per due». [C4-ET]

*C4-ET: Mayssa non ha capito che Andrea oggi non ha solo 21 figurine (il numero dispari di cui parla), ma che ne ha 21 in più di quelle che aveva il giorno prima. Dario (rigo 19) supererà questo errore rappresentando il numero delle figurine di Andrea con "f + 21".*

17. Adele: «Se a Giacomo diamo il doppio delle figurine… (non sa come continuare)».
18. I: «Aiutate Adele in questo ragionamento».
19. Dario: «Prima, cioè ieri, la situazione era così (fa questo disegno alla LIM)»: [C5-ET]

$$f + 21 \neq f + 5$$

*C5-ET: Ritengo opportuno chiarire che in realtà la "bilancia sbilanciata" di Dario* *non rappresenta "la situazione di ieri" come lui dice (rigo 19), ma il confronto fra la situazione di oggi (a sinistra) e quella di ieri (a destra); indica con:*

– *"f" il numero delle figurine di Andrea;*
– *"f+5" quello delle figurine che Giacomo aveva ieri (5 in più di quelle di Andrea);*
– *"f+21" quello delle figurine che ha oggi Andrea (21 in più di quelle che lui stesso aveva ieri).*

**20.** I: «Quindi per trovare un equilibrio come diceva Gaia?»
**21.** Anna: «Giacomo deve avere il doppio delle figurine di Andrea».
**22.** Mayssa scrive alla LIM: $f + 21 = f + 5 \times 2$.
**23.** Sebastiano: «Devi mettere le parentesi».
**24.** Mayssa scrive: $f + 21 = ( f + 5 ) \times 2$.
**25.** I: «Bravissimi!!! E adesso? Sul piatto a destra devo applicare…».
**26.** Alcuni: «… la proprietà distributiva!»
**27.** Sebastiano: «Ah, sì!!! Allora diventa $2 \times f + 2 \times 5$...».
**28.** Anna: «Quindi sarebbe…» viene a scrivere alla LIM: $f + 21 = 2 \times \mathrm{f} + 10$.
**29.** Mayssa: «Tolgo una f da entrambe le parti della bilancia così la bilancia resta in equilibrio, è il primo principio della bilancia!» Assieme ad Anna scrive: $f + 21 - f = 2 \times f - f + 10$.
**30.** Anna, che è ancora alla LIM, scrive nella riga sottostante ciò che rimane: $21 = f + 10$.
**31.** Francesco: «*f* è 11».
**32.** I: «Non dovete risolvere, rappresentate bene per Brioshi quello che fate».
**33.** Amel: «21 è come 11 + 10».
**34.** Anna: «È una forma non canonica di 21».
**35.** Adele scrive $11 + 10 = \mathrm{f} + 10$: «Adesso tolgo 10 di qua e 10 di là».
**36.** Gaia: «Sì, è il primo principio della bilancia!!! E rimane $f = 11$. Ci siamo riusciti!!!»
**37.** Sebastiano: «Infatti 11 + 21 = 32… è il numero di figurine di Andrea!»
**38.** Anna: «E Giacomo ne ha la metà… 16!»

Ritengo che il diario testimoni i livelli ai quali può arrivare una quarta elementare che dalla prima abbia lavorato in modo coerente e continuativo nella prospettiva dell'*early algebra*. L'insegnante interviene lo stretto necessario, favorendo la devoluzione e lo scambio fra pari; gli alunni intrecciano in modo positivo i ragionamenti evidenziando, attraverso l'uso della lettera, un controllo consapevole sul significato di termini come "doppio" e "metà", di un segno inconsueto come "≠", di una proprietà altrettanto poco frequentata come la distributiva,[10] della bilancia e dei suoi principi come approccio all'equazione e alla sua soluzione,[11] degli aspetti semantici e sintattici del linguaggio matematico approfonditi attraverso il "mediatore culturale matematico" Brioshi, di costrutti come "forma non canonica", di verifica finale dei risultati ottenuti. Riemergono alcuni fra i principali temi evidenziati in precedenza, supportati da aspetti *metodologici* altrettanto importanti, attinenti il piano *sociale* e quello *linguistico*: una conduzione da parte dell'insegnante rispettosa delle modalità più produttive per condurre in modo efficace una discussione di classe su temi ma-

10
11

10. Vedi Unità 11, Viaggio alla conquista della proprietà distributiva, 2008.
11. Vedi Unità 5, Le piramidi di numeri, 2003.

tematici, l'abitudine alla verbalizzazione e all'argomentazione da parte degli alunni, la chiarezza del contratto didattico al fine di attivare la costruzione sociale della conoscenza, la condivisione del quadro teorico con gli alunni, che divengono così non più soltanto consumatori ma produttori di pensiero matematico. Tutto questo, nella cornice di un problema "intelligente", proveniente da quella prodigiosa fucina che è RMT che fra l'altro affonda una parte delle sue radici, come il progetto ArAl, nell'importante storia dei Nuclei di ricerca italiani in didattica della matematica.

## 7 Rappresentare vs risolvere un problema

Consideriamo un ultimo tema, cruciale per l'evoluzione del balbettio algebrico: i problemi.
I problemi che tradizionalmente affrontano gli alunni della scuola italiana, classificabili come problemi verbali standard, sono ben diversi dalle situazioni problematiche come quelle del RMT e producono nell'immaginario della maggior parte delle persone, com'è noto, la convinzione che risolvere problemi significhi individuare le operazioni che permettono di trovare il risultato agendo sui dati. Vediamo quindi come cambia la situazione se si modifica il punto di vista e si sostituisce quello aritmetico del *risolvere* con quello algebrico del *rappresentare*.
Consideriamo un esempio tratto da un sussidiario di IV elementare:

> Alle gare provinciali studentesche di atletica partecipano 19 scuole, ognuna delle quali invia una squadra formata da 22 atleti. Alla fine di tutte le altre gare iniziano le batterie dei centometristi, alle quali partecipano 54 studenti.
> Quanti studenti hanno partecipato alle gare precedenti le batterie dei centometristi?

Generalmente un alunno lo risolve con due operazioni distinte, 22 × 19 = 418 e 418 – 54 = 364: opera cioè su *tre* enti (22, 19, 54) e su un quarto ente intermedio (418) mediante due operazioni: una moltiplicazione e una sottrazione; il risultato finale fornisce la risposta alla domanda del problema.
Manteniamo lo stesso testo, ma impostiamo la consegna nella prospettiva del *rappresentare*:

> *Rappresenta la situazione* in modo che Brioshi trovi quanti studenti hanno partecipato alle gare precedenti le batterie dei centometristi.

La conseguenza del cambio della consegna è che non è più *lui, lo studente*, il risolutore; egli deve preparare una scrittura che permetta *ad un altro* (a Brioshi, o ad un compagno, o ad un'altra classe) di risolvere il problema. Avviene una sorta di rivoluzione copernicana; l'alunno:

a. non tiene conto più, come prima, di tre dati (cioè dei numeri *conosciuti*) ma di quattro enti: il numero delle scuole (19), quello degli atleti di ogni squadra (22), quello degli atleti che partecipano alle gare dei centometristi (54) e quello *sconosciuto* degli studenti che hanno gareggiato sino a quel momento (che decide di indicare, per esempio, con *s*);

b. non individua più *due operazioni* (una moltiplicazione e una sottrazione da svolgere sequenzialmente) ma *tre relazioni fra i quattro enti*: una moltiplicativa fra il numero delle scuole (19) e quello degli atleti di ogni squadra (22), una additiva (espressa attraverso una sottrazione) fra il numero di tutti gli atleti (espresso dal prodotto tra 22 e 19) e il numero dei centometristi e infine un'uguaglianza.

L'alunno quindi interpreta la situazione problematica ed esprime non *come si trova*, ma *cos'*è il numero degli studenti che hanno partecipato alle gare precedenti le batterie dei centometristi, e lo esprime in linguaggio naturale attraverso una definizione *relazionale*: "Il numero degli studenti che hanno già fatto le loro gare è uguale alla differenza fra il numero di tutti gli atleti, che è il prodotto fra 22 e 19, e il numero dei centometristi, 54". *Traduce* quindi in questo modo: $g = 22 \times 19 - 54$, permettendo così a Brioshi (che in questo 'gioco di ruolo' sono gli stessi alunni) di trovare il valore di $g$ (364). Il cambio della consegna ha, in una prima fase, lo scopo di far cogliere a docenti e alunni la differenza fra risolvere un problema e rappresentarlo. Una volta risolto il problema, questo spostamento di attenzione consente di oggettivare la sua struttura: gli alunni, esplorando la scrittura iniziale $g = 22 \times 19 - 54$, vengono guidati verso la scoperta che essa è *la particolarizzazione di una formula del tipo generale*, in cui $i$ sia il numero degli atleti per ogni istituto, $s$ il numero delle scuole partecipanti, $c$ il numero dei centometristi, $g$ il numero degli studenti che partecipano alle altre gare, che può essere scritta per esempio in questo modo: $g = i \times s - c$. L'insegnante può inoltre chiedere di inventare altre situazioni, in contesti diversi, rappresentabili con la medesima frase.

Vediamo infine come si potrebbe modificare il testo dello stesso problema in modo da renderlo *davvero* significativo sul piano algebrico, trasformando in incognita uno dei dati interni al testo. L'obiettivo in questo caso è quello di guidare gli alunni verso una rappresentazione che costituisca per Brioshi un'equazione da risolvere:

> Alle gare provinciali studentesche di atletica partecipano *alcune* scuole, ognuna delle quali invia una squadra formata da 22 atleti. Nella prima parte della giornata gareggiano 364 atleti; infine iniziano le batterie dei centometristi, alle quali partecipano 54 studenti.
> Rappresenta la situazione in modo che Brioshi trovi quante scuole hanno partecipato alle gare.

Attraverso il confronto tra le rappresentazioni in linguaggio naturale della situazione, prodotte individualmente o in gruppi, gli alunni giungono ad una formulazione condivisa, per esempio: "Il prodotto fra il numero degli atleti inviati da ogni scuola (22) e il numero delle scuole (per esempio s) è uguale alla somma fra il numero degli atleti che partecipano alle gare precedenti (364) e il numero dei centometristi (54)". La traduzione (anche in questo caso letterale) è: $22 \times s = 364 + 54$. Ora sì che Brioshi (gli alunni stessi) deve attivare le sue conoscenze acquisite attraverso la bilancia a piatti, e quindi applicare dove necessario quelli che sono stati chiamati "primo e secondo principio della bilancia" (cioè i principi di equivalenza); un protocollo scritto da alunni in questo caso è il seguente (sanno di dover illustrare ogni passaggio):

| | |
|---|---|
| $22 \times s = 364 + 54$ | |
| $22 \times s = 418$ | sostituzione della forma non canonica 364 + 54 con la canonica 418 |
| $22 \times s : 22 = 418 : 22$ | secondo principio (divido per 22 da entrambe le parti) |
| $s = 19$ | numero delle scuole che hanno partecipato alle gare. |

Ma questa che abbiamo analizzato è solo una delle rappresentazioni possibili. Alcuni alunni potrebbero interpretare il problema da un altro punto di vista: "Il numero delle scuole che hanno partecipato alle gare ($s$) è il quoziente fra la somma degli atleti ( 364 + 54 ) e quello degli alunni di ogni scuola (22)". La rappresentazione in linguaggio matematico sarebbe: $s = ( 364 + 54 ) : 22$.
L'insegnante può proporre ora il confronto fra $22 \times s = 364 + 54$ e $s = ( 364 + 54 ) : 22$, aprendo così alla riflessione sulle parafrasi (**par. 4.1.7**), e cioè *sulla struttura di rappresentazioni diverse della stessa situazione in cui sia cambiato il punto di vista del risolutore*. Ma può andare oltre, proponendo un ulteriore confronto con le operazioni eseguite per risolvere la prima versione del problema ($22 \times 19 = 418$ e $418 - 54 = 364$). Se gli alunni riscrivono le operazioni staccate mediante un'unica rappresentazione in cui il risultato (364) venga rappresentato con un'incognita ottengono una nuova parafrasi, $22 \times 19 - 54 = g$, che potrebbe essere tradotta in linguaggio naturale: "La differenza fra il prodotto del numero degli alunni per scuola (22) con il numero delle scuole (19) e il numero dei centometristi è uguale al numero degli studenti che hanno partecipato alle gare precedenti ($g$)".

# 8 Conclusioni

Portare alunni dai 5 ai 14 anni all'incontro con l'*early algebra* significa essenzialmente guidarli - attraverso situazioni problematiche create appositamente e affrontate in modo socio-costruttivo - verso un nuovo linguaggio, con la sua semantica e la sua sintassi. Le radici epistemologiche del progetto ArAl sono intimamente connesse con un approccio linguistico; le discipline dell'aritmetica e dell'algebra sono viste come unite in una meta-disciplina dotata di uno specifico linguaggio unificatore. Il rispetto delle regole di questo linguaggio diventa essenziale per poter svolgere attività quali la traduzione, la discussione, l'interpretazione, la previsione e la comunicazione, concepite come *attività matematiche*. L'effettuare calcoli è presente ma è subordinato a scopi più alti: il ragionamento, le argomentazioni, le confutazioni, le correzioni. Man mano che l'algebra affrontata dagli alunni cresce in complessità, essi saranno guidati a comprendere che la manipolazione delle forme simboliche non sia fine a se stessa, ma aiuti a matematizzare, esplorare, dedurre, raggiungere nuove conoscenze.
Alcuni degli aspetti educativi che ho descritto vanno sviluppati costantemente negli alunni, poiché supportano in loro la crescita del pensiero algebrico. Parlo della riflessione: (i) sul linguaggio per favorire la capacità di costruire argomentazioni, tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa e produrre pensieri originali; (ii) sulla relazione tra intuizioni o produzioni individuali e la loro condivisione, in modo da promuovere la costruzione sociale della conoscenza; (iii) sul passaggio da situazioni generative concrete alla condensazione concettuale dei fatti matematici sottostanti e alla loro rappresentazione; (iv) su aspetti matematici di base come il riconoscimento dell'equivalenza strutturale tra frasi o, nel caso di dati sconosciuti o variabili, la generazione di equazioni e funzioni.
Riteniamo che gli alunni possano sviluppare il pensiero algebrico purché vengano educati come studenti *metacognitivi* e per questo è necessario che gli insegnanti, a loro volta, diventino insegnanti *metacognitivi*. Per promuovere la metacognizione,

dal 2001 elaboriamo strumenti e strategie anche attraverso il coinvolgimento costante degli stessi docenti, in uno stretto intreccio di riflessioni sulla conoscenza in gioco (teoria) e sull'azione in classe (pratica): la Collana ArAl, i materiali visionabili nel sito http://www.progettoaral.it, le collaborazioni annuali con istituti o reti di istituti, i commenti ai diari, gli scambi via mail con i docenti, il gruppo 'Progetto ArAl' in Facebook.

La nostra esperienza e i nostri studi di ricerca ci hanno resi consapevoli che cambiare l'insegnamento nella prospettiva dell'*early algebra* richiede una conversione della professionalità degli insegnanti, costruita sulla rilettura in chiave critica di conoscenze, convinzioni, atteggiamenti, modalità di conduzione delle attività, stereotipi (forse) e sulla presa di coscienza del fatto che l'aritmetica e l'algebra vanno considerate come discipline intrecciate fin dall'inizio della scuola elementare. Questo processo è lento e deve essere sostenuto attraverso appropriati programmi di sviluppo. Per mantenere viva questa prospettiva nell'attività in classe gli insegnanti devono affinare la loro sensibilità per riconoscere le continue micro-situazioni in cui sia possibile porre a confronto il punto di vista *operativo* proprio e degli alunni con quello *relazionale*. Per raggiungere questo obiettivo e costruire gradualmente e consapevolmente abilità matematiche, è necessario che alunni e insegnanti condividano termini specifici del quadro teorico dell'*early algebra*, usandoli costantemente quando discutono, riflettendo sul loro significato e facendo emergere le loro connessioni. Crediamo che su questa base gli alunni possano sperimentare, sin dai primi anni di scuola, un approccio consapevole al linguaggio e al pensiero algebrico e, in generale, un atteggiamento positivo nei confronti della matematica.

## Bibliografia

AA.VV. (2003-2018). *Progetto ArAl: Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico*. Collana (Quadro teorico e Glossario + 13 Unità). Bologna: Pitagora.

Blanton, M., Brizuela, B.M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Murphy Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N.L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds, The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 27-50). Springer. ISBN 978-3-319-68350-8.

Carpenter, T.P., Franke, M.L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in the Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebra Thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds, The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 107-138). Springer. ISBN 978-3-319-68350-8.

Cooper, T.J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Cusi, A., Malara, N.A., & Navarra, G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization*: *A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483-510). Advances in Mathematics Education. Berlin: Springer.

Cusi, A., & Navarra, G. (2012). Aspetti di generalizzazione con alunni giovani in ambiente early algebra. Versione italiana di: Cusi, A., & Navarra, G. (2012). Aspects of Generalization in Early algebra. In M. Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 182-192). Rzeszòw University press, Rzeszòw (Poland). ISBN 978 - 83-7338-780-5.

Deon, V., & Navarra, G. (2014). Come parlano gli insegnanti? In A. Colombo & G. Pallotti (A cura di), *L'italiano per capire* (pp. 243-255). I Quaderni del GISCEL. Reggio Emilia. Aracne Editrice. ISBN 978-88-548-6817-5.

Kieran, C., Pang J., Schifter D., & Ng, S. (2016). *Early Algebra, Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. ICME 13 Topical Survey. Springer. ISBN 978-3-319-32258-2.

Malara, N.A. (1994). Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà? In B. D'Amore (A cura di), *L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica* (pp. 67-77). Bologna: Pitagora.

Malara, N.A., & Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebra thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year--Olds, The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 51-78). Springer. ISBN 978-3-319-68350-8.

Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*. London: The Falmer Press.

Navarra, G. (2009). Early algebra: un approccio relazionale all'aritmetica per promuovere una concezione linguistica dell'algebra. In P. Baratter & S. Dallabrida (A cura di), *Atti del Convegno GISCEL: Lingua e grammatica, Teoria e prospettive didattiche* (pp. 133-154). Milano: Franco Angeli.

Navarra, G. (2016). "Cinque per tre fa quin… ?" "… dici" "Bravo!" La metodologia delle trascrizioni pluricommentate come strumento per lo studio dei comportamenti linguistici dei docenti di matematica e la promozione di sensibilità e competenze in tale ambito. In F. De Renzo & M.E. Piemontese (A cura di), *Atti del Convegno Nazionale GISCEL 2014* (pp. 239-252). Roma.

Steinweg, A.S., Akinwunmi, K., & Lenz, D. (2018). Making Implicit Algebraic Thinking Explicit: Exploiting National Characteristics of German Approaches. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds, The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 283-307). Springer. ISBN 978-3-319-68350-8.

**Autore/Giancarlo Navarra**
Insegnante ricercatore, già professore a contratto – Università di Modena e Reggio Emilia, Italia
giancarlonavarra@gmail.com

# Esperienze didattiche

DdM

# Costruiamo un carretto

## Let's build a trolley cart

**Laura Battaini**
Scuola dell'infanzia – Pregassona, Svizzera

ESPERIENZA DIDATTICA

**Sunto** / Il presente contributo ha lo scopo di descrivere un percorso didattico rivolto sia alla scuola dell'infanzia, sia alla scuola elementare. Il progetto, che ha visto coinvolte una sezione di scuola dell'infanzia e una classe di quinta elementare di Pregassona, verte sulla costruzione di un carretto per trasportare alcuni materiali dalla sede della scuola dell'infanzia a quella della scuola elementare. Grazie alla sperimentazione e alla collaborazione, gli allievi hanno affrontato molti aspetti, matematici e tecnici, per arrivare alla costruzione di un carretto in legno adatto allo scopo.

Parole chiave: laboratorio; collaborazione; situazione – problema; curriculum verticale.

**Abstract** / This contribution aims to present an educational experience designed for both kindergarten and primary school. The project, conducted in a kindergarten section and in a fifth grade classroom in Pregassona, dealt with the construction of a cart to transport materials from the kindergarten to the primary school. Thanks to experimentation and collaboration, the students have faced many mathematical and technical aspects in order to construct a wooden cart suitable for the purpose.

Keywords: laboratory; collaboration; realistic situation; vertical curriculum.

## 1 Introduzione

In questo articolo presentiamo un percorso svolto in collaborazione tra una sezione di scuola dell'infanzia e una classe di quinta elementare del Canton Ticino con lo scopo di permettere agli allievi di avere un progetto comune, il più concreto possibile, nel quale mettere in gioco le proprie conoscenze e abilità, lavorando sulla collaborazione tra cicli diversi e sul riconoscimento delle proprie e altrui capacità.
Le finalità di un percorso condiviso tra allievi di età diversa riguardano in primo luogo la valenza a livello di scambio e conoscenza tra ordini scolastici differenti; tale conoscenza reciproca si dimostra utile per gli alunni ma anche per i docenti, che hanno l'occasione di lavorare nell'ottica di un'armonizzazione e di una verticalità dell'esperienza educativa. D'altra parte, sfruttando la grande differenza d'età, questo tipo di progetti offre la possibilità di far accrescere competenze collaborative tra gli alunni.
Per i bambini di scuola dell'infanzia, la scuola elementare è un mondo molto vicino ma al tempo stesso sconosciuto. Per gli allievi dell'ultimo anno in particolare, che sono consapevoli di doverla frequentare in un immediato futuro, ci sono dunque aspettative e curiosità, ma anche paure e dubbi. Numerose esperienze hanno mostrato come la maggiore conoscenza del nuovo contesto porti i bambini a essere più sereni al momento di questo delicato passaggio. Anche per questo motivo si è cercato, negli ultimi anni, di attivare frequenti scambi e collaborazioni fra i due livelli. In questo modo, si cerca di garantire agli allievi di tutte le età della scuola dell'infanzia la possibilità di conoscere meglio la scuola elementare e capire le principali differenze

e similitudini con il loro settore di appartenenza.
Va anche considerato che i progetti che prevedono uno scambio tra i due settori scolastici sono sempre apprezzati dagli allievi, sia dai più piccoli, sia dai più grandi. Oltre all'aspetto, già evidenziato, di maggiore conoscenza e consapevolezza rispetto a un ambiente nel quale saranno inseriti in seguito, per i più piccoli c'è anche il piacere di mettersi a confronto con ragazzi più grandi, contribuendo con il proprio vissuto e le proprie idee alla risoluzione di una problematica comune, e sentendo riconosciute e valorizzate le proprie capacità. Per gli alunni più grandi invece, oltre al valore affettivo di ritornare a un ambiente legato al proprio passato educativo ed esperienziale, vi è una valorizzazione delle proprie conoscenze e competenze, che saranno maggiori e più articolate rispetto a quelle dei piccoli. Tali scambi, che si verificano quindi non solo sul piano affettivo ma anche sul piano cognitivo, sono resi possibili dalla verticalità del curricolo promossa dalle indicazioni previste dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015).
Abbiamo potuto notare come il lavoro tra bambini di età diverse sia molto efficace per sviluppare le capacità di collaborazione, in particolare nei ragazzi che mostrano difficoltà in questa competenza trasversale. Se si collabora con un pari si può faticare a immedesimarsi nelle sue difficoltà o a capire che ciò che si sta dicendo non è chiaro per l'interlocutore. Quando invece si lavora con qualcuno di distante dalla propria situazione, come è per esempio un bambino di scuola dell'infanzia per un ragazzo di quinta elementare, si parte già dal presupposto che sia a un livello radicalmente diverso dal proprio; si dovranno quindi trovare altre parole, altri modi, altri mezzi per farsi capire; ci si dovrà mettere nei panni dell'altro, capire il suo livello, le sue difficoltà e adeguarsi a esse (Arrigo, Maurizi & Minazzi, 2005).
Chiaramente, questi passaggi sono gli stessi che bisognerebbe fare per collaborare con un pari: partire dal suo livello e cercare delle modalità a lui congeniali. Tuttavia, l'esasperazione di questa differenza, resa esplicita dalla lontananza d'età, ha permesso che gli allievi si accorgessero di questi aspetti e provassero (non sempre con successo) a fare un passo verso l'altro. Per chi ha difficoltà da questo punto di vista, il lavoro con allievi più piccoli è un modo per cercare di migliorare le proprie capacità, nella speranza di poter poi applicare le competenze acquisite anche con i pari e rendere la collaborazione più proficua ed efficace (Cacciamani, 2008).
Per quanto riguarda i concetti matematici sui quali era incentrato il percorso, si è potuto notare come l'esigenza di dover spiegare, semplificare, andare alla base del concetto, abbia permesso a molti allievi di approfondire meglio ciò che avevano trattato, favorendo una maggiore comprensione.
Nel progetto che abbiamo proposto è stata molto interessante e centrale la valorizzazione dei ragazzi di quinta; essi hanno dovuto in primo luogo mettere le proprie conoscenze e competenze al servizio dei bambini di scuola dell'infanzia adattando il proprio linguaggio al livello cognitivo di chi avevano di fronte; d'altra parte, agli alunni delle elementari era richiesto di affiancare i bambini più piccoli senza che questo significasse sostituirsi a loro nella risoluzione della situazione – problema: ai ragazzi di quinta elementare è stato quindi chiesto di non prendere decisioni ma guidare, consigliare e descrivere le diverse scelte attuabili; questa dimensione è stata molto complessa per alcuni allievi che hanno faticato ad accettare il fatto che il risultato di un processo potesse essere diverso da ciò che volevano o avrebbero potuto ottenere in modo autonomo. Al tempo stesso, però, è stato dato molto valore alle conoscenze degli allievi di scuola dell'infanzia, che durante il percorso sono stati i veri e propri protagonisti: sperimentando e operando per tentativi, i più pic-

coli hanno saputo affrontare molti degli aspetti problematici presenti nel percorso. Quando queste esplorazioni e le relative scoperte venivano presentate ai compagni più grandi, esse venivano valorizzate dal fatto che gli alunni di quinta fossero stimolati a imparare dai più piccoli, implicandosi in attività volte alla comprensione di quanto veniva loro comunicato. Ad esempio, c'è stata un'interessante discussione su quanti assi di legno servissero per fare la base del carretto e molti allievi di quinta ne consideravano solo quattro (tenendo in considerazione le pareti e non il fondo); i bambini della scuola dell'infanzia, che avevano scoperto grazie alla sperimentazione concreta che ne servivano cinque, hanno potuto spiegare questo aspetto ai ragazzi più grandi.

Questi scambi hanno certamente permesso di valorizzare il lavoro di manipolazione ed esplorazione, facendo capire a tutti (docenti compresi) che, nell'affrontare una situazione complessa, il fatto di possedere conoscenze cognitivamente avanzate è tanto importante quanto la possibilità di sperimentare e operare concretamente. Non solo: proprio quest'ultimo fattore rappresenta un tassello fondamentale nell'acquisizione di conoscenze e abilità utili alla risoluzione della situazione problematica. D'altra parte, lo stesso Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015) sottolinea l'importanza, soprattutto nei primi cicli di scolarità, di sperimentare e costruire i propri concetti tramite esperienze significative e il confronto con i compagni. Infatti il processo cognitivo "Esplorare e provare" è stato indicato come un aspetto fondamentale (assieme agli altri processi) per la costruzione di un sapere matematico solido e in continua espansione.

Un altro aspetto centrale per il progetto è stato il lavoro sulle capacità di argomentare e comunicare, anch'esso indicato nel Piano di studio come importante processo cognitivo. In quest'ottica, ogni nuova scoperta era condivisa, spiegata, discussa in gruppo, e per ogni problematica erano necessarie nuove ipotesi risolutive da poter verificare. Questo ha in un certo senso obbligato gli allievi a cercare strade comunicativamente efficaci e a trovare termini e strategie per far capire ai compagni cosa avevano scoperto. Vista la grande multietnicità della sezione, si è lavorato molto anche sul vocabolario e sul linguaggio, ponendo l'attenzione sia sui termini più matematici, sia su vocaboli di uso comune.

La situazione – problema ha creato una cornice motivazionale molto forte, grazie alla quale si è mantenuto alto l'interesse e l'impegno degli allievi per tutta la durata del progetto; inoltre, la possibilità di essere i principali protagonisti del percorso, dovendo cercare soluzioni ai problemi concreti riscontrati, ha portato gli allievi a mettersi in gioco, costruire le proprie conoscenze e affrontare le difficoltà con creatività, positività e determinazione.

## 2 Il laboratorio come ambiente di lavoro privilegiato

La modalità di lavoro laboratoriale, già conosciuta dai bambini della sezione di scuola dell'infanzia, è molto ricca e permette un grande coinvolgimento degli allievi (Baldacci, 2004). Sono gli allievi, al loro ritmo e al loro livello, che guidano il progetto, che mettono l'accento su ciò di cui hanno bisogno, che evolvono e fanno evolvere, che scoprono e imparano. Questa metodologia si basa sull'idea che l'insegnante non sia la fonte del sapere, ma guidi gli allievi a fare da soli delle scoperte, a condividerle

tra loro, a generalizzarle e formalizzarle tutti insieme. Gli allievi, di qualsiasi età, sono fortemente motivati in questo tipo di attività e riescono ad acquisire delle conoscenze e competenze che altrimenti potrebbero rimanere superficiali o poco comprese (D'Amore & Marazzani, 2011).
Le attività di tipo laboratoriale che abbiamo impostato hanno previsto uno schema sempre simile: gli allievi sperimentano dapprima liberamente, poi vengono messe in comune scoperte, strategie e tentativi fatti, difficoltà e problemi; successivamente si cercano nuove piste o si ipotizzano possibili soluzioni ai problemi riscontrati; infine si torna a sperimentare, creando in questo modo un processo ciclico di costruzione del sapere.
Quando si propone questa modalità di lavoro è interessante vedere come gli allievi riescano a trovare un loro spazio e un loro ritmo. In particolare nella scuola dell'infanzia, dove le differenze d'età tra i bambini portano necessariamente a dover differenziare il lavoro, è interessante notare come in un contesto di tipo laboratoriale la differenziazione avvenga in modo spontaneo e rispettando i ritmi personali: alcuni allievi continuano a sperimentare senza tenere in grande considerazione ciò che è stato proposto dai compagni o dal gruppo, altri hanno bisogno di più tempo e sperimentazione per potersi appropriare delle scoperte fatte e altri ancora sono propositivi e aggiungono e integrano ogni volta qualcosa di nuovo.
Il delicato compito del docente è quello di guidare il percorso come un regista, senza sostituirsi agli allievi, mettendo l'accento sulle problematiche da affrontare, coinvolgendo tutti nel cercare soluzioni, rilanciando soluzioni interessanti già sperimentate, valorizzando l'apporto di allievi che faticano a esporsi nelle discussioni a grande gruppo, e in alcuni momenti aiutando a concentrarsi su ciò che si deve fare per evitare che gli allievi disperdano energie in aspetti non prioritari.

# 3 Il progetto

Il progetto si è inserito in un percorso di collaborazione già esistente tra una sezione di scuola dell'infanzia e una classe di quinta elementare. Dopo aver avuto molti momenti di conoscenza e scambio, le due docenti hanno deciso di proporre qualcosa di nuovo e più articolato rispetto alle attività puntuali e slegate tra loro fatte in precedenza.
Si è deciso quindi di lanciare una situazione – problema alla scuola dell'infanzia: la maestra di quinta aveva del materiale da consegnare agli allievi di scuola dell'infanzia ma si trattava di qualcosa di grande e pesante; come avrebbero potuto trasportarlo? Le proposte dei bambini sono state molte; la docente ha cercato di indirizzarli verso una soluzione che potesse essere utile per quel trasporto ma anche in futuro, ampliando quindi la situazione – problema alla seguente: occorre costruire qualcosa per trasportare diverse volte gli oggetti tra la scuola dell'infanzia e la scuola elementare. Le due scuole sono vicine, raggiungibili a piedi tramite stradine pedonali e quindi particolarmente indicate allo scopo.
Dopo aver escluso alcune proposte interessanti ma di difficile realizzazione (per esempio costruire una sorta di teleferica facendo andare un filo dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare), i bambini si sono concentrati sull'idea di costruire un carretto.

È stato necessario un primo momento per chiarire a tutti che cosa fosse un carretto; essendo una sezione a forte componente multietnica abbiamo fatto in modo di essere certi che ciascun bambino avessero capito di cosa si trattasse. Per questo motivo, inizialmente sono state portate, da bambini e docenti, immagini e descrizioni per illustrare cosa si volesse costruire. Essendo più vicino alla quotidianità dei bambini, il modello di carretto ipotizzato era legato al carrello della spesa (**Figura 1**), ma grazie alla varietà di esempi proposti (**Figura 2**) è stato possibile ampliare il bagaglio di rappresentazioni.

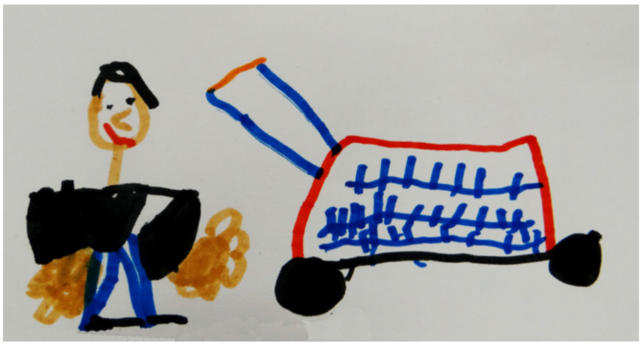


Figura 1
Disegno di come un bambino si rappresentava il carretto.


Figura 2
Esempi di carretto trovati con i bambini di scuola dell'infanzia.

Dopo questa prima necessaria condivisione si è deciso di costruire un carretto con un manico che permettesse di tirarlo. Si è quindi iniziato a discutere su come realizzarlo. Abbiamo proposto ai bambini di iniziare a ideare e costruire dei piccoli modelli realizzati con materiali semplici da gestire, per poi, una volta definito il progetto, farci aiutare dagli allievi di quinta a costruirne uno grande.

Come già affermato, per gli allievi di scuola dell'infanzia il progetto si è basato molto sulla possibilità di sperimentare. Per questo motivo, si è deciso di creare un laboratorio – officina di costruzione di carretti, dove i bambini hanno potuto provare, capire quali erano le difficoltà, cercare singolarmente e tramite messe in comune le soluzioni ai problemi che via via si presentavano e affinare sempre di più il progetto, ampliando così le loro abilità e conoscenze.

Avendo già sperimentato questa modalità didattica, sono stati i bambini stessi a proporre come organizzarsi: hanno allestito un angolo della sezione adibito ad hoc, nel quale hanno messo un tavolo e quattro sedie (perché si poteva entrare solo in quattro alla volta) e hanno deciso di quali materiali e strumenti dotarlo: inizialmente cartoni, fogli, matite, forbici e colle.

A questo punto è iniziata una prima fase di sperimentazione molto libera. I bambini entravano nel laboratorio e provavano a costruire un carretto. Alcuni lo facevano in modo individuale, altri si aiutavano a coppie o in gruppo. Pian piano sono nate esigenze di inserire nuovi materiali: dopo discussioni collettive sono stati così introdotti il nastro adesivo, oggetti rotondi per fare le ruote, bastoncini di vari tipi e lunghezze ecc.

A questa prima fase di sperimentazione è seguita una seconda fase, nella quale abbiamo iniziato a mettere in comune i primi risultati (**Figura 3**).

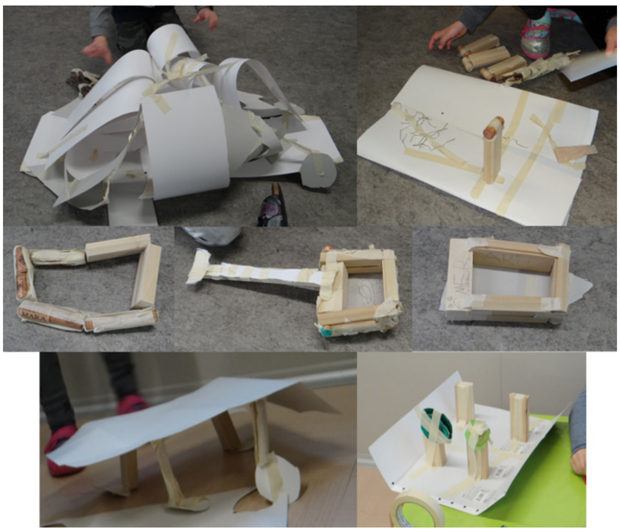


Figura 3
Alcuni dei primi tentativi di carretto.

Durante la discussione e il confronto tra i vari modelli creati sono iniziate a emergere importanti considerazioni:

- «Bisogna fare una base di sotto»;
- «Bisogna mettere delle pareti da parte per non far cader fuori le verdure, le cose»;
- «Per fare le pareti ci vogliono dei cartoni uguali, ma se sono diversi si riesce comunque»;
- «Sarà difficile fare le ruote».

È stato interessante vedere come gradualmente i bambini iniziavano a centrarsi maggiormente sul progetto e, grazie al confronto con i tentativi degli altri, a focalizzare l'attenzione sugli aspetti più rilevanti dando una struttura al risultato che avrebbero voluto ottenere (la base, le pareti, le ruote) e diventando più analitici.
A livello matematico sono iniziate interessanti discussioni, per esempio sulla forma che dovevano avere i cartoni e sulla loro misura, in particolare si è discusso su cosa volesse dire "cartoni uguali" e sul perché fossero necessari trattando, in modo estremamente intuitivo e senza nessun tipo di formalizzazione, il concetto di equiestensione.
Con i bambini abbiamo deciso di concentrarci inizialmente sulla parte superiore del carretto e tralasciare l'aspetto delle ruote che sembrava il più complesso da affrontare.
I bambini hanno discusso a lungo sulla necessità di trovare un modo per "far star su" le pareti, ed ecco che nel laboratorio hanno sperimentato diverse modalità e soluzioni: con la colla e il nastro adesivo (come illustrato nella **Figura 4**), tramite l'utilizzo di pieghe o paletti (**Figura 5**), o arrivando alla fine a capire che se si attaccano le pareti tra loro è più facile che rimangano in piedi (piuttosto che attaccarle solo alla base), come si nota nella **Figura 6**.

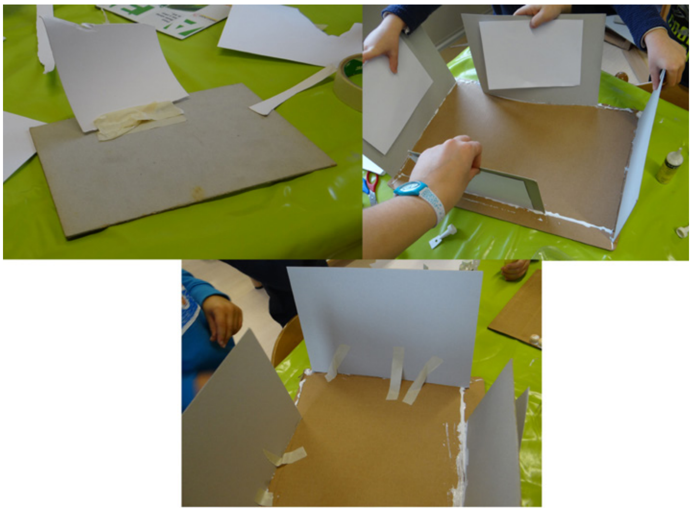


Figura 4
Tentativi fatti per attaccare le pareti con colla e nastro adesivo.

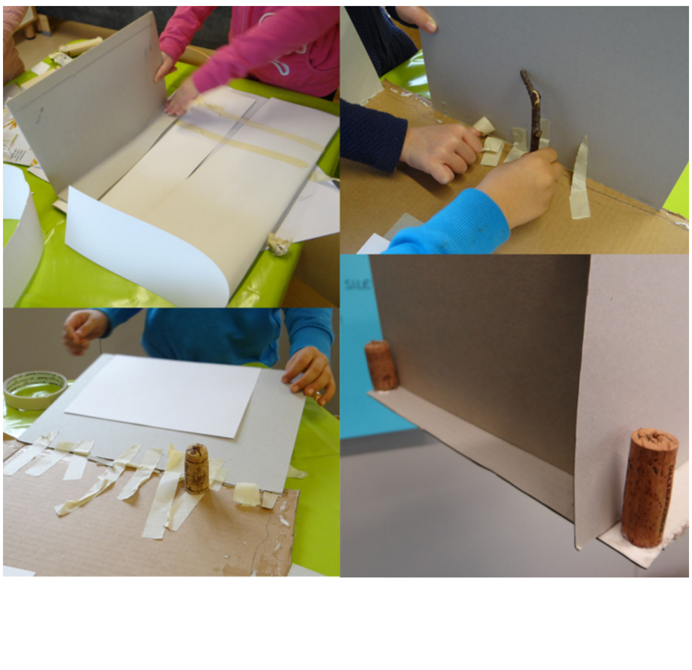


Figura 5
Tentativi fatti per far stare in piedi le pareti aiutandosi con delle pieghe o dei paletti.

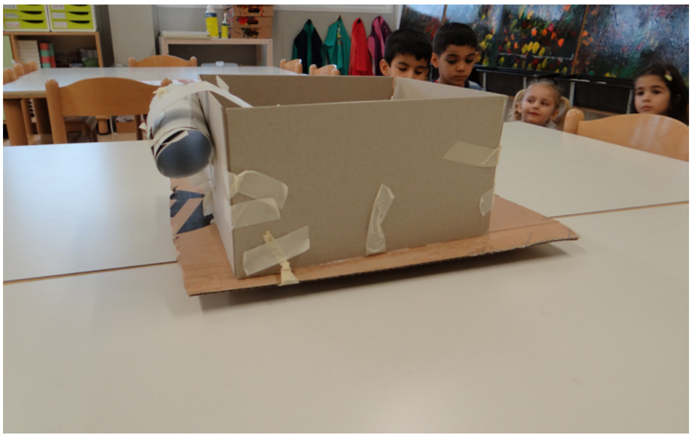


Figura 6
Carretto assemblato attaccando le pareti tra loro prima di fissarle alla base.

In parallelo abbiamo discusso dei materiali: per realizzare i modelli si stavano utilizzando cartone e carta; che materiale avremmo potuto usare per poi costruire il carretto vero? I bambini hanno subito scartato il cartone perché «se piove si ammollisce» e hanno proposto diverse alternative, spesso lontane da quelle che si aspettava la docente:

– «il cemento perché è forte e se si bagna non si ammollisce»;
– «il ferro perché non si scioglie»;
– «il metallo perché è un po' come il ferro»;
– «il vetro, ma però si può rompere».

Nonostante la validità di alcune di queste proposte spontanee, si è scelto di non far sperimentare ai bambini l'utilizzo di questi materiali per valutarne l'efficacia ma di interpellare gli allievi di quinta, in veste di nostri aiutanti, per chieder loro consiglio. Abbiamo quindi scritto una lettera esponendo le idee avute e chiedendo consiglio. Ci hanno risposto dicendo che delle nostre proposte al limite si poteva tenere in considerazione il ferro ma che loro avrebbero optato per il legno. Dopo averne discusso con i bambini di scuola dell'infanzia, inizialmente scettici perché sostenevano che il legno si sarebbe rotto, e aver osservato quanti mobili e oggetti della scuola dell'infanzia sono costruiti in legno, abbiamo optato per questa soluzione.

È stato dedicato molto tempo alla problematica delle ruote; infatti, man mano che il progetto continuava e le idee si affinavano, emergeva sempre di più l'importanza di una caratteristica delle ruote difficile da realizzare concretamente: la capacità di "girare". I bambini inizialmente attaccavano le ruote utilizzando la colla o il nastro adesivo ma non erano soddisfatti proprio perché in questo modo erano fisse e non giravano.

Abbiamo osservato tutte le ruote che abbiamo trovato in sezione, molti bambini hanno portato oggetti con ruote anche da casa, e abbiamo iniziato a suddividerle in categorie e a capire come fanno a girare. Abbiamo così introdotto nuovi materiali da sperimentare nel laboratorio: tondelli, legnetti, chiodi e viti (e di conseguenza martelli e cacciaviti).

I bambini hanno quindi continuato a sperimentare da questo punto di vista e hanno esplorato le tecniche più efficaci per attaccare le ruote in modo che potessero girare. Alla fine, sempre grazie all'alternanza di sperimentazioni e messe in comune, sono state individuate due modalità, entrambe funzionanti (come si può vedere nella **Figura 7**):

– «attaccare 2 ruote con il chiodo nel legno da un lato e 2 dall'altro»;

– «attaccare 2 ruote con un bastoncino lungo, una di qua e una di là, e mettere un bastoncino davanti e uno dietro (ma si deve fare attenzione a come si attacca il bastoncino alla base)».

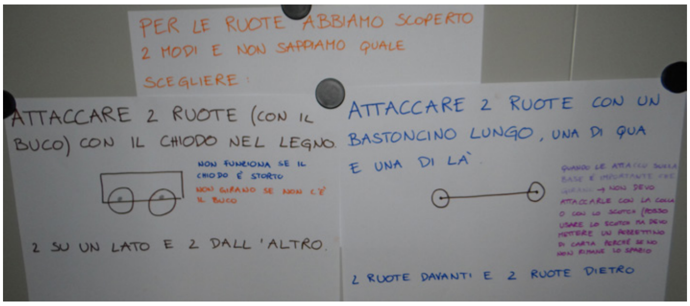



Figura 7
Le due modalità trovate per attaccare le ruote.

Nel frattempo ci siamo dedicati anche a cercare di formalizzare cosa ci sarebbe servito per costruire il carretto, facendo una sorta di lista della spesa con quantità e descrizioni di tutto il necessario (alcuni esempi nella **Figura 8**).

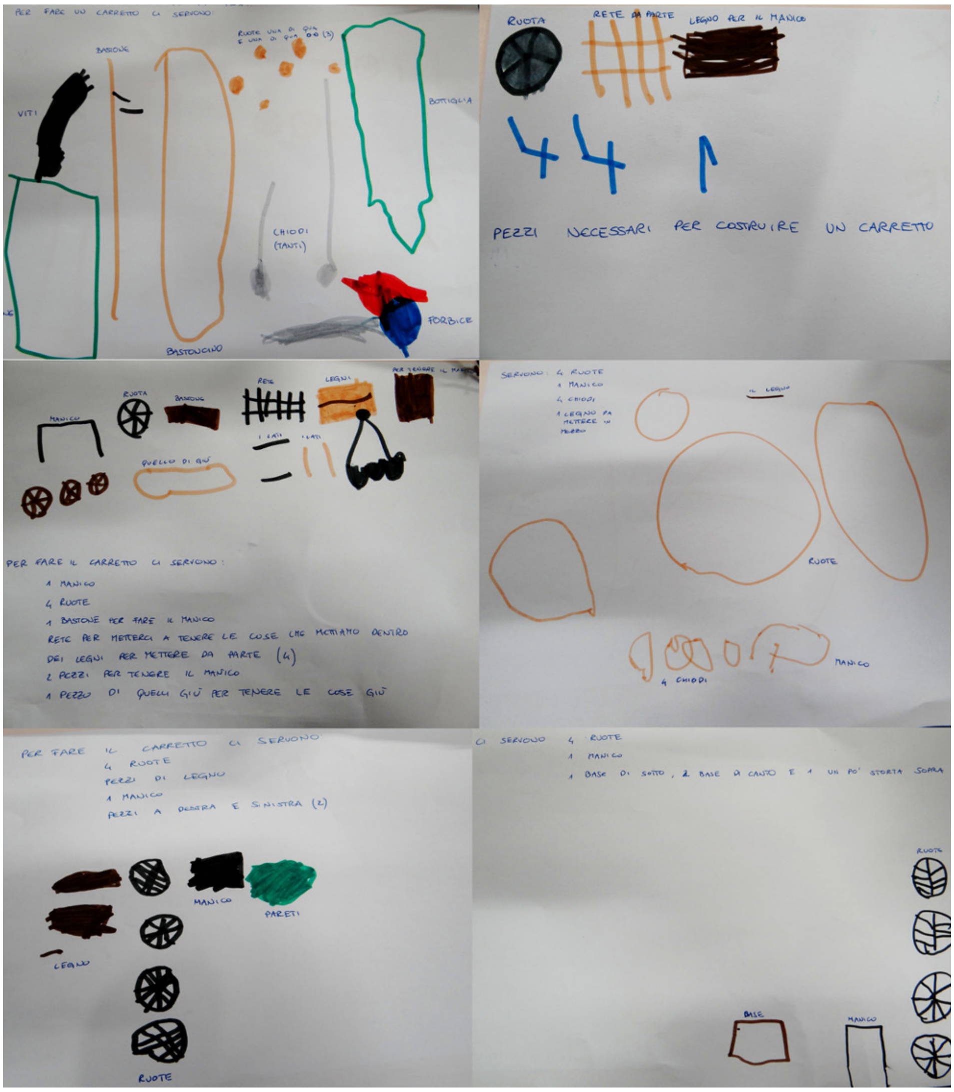



Figura 8
Alcuni esempi di liste del materiale necessario alla costruzione del carretto.

Questo progetto ha coinvolto molto tutti i bambini della sezione e ha permesso una grande differenziazione. Se alcuni bambini più piccoli si sono mostrati attratti solo dalla parte sperimentativa altri erano interessati a più aspetti. Le rappresentazioni del materiale necessario per la costruzione del carretto (**Figura 8**) sono state volutamente scelte tra prodotti di bambini di livelli diversi, ognuno con le proprie capacità e conoscenze (sia nozionistiche, sia di rappresentazione grafica).

Dal punto di vista matematico, formalizzare il materiale necessario in una lista ha permesso di approfondire molti aspetti, per esempio il nome delle forme geometriche da utilizzare. Abbiamo discusso su come dovessero essere i vari pezzi e quindi anche sulla loro forma, se sul cerchio delle ruote non ci sono state difficoltà abbiamo invece avuto dei problemi a sapere come si chiamasse la forma geometrica necessaria per gli assi di legno, i bambini non conoscevano il termine "rettangolo" (**Figura 9**).

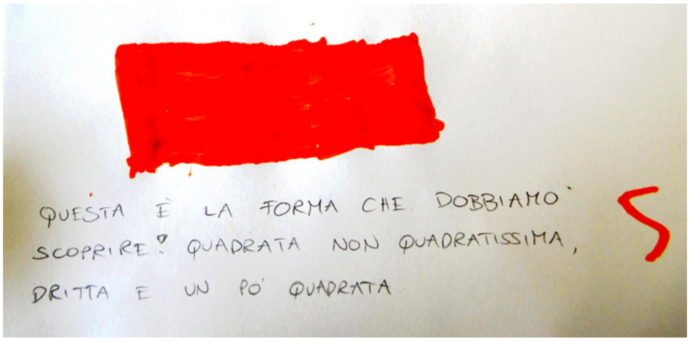


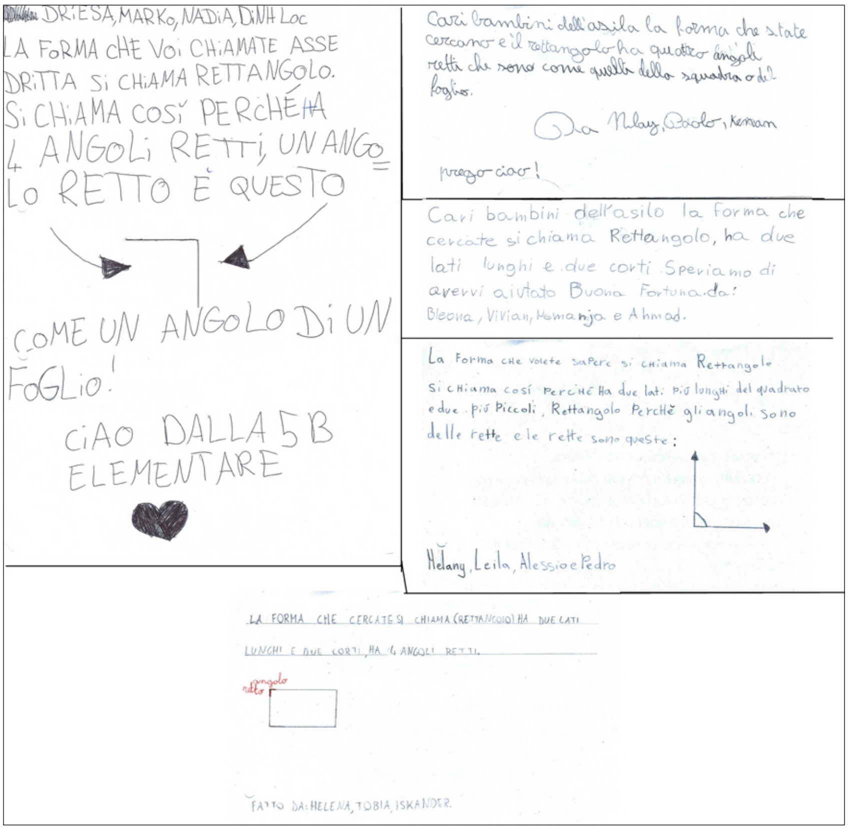

Figura 9
I bambini di scuola dell'infanzia si interrogano sul nome del rettangolo.

Si è deciso quindi di sfruttare le conoscenze degli allievi di quinta e di interpellarli a questo proposito. Con i bambini di scuola dell'infanzia è quindi stata scritta una lettera:

> Cari amici della scuola elementare,
> volevamo chiedervi come si chiama la forma non rotonda, dritta ma non quadrata, più lunga del quadrato perché noi non lo sappiamo.
> Ci serve per sapere la forma della legna per il carretto.
> Grazie e speriamo che voi avete delle idee di come si chiama, noi per intanto la chiamiamo asse dritta.
> Grazie e a presto
> I bambini della scuola dell'infanzia Bozzoreda della maestra Laura

I ragazzi di quinta hanno naturalmente avuto molta facilità nel rispondere, si è però deciso di rendere più interessante il loro lavoro chiedendo che spiegassero anche perché si chiama rettangolo e che lo facessero tenendo conto delle conoscenze limitate degli allievi di scuola dell'infanzia che non sanno, per esempio, cos'è un angolo retto o cosa sono due rette parallele.
Ne è quindi nato un interessante lavoro a gruppi nel quale hanno cercato di chiarire e esplicitare aspetti geometrici a loro già conosciuti. Nella **Figura 10** si possono vedere alcune delle risposte fornite.
Nel disegnare e rappresentare le figure geometriche si è potuto lavorare molto sulla simbologia, sull'uso intuitivo di numeri o lettere, sulla necessità di affinare il disegno

e di essere precisi. Nella rappresentazione dei rettangoli necessari per la costruzione del carretto, alcuni bambini hanno spontaneamente iniziato a disegnare, in modo intuitivo, lo sviluppo del solido che rappresentava il carretto come si può vedere nella Figura 11.


DRiESA, MARKo, NADiA, DiNH Loc
LA FoRMA CHE Voi CHiAMATE ASSE DRiTTA Si CHiAMA RETTANGoLo. Si CHiAMA COSÌ PERCHÉ HA 4 ANGoLi RETTI, UN ANGOLO RETTO È QUESTO
COME UN ANGOLO Di UN FoGLio!
CiAO DALLA 5B ELEMENTARE

Cari bambini dell'asilo la forma che state cercando è il rettangolo ha quattro angoli retti che sono come quelli della squadra o del foglio.
Da Nlay, Paolo, Kenan
prego ciao!

Cari bambini dell'asilo la forma che cercate si chiama Rettangolo, ha due lati lunghi e due corti. Speriamo di avervi aiutato Buona Fortuna. da:
Bleona, Vivian, Nemanja e Ahmad.

La Forma che volete sapere si chiama Rettangolo si chiama così perchè Ha due lati più lunghi del quadrato e due più Piccoli, Rettangolo Perchè gli angoli sono delle rette e le rette sono queste:
Helany, Leila, Alessio e Pedro

LA FORMA CHE CERCATE SI CHIAMA (RETTANGOLO) HA DUE LATI LUNGHI E DUE CORTI, HA 4 ANGOLI RETTI.
angolo retto
FATTO DA: HELENA, TOBIA, ISKANDER.

Figura 10
Gli allievi di quinta spiegano ai bambini di scuola dell'infanzia cos'è un rettangolo.

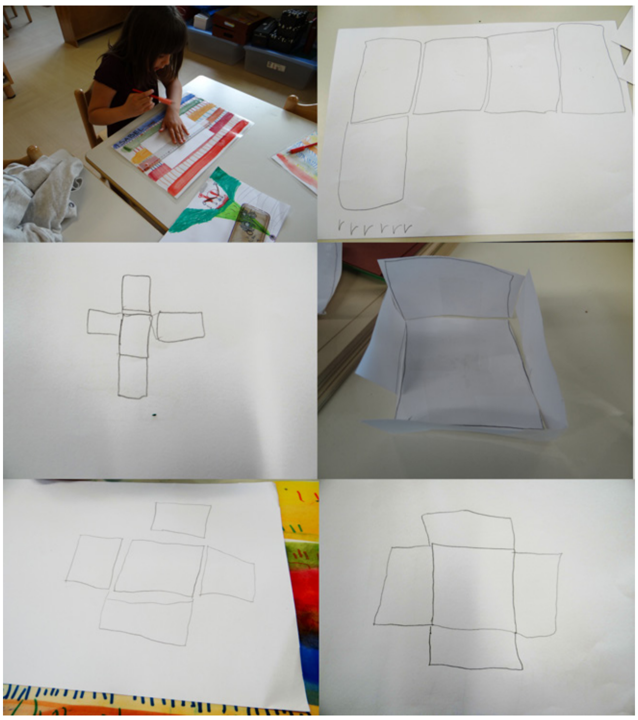


Figura 11
L'evoluzione intuitiva delle rappresentazioni dei bambini di scuola dell'infanzia per avere dei rettangoli compatibili tra loro.

Tornando alla progettazione del carretto, l'ultimo aspetto che abbiamo trattato con i bambini dell'infanzia per avere tutte le informazioni necessarie da dare agli allievi di quinta era quello della dimensione: quanto avrebbe dovuto essere grande il nostro carretto?
Si è trattato di una discussione complessa perché i bambini non avevano nozioni di grandezze e misure, quindi abbiamo cercato di renderla il più concreta possibile scegliendo come supporto l'uso di fogli che rappresentavano l'unità di misura della superficie della base del carretto. Abbiamo fatto vedere agli allievi fogli di varie dimensioni (dall'A5 fino all'A1) e loro hanno scelto la dimensione più congeniale considerando che volevano poter trasportare oggetti grandi. Hanno quindi deciso di avere un carretto con una base grande circa come un A1 (80 cm per 60 cm circa). Per farlo hanno dovuto tener conto del fatto che doveva essere grande per poter contenere tante cose ma anche non troppo grande, perché doveva passare nelle stradine o dalla porta. Per essere certi che non fosse troppo grande abbiamo fatto una prova con un foglio percorrendo tutto il tragitto fino alla scuola elementare. Dal punto di vista matematico, i bambini hanno quindi potuto sperimentare un primo approccio intuitivo al concetto di area e al confronto tra superfici.
Trovate alcune immagini e alcune rappresentazioni dei bambini nella **Figura 12**.

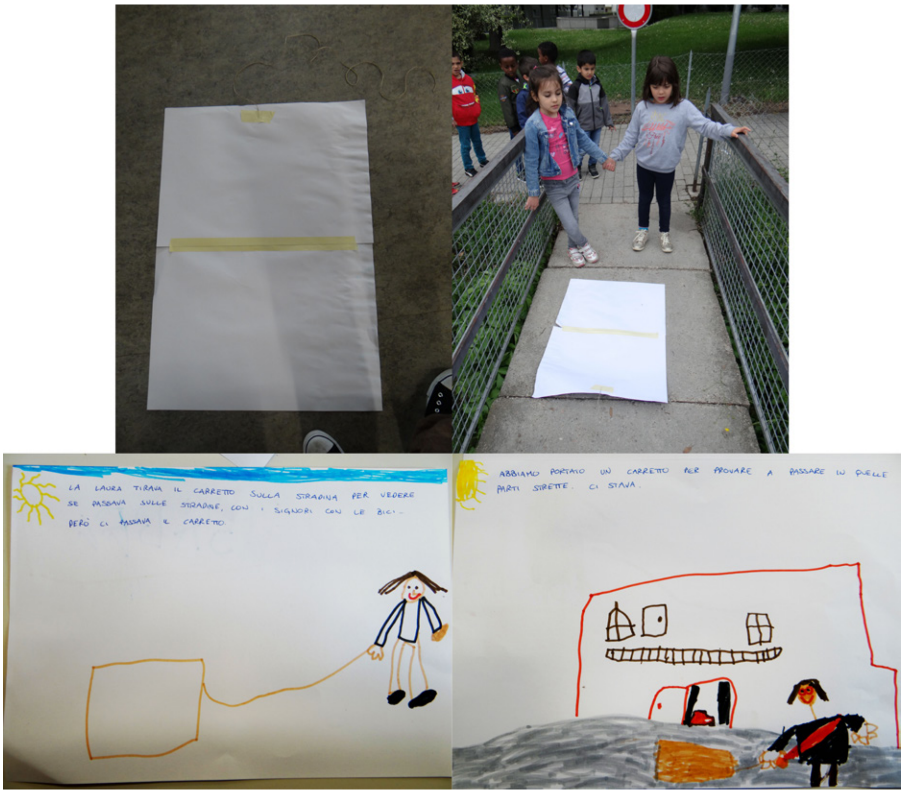
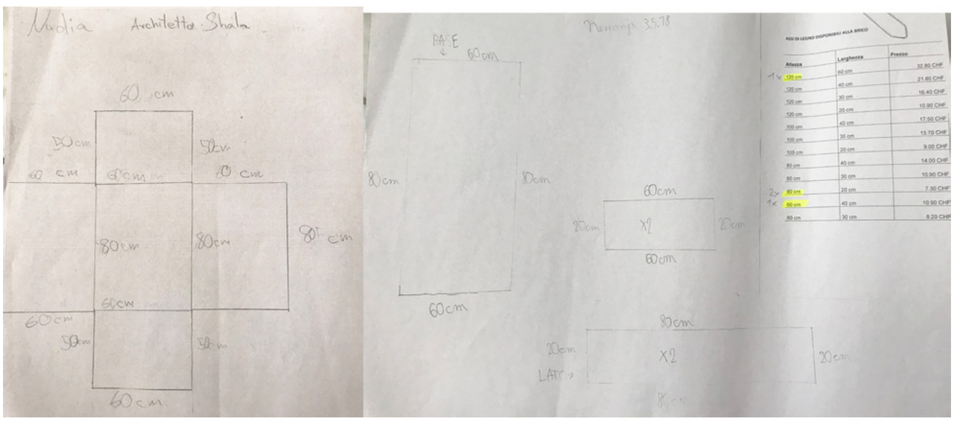



Figura 12
I bambini di scuola dell'infanzia verificano se la misura scelta per il carretto è adatta per passare nelle stradine.

Una volta raccolte tutte le informazioni necessarie, ci siamo recati alla scuola elementare e abbiamo spiegato agli allievi di quinta ciò di cui necessitavamo, chiedendo loro di realizzare un progetto con le misure e il materiale necessario (**Figura 13**). Abbiamo portato i cartelloni che avevamo via via affinato con tutte le caratteristiche necessarie per il carretto e li abbiamo lasciati a scuola per dare agli allievi di quinta il tempo per elaborare dei progetti.


Figura 13
I bambini di scuola dell'infanzia spiegano ai compagni di scuola elementare come deve essere il carretto.

I ragazzi di quinta hanno ricevuto una lista degli assi di legno disponibili in negozio e i prezzi e hanno elaborato dei progetti, dapprima individuali e poi discussi in gruppo. Alcuni ragazzi hanno deciso di sfruttare il disegno in scala, altri hanno fatto degli sviluppi, altri ancora delle istruzioni simili a quelle che si utilizzano per montare i mobili, con una sequenza di ciò che andava fatto. Alcuni esempi sono visibili nella Figura 14.



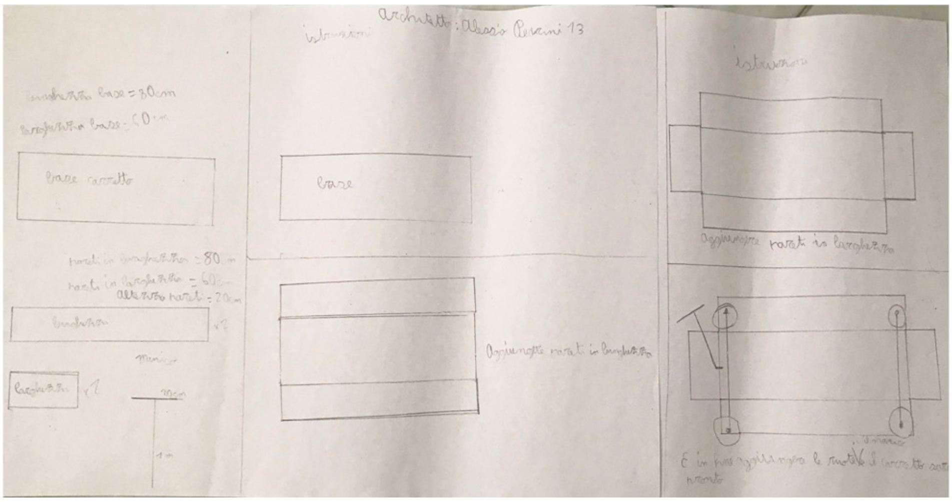


Figura 14
Alcuni progetti elaborati dagli allievi di quinta elementare.

Sono stati molti gli aspetti interessanti per gli allievi di quinta, che si sono trovati confrontati con un compito non semplice; è stato interessante vedere come ognuno abbia saputo spontaneamente sostenere il proprio lavoro con l'aiuto di cui aveva bisogno: alcuni hanno sentito la necessità di costruire un modellino per capire di quanti e quali pezzi avevano bisogno, altri si sono affidati al disegno e altri ancora sono riusciti a farlo già in modo astratto.
A livello matematico hanno potuto sfruttare le conoscenze acquisite sui solidi, sulle aree e sulle misure in generale mettendole in pratica per elaborare un progetto coerente, in modo che le misure degli assi combaciassero tra loro.
I ragazzi di quinta hanno così elaborato dei progetti e ne hanno selezionati alcuni da consegnare ai bambini di scuola dell'infanzia. Si è trattato quindi, per i piccoli, di scegliere quale fosse il più adatto. Per farlo è stata necessaria una prima fase di lettura e comprensione dei progetti e di concretizzazione: una volta compreso che 80 cm corrispondeva a una misura si trattava di capire quanto fossero lunghi 80 cm e se corrispondevano alle nostre aspettative. È stato quindi svolto un lavoro di analisi che ha portato a conoscere gli strumenti di misura, capire come si potessero utilizzare e rappresentare, grazie a tasselli o scatole, le misure proposte per scegliere quelle più adatte, come si può osservare nella **Figura 15**.


Figura 15
I bambini di scuola dell'infanzia analizzano e cercano di capire i progetti ricevuti.

Una volta resi più concreti i progetti, i bambini hanno scelto quello che piaceva loro di più e abbiamo provveduto ad acquistare tutto il materiale necessario.
Purtroppo, per motivi organizzativi (assenza della classe quinta per una settimana di scuola fuori sede) la fase finale di realizzazione concreta del carretto non si è potuta svolgere in collaborazione tra le due classi; abbiamo quindi sfruttato l'aiuto di adulti che hanno dato una mano nella fase di assemblaggio e nelle parti più complesse (utilizzo di trapano, avvitatore ecc.). I bambini di scuola dell'infanzia hanno assistito alla costruzione con grande eccitazione e hanno aiutato laddove potevano (contavano le viti necessarie, mettevano la colla, spiegavano dove si dovevano attaccare i pezzi ecc.). Si possono vedere alcuni di questi passaggi nella **Figura 16**.

Figura 16
La costruzione del carretto.

Finalmente, dopo cinque mesi dall'inizio del progetto, abbiamo potuto vedere il frutto del nostro lavoro (**Figura 17**).

Figura 17
Il carretto.

Naturalmente l'abbiamo subito sfruttato per vari trasporti, tra i quali il più importante è stato quello dei gelati per fare merenda assieme ai compagni di quinta elementare. Ora il carretto rimane in sezione e viene utilizzato ogni volta che si presenta l'occasione per creare un collegamento, reale e affettivo, con la scuola elementare.

## 4 Conclusioni

Questo progetto è stato molto ricco e apprezzato dagli allievi e dai docenti. Sono scaturiti molti aspetti interessanti e spunti di lavoro; alcuni sono stati sfruttati, altri potranno essere ripresi in seguito.
Come docenti, abbiamo potuto verificare come la presenza di una situazione – problema reale e concreta, vicina al vissuto degli allievi sia una spinta motivazionale molto forte.
Anche la situazione – problema proposta agli allievi di quinta, che non era quella di costruire un carretto, ma di aiutare i bambini di scuola dell'infanzia nel loro percorso, si è rivelata efficace.
Sicuramente questo progetto si sarebbe prestato per poter essere svolto in maniera completa (quindi con la fase di sperimentazione) anche per una classe di scuola elementare. La scelta di far eseguire la sperimentazione solo ai bambini della scuola dell'infanzia è stata presa in base alle condizioni specifiche relative al contesto nel quale operavamo; ciò non toglie che un laboratorio di questo tipo alla scuola elementare sarebbe stato estremamente ricco, offrendo grandi possibilità di crescita per gli allievi. Molti aspetti avrebbero potuto essere approfonditi e maggiormente compresi da tutti gli allievi di quinta se avessero sperimentato concretamente; ad esempio, la necessità di considerare lo spessore del legno nei progetti, oppure il meccanismo di leve relativo al manico del carretto.
La scelta di attribuire agli allievi più grandi il ruolo di "aiutanti" e non di "sperimentatori" ha però permesso di lavorare in modo forte sulla collaborazione e ha creato un fortissimo legame affettivo tra le due classi.
Ora il carretto rimane a disposizione per nuovi progetti di scambio e l'intenzione è

quella di sfruttarlo per continuare a mantenere forte sia il legame tra i due ordini scolastici sia il messaggio che la collaborazione e la condivisione, non importa con chi, è sempre fonte di arricchimento per tutte le parti (Figura 18).

Figura 18
Il carretto come strumento di unione tra le classi.

Una descrizione più dettagliata del percorso è disponibile sul sito ScuolaLab tra gli esempi di percorsi didattici in linea con il Piano di studio (https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/piano_di_studio/). Abbiamo fatto una descrizione sia del percorso degli allievi di scuola dell'infanzia (Mate1i), sia di quello svolto nella classe quinta elementare (Mate2h).
Inoltre un breve filmato riassuntivo di tutta l'esperienza è disponibile sullo stesso portale (https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/piano_di_studio/Matematica/Pagine/Costruiamo-un-carretto-Mate1i.aspx)

## Bibliografia

Arrigo, G., Maurizi, L., & Minazzi, T. (2005). "Chi spiega impara a mettere i pensieri bene": la comunicazione intenzionale in matematica. *La matematica e la sua didattica, 1*, 33-56.

Baldacci, M. (2004). Il Laboratorio come strategia didattica. Suggestioni deweyane. In N. Filograsso, R. Travaglini (A cura di), *Dewey e l'educazione della mente* (pp. 86-97). Milano: Franco Angeli.

Cacciamani, S. (2008). *Imparare cooperando: dal Cooperative Learning alle comunità di ricerca*. Roma: Carocci.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (2011). Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica. *Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Bologna: Pitagora.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Bellinzona: Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport, Divisione della scuola.

**Autore/Laura Battaini**
Scuola dell'infanzia – Pregassona, Svizzera
laura.battaini@edu.ti.ch

# Un'esperienza di flipped classroom nella scuola media. Il teorema di Pitagora

## A flipped classroom experience in lower secondary school. The Pythagorean theorem

**Alice Di Casola**
Scuola media di Massagno, Svizzera

ESPERIENZA DIDATTICA

**Sunto** / In questo articolo è presentato un percorso didattico svolto in modalità flipped classroom in una scuola media. Tale modalità didattica, che può essere riassunta nell'espressione "teoria a casa e compiti a scuola", può essere considerata innovativa in quanto introduce nuove tecnologie in aula, promuovendone un utilizzo consapevole. Il percorso, incentrato sul teorema di Pitagora, ha suscitato interesse negli studenti. Sono presentate tutte le lezioni svolte sull'argomento: l'attività introduttiva, la formulazione del teorema, le sue diverse dimostrazioni, l'implicazione inversa del teorema, esercizi vari e la verifica. Rispetto ad un'introduzione più tradizionale, si è riscontrato da parte degli allievi un gradimento maggiore e un apprendimento più radicato.

Parole chiave: flipped classroom; nuove tecnologie; scuola media; teorema di Pitagora.

**Abstract** / This article presents a didactic experience carried out in flipped classroom mode in a lower secondary school. This teaching method, which can be summarized as "theory at home and homework at school", can be considered as innovative since it allows introducing new technologies in the classroom, promoting a conscious use of them. The experience, focused on the Pythagorean theorem, thrilled the students. The article reports on all the lessons on this theme: the introductory activity, the formulation of the theorem, its different proofs, the inverse implication of the theorem, various exercises, and the test. Compared to a more traditional introduction, the students were more motivated and their learning appeared to be more rooted.

Keywords: flipped classroom; new technologies; lower secondary school; Pythagorean theorem.

## 1 Introduzione

La flipped classroom, che tradotta letteralmente significa "classe capovolta", è un approccio sempre più sperimentato e utilizzato nei vari livelli scolastici. Si tratta di una metodologia didattica innovativa che presuppone un capovolgimento della classe o meglio dell'apprendimento con lo scopo di incrementarlo. Attraverso l'implementazione di questa modalità si vuole invertire la didattica classica, spostando l'acquisizione dei concetti a casa, rendendo tale fase più individuale, tramite diversi strumenti come testi, libri o video. In classe è invece prevista la rielaborazione dei concetti appresi tramite esercizi o situazioni problema in cui vi è la possibilità di mettere in pratica quanto imparato a casa. Uno dei vantaggi nell'implementare questa modalità didattica sta nella possibilità di riorganizzare i tempi e gli spazi d'apprendimento e creare degli ambienti di apprendimento che sostituiscano la classe "tradizionale" (Bergman & Sams, 2016; Cecchinato & Papa, 2016; Maglioni & Biscaro, 2014).
In questo articolo si vuole presentare un percorso svolto in tale modalità didattica nella scuola media, esplicitando le varie attività realizzate e portando qualche spunto di riflessione per ulteriori miglioramenti.

Per poter "capovolgere" la classe, risulta vincente l'utilizzo delle nuove tecnologie, per esempio per proporre la teoria sotto forma di video. La tecnologia è sempre più presente nella vita di tutti i giorni, anche dei giovanissimi, e il modo di imparare sta cambiando: basti pensare a come si può ottenere qualsiasi genere di informazione tramite l'uso di uno smartphone. Per questo motivo ci si chiede sempre di più cosa sia necessario insegnare a scuola e come. Accanto a questi cambiamenti e alla promozione da parte della scuola di una pedagogia attiva, vi sono pure le richieste sempre più esigenti da parte della società, che ricerca persone sempre più competenti le quali non solo possiedono conoscenze ma sanno anche organizzarle e utilizzarle in diverse situazioni anche complesse.
È proprio su questo terreno fertile che ha attecchito la flipped classroom (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017). Essa, con la sua impostazione, si fonda su una pedagogia attiva grazie alla possibilità di lavorare in classe dopo uno studio a casa, concentrandosi anche e soprattutto sugli aspetti di collaborazione tra pari e condivisione delle proprie conoscenze.
Per valutare gli effetti di un tale approccio metodologico nell'insegnamento e apprendimento della matematica con gli studenti di scuola media, si è deciso di sperimentare un percorso in modalità flipped classroom, per poi confrontarlo con la didattica "tradizionale".[1] L'argomento matematico proposto agli allievi di terza media in modalità flipped classroom è stato il teorema di Pitagora, che si presta molto bene alla creazione di video didattici, in quanto nella sua presentazione e dimostrazioni entra in gioco in modo forte il registro figurale.
Con l'approccio didattico della flipped classroom, viene enfatizzato il ruolo delle tecnologie in aula, sostenuto dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015), in cui si ritrova l'ambito di *tecnologie e media* tra i contesti di formazione generale. Inoltre, tale approccio permette lo sviluppo di competenze trasversali, quali ad esempio lo sviluppo personale (autoregolazione, consapevolezza di sé), la collaborazione (organizzazione del lavoro cooperativo, co-elaborazione), ma anche e soprattutto strategie d'apprendimento. Quest'ultima competenza è particolarmente messa in risalto in questo lavoro di ricerca in quanto gli allievi cercheranno di essere autonomi per quanto riguarda lo studio della teoria a casa e l'applicazione dei contenuti a lezione.

## 2 Quadro teorico: la flipped classroom

Come già anticipato, la flipped classroom è un approccio didattico che presuppone il capovolgimento della didattica "tradizionale", proponendo di fare a casa ciò che solitamente si fa a scuola, e a scuola ciò che solitamente si fa a casa. La pedagogia alla base della flipped classroom è la pedagogia attiva, che si trova in contrapposizione con la pedagogia trasmissiva, in cui il libro e il docente stanno al centro e l'apprendimento si realizza secondo uno schema classico che vede in sequenza: lezione frontale, studio individuale e verifica finale. La principale critica alla pedagogia trasmissiva è quella della passività degli alunni, che seguono la lezione condotta dal

1. Per una visione approfondita dei risultati della comparazione si rimanda al sito http://tesi.supsi.ch/2153/

docente senza possibilità di intervenire: «agli studenti è richiesto un ascolto attento e silente, e questo ruolo passivo non permette un apprendimento significativo in grado di provocare un cambiamento concettuale o lo svilupparsi di competenze» (Cecchinato & Papa, 2016). Anche i ritmi in una lezione frontale sono determinati in modo univoco dal docente e spesso non tengono conto dei diversi tempi e stili di apprendimento degli allievi.

La flipped classroom nasce negli Stati Uniti tra la fine del secolo scorso e l'inizio del nuovo millennio, ma solo recentemente si riscontrano studi e pubblicazioni a riguardo. Oltre al rapporto FliSCo (Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze) sperimentato in Canton Ticino (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017; Carotenuto & Sbaragli, 2018), citiamo, tra le più conosciute ricerche, quelle di Bergmann e Sams (2012; 2016), due professori di chimica della Woodland Park High School in Colorado, la cui ricerca è stata un importante punto di riferimento per questo lavoro. Altre pubblicazioni sul tema sono state redatte da ricercatori dell'Università della Tasmania (Muir, 2017) e riguardano in particolare l'ambito matematico delle funzioni. Un'altra pubblicazione a cui questo lavoro fa riferimento è una ricerca italiana di Cecchinato e Papa (2016).

Per seguire tale approccio, va anche considerato che le nuove generazioni di studenti, chiamati "nativi digitali" in quanto cresciuti in ambienti in cui gli schermi interattivi sono molto diffusi, utilizzano internet come fonte primaria di ricerca, di acquisizione e di condivisione dei contenuti del sapere nonché per collaborare e cooperare tra pari attraverso strumenti quali Facebook, YouTube o altri social network (Ferri & Moriggi, 2014). I nativi digitali sono dunque più abituati ad utilizzare tali mezzi di comunicazione e apprezzano maggiormente ricevere le informazioni in maniera veloce, preferendo solitamente immagini rispetto ad un testo e un video rispetto a una spiegazione scritta. Come già accennato in precedenza, anche le esigenze della società, e quindi della scuola, sono cambiate, perciò non ci si aspetta solamente che gli allievi possiedano conoscenze, ma che sappiano informarsi, interpretare criticamente tali informazioni e che sviluppino competenze da mobilitare in diversi contesti.

Ciò va collegato al ruolo del docente come "accompagnatore" piuttosto che come "saggio"; concetto che è stato introdotto da King nel 1993 in una sua pubblicazione in cui insiste sull'importanza di utilizzare il tempo in classe per approfondire gli argomenti piuttosto che per trasmettere le informazioni (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017). Per questo motivo King è considerato uno dei pionieri della flipped classroom.

Un altro docente considerato tra i pionieri della flipped classroom è senz'altro Mazur (2007), professore di fisica ad Harvard, che propone un metodo per coinvolgere maggiormente gli studenti: prepararsi a casa sulla lezione successiva e poi discutere e approfondire in aula quanto imparato a casa.

Va anche ricordato Salman Amin Khan, che nel 2006 fonda la Khanacademy (https://www.khanacademy.org), una piattaforma online contenente video lezioni di varie materie a cui si può accedere gratuitamente.

Ancor più recentemente, nel 2007 troviamo i docenti che spesso sono considerati tra gli ideatori della flipped classroom: Bergmann e Sams. I due insegnanti avevano iniziato a filmare le proprie lezioni per renderle disponibili agli allievi che spesso, e per vari motivi, erano assenti. In seguito sono passati a fornire in anticipo i video delle lezioni in modo che gli studenti potessero guardarli a casa e poi discuterne e approfondire i concetti in aula.

Da parte del gruppo di lavoro Flipped Learning Network (2014), gruppo di educatori che si è occupato della definizione del concetto di flipped classroom, sono stati redatti i cosiddetti "quattro pilastri" dell'apprendimento capovolto, i quali hanno l'acronimo FLIP: Flexible environment (ambiente flessibile), Learning culture (cultura dell'apprendimento), Intentional content (intenzionalità formativa), Professional educator (competenza professionale). È inoltre stata fornita una lista di indicatori per ognuno dei quattro pilastri, che ogni docente che si appresta a introdurre questa modalità didattica dovrebbe considerare e consultare per monitorare la propria attività.

| | |
|---|---|
| Ambiente Flessibile | – stabilire spazi e scansioni temporali che permettano agli studenti di interagire e riflettere sul loro apprendimento;<br>– osservare e monitorare costantemente gli studenti in modo da adattare e regolare la proposta formativa;<br>– fornire differenti opportunità agli studenti per apprendere i contenuti e dimostrare la loro padronanza. |
| Cultura dell'apprendimento | – assicurare agli studenti occasioni per impegnarsi in attività significative che non prevedano la centralità dell'insegnante;<br>– supportare queste attività e renderle accessibili a tutti gli studenti attraverso la differenziazione e il feedback. |
| Intenzionalità formative | – focalizzarsi sui concetti chiave delle discipline di insegnamento facendo in modo che gli studenti possano accedervi in autonomia;<br>– creare e/o selezionare contenuti significativi (tipicamente in forma audiovisiva) per i propri studenti;<br>– differenziare per rendere accessibili e rilevanti i contenuti proposti per tutti gli studenti. |
| Competenza professionale | – fornire feedback individuali, di piccolo gruppo, di classe in tempo reale in base alle necessità;<br>– condurre valutazioni formative in itinere durante le lezioni attraverso l'osservazione e la documentazione di dati utili al prosieguo del lavoro formativo;<br>– collaborare e riflettere con gli altri docenti assumendosi la responsabilità del proprio sviluppo professionale. |

Tabella 1
Quattro pilastri della flipped classroom (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017).

## 3 Metodologia

La sperimentazione è stata proposta a una classe terza di corso attitudinale della scuola media di Massagno, formata da 15 allievi.
Il lavoro svolto può essere suddiviso nelle seguenti fasi: la progettazione e realizzazione del percorso didattico flipped classroom, e la creazione e somministrazione dei questionari volti a verificare l'impatto della sperimentazione sugli allievi. Per realizzare il percorso sono state previste anche le risorse necessarie per la sua implementazione e create le video lezioni da proporre agli studenti a casa.
L'argomento matematico scelto, il teorema di Pitagora, è centrale per la classe terza, ed è stato suddiviso in sette attività, diventate poi otto in seguito alla regolazione del percorso, che sono state proposte durante il periodo che va da fine gennaio a inizio marzo, con una frequenza di almeno un'attività a settimana. Durante questo periodo si sono limitati altri compiti che solitamente venivano assegnati settimanalmente a casa, per poter permettere agli allievi di concentrarsi sul percorso flipped

classroom. Va tenuto conto che in Canton Ticino la scuola media è a tempo pieno.
In questo articolo si riporta la descrizione del percorso didattico, per l'analisi dei risultati ottenuti dai questionari relativi alla percezione da parte degli studenti del percorso seguito in modalità flipped classroom si veda il lavoro di diploma al link http://tesi.supsi.ch/2153/.

# 4 Descrizione dell'itinerario didattico

## 4.1 Risorse

Durante il percorso si è scelto di utilizzare Google Classroom (https://classroom.google.com/) per lo scambio delle informazioni, dei video e delle consegne. Questa piattaforma si è rivelata molto adatta, in quanto facile e intuitiva da utilizzare, e già ben strutturata, ma allo stesso tempo con diverse impostazioni personalizzabili. Come possibile alternativa si era inizialmente pensato a Moodle, che però necessita di molto più tempo per personalizzare lo spazio online, nonché maggiori capacità tecniche. In Google Classroom, al momento dell'assegnazione di un compito è possibile allegare, oltre alla spiegazione, documenti, link e video. Anche la data, ed eventualmente l'ora della consegna del compito, può essere facilmente impostata al momento della creazione dello stesso, ed è possibile programmare il momento in cui un compito preparato precedentemente appare nella bacheca degli studenti. Inoltre, per assicurarsi che tutti gli allievi svolgano l'attività online, è possibile chiedere di segnalarlo in piattaforma, infatti ogni volta che viene assegnato un compito online, l'allievo ha la possibilità di "vistarlo" come completato. Se invece il compito deve essere consegnato digitalmente, gli studenti hanno la possibilità di creare il proprio documento e consegnarlo caricandolo in piattaforma. Inoltre, Google Classroom è molto adatto per un particolare tipo di compito, descritto nel dettaglio in seguito, che consiste nel poter assegnare un video diverso ad ogni gruppo senza che tutti possano vedere quello degli altri. È quindi possibile scegliere a quali studenti assegnare un determinato compito; aspetto fondamentale per poter differenziare le richieste.
Prima di iniziare a creare i video, che risulta dalla letteratura uno degli aspetti più gravosi dell'implementazione della flipped classroom, si è iniziato a guardare cosa fosse già presente in rete su questo argomento. Sono stati reperiti su YouTube sei video che potevano essere adatti alle esigenze del percorso: tre del canale Schooltoonchannel – di cui due sono stati uniti – e tre che riguardavano le dimostrazioni. A questi video sono stati fatti solo alcuni tagli e alcune inquadrature con il programma iMovie (presente su tutti i dispositivi Apple). Altri video sulle dimostrazioni sono stati rintracciati sul portale della Zanichelli. A questi, con lo stesso programma, è stato tolto l'audio, inserita una musica ed effettuato qualche taglio. È stato poi registrato con un nuovo audio il video sulla classificazione dei triangoli che era già stato utilizzato e creato all'interno del progetto FliSCo.[2] 2
Per alcune attività è stato preparato un quiz in Socrative, http://www.socrative.com/, un sito che permette di creare vari tipi di domande e soprattutto di avere le rispo-

2. Tutti i video utilizzati e prodotti nel corso di questa esperienza didattica sono disponibili su richiesta scrivendo a dfa.rivistaddm@supsi.ch

ste istantaneamente, man mano che gli allievi rispondono, ognuno con le proprie tempistiche. In Socrative è possibile creare quiz con domande a scelta multipla, vero/falso o con brevi risposte aperte, potendo inserire anche immagini nel testo della domanda e segnare la risposta corretta con un'eventuale spiegazione, se si desidera che essa venga visualizzata dagli studenti, al termine del quiz. Il quiz è stato sottoposto durante due attività come primo approccio in classe dopo aver studiato la teoria a casa. Si tratta perciò di un possibile momento in cui si riprende quanto svolto a casa. Per fare in modo che ogni studente possa fornire la propria risposta è dunque necessario trovarsi in un'aula di informatica oppure, come in questo caso, fare in modo che i ragazzi abbiano a disposizione i loro cellulari per poter rispondere alle domande, ognuno dal proprio dispositivo. Non avendo il wifi a disposizione, è stato comunque possibile connettersi, in quanto chi aveva internet a disposizione lo ha condiviso con alcuni compagni.

### 4.2 Il percorso didattico

Si riporta di seguito una tabella riassuntiva del percorso sperimentato in cui vengono evidenziate le attività a casa e quelle in aula e dove si mostrano i momenti in cui sono state raccolte le informazioni tramite i questionari per poter rispondere alle più ampie domande di ricerca del lavoro di diploma.

| Numero attività | A casa | A scuola | Durata |
|---|---|---|---|
| 1. Preconoscenze | Raccolta e verifica delle preconoscenze sulla classificazione dei triangoli (Video 1, 1.52 min) | | |
| *Questionario 1 dopo l'attività a casa* | | | |
| | | Quiz con Socrative su quanto visto a casa (**Allegato 1**) | 1h |
| *Questionario 1 dopo l'attività a scuola* | | | |
| 2. Il teorema | Video tratto da Schooltoon (Video 2, 3.06 min) | | |
| *Questionario 2 dopo l'attività a casa* | | | |
| | | Quiz con Socrative (**Allegato 2**) e messa a punto dell'enunciato del teorema. Primi esercizi (**Allegato 3**) e riflessione su che cos'è una dimostrazione | 2h |
| *Questionario 2 dopo l'attività a scuola* | | | |
| 3. Dimostrazioni | Assegnazione di cinque diverse dimostrazioni a cinque gruppi di tre allievi ciascuno. Il compito consiste nel registrare un audio che spieghi la dimostrazione del video assegnato | Presentazione delle dimostrazioni ai compagni e riflessione su quanto visto. Risoluzione di esercizi. | 2h |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4. Storia del teorema e sua implicazione inversa** | Quiz per iscritto sul contenuto del video tratto da Schooltoon sulla parte storica (**Allegato 4**) (Video 3, 8.39 min) | | |
| *Questionario 3 dopo l'attività a casa* | | | |
| | | Correzione del quiz, inverso del teorema (**Allegato 5**), esercizi | 1h |
| *Questionario 3 dopo l'attività a scuola* | | | |
| **5. Il teorema di Pitagora nella realtà** | Pensare a quali situazioni della vita reale si può applicare il teorema di Pitagora | Creazione di problemi più complessi a partire da quello che hanno pensato a casa (**Allegato 6**) | 1h |
| **6. Situazione problema finale** | | Situazione problema sul bang sonico (**Allegato 7**) | 1h |
| **7. Esercitazione** | | Risoluzione di esercizi | 1h |
| *Questionario di fine percorso* | | | |
| **8. Verifica** | | Verifica monotematica (**Allegato 8**) | 2h |

Tabella 2
Percorso flipped classroom.

Come si può notare dalla tabella, non tutte le attività sono state svolte in modalità flipped classroom, ma si è cercato di adattare la modalità a seconda delle esigenze. In questa sperimentazione è risultato importante aggiungere in corso d'opera una lezione di esercitazione in vista della verifica finale.
Si riporta di seguito una descrizione più puntuale del percorso.

Attività 1 a casa – Prerequisiti.
La prima attività verteva su un ripasso del tema dei triangoli e della relativa classificazione, argomento che viene già affrontato alla scuola elementare e che abbiamo ripreso concentrandoci sugli elementi e sulle caratteristiche del triangolo rettangolo che non tutti avevano affrontato nel livello scolastico precedente.
A casa agli alunni è stato chiesto di visionare un video in cui venivano ripresi questi concetti di base per affrontare il teorema di Pitagora. Nella **Figura 1**, è riportato come la docente poteva visualizzare il compito assegnato in piattaforma agli studenti.


Figura 1
Primo compito assegnato tramite la piattaforma.

Attività 1 a scuola– Prerequisiti.
In aula l'attività consisteva nel sottoporre un quiz tramite Socrative, pensato per testare i prerequisiti degli allievi riguardo al tema ripassato (**Allegato 1**). Le domande erano del tipo: "esiste un triangolo rettangolo isoscele?" oppure "esiste un triangolo rettangolo equilatero?". Lo scopo era indagare se, viste le diverse caratteristiche dei triangoli, gli allievi fossero in grado di metterle in relazione per stabilire l'esistenza di determinati triangoli esplicitando le motivazioni sottostanti le diverse scelte. Nella **Figura 2**, viene mostrato un esempio di come un allievo poteva visualizzare la domanda.

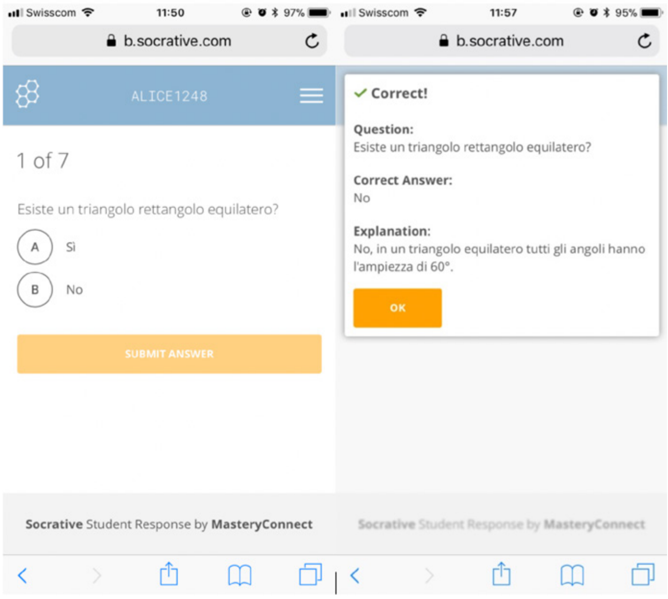



Figura 2
Un esempio di domanda per l'allievo in Socrative (sinistra) e la risposta fornita con relativa spiegazione (destra).

Nel frattempo, simultaneamente, venivano proiettati i risultati alla lavagna, come si può vedere in **Figura 3**

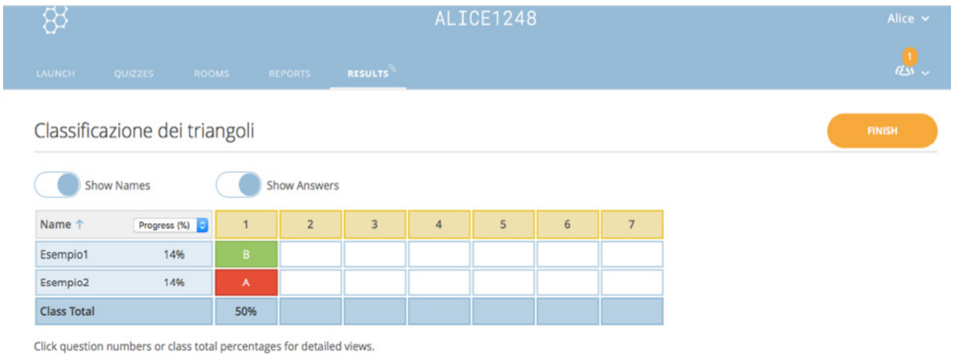



Figura 3
Proiezione alla lavagna dei risultati del quiz in tempo reale.

Essendo la prima volta che gli studenti utilizzavano Socrative, è servito un po' di tempo per far sì che tutti gli allievi fossero connessi alla rete e collegati correttamente al quiz. Dopo aver risposto al quiz, è seguita una correzione comune con una discussione su quanto emerso. La lezione si è conclusa svelando che l'argomento delle lezioni successive avrebbe riguardato i triangoli rettangoli.

Riguardo a questa prima attività si può affermare che, pur essendo risultata per gli studenti piuttosto semplice e per alcuni necessaria solo come bilancio, è risultata un buon punto di partenza per avviare il percorso.

Attività 2 a casa – Il teorema.
Anche in questa lezione la richiesta a casa è stata di visionare un video animato tratto da Schooltoon (Figura 4) contenente la spiegazione del teorema e di tenersi pronti per i dubbi da sciogliere e le applicazioni in aula.

Figura 4
I personaggi del video animato.

Assistere a una lezione in questa modalità può essere accattivante per gli studenti per vari motivi: non è il loro insegnante a parlare e possono guardarlo al proprio ritmo (eventualmente tornando indietro e ricominciando) in contesti diversi. Il video inizia con un professore "nonnetto" (così viene chiamato in Schooltoon) che presenta il teorema come qualcosa di fondamentale della geometria euclidea. Dopo aver ripreso il concetto di triangolo rettangolo, il professore elenca i nomi dei suoi lati. In seguito, esprime l'enunciato del teorema come segue "in un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è sempre equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti" (Figura 5).

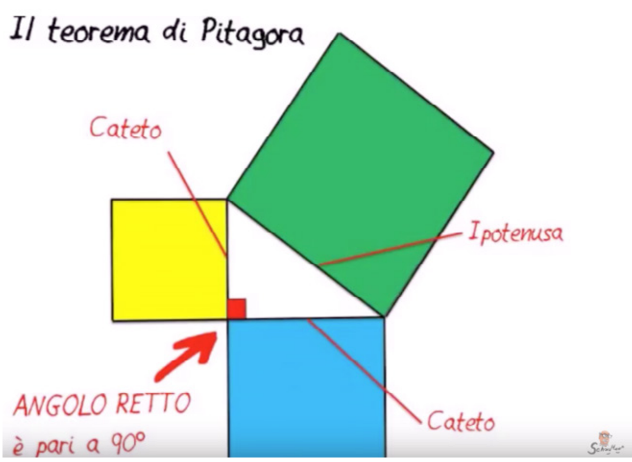



Figura 5
Presentazione del teorema di Pitagora nel video.

Il professore fa poi un accenno all'esistenza di molteplici dimostrazioni, mostrando un'animazione in cui tramite lo spostamento di un liquido si cerca di convincere della veridicità del teorema.

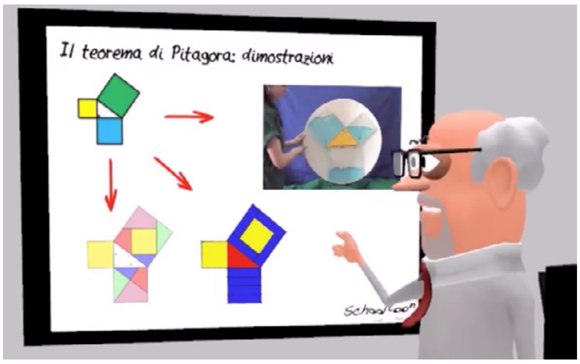



Figura 6
Il professore mostra alla lavagna alcune dimostr-azioni, una delle quali è un'animazione.

In seguito nel video un allievo chiede quale sia l'utilità di questo teorema nella vita reale, e così viene messo l'accento sul fatto che nelle applicazioni del teorema non si costruiranno fisicamente dei quadrati sui lati di triangoli rettangoli, bensì esso può permette di calcolare la lunghezza di uno dei lati conoscendo la lunghezza degli altri due. In seguito, il professore esprime e spiega il teorema nella forma algebrica equivalente: $a^2+b^2=c^2$.
Si è ritenuto questo video adatto per gli studenti in quanto corretto dal punto di vista matematico, con un accenno alle dimostrazioni e in cui è già presente l'importanza dell'applicazione.

Attività 2 a scuola – Il teorema.
A lezione si sono proposte, sempre tramite Socrative, cinque domande (Allegato 2) collegate ai contenuti proposti nel video da visionare a casa per compito. La prima domanda, che riguarda le ipotesi del teorema, mostrava un'immagine con alcuni triangoli e si chiedeva in quali di essi è possibile applicare il teorema. La seconda e la terza domanda (Figure 7 – 8) vertevano invece sulla nomenclatura del triangolo rettangolo essenziale per la comprensione dell'enunciato. La quarta domanda riguardava l'applicazione del teorema.

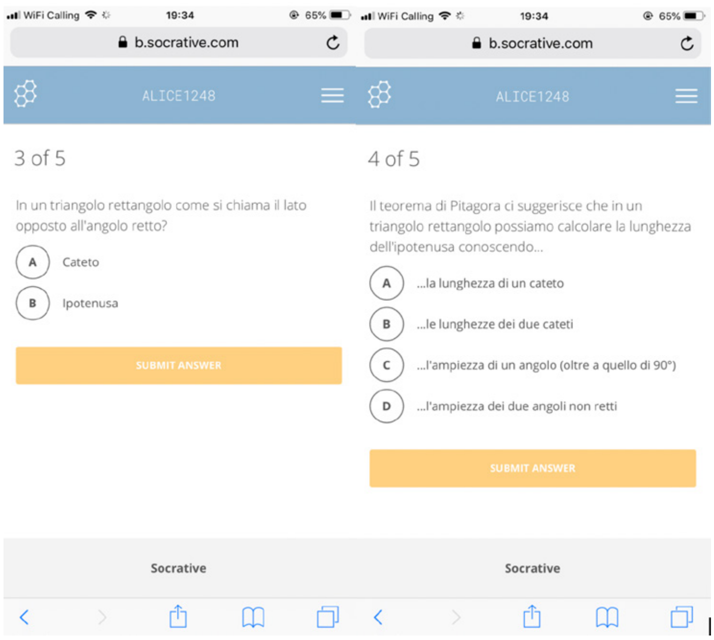



Figura 7
Esempi di domande su Socrative.

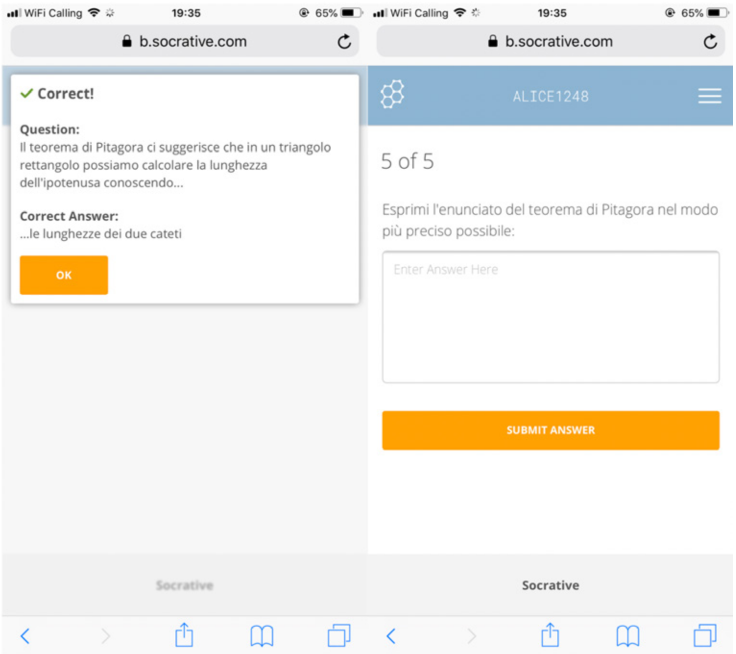



Figura 8
Esempi di domande su Socrative.

Infine l’ultima domanda, che a differenza delle altre era aperta e non a scelta multipla, chiedeva di formulare nel modo più preciso possibile l’enunciato del teorema. Durante la correzione, avvenuta subito dopo il quiz, questa domanda, proposta volutamente per ultima, ha avviato la discussione sull’enunciato del teorema, in particolare su quanto fosse importante essere precisi nel linguaggio utilizzato, sulle ipotesi e sulla tesi. Questa lezione è risultata molto efficace, grazie in particolare al video veramente adatto alle necessità del percorso. Nella seconda parte della lezione sono stati proposti alcuni esercizi per permettere agli studenti di mettere in campo ciò che avevano appreso (Allegato 3). Per partire da richieste più semplici, i primi due esercizi riguardavano esclusivamente triangoli rettangoli, dunque chiedevano di calcolare la lunghezza di un lato conoscendo le lunghezze degli altri due, e in un caso utilizzare poi la lunghezza del lato trovato per calcolare un perimetro. In un altro esercizio si chiedeva di calcolare il perimetro e l’area di un rettangolo, conoscendo la lunghezza di una diagonale e di un suo lato. In questo modo gli studenti potevano riflettere sul fatto che il teorema di Pitagora può essere applicato ogni volta che viene individuato un triangolo rettangolo all’interno di una figura data. Un ultimo esercizio, un po’ più legato alla realtà, chiedeva di calcolare la lunghezza di una scala appoggiata al muro. Come di consueto, si sono proposti altri esercizi tratti dal libro di testo per chi finiva prima il compito. La maggior parte degli studenti ha potuto finire gli esercizi, gli altri li hanno terminati a casa. Prima di concludere la lezione, tornando ai concetti di enunciato, tesi e ipotesi, si è affrontato il tema della dimostrazione, per far comprendere di cosa si tratta e introdurre la lezione successiva.

Attività 3 a casa – Dimostrazioni.

Per questa attività gli alunni sono stati suddivisi in cinque gruppi omogenei ai quali è stato assegnato un video senza audio contenente una dimostrazione del teorema, richiedendo ad ogni gruppo di creare un audio che potesse accompagnare il video, spiegando la dimostrazione. Per questa attività, le dimostrazioni scelte sono state, ad eccezione di una, tutte geometriche. Si è ritenuto infatti più semplice per gli allievi descrivere un'immagine rispetto a spiegare una scrittura algebrica. I compiti assegnati erano di difficoltà differenti e sono stati attribuiti in base alle competenze degli allievi. La dimostrazione ritenuta più semplice è quella in cui si suddividono i quadrati costruiti su cateto minore e maggiore rispettivamente in 9 e 16 quadratini (come indicato in **Figura 9**) che poi vengono riposizionati a formare il quadrato costruito sull'ipotenusa, mostrando così che quest'ultimo ha la stessa estensione dei due quadrati costruiti sui cateti. A un altro gruppo è stata consegnata la dimostrazione di Perigal (**Figura 10**) e ad altri due gruppi le dimostrazioni tratte dal sito della Zanichelli (**Figura 11 – 12**), le quali si basano sulla stessa scomposizione di figure, ma una coinvolge più l'aspetto geometrico, mentre l'altra più l'aspetto algebrico.

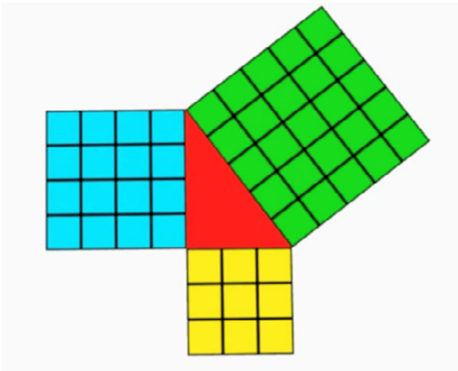



Figura 9
Dimostrazione con i quadretti (sinistra).

Figura 10
Dimostrazione di Perigal (destra).

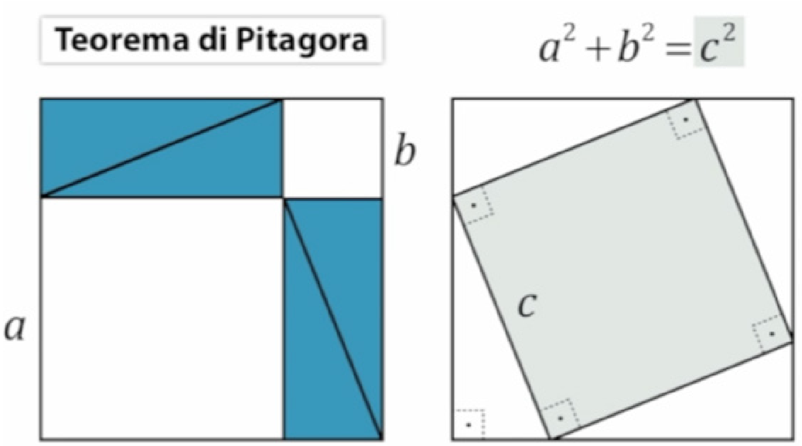



Figura 11
Dimostrazione geometrica tratta da Zanichelli.

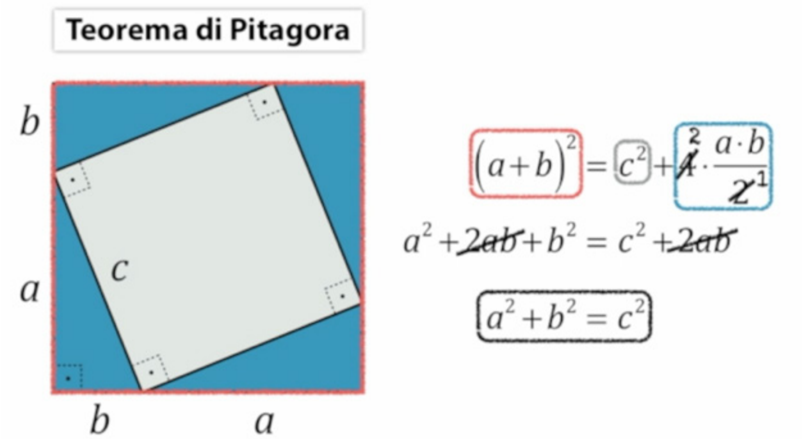



Figura 12
Dimostrazione algebrica tratta da Zanichelli.

La dimostrazione più complicata da commentare, essendo il video più veloce come sequenza di immagini, è una dimostrazione chiamata "cinese", mostrata in Figura 13. Gli studenti avevano pochissimo tempo a disposizione (1:49 min) per spiegare ciò che accadeva nel video.

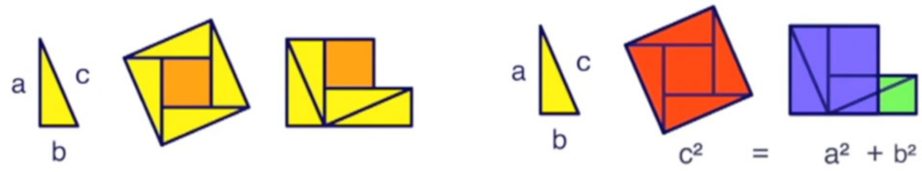



Figura 13
Dimostrazione cinese.

Trattandosi di un compito diverso da quelli consegnati in precedenza dal docente si è deciso di mostrare un esempio in classe di come si poteva commentare un video, e sono stati dati alcuni punti da seguire per preparare l'audio richiesto: capire la dimostrazione, scrivere un testo che potesse essere idoneo e provare a leggerlo mentre scorrevano le sequenze del video. Solo dopo aver rispettato queste istruzioni il gruppo poteva passare alla registrazione dell'audio e consegnare il proprio compito (traccia audio) in piattaforma.

Attività 3 a scuola – Dimostrazioni.
In aula ogni gruppo ha presentato ai compagni i video completi di spiegazione e si è chiesto agli studenti di fare dei commenti al lavoro svolto dai compagni. Per guidarli in questo compito, prima di iniziare con la proiezione, si sono decisi assieme alcuni criteri che si sarebbero considerati, quali la correttezza del linguaggio italiano, matematico e correttezza di senso. Non si trattava di un compito semplice perché i video non erano stati visionati preventivamente dagli altri gruppi che li avrebbero dovuti comprendere in quel momento grazie alla spiegazione dei compagni. È stato un momento di condivisione efficace e il risultato ottenuto dagli studenti è stato molto positivo. È anche stato interessante per gli studenti avere delle critiche da parte dei compagni, anche se spesso erano gli stessi autori ad accorgersi di alcuni errori commessi. Nel tempo rimanente della lezione si sono affrontati ancora esercizi del libro, riguardanti semplici applicazioni del teorema.

Attività 4 a casa – Storia del teorema e sua implicazione inversa.
A casa, agli allievi è stato chiesto di guardare un video, sempre tratto dal canale YouTube Schooltoon, dove venivano mostrate alcune applicazioni del teorema di Pitagora nella realtà e qualche cenno sulla storia del teorema. Per accertarsi che i concetti del video fossero stati assimilati, si è pensato di proporre un quiz cartaceo (Allegato 4) da svolgere a casa durante la visione.

Attività 4 a scuola – Storia del teorema e sua implicazione inversa.
In classe si è corretto il quiz e si è affrontato l'inverso del teorema, in modalità classica, non capovolta. La lezione è iniziata in modalità dialogata, ricordando quanto visto sul teorema e riprendendo la struttura logica di un teorema (se… allora…). Con l'aiuto di una scheda (Allegato 5) è stato chiesto agli allievi di costruire alcuni triangoli date le lunghezze dei lati e di classificarli: nello specifico, si trattava di un triangolo acutangolo scaleno e un triangolo rettangolo scaleno. Dopo aver mostrato a tutta la classe la costruzione di tali triangoli con GeoGebra, si sono costruiti i quadrati sopra i lati *a*, *b* e *c*, e si è così notato che nel caso del triangolo rettangolo valeva l'uguaglianza $a^2+b^2=c^2$. Dopo tale osservazione si è quindi espresso l'inverso del teorema,

mettendolo a confronto con il teorema già noto, e si è mostrata una dimostrazione. Infine, sono stati proposti degli esercizi su quanto appena appreso. In un esercizio, date le lunghezze dei tre lati si chiedeva se fosse possibile costruire un triangolo e se esso fosse rettangolo. In un altro, data una figura composta da triangoli, si chiedeva quali di essi fossero rettangoli (**Figura 14**). Su questo esercizio si era discusso a lungo in quanto, avendo a disposizione solo le lunghezze di due lati di un triangolo, non era possibile determinare se si trattasse di un triangolo rettangolo (stiamo parlando del triangolo ABF).

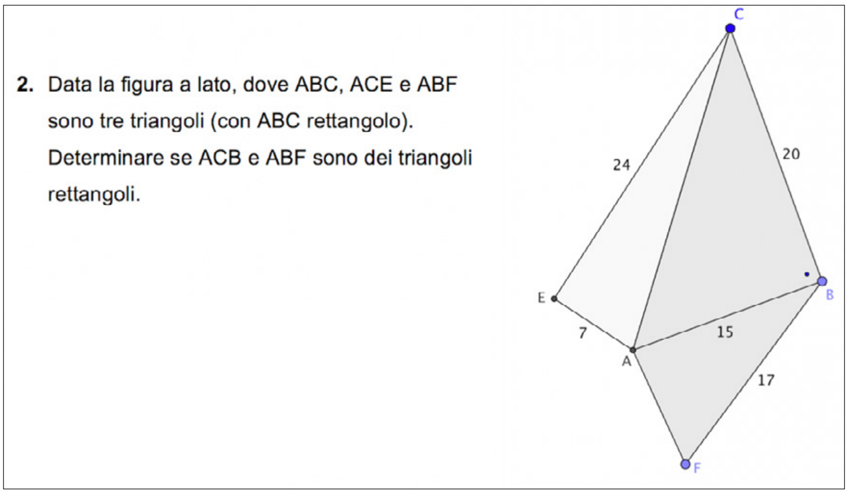



Figura 14
Esercizio sull’inverso del teorema.

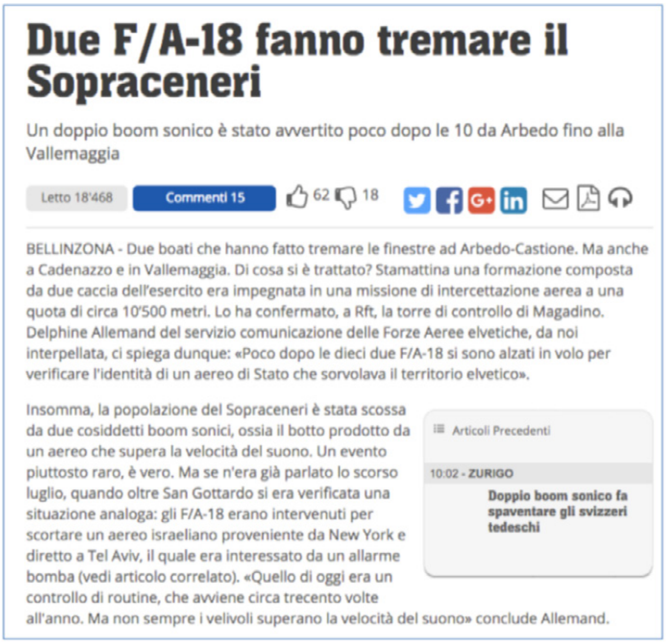
L’ultimo esercizio, sempre legato all’inverso del teorema, era invece di natura più algebrica.
Se si dovesse riproporre il percorso in futuro, la parte a casa di questa attività sarebbe impostata in modo diverso, cioè senza proporre un quiz cartaceo. Lo si potrebbe proporre per esempio inserendo le domande durante la visione del video, oppure semplicemente proponendo un questionario online, così da poter eventualmente raccogliere le risposte degli allievi e riprendere in classe solo il necessario invece di correggere tutto il quiz.

Attività 5 a casa – Il teorema di Pitagora nella realtà.
In questa lezione è stato chiesto ai ragazzi di pensare, e in seguito scrivere, un problema della realtà in cui fosse necessario applicare il teorema di Pitagora. Ad esempio, qualche studente ha pensato di applicarlo al tetto di una casa.

Attività 5 a scuola – Il teorema di Pitagora nella realtà.
In classe, a partire da quanto elaborato a casa, gli studenti suddivisi in gruppi dovevano scegliere un problema tra quelli elaborati dai componenti del proprio gruppo, eventualmente completarlo, per poi consegnarlo ai compagni di altri gruppi allo scopo di risolverlo (**Allegato 6**).
Le proposte elaborate a casa non sono risultate particolarmente interessanti, per questo si sono dovuti guidare un po’ gli studenti partendo dalle loro idee e convinzioni. Ad esempio, in un gruppo uno studente aveva pensato al tetto di una casa, e mantenendo quell’idea si è riusciti a formulare un problema riguardante la stima della quantità di tegole necessarie per costruirlo. Per gli studenti è risultato molto motivante sapere che i compagni avrebbero dovuto risolvere il loro problema. Tutti i

gruppi cercavano quindi di complicarlo, fornendo meno dati possibili. Per esempio, un gruppo ha avuto l'idea di lavorare sulle dimensioni in pollici dei televisori, e hanno poi deciso di togliere un dato aggiungendo però l'informazione sul rapporto tra le lunghezze.

Attività 6 a scuola – Situazione problema finale.
Al termine di questo percorso si è pensato di proporre un problema (**Figura 15**) in cui la chiave di risoluzione era appunto il teorema di Pitagora (**Allegato 7**). La situazione, tratta da un evento realmente accaduto in Ticino, chiedeva di scoprire la posizione di un aereo F/A-18 al momento del superamento del muro del suono, conoscendo il momento in cui in due località si era sentito il botto, chiamato *bang* o *boom sonico*.



**Due F/A-18 fanno tremare il Sopraceneri**

Un doppio boom sonico è stato avvertito poco dopo le 10 da Arbedo fino alla Vallemaggia

Letto 18'468 Commenti 15 62 18

BELLINZONA - Due boati che hanno fatto tremare le finestre ad Arbedo-Castione. Ma anche a Cadenazzo e in Vallemaggia. Di cosa si è trattato? Stamattina una formazione composta da due caccia dell'esercito era impegnata in una missione di intercettazione aerea a una quota di circa 10'500 metri. Lo ha confermato, a Rft, la torre di controllo di Magadino. Delphine Allemand del servizio comunicazione delle Forze Aeree elvetiche, da noi interpellata, ci spiega dunque: «Poco dopo le dieci due F/A-18 si sono alzati in volo per verificare l'identità di un aereo di Stato che sorvolava il territorio elvetico».

Insomma, la popolazione del Sopraceneri è stata scossa da due cosiddetti boom sonici, ossia il botto prodotto da un aereo che supera la velocità del suono. Un evento piuttosto raro, è vero. Ma se n'era già parlato lo scorso luglio, quando oltre San Gottardo si era verificata una situazione analoga: gli F/A-18 erano intervenuti per scortare un aereo israeliano proveniente da New York e diretto a Tel Aviv, il quale era interessato da un allarme bomba (vedi articolo correlato). «Quello di oggi era un controllo di routine, che avviene circa trecento volte all'anno. Ma non sempre i velivoli superano la velocità del suono» conclude Allemand.

Articoli Precedenti

10:02 - ZURIGO

**Doppio boom sonico fa spaventare gli svizzeri tedeschi**


Figura 15
Presentazione della situazione-problema.

Le informazioni presenti nella consegna erano la quota degli F/A-18 al momento del botto, le altitudini delle due città e i secondi che sono passati prima che in ognuna delle due si sentisse il suono. Nella prima parte della scheda era riportato l'articolo pubblicato online in cui si descriveva l'accaduto e nella seconda era spiegato il fenomeno fisico del *bang sonico*. Gli studenti dovevano quindi calcolare la distanza percorsa dal suono e tramite il teorema di Pitagora conoscere la distanza in linea d'aria tra ognuna delle due città e la posizione degli aerei. Con questo dato e l'aiuto di una cartina, gli allievi sono riusciti a scoprire due possibili posizioni degli F/A-18 per poi escluderne una in quanto si trovava in Italia (nell'articolo era specificato che l'avvenimento era accaduto in Svizzera).
Questa situazione ha motivato molto gli studenti, perché si trattava di un problema reale e di primo impatto difficile da risolvere. Nonostante ciò, gli allievi si sono dimostrati tutti in grado di risolvere il problema senza nessun particolare aiuto. Infatti, una volta rappresentata la situazione, si sono subito accorti di come avrebbero potuto applicare il teorema di Pitagora.

Attività 7 a scuola – Esercitazione.
Questa attività è stata inserita perché ci si è resi conto della necessità di svolgere altri esercizi prima di affrontare la verifica finale. In particolare in questa lezione sono stati risolti i problemi creati dai compagni durante l'attività 5 e sono stati svolti vari altri esercizi tratti dal libro. Gli studenti non hanno incontrato particolari difficoltà: infatti l'argomento era stato ben compreso e si trattava solamente di esercitarsi. Gli esercizi proposti chiedevano per esempio di calcolare il perimetro di poligoni rappresentati sul piano cartesiano oppure di calcolare area e perimetro di figure geometriche particolari grazie all'applicazione del teorema.

Attività 8 a scuola – Verifica finale.
Al termine del percorso gli allievi hanno affrontato una verifica sul teorema di Pitagora (**Allegato 8**).
La verifica è stata una di quelle meglio riuscite dell'anno scolastico e non è stata riscontrata nessuna particolare difficoltà. L'esercizio meno riuscito, come era prevedibile, è stato il secondo, relativo ad una rampa, in cui era necessario ragionare sull'area del triangolo per riuscire a scoprire le misure mancanti (**Figura 16**).

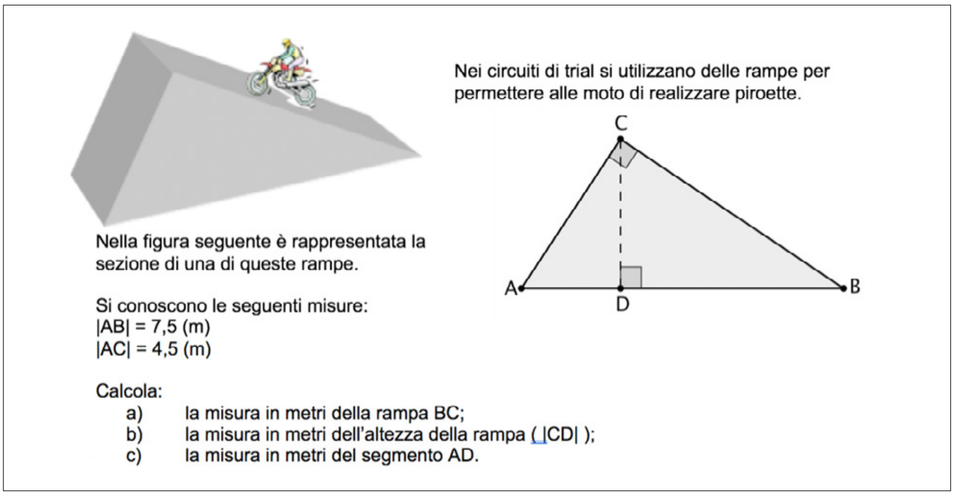



Figura 16
Esercizio sulla rampa.

# 5 Problematiche e punti di forza del percorso

## 5.1 Sintesi dei risultati

Dai questionari è generalmente emerso che gli studenti hanno apprezzato i video, trovandoli chiari ed esaustivi. Analizzando separatamente i risultati dei questionari dopo ogni singola attività, è emerso che la prima è stata percepita come semplice, chiara, e non portava a distrazioni. La seconda attività è stata ritenuta molto interessante e utile, e solo la terza, probabilmente a causa della lunghezza del video, è stata ritenuta più impegnativa e in alcuni casi alcuni allievi avrebbero preferito avere una spiegazione da parte della docente. Inoltre, questa video lezione è stata la più rivista da diversi studenti, anche se ritenuta adeguata: gli allievi hanno ritenuto che il contenuto fosse diverso dai precedenti e richiedesse maggior attenzione anche se, matematicamente parlando, non vi era nulla di nuovo.
A fine percorso, praticamente tutti gli studenti hanno confermato l'efficacia di ogni

attività svolta: dalla visione del video, alle spiegazioni e attività in aula, ai compiti a casa (**Figura 17**).

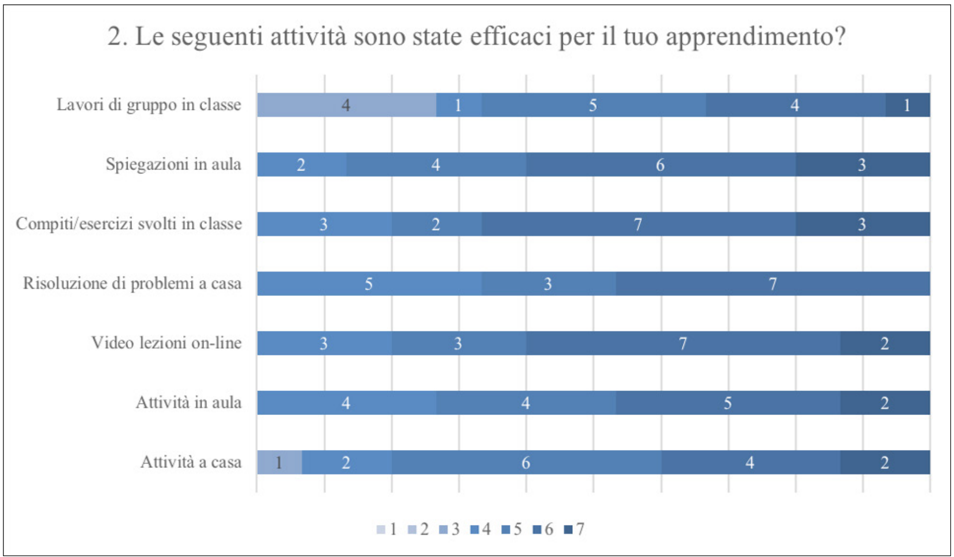



Figura 17
Distribuzione delle risposte alla seconda domanda del questionario finale.

Anche nel confronto tra i due approcci (**Figura 18**), quello tradizionale e quello sperimentale, applicato su temi diversi, la flipped classroom è emersa come migliore in tutti i casi tranne due. Sono stati presi in considerazione i seguenti aspetti: uso efficace del tempo, acquisizione di concetti matematici, qualità delle interazioni con la docente e con i compagni, coinvolgimento personale, efficacia del percorso e gradevolezza. Come si può immaginare, i due aspetti risultati migliori nella modalità tradizionale, sono quelli della qualità delle interazioni con la docente e i compagni. Si noti che la gradevolezza è l'aspetto che presenta uno scarto maggiore tra le due metodologie.

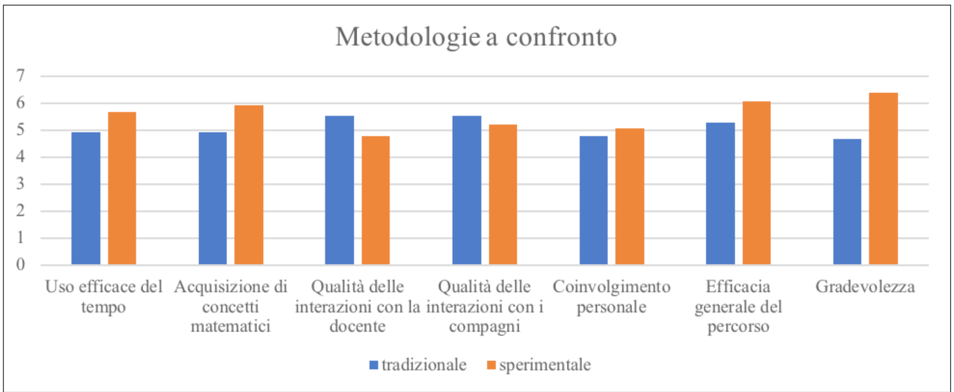



Figura 18
Confronto tra metodologia "tradizionale" e metodologia flipped classroom.

Dalle ultime domande aperte, in cui si chiedevano gli aspetti migliori e peggiori di queste lezioni "sperimentali", è emerso che i migliori sono: poter riguardare il video e quindi prendersi il proprio tempo oppure non perderlo inutilmente, aver imparato meglio e in maniera più efficace e divertente, avere una maggior comunicazione perché si è sempre in contatto e l'utilizzo delle nuove tecnologie. In particolare, uno studente ha espresso il desiderio di affrontare altri argomenti in questa modalità.

Si mostrano di seguito le risposte di tre allieve che ben riassumono quanto emerso (Figure 19 - 22).

Figura 19
Aspetti migliori della metodologia sperimentata, allieva 1.

In classe non si perdeva troppo tempo con le spiegazioni e si agiva di più.
Poter usufruire di apparecchi elettronici per la scuola stimola di più.
Si può comunicare per eventuali domande e chiarimenti in qualsiasi momento.

Figura 20
Aspetti migliori della metodologia sperimentata, allieva 2.

Secondo me è stato bello fare le lezioni sperimentali perché:
• quando guardavamo i video potevamo, in caso di dubbi, riguardarli mentre in classe non possiamo fare il "replay" della spiegazione.
• A scuola potevamo porre domande sul lavoro svolto a casa.
• Mi è piaciuto poter sfruttare le nuove tecnologie.
• Trovo comodo poter fare i compiti con il computer.
• È interessante poter fare matematica a casa

Figura 21
Aspetti migliori della metodologia sperimentata, allieva 3.

Lavorare a casa guardando i video e potendo comunicare con la docente in qualsiasi momento è molto coinvolgente e divertente, invoglia adi imparare e quindi è efficace e utile

Figura 22
Aspetti peggiori della metodologia sperimentata, allieva 4.

A volte le spiegazioni si capiscono meglio "dal vivo", ma comunque non sono mancate quindi non vedo aspetti negativi.

Queste ultime due risposte hanno dunque ancor più messo in evidenza l'apprezzamento che gli studenti hanno provato per questo percorso.

### 5.2 Il punto di vista didattico-disciplinare

Come confermato dal questionario finale, dalle opinioni degli studenti a fine percorso, e soprattutto dalla positiva riuscita della verifica finale, si ritiene che il percorso abbia avuto successo a livello didattico-disciplinare. Come già accennato, non si ritiene che questo approccio debba essere utilizzato per affrontare ogni argomento, ma sicuramente si pone come valida alternativa. Come si è potuto sperimentare in questo percorso, specialmente per problemi in cui la visualizzazione è importante, la visione di un video può aiutare la comprensione di un argomento.
Anche per quanto riguarda l'apprendimento, si può affermare che il bilancio è stato positivo. È infatti chiaro per tutti che per apprendere ognuno di noi ha bisogno dei propri tempi, e la flipped classroom si adatta bene a questa caratteristica dell'apprendimento, permettendo ad ogni studente di prendersi i propri tempi per apprendere.

### 5.3 Metodologia e strumenti utilizzati

Progettare e realizzare un percorso didattico in questa modalità, dovendo partire da zero, richiede molto lavoro. Paragonata alla progettazione di un percorso svolto in modalità tradizionale, la preparazione richiede più tempo in quanto inizialmente non si è abituati a progettare in maniera capovolta. Inoltre, la realizzazione delle video lezioni può risultare complessa, ma è anche un'attività stimolante per il docente che si trova ad analizzare il tema da un punto di vista diverso, riflettendo sugli elementi essenziali per una spiegazione breve ed efficace. Si ritiene quindi che, con un po' di pratica, questa modalità didattica possa essere una valida alternativa alle lezioni più tradizionali. Si sottolinea anche il fatto che il docente, come accaduto in questo percorso, si può ispirare a materiale e risorse disponibili in rete, selezionandoli e adattandoli in base alle proprie esigenze.
Come sottolineato nella descrizione delle attività, vi sono solo alcuni aspetti da modificare in futuro, come per esempio la somministrazione online del quiz dopo o durante il video sulla storia del teorema. Si può pertanto affermare che il percorso così come è stato strutturato risulta vincente per i docenti, per esempio per la possibilità offerta dalla piattaforma di differenziare un compito a casa. Inoltre si tratta di un nuovo modo di lavorare che può essere alternato alla didattica tradizionale. Insegnando in questo modo, è anche possibile sviluppare diverse competenze trasversali: sviluppare l'uso della lingua e delle tecnologie, la capacità di organizzare il lavoro a casa, presentare il proprio lavoro ai compagni, collaborare e molto altro ancora. Dal punto di vista degli studenti, essi si sono sempre mostrati motivati ad affrontare le varie attività a casa e a scuola erano contenti di poter essere più attivi del solito. È stato sicuramente interessante e nuovo per loro dover svolgere un compito come quello delle dimostrazioni, creando un audio di un video muto, per spiegare a parole ciò che era intuibile dalla visione. Poter essere affiancati durante i momenti di esercitazione e affrontare invece a casa ciò che altrimenti verrebbe presentato frontalmente, risulta sicuramente vincente per l'apprendimento. Dal punto di vista del docente va anche ricordata come molto positiva la possibilità offerta dalla piattaforma di differenziare il compito degli studenti a casa.

## 6 Conclusioni

Nonostante le ricerche su questo argomento riguardino soprattutto scuole superiori e il livello terziario, è interessante notare come sia stato possibile proporre la modalità capovolta anche con studenti più giovani, non ancora così autonomi nello studio. Se guidati, anch'essi sono in grado di approfittare degli aspetti positivi di quest'approccio, come ad esempio potersi prendere il proprio tempo per capire i nuovi argomenti. Nel progettare un percorso flipped classroom è però importante – specialmente con studenti così giovani – tenere conto della complessità dell'argomento e considerare se esso non è forse più adatto per essere introdotto con una didattica tradizionale. Anche i video non dovrebbero superare una certa lunghezza ed essere adatti, cioè comprensibili per chi li utilizzerà. A tal proposito si ritiene che sia importante creare personalmente i materiali (nello specifico, i video) o valutare, selezionare e riadattare materiali esistenti, in modo che rispecchino esattamente le necessità delle lezioni. È praticamente impossibile trovare qualcosa di adatto sotto tutti gli aspetti.

Questo percorso, pur essendo proposto ad un’unica classe di soli 15 allievi, ha portato un ulteriore esempio di come la metodologia flipped classroom possa essere percepita efficace ed essere apprezzata da parte degli studenti. Inoltre, essendo la tecnologia sempre più presente nella vita di tutti i giorni, è fondamentale poterla introdurre nelle nostre scuole per poter aiutare i ragazzi ad averne un uso consapevole, aspetto questo, che riguarda il contesto di formazione generale *tecnologie e media* da sviluppare secondo le indicazioni del Piano di Studio (DECS, 2015).
La modalità didattica qui sperimentata è quindi una delle possibilità per rendere la matematica più apprezzata dagli studenti, perché tiene conto dei differenti ritmi di apprendimento: permette cioè una differenziazione, elemento essenziale per la riuscita di tutti.

## Bibliografia


Bergmann, A., & Sams, J. (2012). *Flip your Classroom: Reach every Student in every Class every Day*. New York: Intl Society for Tecnology.

Bergmann, A., & Sams, J. (2016). *Flip your Classroom*. Firenze: Giunti.

Carotenuto, G., & Sbaragli, S. (2018). Flipped classroom per la formazione insegnanti: una ricerca sulla percezione degli studenti. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula, 3*, 7-34. DOI: 10.33683/ddm.18.3.1

Cecchinato, G., & Papa, R. (2016). *Flipped Classroom: un nuovo modo di insegnare e apprendere*. Torino: UTET.

DECS, Divisione della Scuola. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Bellinzona.

Ferri, P., & Moriggi, S. (2014). La classe di Bayes. Note metodologiche, epistemologiche ed operative per una reale digitalizzazione della didattica nella scuola italiana. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies(10)*, 135-151.

Khan, S. A. (2006). Tratto da Khan Academy: https://www.khanacademy.org

King, A. (1993). From sage on the stage to guide on the side. *College teaching, 41*(1), 30-35.

Maglioni, M., & Biscaro, F. (2014). *La classe capovolta*. Trento: Erickson.

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: A User's Manual*. Upper Saddle RIver: Prentice Hall.

Muir, T. (2017). The enactment of a flipped classroom approach in senior secondary mathematics class and its impact on student engagement. *Proceedings of the 41st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 281-288.

Network, F. L. (2014). The Four Pillars of F-L-I-P. Tratto da Flip Learning: https://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/FLIP_handout_FNL_Web.pdf

Sbaragli, S., Carotenuto, G., & Castelli, L. (2017). *Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze*. Rapporto interdipardimentale dell'Asse 8, SUPSI.


**Autore/Alice Di Casola**
Scuola media di Massagno – Svizzera
alice.dicasola@edu.ti.ch

# La percezione e la stima del tempo in bambini di terza elementare: dall'intuizione alla consapevolezza dell'aspetto soggettivo[1]



## The perception and estimation of time in third grade children: from intuition to awareness of the subjective aspect

**Carlo Mina**
Istituto scolastico di Locarno – Solduno, Svizzera

**Sunto** / In una realtà in cui i ritmi di vita sono sempre più frenetici, cerchiamo con insistenza di avere sotto controllo ogni minuto della nostra giornata; a dipendenza delle attività che svolgiamo tuttavia, il tempo sembra durare in eterno o esaurirsi in un attimo, e lo stesso vale per i nostri allievi. Quali sono i fattori che influenzano la percezione del tempo nei bambini? È possibile attivare una consapevolezza sulla soggettività del tempo vissuto dai bambini attraverso il lavoro in classe? Lo scopo di questo lavoro è sondare le capacità di stima delle durate in un gruppo di allievi e sensibilizzarli sull'aspetto soggettivo della percezione temporale. L'esperienza, durata all'incirca due mesi, ha coinvolto 20 allievi di terza elementare in un lavoro continuo di riflessione e stima della durata di attività ludico-didattiche. Attraverso una serie di colloqui individuali, la redazione di questionari e la discussione con i compagni è stato possibile raccogliere le interessanti considerazioni dei bambini, che offrono un singolare quadro del tema dal loro punto di vista.

Parole chiave: percezione del tempo; metacognizione; stima; grandezze e misure.

**Abstract** / In a reality where the rhythms of life are more and more frenetic, we try to keep every minute of our day under control; depending on the activities we carry out, however, time seems to last forever or to run out in a blink, and the same applies to our students. Which are the factors that influence the perception of time in children? Is it possible to activate an awareness of the subjectivity of time experienced by children through classroom work? The aim of the research is to explore the capacity of estimating durations of a group of students and to make them aware of the subjective aspect of the perception of time. The experience, which lasted about two months, involved 20 third grade students in a continuous work of reflection and estimation of the duration of recreational and didactic activities. Through a series of individual interviews, the drafting of questionnaires and discussion with peers it was possible to collect the interesting considerations of the children, which offer a unique picture of the theme from their point of view.

Keywords: time perception; metacognition; estimation; dimensions and measures.

## 1 Introduzione

Questo contributo intende ampliare e rendere spendibile in classe un percorso sperimentato in relazione ad un lavoro di tesi bachelor svolto nel 2015 presso la scuola elementare di Minusio. La tesi intendeva sondare l'aspetto, poco approfondito in

1. Questo articolo rappresenta una sintesi del lavoro di diploma Bachelor of Arts in Insegnamento per il livello elementare di Carlo Mina (2015). La tesi è scaricabile all'indirizzo http://tesi.supsi.ch/57/.

letteratura e raramente considerato nella nostra realtà scolastica, della percezione e della stima del tempo in bambini di terza elementare, rispondendo alle seguenti domande di ricerca:

**D1.** Come sono le percezioni e la stima della durata di allievi di terza elementare che non hanno mai lavorato in maniera specifica sugli aspetti psicologici legati al tempo? In particolare, quali fattori (socio-affettivi, ambientali ecc.) influenzano la loro percezione e stima del tempo?

**D2.** Come evolve negli allievi la percezione e la stima della durata dopo un costante lavoro di sensibilizzazione con strumenti di misura diversi? In particolare, quali fattori vengono riconosciuti dagli allievi dopo un percorso di sensibilizzazione sulla soggettività della percezione temporale?

Le giornate di ogni bambino sono suddivise e organizzate secondo i criteri temporali tipici della nostra società, quindi la conoscenza del tempo e delle sue caratteristiche dovrebbe rappresentare un elemento fondamentale nello sviluppo del bambino. Paradossalmente tuttavia, gli aspetti legati alla dimensione temporale vengono spesso trattati in maniera superficiale dalla realtà scolastica, che si limita a fornire agli allievi gli strumenti per misurare il tempo e per sapersi collocare temporalmente all'interno della giornata.
Durante la sperimentazione si è potuto implementare un approccio didattico volto a sollecitare maggiormente gli aspetti legati alle capacità di stima e percezione del tempo, con il fine di rendere consapevoli gli allievi sui più elementari meccanismi psicologici che entrano in gioco quando si ragiona sulla durata di un'attività.
La speranza è quella che il percorso riesca a suscitare l'interesse del lettore rispetto al tema oggetto di studio e, perché no, che l'esperienza possa essere adattata e riproposta in altre classi. Nonostante la loro natura prettamente qualitativa, i risultati emersi dalla sperimentazione possono dare alcune indicazioni rispetto alle possibili abilità degli allievi e alle possibilità di riflessione e approfondimento che si possono mettere in atto in classe.[2]
Il contributo prevede una prima parte d'inquadramento teorico, una sintesi della ricerca svolta e infine una descrizione delle possibili attività da svolgere in classe.


**Figura 1**
Una rappresentazione spontanea degli strumenti di misurazione del tempo.

2. Si vedano i risultati emersi all'indirizzo http://tesi.supsi.ch/57/.

## 2 Quadro Teorico

Nel 1928, un incontro tra Albert Einstein e Jean Piaget spinse lo psicologo ad occuparsi, tra gli altri innumerevoli temi, anche della percezione del tempo nel bambino. I suoi studi, durati una quindicina d'anni e raccolti nel libro "Lo sviluppo della nozione di tempo nel bambino", sono ad oggi i più dettagliati e completi sul tema. Partiamo dunque da questo autore.
Il primo termine che è opportuno analizzare è proprio quello di tempo, che per Piaget rappresenta

> «una nozione intellettuale che si costruisce in modo graduale, parallelamente sia al costruirsi della rappresentazione di un mondo esterno ordinato (…) sia alla conquista sempre più consapevole da parte del soggetto della propria identità».
>
> (Sandri, 2007, p. 20)

Piaget sostiene, dunque, che il concetto di tempo si sviluppa nel bambino in maniera graduale, come una successione di stadi consecutivi. Tuttavia, la rappresentazione dello sviluppo del bambino in stadi è stata largamente messa in discussione dagli studi di Annette Karmiloff-Smith, che ha proposto un modello di sviluppo a fasi che, allo stato attuale, risulta più attuale e moderno.
Andando più in profondità su tale concetto, Piaget considera il tempo come la coordinazione dei movimenti; visione che è stata criticata da Jaques Montangero nel 1997, secondo il quale è possibile definire il tempo come «la dimensione del cambiamento (…). È infatti possibile distinguere completamente il tempo dallo spazio in cambiamenti come le variazioni di temperatura o di stati psicologici» (Sandri, 2008, p. 39). In questo modo Montangero arriva a dissociare dunque completamente il concetto di tempo da quello di spazio.
Piaget, basandosi sul presupposto citato in precedenza, ovvero che il tempo sia la coordinazione dei movimenti, sostiene l'esistenza di un tempo operatorio, costituito da rapporti di successione e di durata di tipo oggettivo, che si differenzia dal tempo intuitivo, nel quale l'individuo opera in maniera soggettiva e percettiva sugli aspetti legati alla successione e alla durata.
In particolare, l'autore sostiene che il tempo intuitivo non sia sufficientemente affidabile, in quanto fortemente influenzato dalla soggettività dell'individuo, e necessiti per forza l'apporto di operazioni metriche e qualitative per costruire in maniera efficace relazioni di tipo temporale. È quindi opportuno analizzare come sviluppa il bambino questa nozione di tempo, considerando dapprima la nozione di ordine e successione degli eventi e in seguito quella di durata degli intervalli.
In ambito di ordine degli eventi, Piaget (1979) afferma che il bambino, prima di poter padroneggiare la costruzione della serie irreversibile degli avvenimenti, ovvero prima di essere in grado di ordinare una successione di eventi dal primo che si è realizzato all'ultimo, deve forzatamente disporre della reversibilità del pensiero. Il bambino infatti non è in grado, prima di possedere tale abilità, di riordinare sequenze di azioni osservate in precedenza.
Approfondiamo ora il concetto di durata. Pea (2001) ha proposto una definizione che esplicita in maniera chiara il significato di questo termine:

> «La durata è la grandezza degli intervalli di tempo, cioè del tragitto di tempo che viene percorso: fra due istanti; fra due eventi, cioè dalla fine del primo evento all'inizio del secondo; nello svolgersi di un'azione, cioè dall'inizio di un'azione alla sua fine; nello svolgersi di un evento».
>
> (Pea, 2001, p. 69)

Piaget (1979) sostiene che il bambino sviluppi questa nozione in tre stadi consecutivi. Nel primo stadio c'è un'assenza totale del concetto di durata e per il bambino

> «la nozione stessa di durata o di intervallo di tempo resta priva di significato preciso. Questo avviene perché il bambino tende ad associare i concetti di "prima" e "dopo" all'ordine spaziale, considerando che ciò che si muove più rapidamente impiegherà automaticamente meno tempo. Questo si verifica perché il bambino non padroneggia ancora il rapporto inverso tra il tempo e la velocità: più in fretta = meno tempo».
>
> (Piaget, 1979, p. 40)

Il bambino quindi si limita a trarre delle conclusioni sulla durata di un evento mettendo la stessa in rapporto con la velocità con cui una determinata azione si compie. Nel secondo stadio il bambino comincia a considerare lo scorrere del tempo durante una determinata azione e intuisce che il rapporto tra distanza compiuta e durata non è per forza corretto, ma non riesce comunque ad applicare in maniera costante quest'intuizione.
Il passaggio dal secondo al terzo stadio avviene quando i bambini cominciano a rendersi conto che è necessario mettere in relazione la successione degli eventi con la durata degli intervalli. Quando questo avviene il bambino riesce finalmente a dissociare l'ordine spaziale da quello temporale. I problemi riscontrati fino a questo punto trovano dunque una soluzione e il bambino riesce a costruire una nozione di tempo che comprende tutti gli eventi e coordina durata e ordine di successione. Questi presupposti permettono al bambino di apprendere a manipolare un'unità di tempo e questo gli consente di misurare delle durate. Per misurare il tempo, Piaget (1979) sostiene che

> «il bambino (…) deve comprendere che l'orologio non cambia velocità e può indicare i tempi successivi uguali; che il tempo dell'orologio è identico a quello dei movimenti o delle azioni da cronometrare e che lo spazio percorso dalla sabbia o dalla lancetta può essere diviso in unità di tempo uguali tra loro nella successione e applicabili alla durata degli altri movimenti».
>
> (Piaget, 1979, p. 197)

Qualcuno potrebbe chiedersi, in fondo, se per il bambino la padronanza assoluta del concetto di durata sia così importante. Un'interessante teoria in merito è quella di Pea (2001), che sostiene che la padronanza di tale nozione sia per il bambino un vero e proprio bisogno, che scaturisce soprattutto dall'interazione con i compagni:

> «L'interagire in contemporaneità con i compagni, costringe il bambino a confrontare le sue azioni con le azioni degli altri. È questo raffronto che porta il bambino a giudicare la propria azione con una nuova grandezza: la durata».
>
> (Pea, 2001, p. 69)

Piaget (1979), nel suo approfondito studio, sostiene inoltre che il bambino debba poi riuscire a riconoscere due eventi della medesima durata e individua anche in questo ambito gli stessi tre stadi citati in precedenza: nel primo stadio il bambino non è in grado di riconoscere né la simultaneità, né il sincronismo di due eventi e non riesce nemmeno a quantificare l'azione che è avvenuta; nel secondo stadio il bambino scopre il rapporto inverso del tempo e della velocità e comincia a padroneggiare il concetto di simultaneità, ma solo in seguito riesce a sincronizzare le durate di due eventi; nel terzo ed ultimo stadio il bambino arriva a padroneggiare la sincronizzazione e la quantificazione dell'azione ed è dunque in grado di uguagliare le durate sincrone.

Contro tale visione si è schierata Iris Levin, che ha criticato la teoria sviluppata da Jean Piaget in quanto le prove che ha effettuato erano, a suo avviso, troppo complesse per i bambini. Levin (1982) sostiene infatti che proponendo prove diverse e meno complesse sia possibile riconoscere nei bambini capacità logiche superiori a quelle mostrate dai lavori di Piaget.

Arriviamo ora al nodo della questione, ovvero al tema della percezione delle durate nel bambino. Piaget dedica un intero capitolo del suo libro a tale proposito e lo intitola "Il tempo vissuto". Questa definizione trasmette in maniera molto immediata l'idea che la percezione del passare del tempo, per il bambino come per l'adulto, sia in realtà assolutamente dipendente dal vissuto della persona, ovvero da quello che il soggetto svolge, sente, assimila e vive durante lo scorrere del tempo. L'autore sostiene che la durata interiore di un'azione non sia altro che il tempo dell'azione così come viene vissuta dall'individuo, ovvero la relazione tra il soggetto e gli oggetti su cui agisce.

Piaget ha poi individuato due categorie di fattori che influenzano la durata vissuta durante un'azione: i fattori periferici (quali lo sforzo, la velocità, i risultati materiali delle azioni ecc.) e i fattori centrali, ovvero della coscienza pura del tempo.

In questo ambito Piaget (1979) scopre una

> «differenza tra l'impressione vissuta al momento stesso dell'azione e la valutazione della durata, che viene effettuata successivamente dalla ricostruzione mnestica, con l'intervento dei ragionamenti che questa comporta. Si sa infatti che una durata che sembra cortissima nell'istante in cui è vissuta si allungherà notevolmente nel ricordo perché, durante l'azione, le velocità in gioco faranno sembrare corto il tempo, mentre, ad azione conclusa, il numero di eventi sopraggiunti lo dilateranno di altrettanto. Una durata vuota appare invece lunga durante l'azione a velocità rallentata, mentre sembrerà corta al ricordo e questo appunto in quanto è vuota».
>
> (Piaget, 1979, p. 242)

In particolare Piaget ha intuito quanto la percezione del tempo fosse influenzata da alcuni fattori: egli insiste sulla differenza tra tempo dell'attesa e tempo dell'interesse e sul rapporto tra la valutazione delle durate e la difficoltà d'esecuzione dell'azione svolta. Per quanto riguarda il tempo dell'attesa e della noia, gli studi di Piaget hanno dimostrato come il 100% dei bambini consideri il tempo in cui si annoia o deve aspettare più lungo di quello in cui si diverte.

Anche Cardaci (2004) individua tre fattori che influiscono sulla percezione del tempo, quali il livello di soddisfazione del vissuto, il livello di prevedibilità del vissuto e l'orizzonte temporale in cui il vissuto si colloca. Le variabili che sono state studiate e che influenzano la percezione del tempo nel bambino sono sforzo, soddisfazione, interesse, orizzonte temporale, risultati, prevedibilità, velocità (categorizzati da Piaget come "fattori periferici") e coscienza (categorizzata da Piaget come "fattore centrale") (**Tabella 1**).

| Variabili che influenzano la percezione | Categorizzazione Piagettiana |
|---|---|
| *Sforzo* – Difficoltà dell'azione svolta | Fattori periferici |
| *Soddisfazione* – Livello di soddisfazione relativo al vissuto | |
| *Interesse* – Livello di noia o divertimento percepito | |
| *Orizzonte temporale* – Quando ha avuto luogo l'azione? | |
| *Risultati* – Risultati ottenuti dall'azione | |
| *Prevedibilità* – Livello di prevedibilità relativo al vissuto | |
| *Velocità* – La velocità con cui tale azione viene svolta | |
| *Coscienza* – La coscienza oggettiva del tempo | Fattori centrali |

**Tabella 1**
Riassunto delle variabili presenti in letteratura che influenzano la percezione del tempo.

Ovviamente, le variabili fin qui citate sono state individuate dagli autori in situazioni di ricerca non per forza legate alla scuola, dunque è possibile che altri fattori, soprattutto di tipo periferico, siano presenti e influiscano sulla percezione temporale dei bambini.
L'opera di Piaget, nelle sue pagine finali, trae una conclusione interessante che contestualizza bene questo lavoro:

> «Nei più piccoli, il carattere egocentrico, ossia immediato e irreversibile, del pensiero è un ostacolo ad ogni introspezione: la presa di coscienza dell'azione propria inizia dunque con quella dei suoi risultati e soltanto in seguito si risale con un duplice sforzo di inversione rispetto a questo orientamento iniziale e di decentramento o confronto, alla coscienza del meccanismo stesso di tale azione».
>
> (Piaget, 1979, p. 266)

Le considerazioni di Piaget portano a ipotizzare un'incapacità degli allievi di scuola elementare nel riflettere, in maniera introspettiva, sugli aspetti che influenzano la percezione del tempo. In realtà, oggi si ipotizza che i bambini dispongano di abilità riflessive più sviluppate, ed è per questa ragione che durante la sperimentazione sono state messe alla prova la loro capacità di riconoscere alcuni fattori che influiscono sulla percezione del tempo e soprattutto la loro capacità di considerare questi aspetti come soggettivi e diversi da bambino a bambino.
Tale sperimentazione non verte però soltanto sull'aspetto della percezione del tempo e sul riconoscimento dei fattori che influenzano tale percezione, ma anche sulla stima delle durate di attività di tipo scolastico. Calvani (1988) afferma che la stima del tempo nella vita quotidiana può assumere tre forme: «un giudizio/sentimento assoluto "lungo", "corto"; un confronto "più/meno lungo di…"; una valutazione che si appoggia alle unità convenzionali» (p. 63).
Secondo Fraisse (1975), quando l'individuo cerca di stimare una durata senza rife-

rimenti temporali o sistemi di misura, tenta di ricordare la quantità di cambiamenti che si sono susseguiti durante il periodo di tempo da stimare. Anche lo stesso Fraisse tuttavia riconosce che sia la percezione, sia la memorizzazione dei cambiamenti avvenuti durante un determinato lasso di tempo, sono due atti cognitivi che vengono influenzati dai fattori esterni che abbiamo elencato in precedenza. Tale idea è appoggiata anche da Michon (1979), che aggiunge tra i fattori determinanti nella stima di una durata, oltre al numero delle attività svolte, anche la loro complessità.
Piaget (1979) approfondisce tali riflessioni sostenendo che l'individuo che stima la durata di un intervallo agisce nella maniera seguente:

> «Si ha dapprima l'illusione come tale, ossia l'errore sistematico che fa giudicare un tempo vissuto lungo o corto a seconda di certi fattori di attività e di tensione interiore. Vi è poi la reazione a questa illusione, nel senso di un'accettazione precritica del dato percettivo o, al contrario, di una progressiva correzione che si effettua mediante un gioco di regolazioni dapprima, e, alla fine, di confronti operatori. Si ha, in terzo luogo, e questo è fondamentale, la differenza tra l'impressione vissuta al momento stesso dell'azione e la valutazione della durata, che viene effettuata successivamente dalla ricostruzione mnestica, con l'intervento dei ragionamenti che questa comporta».
>
> (Piaget, 1979, p. 242)

Questo significa che la percezione della durata rappresenta per l'individuo un'illusione, in quanto questa è stata influenzata da una serie di fattori di cui abbiamo già parlato in precedenza. Quest'illusione può essere consapevole, e in questo caso il soggetto cercherà di correggere la sua stima in funzione dei fattori che ha riconosciuto, oppure inconsapevole, e in questo caso l'individuo si limiterà ad accogliere senza spirito critico il dato percettivo. Ciò che però accomuna chiunque si trovi nella situazione di dover stimare una durata è che tra la percezione vissuta nel momento dell'azione e la successiva valutazione della sua durata, vi è sempre una differenza.
Attività di stima della durata d'intervalli di tempo brevi vengono proposte da Sandri (2008a), la quale sostiene che con questi lavori è possibile perseguire, sin dalla scuola dell'infanzia, obiettivi quali il saper riconoscere l'inizio e la fine di un dato evento; fare stime, inizialmente in modo soggettivo e in seguito sulla base dell'osservazione di strumenti di misura quali clessidre o candele, relative alla durata delle principali attività della vita scolastica. Durante lo svolgimento di queste attività è opportuno utilizzare strumenti di misura diversi, alcuni tipici del mondo adulto, altri più intuitivi e comprensibili da parte del bambino, come le clessidre ad acqua o a sabbia o le candele a tacche.
In un estremo tentativo di sintesi è possibile affermare che lo sviluppo della nozione di tempo nel bambino avviene in maniera graduale. Il bambino deve dapprima impossessarsi delle capacità logiche per padroneggiare i concetti temporali, come pure della reversibilità del pensiero. Una volta raggiunto quest'obiettivo, il bambino s'impadronisce delle nozioni di successione, di contemporaneità, di simultaneità e infine di durata. Questa nozione di durata considera due aspetti complementari: quello del tempo psicologico e quello del tempo fisico. In entrambi i casi è possibile definire la durata di un periodo, utilizzando però modalità diverse. Nel caso del tempo psicologico, l'individuo ipotizza la durata di un intervallo in maniera soggettiva, cercando di ricostruire il corso degli eventi e operando sotto l'influsso di fattori che ne modificano la percezione; nel caso del tempo fisico invece, attraverso l'utilizzo di

strumenti di misurazione, è possibile determinare la durata effettiva ed oggettiva di un determinato periodo.

# 3 Sperimentazione didattica

## 3.1 Le finalità

Il percorso svolto aveva quali finalità principali la riflessione sugli aspetti soggettivi che influenzano la percezione del tempo; lo sviluppo delle capacità di stima di una durata e lo sviluppo delle abilità di introspezione relative alle proprie capacità di stima.
Tale lavoro, legato principalmente all'ambito "Grandezze e misure", coinvolge le seguenti risorse cognitive previste dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015):
*Sapere e riconoscere:* Conoscere la scansione degli intervalli di tempo della vita quotidiana (ore, giorni, settimane, mesi, stagioni e anni).
*Eseguire e applicare:* Situarsi nei tempi della vita quotidiana, nella loro ciclicità e nella ricorsività dei suoi eventi significativi.

## 3.2 Fasi della sperimentazione e prime scoperte

### 3.2.1 Prima fase: analisi in entrata delle competenze percettive e di stima

La prima fase del lavoro prevedeva l'analisi delle competenze percettive e di stima degli allievi. Per sondare questo aspetto sono state svolte, in momenti distinti, due attività entrambe della durata di 15 minuti. Partendo dal presupposto che la percezione del tempo sia influenzata da diversi fattori, si è deciso di proporre due attività molto diverse tra loro, in spazi distinti, con modalità di lavoro variate. La prima attività, individuale e svolta con i bambini seduti al proprio posto, consisteva nella scrittura di un testo dettato dal docente. La seconda attività, collettiva e svolta nel cortile della scuola, consisteva invece in un gioco socio-motorio: "guardie e ladri". Alla fine delle due attività è stato sottoposto agli allievi un questionario di riflessione sui momenti svolti, accompagnati da interviste individuali semi-strutturate per approfondire gli aspetti emersi dai questionari.
I questionari erano strutturati in due parti: nella prima parte è stato chiesto agli allievi di scegliere da un elenco una o più sensazioni e stati d'animo che descrivessero quanto vissuto durante l'attività, in modo da favorire una prima riflessione sull'esperienza vissuta.
Nella seconda parte del questionario sono state poste ai bambini tre domande aperte: la prima voleva sondare com'era stata percepita l'attività dagli allievi e per quale motivo era stata accolta in un determinato modo, lasciando la liberta di argomentare a piacere; la seconda voleva invece analizzare nel dettaglio le sensazioni personali vissute dai bambini durante l'attività; infine veniva chiesto di stimare la durata dell'attività svolta, in modo da ottenere una prima indicazione delle capacità di stima in entrata dei bambini (Figura 2).

QUESTIONARIO

METTI UNA CROCETTA SULLE FRASI CHE RIASSUMONO LE TUE SENSAZIONI:
MENTRE GIOCAVO ...

- [ ] ... mi sentivo solo
- [x] ... mi è piaciuto stare con i compagni
- [x] ... ero felice
- [ ] ... non ero felice
- [ ] ... c'era troppo silenzio
- [x] ... c'era un bel clima di lavoro
- [x] ... mi trovavo in un luogo che mi piace
- [ ] ... mi trovavo in un luogo che non mi piace
- [x] ... ero rilassato
- [ ] ... ero nervoso
- [x] ... mi sono divertito
- [ ] ... mi sono annoiato

RISPONDI ALLE DOMANDE, PENSANDO ALL'ATTIVITÀ CHE HAI APPENA:

Ti è piaciuta quest'attività? Perché?

A me questa attività mi è piaciuta perché era fuori alla natura.

Racconta come ti sei sentito mentre giocavi:

Mentre giocavo mi sentivo bene.

Secondo te, quanto tempo è passato dall'inizio alla fine del momento di gioco?

mezz'ora.

**Figura 2**
Esempio di questionario completato alla fine dell'attività socio-motoria.

I risultati emersi da questa prima fase hanno mostrato che l'attività di scrittura è stata sottostimata da quasi la metà degli allievi, mentre il gioco "guardie e ladri" è stato sovrastimato da 13 allievi su 19 presenti. Questo significa che in generale l'attività di scrittura è stata percepita come più corta rispetto a quella di gioco. È importante notare come la totalità degli allievi abbia apprezzato l'attività di gioco, mentre 2 allievi abbiano affermato di non aver gradito l'attività di scrittura. L'ipotesi iniziale secondo la quale gli allievi avrebbero sottostimato la durata delle attività che hanno apprezzato e sovrastimato quella delle attività che hanno apprezzato meno sembrerebbe dunque rivelarsi, a questo stadio, almeno in parte infondata. In queste prime due attività i commenti degli allievi hanno permesso di riconoscere già alcune variabili, che Piaget ha categorizzato come "fattori periferici", che influenzano la percezione del tempo, quali per esempio lo sforzo, la difficoltà dell'azione svolta o l'interesse dimostrato dagli allievi per l'attività.
Potremmo interpretare i dati raccolti nella maniera seguente: i bambini tendono a stimare con più accuratezza le durate di attività di tipo "scolastico" che svolgono regolarmente e che implicano un minor numero di cambiamenti. Invece, la durata di attività meno usuali, durante le quali gli allievi si trovano in contesti alternativi e che comportano una certa fatica fisica, risultano più difficili da essere stimata. Questa ipotesi è parzialmente confermata da T., che durante il colloquio ha affermato: «Quando siamo andati fuori a giocare abbiamo corso e fatto tante cose, mi sembra-

va che il tempo non passava mai perché non finiva il gioco».
È interessante notare come un solo bambino su 19 abbia dimostrato durante il colloquio di avere già un'idea in merito ai fattori che influenzano la nostra percezione del tempo, affermando che: «(…) di solito quando ti diverti passa più il tempo, e lì [durante il gioco] mi sono divertito ma il tempo è durato comunque tanto». L'allievo in questione sembrerebbe dunque possedere una certa consapevolezza del fatto che le sensazioni personali influiscono sulla percezione del tempo.
Soltanto un'allieva è stata in grado di riconoscere che le due attività erano della stessa durata, sottostimandole entrambe. Questo è un aspetto significativo che dimostra quanto sia difficile per un allievo di terza elementare, ma non solo, riconoscere senza il supporto di strumenti di misurazione l'egual durata di due attività organizzate in contesti diversi e con modalità differenti.

### 3.2.2 Seconda fase: il quaderno del tempo

Nella seconda fase della sperimentazione, a cadenza regolare, i bambini sono stati chiamati a riflettere sulla durata di alcune attività scolastiche. Al fine di mettere i bambini in situazioni diverse, è stato importante variare attività, modalità di lavoro e spazi. Per questo motivo le attività proposte sono state le seguenti:

– esercitazione individuale di francese, svolta al proprio posto, utilizzando un quaderno didattico;
– ascolto di due capitoli del libro "Matilde" di Roald Dahl, svolto nell'angolo biblioteca con i bambini seduti sul tappeto;
– attività di misurazione del perimetro del piano di appoggio del banco utilizzando strumenti di misura non convenzionali, quali il cubito o la spanna, svolta a coppie in varie zone dell'aula;
– esercizio di scrittura, svolto individualmente al proprio posto;
– attività di lettura individuale svolta al proprio posto, seguita da un momento di confronto e discussione sul testo appena letto realizzata a grande gruppo, con i bambini seduti in cerchio;
– allenamento delle moltiplicazioni, svolto a gruppi di 3 bambini distribuiti nell'aula;
– attività di disegno di un'esperienza vissuta a scuola, realizzata individualmente al proprio posto, con sottofondo musicale.

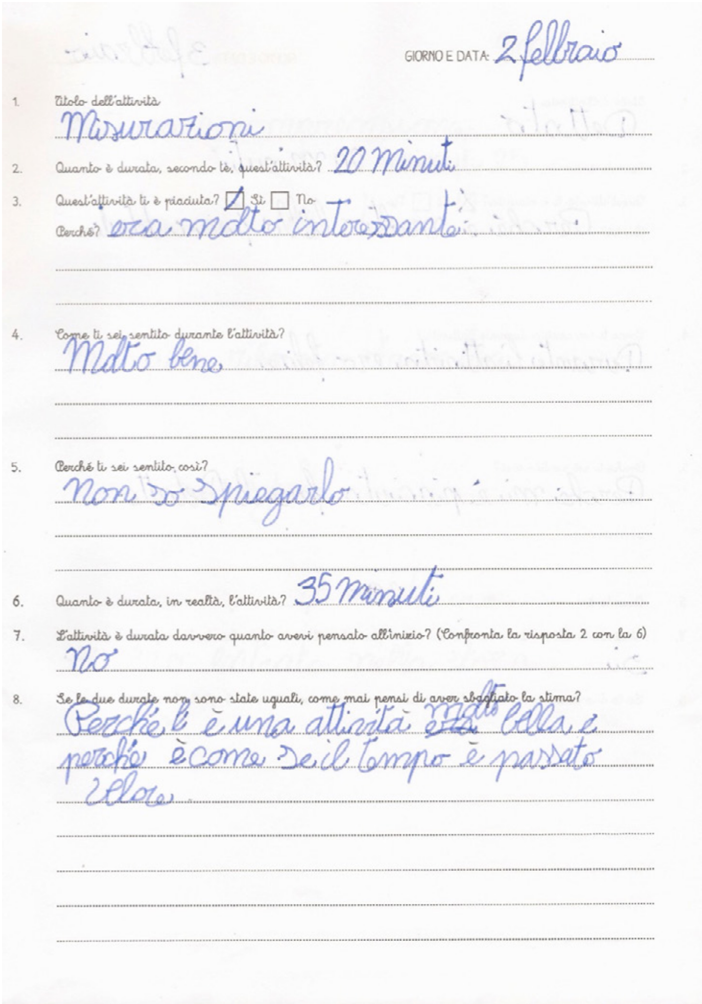
Tutti i momenti erano così organizzati: i bambini cominciavano l'attività al segnale del docente, svolgevano un determinato compito e, una volta annunciata la fine, riflettevano sulla durata dell'attività e sulle sensazioni provate, rispondendo alle domande presenti sul quaderno del tempo (Figura 3).
La modalità di lavoro proposta si basa sul seguente schema di lavoro:

- attività scolastica;
- riflessione, stima della sua durata;
- confronto tra stima e durata effettiva;
- nuova riflessione sul confronto tra stima e durata effettiva.

A differenza del formulario iniziale, il quaderno del tempo era strutturato in maniera più aperta, per garantire ai bambini la possibilità di esprimere le loro sensazioni senza essere influenzati da domande a risposta chiusa o a crocette. Ogni pagina del quaderno era strutturata come segue:

1. titolo o nome dell'attività svolta;
2. stima della durata dell'attività;
3. grado di apprezzamento dell'attività;

4. motivazioni relative al grado di apprezzamento dell'attività;
5. descrizione delle sensazioni provate durante l'attività;
6. motivazioni alla base delle sensazioni provate durante l'attività;
7. durata effettiva dell'attività (dato fornito dal docente);
8. confronto tra stima e durata effettiva;
9. spiegazione dell'allievo dell'eventuale incongruenza tra stima e durata effettiva.


GIORNO E DATA: 2 febbraio

1. Titolo dell'attività
Misurazioni

2. Quanto è durata, secondo te, quest'attività? 20 minuti

3. Quest'attività ti è piaciuta? ☑ Sì ☐ No
Perché? era molto interessante.

4. Come ti sei sentito durante l'attività?
Molto bene

5. Perché ti sei sentito così?
Non so spiegarlo

6. Quanto è durata, in realtà, l'attività? 35 minuti

7. L'attività è durata davvero quanto avevi pensato all'inizio? (Confronta la risposta 2 con la 6)
No

8. Se le due durate non sono state uguali, come mai pensi di aver sbagliato la stima?
Perché è una attività molto bella e perché è come se il tempo è passato veloce

Figura 3
Una pagina del "quaderno del tempo".

Lo scopo di questa struttura era quello di permettere ai bambini, in una prima fase, di ragionare a caldo sulla durata dell'attività svolta e sulle sensazioni vissute, lasciando loro la libertà di esprimersi in maniera piuttosto aperta. A fine riflessione veniva comunicata agli allievi la durata effettiva dell'attività, che è sempre stata misurata con strumenti diversi (clessidra ad acqua o a sabbia, orologio digitale o analogico, cronometro ecc.), e veniva chiesto loro di riflettere sull'eventuale errore di stima commesso e sulla personale interpretazione delle motivazioni alla base di queste discrepanze di stima.
A metà percorso è stato proposto un momento di discussione e messa in comune, durante il quale i bambini hanno potuto confrontarsi sul tema del tempo e su quanto emerso dalle prime riflessioni. Questa fase è stata fondamentale per favorire una presa di coscienza dell'aspetto soggettivo anche in allievi che, pur avendoci ragiona-

to, non avevano ancora raggiunto una reale consapevolezza. Di seguito è riportato un estratto della discussione che esemplifica il tipo di confronto avvenuto in classe:

A1: «Quando fai le cose e ti diverti sembra che le cose passano molto più lentamente».
A2: «Ma no!»
A1: «…eh molto più veloce, e invece se ti annoi passano più lentamente. Per esempio, se leggi un libro che non ti diverti dici che è passato un'ora e invece sono passati 10 minuti».
A3: «Però magari a me è piaciuto e a N. non è piaciuto. Quindi per lui è durato un'ora, per me è durato 5 minuti ma in verità è durato 10».
Ins.: «Quindi mi state dicendo che ognuno sente il tempo in maniera diversa?»
A1: «È diverso per tutti, dipende».

Andando a confrontare i dati ottenuti dalle attività proposte prima e dopo la discussione di metà percorso, emerge che la percentuale di bambini che sono riusciti a riflettere in maniera introspettiva è aumentata a seguito di tale discussione (Figura 4). Questo dato risulta interessante poiché consente di comprendere quanto il confronto tra allievi abbia permesso ad alcuni bambini di entrare in contatto con le idee dei compagni, sviluppando così maggiore coscienza di aspetti temporali che prima non riuscivano a cogliere.

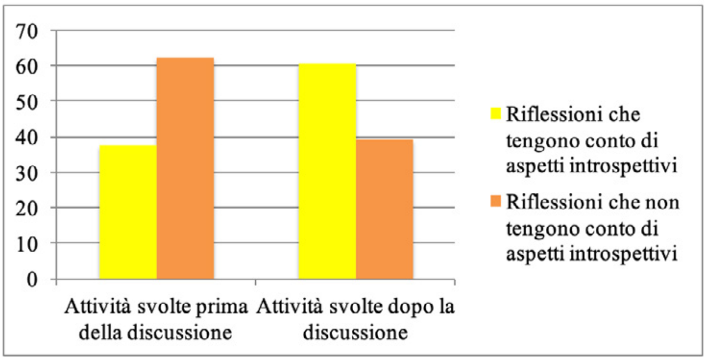



Figura 4
Dati ottenuti dalle attività proposte prima e dopo la discussione di metà percorso.

L'analisi dei dati raccolti attraverso il "quaderno del tempo", completato dopo aver realizzato le diverse attività, ha evidenziato i seguenti risultati: le 7 attività proposte durante il percorso sono state apprezzate quasi nel 90% dei casi. Le attività sono state quindi accolte perlopiù positivamente e dunque il confronto con le attività che hanno riscosso meno successo può fornire unicamente indicazioni puntuali. Analizzando il rapporto tra errore di stima della durata e livello di apprezzamento dell'attività, possiamo notare come le attività che sono piaciute agli allievi sono state sottostimate in 45 casi su 116; sono state sovrastimate in 54 casi e sono state stimate correttamente in 17 casi su 116. Invece, le attività che non sono piaciute sono state sottostimate in 12 casi su 16; sono state sovrastimate in 3 casi e sono state stimate correttamente in 1 solo caso su 16. Contrariamente alle aspettative, dall'analisi di questi dati sembrerebbe che la maggior parte dei bambini tenda a sovrastimare la durata delle attività che hanno apprezzato e a sottostimare la durata delle attività che non hanno considerato positivamente. Questo dato ci consente di intuire che i bambini non sono influenzati unicamente dalle loro sensazioni e dal loro interesse per l'attività svolta, ma da una serie di fattori evidentemente più ampi. Non sono dunque soltanto il divertimento o la noia ad influire sulla percezione tempo e sulla stima delle durate negli allievi. I dati emersi dalle tabelle sono stati analizzati cercando di individuare e categorizzare i fattori che influenzano la percezione del tempo nei bambini (Allegato 1).

Analizzando questi dati ci si rende conto della presenza di 3 tipi di motivazioni che i bambini hanno fornito con più frequenza, indipendentemente dall'apprezzamento o meno dell'attività:

– tipologia dell'attività (p. es.: "mi piacciono i dettati", "mi piace disegnare" ecc.);
– motivazioni intrinseche e personali (p. es: "perché per me era bella", "perché non mi è piaciuta" ecc.);
– condizioni e clima di lavoro (p. es.: "perché eravamo fuori all'aria aperta", "perché c'era molto silenzio" ecc.).

Il 76% delle motivazioni relative ad attività che sono piaciute e addirittura il 95% di quelle relative ad attività che non sono state apprezzate sono riconducili a queste 3 categorie. Ciò significa che queste sono le principali motivazioni che spingono un allievo ad apprezzare o meno una determinata attività e probabilmente, in maniera implicita, questi sono anche alcuni dei fattori che influiscono la percezione del tempo degli allievi.

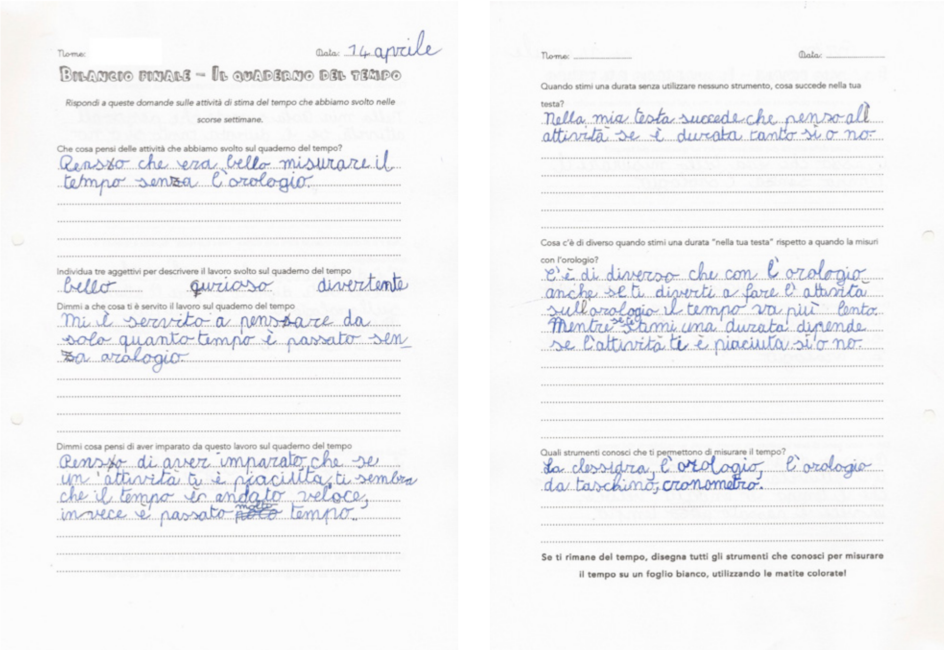
Osservando le variabili che influenzano la percezione del tempo individuate dai diversi autori (vedi Tabella 1), notiamo come alcune delle tipologie di motivazioni dei bambini siano compatibili con le categorie di fattori periferici. Infatti, le motivazioni relative alla tipologia dell'attività potrebbero rientrare nella categoria dei fattori periferici della prevedibilità, dell'interesse e della soddisfazione; le motivazioni intrinseche e personali potrebbero essere inserite nei fattori periferici dell'interesse e della soddisfazione; mentre le motivazioni relative a condizioni e clima di lavoro potrebbero formare una nuova categoria di fattori periferici.

### 3.2.3 Valutazione del percorso e discussione finale

Nell'ultima fase del percorso si è proposto un questionario di valutazione di quanto svolto, nel quale ogni allievo ha cercato di spiegare la valenza formativa di quanto fatto e ha provato ad esplicitare quanto appreso.

Il questionario di bilancio chiedeva innanzitutto di dare un giudizio al percorso svolto, attribuendogli poi tre aggettivi che lo potessero descrivere: questo ci ha permesso di capire se il lavoro svolto è stato apprezzato o meno. In seguito si è voluta sondare l'utilità del percorso vissuto dagli allievi, chiedendo loro cosa hanno imparato e a cosa è servito il lavoro, in modo da capire se c'è stata una presa di coscienza alla fine del percorso. Le domande successive sono invece state poste per spingere i bambini a ragionare in maniera metacognitiva sui processi messi in atto durante le attività di stima. Si è infine chiesto di elencare tutti gli strumenti per la misura del tempo conosciuti dai bambini, così da capire quanto gli strumenti utilizzati durante il percorso avessero lasciato un'impronta.

Ciò che è emerso da questi questionari è poi stato condiviso con l'intera classe durante una discussione che ha permesso ai bambini di argomentare le proprie posizioni.



Nome: Data: 14 aprile

BILANCIO FINALE – IL QUADERNO DEL TEMPO

*Rispondi a queste domande sulle attività di stima del tempo che abbiamo svolto nelle scorse settimane.*

Che cosa pensi delle attività che abbiamo svolto sul quaderno del tempo?

Penso che era bello misurare il tempo senza l'orologio.

Individua tre aggettivi per descrivere il lavoro svolto sul quaderno del tempo

bello curioso divertente

Dimmi a che cosa ti è servito il lavoro sul quaderno del tempo

Mi è servito a pensare da solo quanto tempo è passato senza orologio.

Dimmi cosa pensi di aver imparato da questo lavoro sul quaderno del tempo

Penso di aver imparato che se un'attività ti è piaciuta, ti sembra che il tempo è andato veloce, invece è passato ~~poco~~ molto tempo.

Nome: Data:

Quando stimi una durata senza utilizzare nessuno strumento, cosa succede nella tua testa?

Nella mia testa succede che penso all'attività se è durata tanto sì o no.

Cosa c'è di diverso quando stimi una durata "nella tua testa" rispetto a quando la misuri con l'orologio?

C'è di diverso che con l'orologio anche se ti diverti a fare l'attività sull'orologio il tempo va più lento. Mentre se tu stimi una durata dipende se l'attività ti è piaciuta sì o no.

Quali strumenti conosci che ti permettono di misurare il tempo?

La clessidra, l'orologio, l'orologio da taschino, cronometro.

**Se ti rimane del tempo, disegna tutti gli strumenti che conosci per misurare il tempo su un foglio bianco, utilizzando le matite colorate!**

Figura 5
Il bilancio finale redatto da un allievo.

Dai dati raccolti emerge che il percorso è stato accolto in maniera generalmente positiva dagli allievi: 17 bambini hanno infatti affermato di aver apprezzato le attività sul quaderno del tempo; 2 bambini hanno affermato di non averle apprezzate e 1 bambino ha affermato di averne apprezzate alcune e altre meno. Gli allievi che hanno riconosciuto di aver imparato nuove cose durante il percorso svolto sul tempo sono 13 su 20. 4 allievi hanno affermato di non aver appreso nulla da queste attività, i restanti 3 bambini hanno dato risposte generiche, scrivendo frasi come «credo di aver imparato il tempo» o «ho imparato a tenere nota e a distinguere il tempo che passa».

Dal questionario finale emerge inoltre come 13 bambini su 20, a fine percorso, siano stati in grado di riflettere in maniera introspettiva sulla percezione del tempo. Di questi, 9 allievi hanno dato spiegazioni relative all'influenza che hanno le sensazioni di noia e divertimento sulla percezione del tempo, sostenendo per esempio che «il tempo che passa, se c'è qualcosa di bello passa più veloce, invece se l'attività non ti piace non passa più». I restanti 4 allievi hanno dato spiegazioni un po' meno dettagliate, affermando per esempio che «Quando stimo una durata nella mia testa non mi sento aiutata. Ad esempio se passano 15 minuti magari per me ne sono passati 30»; «Con l'orologio sono avvantaggiato perché so la durata giusta, invece con la mia testa è più difficile. Magari io sbaglio, invece sull'orologio non sbaglio». Gli esiti degli studi di Piaget e di Cardaci, che riconoscono nel livello di soddisfazione del vissuto e nel tempo dell'attesa e dell'interesse dei fattori che influenzano la percezione del tempo, sono dunque almeno parzialmente confermati da questa sperimentazione.
Possiamo infine notare come il 95% degli allievi abbia riconosciuto una differenza tra tempo fisico e tempo psicologico, mentre 1 sola allieva ha affermato che tra questi non c'è distinzione. Tra gli allievi che hanno riconosciuto una differenza tra tempo psicologico e tempo fisico, in 6 hanno fatto riferimento al fatto che la mente è influenzata da fattori soggettivi, mentre l'orologio non è influenzabile ed è preci-

DdM 2019 (5), 133 - 149, DOI: 10.33683/ddm.18.5.6 

so; 2 allievi hanno affermato che l'orologio è preciso mentre la mente no; 7 allievi hanno affermato che con l'orologio è possibile vedere il tempo, mentre nella mente non si vede ed è necessario riflettere e fare delle stime; 2 allievi hanno affermato che utilizzare l'orologio è più facile, mentre stimare le durate è più difficile e altri 2 allievi hanno semplicemente affermato che l'orologio «è meglio». I dati raccolti sono sintetizzati nella tabella presente nell'**Allegato 2**.
I dati raccolti nelle tre fasi di questo lavoro, pur non essendo rappresentativi, mettono in discussione l'opinione di Piaget (1979), secondo il quale «nei più piccoli, il carattere egocentrico, ossia immediato e irreversibile, del pensiero è un ostacolo ad ogni introspezione» (p. 266). I dati raccolti dimostrano infatti che la maggior parte degli allievi di terza elementare, se messi a confronto con le idee dei compagni e spronati a riflettere sul loro operato, sono in grado di sviluppare delle interessanti riflessioni a carattere introspettivo. È pure opportuno ipotizzare che, proponendo un lavoro di questo tipo in maniera continuata per tutto il percorso scolastico degli allievi, tali capacità di riflessione introspettiva possano migliorare.

# 4 Conclusioni

I risultati ottenuti da questa sperimentazione hanno evidenziato come un lavoro vissuto dagli allievi sulla stima e sulla riflessione relativa al tema tempo abbia portato ad una presa di coscienza riguardo ai fattori soggettivi che influenzano la nostra percezione. Ciò dimostra che è possibile trattare questo tema già con allievi di scuola elementare, ottenendo risultati concreti.
L'analisi dei dati raccolti durante questi momenti di lavoro sulla percezione e sulla stima del tempo ha permesso di appurare, contrariamente a quanto ipotizzato inizialmente, come le capacità di stima delle durate degli allievi non siano evolute in maniera sostanziale. Tuttavia, questo percorso ha permesso alla maggior parte degli allievi di prendere coscienza di alcuni fattori che influenzano la percezione del tempo e di sviluppare una maggior consapevolezza sull'aspetto soggettivo della percezione. Questo è stato possibile anche grazie ai momenti di confronto e di discussione, strutturati partendo da quanto emerso nelle riflessioni dei bambini, che si sono confermati dei potenti mezzi di condivisione e di costruzione di senso. Favorire il confronto tra pari in un contesto di riflessione sulla percezione del tempo risulta dunque importante in quanto, come dimostrato in questo lavoro, permette ai bambini di prendere coscienza, attraverso le esperienze dei compagni, del rapporto tra sensazioni provate e percezione temporale.
Al fine di proporre un percorso più efficace sarebbe ovviamente utile dedicare un lasso di tempo maggiore alle attività di riflessione su questo tema. Nella migliore delle ipotesi, un percorso dilatato sull'intero anno scolastico sarebbe la soluzione ideale. Inoltre, per non limitare i momenti di riflessione all'utilizzo del quaderno del tempo, si potrebbero proporre anche altre attività legate alla percezione del tempo, in modo da ampliare e rendere più completo il percorso dal punto di vista didattico. Alcuni esempi potrebbero essere momenti di riflessione su esperienze vissute dai compagni e sulle relative stime legate al tempo; situazioni problema legate all'influenza della percezione del tempo nel vissuto dei bambini; scoperta di vari strumenti di misura del tempo e relative modalità di funzionamento; la lettura dell'orologio; eccetera.

L'utilizzo di vari strumenti di misura del tempo potrebbe poi venir esteso a tutti i momenti della vita di classe. I bambini potrebbero utilizzare la clessidra durante il lavoro autonomo, oppure il cronometro per stabilire la durata delle attività laboratoriali, in modo da prendere dimestichezza con questi strumenti e osservare concretamente lo scorrere del tempo fisico con modalità diverse. Favorendo queste esperienze su un esteso lasso di tempo, è ipotizzabile un miglioramento delle capacità di stima delle durate degli allievi, cosa che non è emersa in questo lavoro, forse a causa del limitato orizzonte temporale su cui si è protratta.
A questo punto non resta che sperimentare in classe: le riflessioni dei bambini sapranno sicuramente accendere l'entusiasmo e la curiosità di qualsiasi docente.

## Bibliografia


Aiolfi, A. M. (2009). Numeri, spazio e tempo. *Attività di scienze per fare matematica*. Roma: Carocci editore.

Bartolini Bussi, M. G. (2008). *Matematica. I numeri e lo spazio*. Azzano San Paolo: Junior edizioni.

Calvani, A. (1988). *Il bambino, il tempo, la storia*. Scandicci: La Nuova Italia editrice.

Cardaci, M. (2004). *Mi cambierebbe 25 minuti?* Roma: Francesco Bannò Editore.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/sites/default/files/pdf/Piano_di_studio_della_scuola_dell_obbligo_ticinese_COMPLETO.pdf (consultato l'11.01.2019).

Fraisse, P., & Piaget, J. (1975). *Trattato di psicologia sperimentale. La percezione*. Torino: Einaudi.

Fraisse, P., Halberg, F., Lejeune, H., Michon, A., Montangero, J., Nuttin, J., & Richelle, M. (1979). *Du temps biologique au temps psychologique*. Parigi: Presses Universitaires de France.

Karmiloff-Smith, A. (1992). *Oltre la mente modulare. Una prospettiva evolutiva sulla scienza cognitiva*. Bologna: il Mulino.

Lahman, M.K.E. (2008). *Always othered. Journal of early childhood research, 6*(3), 281-300.

Lakoff, G., & Núñez, E.R. (2000). *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.

Levin, I. (1982). *The nature and development of time concepts in children: the effects of interfering cues, in: Friedman, W.J. The developmental psychology of time*. New York: Academic Press.

Mauthner, M. (1997). Methodological aspects of collecting data from children: lessons from three research project. *Children & society, 11*, 16-28.

Moore, T., McArthur, M., & Noble-Carr, D. (2008). *Little voices and big ideas: lessons learned from children about research. International journal of qualitative methods, 7*(2), 77-91.

Pea, B. (2001). *Matematica nella scuola di base. I concetti dello spazio e del tempo nella scuo-*

*la materna e nel primo ciclo della scuola di base. Volume 1*. Brescia: Società editrice Vannini.

Petter, G. (1978). *Lo sviluppo mentale nelle ricerche di Jean Piaget*. Firenze: Giunti Barbèra.

Piaget, J. (1979). *Lo sviluppo della nozione di tempo nel bambino*. Firenze: La Nuova Italia editrice.

Punch, S. (2002). *Research with children: the same or different from research with adults Childhood?, 9*, 321-341.

Sandri, P. (2008a). *La didattica del tempo convenzionale. Riflessioni e percorsi per la scuola dell'infanzia e la scuola primaria*. Milano: Franco Angeli.

Sandri, P. (2008b). *Rappresentazioni temporali e deficit intellettivo lieve. Proposte didattiche per la scuola primaria*. Milano: Franco Angeli.

Skutina, V., & Sacré, M.J. (1989). *Dove abita il tempo*. Milano: Edizioni Arka.

Saurer, T. (2014). Piaget, Einstein, and the concept of time. Disponibile in: http://philsci-archive.pitt.edu/10637/1/damerow.pdf (consultato il 03.04.2015).

**Autore/Carlo Mina**
Istituto Scolastico di Locarno – Sede di Solduno, Svizzera
carlo.mina@edu.ti.ch

ESPERIENZA DIDATTICA

# Geometria alla scuola dell'infanzia: una pseudo-definizione di circonferenza

## Geometry in kindergarten: a pseudo-definition of circumference

**Elisabetta Robotti**
Dipartimento di Matematica – Università di Genova, Italia

**Sunto** / Il presente articolo illustra un percorso didattico sulla circonferenza condotto nella scuola dell'infanzia con bambini di 4-5 anni. Nel percorso, progettato in accordo con il quadro teorico della Mediazione Semiotica e basato su un approccio multimodale, i bambini arrivano a produrre una "pseudo-definizione" di circonferenza (Robotti, 2018). In essa, infatti, sono usate parole che si riferiscono a elementi percettivi legati alla forma, anche se è possibile identificare la natura dinamica della curva come traccia generata dal movimento di un punto. L'analisi del percorso didattico evidenzia il ruolo di mediazione sia dell'insegnante sia degli artefatti utilizzati, al fine di trasformare segni legati all'uso dei diversi artefatti in contesti percettivi e motori, in segni matematici legati al concetto geometrico di circonferenza.

Parole chiave: multimodalità; oggetti geometrici; invarianti geometriche; segni; mediazione semiotica.

**Abstract** / This paper deals with a teaching experiment concerning the notion of circumference in a geometrical context, conducted in kindergarten with children aged 4-5. Through a classroom-based intervention, designed according to the Semiotic Mediation theoretical framework and developed on a multimodal approach, children produce a "pseudo-definition of circumference" (Robotti, 2018), which still refers to perceptual elements linked to the shape, but where it is possible to identify the dynamic nature of the curve as a trace generated by the movement of a point. The analysis of the teaching experiment highlights the specific roles of the teacher and of artifacts in supporting the process of semiotic mediation through which the children and the teacher transform the signs linked to artifacts into mathematical signs.

Keywords: multimodality; geometrical objects; geometrical invariants; signs; semiotic mediation.

## 1 Introduzione

I concetti di spazio e di sistema di riferimento spaziale sono molto importanti per lo sviluppo psicologico e culturale dei bambini (Indicazioni Nazionali per il curriculo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, 2012). Bartolini Bussi (2008) considera diversi tipi di esperienze che si riferiscono allo spazio (lo spazio del corpo, gli spazi esterni e lo spazio astratto) mettendo in evidenza come esse siano legate a diverse attività cognitive e a diverse abilità in contesti specifici. Così, il passaggio progressivo dallo *spazio del corpo*, dove la percezione sensoriale definisce le forme, agli *spazi rappresentativi*, dove gli oggetti sono rappresentati come forme, per arrivare allo *spazio della geometria*, dove le figure geometriche sono identificate mediante le loro caratteristiche geometriche, costituisce una delle idee centrali dell'insegnamento e apprendimento della geometria. Con ciò, non ci riferiamo a un modello di apprendimento geometrico gerarchico. Di fatto, recenti ricerche si sono poste in contrasto con le opinioni di Piaget e Van Heile che descrivevano il pensiero geometrico attraverso un modello gerarchico formato da livelli in cui lo spazio astratto è posto

alla fine del processo evolutivo del bambino (Owens, 2015).
Anche se la definizione di figura geometrica non appare esplicitamente nei curricula fino alla metà della scuola elementare, la ricerca ha mostrato come la geometria abbia una base esperienziale intuitiva ben prima della scuola elementare (Bryant, 2008). Infatti, la letteratura riporta numerose ricerche riguardanti le esperienze di insegnamento della geometria già nella scuola dell'infanzia (Sinclair & Moss, 2012; Bartolini Bussi & Baccaglini-Frank, 2015). Secondo queste ricerche, lo sviluppo delle competenze spaziali dei bambini, così come la loro capacità di orientarsi nello spazio, sono nodi cruciali nella concettualizzazione dello spazio geometrico. Anche le esperienze corporee e quelle mediate dall'uso di strumenti, sembrano essenziali, perché fungono da ponte tra la modellizzazione fisica dello spazio e la concettualizzazione di uno spazio geometrico.
Così, sulla base di queste premesse, credo sia possibile esplorare la geometria già durante gli anni della scuola dell'infanzia, in maniera più consistente di quanto non si stia facendo al momento, almeno in Italia.
Questo studio si propone quindi di illustrare un percorso didattico per la scuola dell'infanzia, progettato coerentemente con il quadro concettuale della Mediazione Semiotica, in cui i bambini hanno fatto esperienza di una figura vicina, ma non completamente isomorfa, alla definizione di circonferenza. Da un punto di vista metodologico, l'obiettivo è mostrare come un approccio multimodale nelle attività della scuola dell'infanzia possa promuovere efficacemente l'esplorazione di figure in senso geometrico. A questo scopo mostrerò come i bambini arrivano a costruire una "pseudo-definizione di circonferenza" che, seppur ancora riferita a elementi percettivi legati alla forma, rimanda alla natura dinamica della curva come traccia del movimento di un punto.

## 2 Quadro teorico di riferimento

In questa ricerca la Teoria della Mediazione Semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), sviluppata per progettare e analizzare le attività didattiche, è il quadro metodologico di riferimento. La teoria fornisce un utile strumento per studiare il processo attraverso il quale l'attività didattica con artefatti può essere trasformata in efficace attività d'insegnamento-apprendimento della matematica.
Riassumendo i principali elementi della Teoria della Mediazione Semiotica (per maggiori dettagli, si veda Bartolini Bussi & Mariotti 2008), diciamo che l'insegnante ha la responsabilità di due principali processi: la progettazione delle attività e il loro funzionamento. Nel primo, l'insegnante fa scelte mirate sugli artefatti da utilizzare, i compiti da proporre e la conoscenza matematica che sarà oggetto di insegnamento. Nel secondo processo, l'insegnante monitora e gestisce i processi osservabili degli studenti (dette tracce semiotiche), per decidere come interagire con gli studenti al fine di trasformare i segni legati all'uso di artefatti in segni matematici. Gli studenti, dal canto loro, devono risolvere il compito attraverso l'uso di artefatti esplicitamente proposti dall'insegnante allo scopo. L'uso dell'artefatto produce, inevitabilmente, segni (oggetti, disegni, parole, gesti, movimenti corporei e così via) contestuali all'artefatto stesso, che non sono ancora esplicitamente segni matematici. Compito dell'insegnante è dunque raccogliere tutti questi segni, analizzarli e organizzare un

percorso che ne consenta l'evoluzione verso segni matematici che sono in relazione con la conoscenza matematica obiettivo d'insegnamento. La Teoria della Mediazione Semiotica identifica tre principali categorie di segni: i segni legati agli artefatti, che si riferiscono all'uso contestuale dell'artefatto, i segni matematici, che si riferiscono al contesto matematico e i segni *pivot*, che fungono da ponte tra i segni artefatti e i segni matematici. L'evoluzione e il ruolo di questi segni e, in particolare, il ruolo dei segni *pivot*, sarà oggetto dell'analisi di questo articolo.
Inoltre, in questa ricerca consideriamo il processo d'insegnamento-apprendimento come un'attività multimodale (Nemirovsky, 2003). Il termine multimodalità (Gallese & Lakoff, 2005) è usato per porre l'accento sull'importanza e la coesistenza di una varietà di modalità o risorse cognitive, materiali e percettive, nei processi di insegnamento-apprendimento e, più in generale, nella costruzione di significati matematici (Radford, Edwards & Arzarello, 2009) e del "pensiero astratto" (Lakoff & Nùñez, 2000).
Nemirovsky (2003) afferma che, la comprensione e, più in generale il pensiero, incluso il pensiero matematico, sono attività percettivo-motorie, che diventano più o meno attive a seconda del contesto.
Ciò significa che, sfruttando le componenti percettivo-motorie, il corpo diventa essenziale nei processi di pensiero così come nei processi di apprendimento: fare, toccare, muovere, muoversi, vedere ecc., sono componenti essenziali nello sviluppo del processo di pensiero matematico – dalle fasi iniziali ai più avanzati processi di apprendimento (Arzarello, Pezzi & Robutti, 2007; de Freitas & Sinclair, 2013; Radford, 2014).
In questa ricerca, la multimodalità coinvolge in particolare il disegno, il gesto, la manipolazione di artefatti fisici e vari tipi di movimento corporeo (Robotti, 2018).

## 3 Metodologia

Il gruppo che ha preso parte al percorso didattico è di 21 bambini di età compresa tra 4 e 5 anni. Tre insegnanti sono state coinvolte durante le 13 sessioni sviluppate nell'anno scolastico 2017/18 per circa 5 settimane (più o meno due o tre volte a settimana). Gli insegnanti e un ricercatore (l'autore) hanno progettato il percorso didattico.
Le attività sono state sviluppate in gruppo o individualmente, in aula, in palestra o all'aperto sempre con la guida dell'insegnante.
Ogni sessione è stata attentamente documentata da uno degli insegnanti coinvolti, con la raccolta di foto, video e audio registrazioni, le trascrizioni dei dialoghi e gli appunti del diario di bordo degli insegnanti.
In quest'articolo si è scelto di non descrivere tutte le attività svolte, ma di concentrarsi solo su quelle più significative e ricche rispetto alla produzione di segni. In particolare, la descrizione del percorso didattico è organizzata tramite una sequenza di sessioni che, a volte, per questioni di economia e di spazio, comprendono la descrizione di più attività.
Per orientarsi fra le sessioni che saranno descritte, riteniamo possa essere utile al lettore una panoramica completa delle 13 attività didattiche che compongono il percorso. Di seguito, quindi, ne sarà fornita una breve descrizione:

1. Si chiede ai bambini di costruire, in palestra, un percorso con materiali diversi (birilli, cerchi in plastica, mattoni in legno, bastoni, biglie in legno e in plastica ecc.). Si chiede loro di seguire il percorso commentando le azioni eseguite: "faccio la capriola", "scavalco il bastone", "salto dentro al cerchio", "tiro a canestro" ecc.
2. Si chiede ai bambini di disegnare dal vivo il percorso costruito in precedenza, ognuno da un punto di vista differente. In seguito, i bambini cambiano la loro postazione di lavoro e disegnano nuovamente il percorso per visualizzare e rappresentare gli oggetti del percorso da un altro punto di vista.
3. Si avvia una discussione sui lavori di rappresentazione del percorso ottenuto, evidenziando il ruolo dei punti di vista.
4. Si forniscono ai bambini cerchi in plastica e scatoloni e si chiede loro di giocare liberamente con questi oggetti. I bambini entrano ed escono da scatole e cerchi. Si chiede poi un'elaborazione grafica del gioco (rappresentazione sul foglio dei giochi; l'insegnante fa opera di "prestamano" per la scrittura della descrizione dei giochi).
5. Si propone ai bambini il gioco del topo-topolino: in giardino i bambini formano un cerchio tenendosi per mano. Un bambino entra all'interno del cerchio e assume il ruolo del topo, un altro rimane all'esterno del cerchio e assume il ruolo del gatto. Si procede con la recita di una filastrocca che dà avvio alla rincorsa del topo (uscito dal cerchio) da parte del gatto.
6. Si forniscono ai bambini diversi materiali che vengono posizionati sul pavimento della palestra: fogli A0, cerchi in plastica, pastelli. Si chiede ai bambini cosa si potrebbe fare con quel materiale. I bambini avanzano diverse proposte e poi, insieme all'insegnante, concordano a che ciascuno di loro sovrapponga un cerchio (in plastica) su un foglio, ne disegni il contorno, entri nel cerchio rappresentato e disegni liberamente sul foglio, fuori dal cerchio.
7. Si avvia una discussione collettiva sui significati di punto, linea e cerchio tramite la domanda stimolo: "che cosa sono, secondo voi un punto, una linea e un cerchio?". Alla discussione è associata un'attività di rappresentazione, sul foglio, di punti, linee e cerchi.
8. Si chiede ai bambini di rappresentare sul pavimento della palestra un cerchio utilizzando diverso materiale (cubi in legno di dimensioni diverse, bastoni di lunghezze e spessori differenti, palline in legno o in altro materiale ecc.).
9. Si chiede ai bambini di cooperare per costruire un unico cerchio con il materiale a disposizione. Spontaneamente, terminato il compito, i bambini entrano all'interno del grande cerchio e, raggomitolandosi su se stessi uno accanto all'altro, riproducono un cerchio.
10. Si chiede ai bambini di posizionarsi in piedi e riprodurre il cerchio di bambini dandosi la mano. I bambini concordano nel posizionare, all'interno del cerchio, un mattoncino in legno e dichiarano che esso occupa la posizione centrale.
11. L'insegnante procede con la domanda stimolo: «come si fa ad essere sicuri che il mattoncino di legno è proprio al centro?»; si procede con una discussione collettiva dove, come vedremo, emergono alcune invarianti della circonferenza (centro e distanza dal centro).
12. Si chiede ai bambini di rappresentare su un foglio una circonferenza usando un punto come centro e delle listarelle di carta come raggi.
13. Si fornisce materiale ai bambini per rappresentare, sul pavimento della palestra, una circonferenza che tenga conto delle invarianti identificate nella discussione

collettiva (centro e raggio). Si chiede di fornire una descrizione di cerchio tramite la domanda stimolo: «se dovessimo raccontare ad altri bambini che cosa è un cerchio, cosa direste?».

### 3.1 Sessione 1: perché la scelta della "circonferenza"

Gli insegnanti lavorano sull'orientamento spaziale, sui punti di vista e su nozioni topologiche come "dentro" e "fuori".

Figura 1
Spazio del corpo e spazio della realtà.

Figura 2
Spazio del corpo e spazio rappresentativo del foglio.

Viene chiesto dapprima ai bambini di costruire fisicamente (in palestra) un percorso con materiali diversi: cerchi in plastica, blocchi di legno, birilli ecc. Viene poi chiesto di posizionarsi dentro o fuori alcuni elementi del percorso come i cerchi di plastica o le scatole di cartone. È chiesto inoltre di costruire cerchi con materiale vario o con blocchi in legno (**Figura 1**) e di posizionarsi dentro o fuori di esso. Viene poi chiesto di rappresentare figure fuori dal cerchio (**Figura 2**). Infine, si chiede ai bambini di disegnare, su un foglio di carta, il percorso e i cerchi da diversi punti di vista.
Alcuni lavori sono motivo di discussione fra i bambini a causa dei disegni del "cerchio", perché non tutti sono accettati come rappresentanti della figura "cerchio".
L'insegnante rilancia la consegna chiedendo: «che cos'è un cerchio?». Come primo passo, i bambini categorizzano i disegni. Così, l'attenzione si concentra sugli aspetti narrativi come le possibili somiglianze/differenze tra le forme: i disegni sembrano uova, fragole e così via (**Figura 3**).

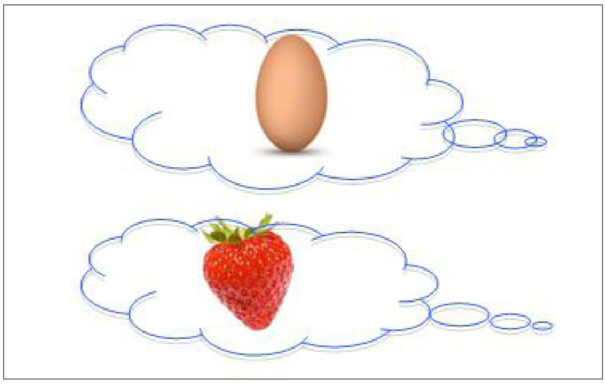


Figura 3
Riconoscimento delle somiglianze e differenze tra le forme.

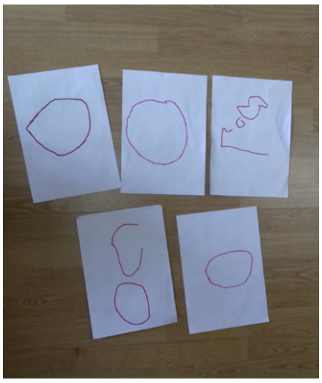


Figura 4
Cerchi come curve chiuse e non cerchi come curve aperte.

Successivamente, i bambini passano ad una prima forma di generalizzazione distinguendo i cerchi come curve chiuse e i "non cerchi" come curve aperte (**Figura 4**). I bambini usano espressioni come: "Questo è un cerchio perché è attaccato, questo no perché è staccato".

Osserviamo come le attività cognitive dei bambini durante l'esplorazione siano influenzate dai diversi tipi di spazio in cui è chiesto loro di lavorare: nel micro-spazio del foglio (o spazio rappresentativo) dove disegnano un cerchio, l'esplorazione è possibile attraverso la vista e può essere assunto un unico punto di vista da cui si ha una visione globale dell'oggetto disegnato; invece, nel macro-spazio della palestra (o spazio del corpo), ogni bambino è incluso nello spazio stesso e l'esplorazione è possibile spostandosi al suo interno, assumendo diversi punti di vista. Nell'esplorazione di questi spazi, il sistema di riferimento è egocentrico e, a questo punto, i bambini identificano un cerchio come un "rotondo chiuso".

### 3.2 Sessione 2: costruzione di un cerchio

In questa sessione, viene chiesto ai bambini di costruire cerchi, ancora con i blocchi di legno (**Figura 1**) e, in seguito, tenendosi per mano (**Figura 5**) e viene chiesto di descrivere i cerchi.

Figura 5
Girotondo di bambini che si tengono per mano.

La finalità di queste consegne è consolidare la caratterizzazione della "forma rotonda chiusa" attraverso descrizioni che si sviluppano da diversi punti di vista.
Una volta realizzato il cerchio di bambini, spontaneamente P. prende la posizione centrale all'interno di esso dicendo: «Sono il centro del cerchio». Sappiamo che, almeno in Italia, sono numerosi i giochi che vedono i bambini tenersi per mano formando un cerchio e identificare posizioni privilegiate rispetto ad esso, come dentro o fuori. Non stupisce molto, quindi, che un bambino verbalizzi tale posizione come "il centro del cerchio". Siamo convinti però che la parola "centro" non rimandi qui al "centro geometrico" ma costituisca esclusivamente una etichetta per una posizione privilegiata dentro il cerchio di bambini.
In questa fase, possiamo identificare vari segni verbali e gestuali: alcuni bambini fanno ruotare il dito indice, un gesto significativo che serve per mostrare ai compagni come disporsi al fine di ottenere un cerchio. La rotazione dell'indice è un gesto

legato al concetto di traccia, simula cioè la traccia della circonferenza come "forma rotonda chiusa" e, per questo, è un gesto *iconico*. Osserviamo come qui, il cerchio di bambini (o di blocchi di legno), inteso come segno prodotto dai bambini stessi usando l'artefatto "blocchi di legno" o l'artefatto "bambini", ha ancora il significato di forma in senso statico perché è concepita come un insieme di punti (bambini o blocchi di legno). La parola "centro" si riferisce a una posizione privilegiata all'interno del cerchio, approssimativamente al suo centro. È un segno verbale cui i bambini non si riferiscono in termini di "punto", né esso viene messo in relazione ad una "misura" (lunghezza). Per questo, la parola assume il ruolo di segno *pivot* che l'insegnante dovrà trasformare in segno geometrico ("centro di una circonferenza").
Nelle due consegne è possibile osservare un cambio di punto di vista: usando i blocchi di legno per costruire un cerchio, i bambini assumono un punto di vista esterno rispetto al cerchio e hanno una visione globale di esso; nel cerchio di bambini, dove ciascuno di essi occupa il proprio posto nel cerchio, ogni bambino assume un punto di vista interno ed ha una visione parziale di esso.
Questo è vero per tutti i bambini ad eccezione di V. (bambina assai vivace che spesso prende l'iniziativa) che decide di uscire spontaneamente dal gruppo per descrivere il cerchio di compagni e la posizione di P. L'insegnante sa che V. ama essere al centro dell'attenzione e l'iniziativa di P. sembra averle "rubato la scena". Per questo, V. esce dal cerchio e comincia a descriverlo da una posizione esterna. Giacché per lei non è possibile assumere un unico punto di vista per l'esplorazione e la descrizione, V. assume un sistema di riferimento egocentrico che le consente di aggiornare il flusso di informazioni spaziali in relazione ai suoi movimenti rispetto al cerchio (dentro e fuori dal cerchio). V., infatti, dice che lei assume una posizione esterna al cerchio ("fuori dal cerchio") mentre «P. non è come me, perché lui è dentro mentre io sono fuori». Quando però V. cerca di leggere la regolarità della forma in termini di distanza dei bambini dal centro, assume un sistema di tipo allocentrico e considera il centro come punto di riferimento privilegiato. V. dice, infatti: «P. è nel mezzo del cerchio» (la posizione di V., quindi, non è più presa come riferimento per definire la posizione di P. rispetto al cerchio). Ciò conferma che la scelta del punto di vista non è legata allo sviluppo cognitivo del bambino, come considerato per lungo tempo dalla teoria piagetiana ma, piuttosto, ai compiti che il bambino deve svolgere.

### 3.3 Sessione 3: i segni pivot "bastoni" e "centro"

Obiettivo dell'attività didattica, è trasformare il segno pivot "centro", legato al significato di "punto privilegiato", nel segno geometrico "centro di una circonferenza". Così, l'insegnante chiede ai bambini: «come possiamo essere sicuri che questo punto sia davvero al centro?». I bambini hanno a disposizione diversi artefatti: bastoni di legno della stessa lunghezza e di lunghezze diverse, birilli, vernice, pennelli, corda, blocchi di legno.
Riportiamo qui di seguito una parte di uno scambio verbale particolarmente interessante tra V., e l'insegnante, I., da cui è scaturita la definizione del nuovo segno pivot "bastone", adottato dall'intera classe, e che, al termine della discussione, è stato messo in relazione al raggio inteso e nominato come «uguale distanza dal centro». Ricordiamo che, nelle sessioni precedenti, V. ha introdotto il termine "centro" collegato al significato di "punto privilegiato", e che l'insegnante vuole usarlo come segno *pivot*.

I.:« Come possiamo essere sicuri che questo punto sia veramente il centro?»
V.: «Dobbiamo misurare con i piedi cioè dobbiamo mettere un piede dietro l'altro [ci prova ma la figura del cerchio che ottiene non è soddisfacente per il fatto che i suoi compagni si muovono non tenendo la posizione]».

V. allora propone di usare i blocchi di legno, così ciascun compagno costruisce la propria distanza dal centro mettendo i blocchi uno accanto all'altro a partire dai piedi verso il centro. I blocchi, però hanno diversa lunghezza così le distanze dal centro non risultano tutte uguali, come nelle intenzioni di V. (**Figura 6**). Tutti si rendono conto di ciò e alcuni bambini usano ancora l'indice della mano per indicare che la forma non è rotonda anche se è chiusa.

**Figura 6**
Distanze dal centro definite con blocchi di legno di diversa dimensione.

V.: «Dobbiamo provare con i bastoni! [ciascun bambino prende un bastone e lo posiziona in modo che un estremo tocchi il centro e l'altro i piedi del bambino stesso]».
I.: «Ok bambini, che cosa avete fatto?»
R.: «Un cerchio fatto bene!»
I.: «Perché è fatto bene?»
V.: «Perché ci sono i bastoni tutti uguali e partono tutti dal punto che sta in mezzo! Siamo tutti distanti uguali [dal centro]» (**Figura 7**).


**Figura 7**
Distanze dal centro definite con bastoni di uguale lunghezza.

In questo stralcio, assistiamo ad una combinazione di movimento del corpo (per ottenere l'uguale distanza dal centro misurata, per esempio, mettendo un piede dopo l'altro), di gesti (con le dita per mostrare la forma rotonda e chiusa), di parole ("centro", "uguale distanza") e di disegni che rappresentano questo processo (Figura 8). La parola "bastoni" associata al significato di "uguale distanza" svolge il ruolo di segno *pivot*, perché rappresenta la definizione embrionale di "raggio" (Figura 7) attraverso il quale, insieme al segno *pivot* "centro", i bambini costruiranno l'idea di circonferenza.
I dati raccolti mostrano come tutti i bambini adottino il segno *pivot* "bastoni" quando l'insegnante chiede di rappresentare, su un foglio tondo, il cerchio di bambini (Figura 8).

Figura 8
Rappresentazione del cerchio di bambini che si tengono per mano.

Ciò che si ottiene non è, ovviamente, una costruzione in senso geometrico, ma possiamo riconoscere un'embrionale costruzione geometrica della circonferenza per gli invarianti considerati (punto centrale e bastoni).
Osserviamo anche come la rappresentazione ottenuta (Figura 8) abbia ancora il significato di una curva in senso statico, perché è ancora intesa come un insieme di punti, generata posizionando, uno dopo l'altro, i bambini. Qui è anche possibile identificare un'azione ripetuta che definisce un'associazione biunivoca fra bastone e bambino.
La consegna successiva ha come obiettivo quello di portare i bambini ad un salto di astrazione mantenendoli, però, nel micro-spazio rappresentativo del foglio. L'insegnante allora chiede di disegnare, su un foglio A4, "un cerchio perfetto", dove la parola "perfetto" può rimandare sia ad un semplice aspetto percettivo (cerchio tondo), sia alla relazione fra le invarianti della figura (centro e raggio).
I bambini disegnano un punto (di diverse dimensioni) e tracciano, a mano libera attorno ad essa una curva chiusa. I bambini dichiarano che il cerchio "è tutto storto" (Figura 9) enfatizzando come l'evidenza percettiva guidi ancora la costruzione così come la "lettura" del disegno.

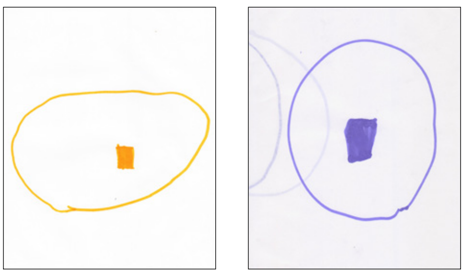


Figura 9
Esempi di cerchio tracciati a mano libera attorno ad un punto identificato come avente una posizione centrale.

I bambini stessi si pongono l'obiettivo di superare questo ostacolo evocando le ultime esperienze in giardino e in salone (**Figura 6** e **Figura 7**). I bambini ricordano le parole di V., che interviene direttamente dicendo: «si deve prendere la misura dal centro!». Così V. sceglie come unità di misura il tappo del pennarello che sta usando, e definisce quindi il raggio della stessa misura del tappo. Posiziona un estremo del tappo accanto al centro e con l'altro estremo traccia dei segni (**Figura 10**).

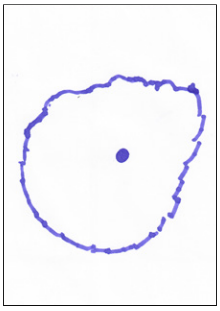
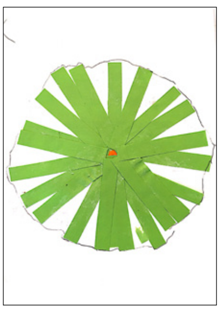


Figura 10
Cerchio tracciato da V. considerando come misura del raggio il tappo del pennarello.

Terminata l'operazione, V. sostiene che «ha fatto bene» (è possibile interpretare queste parole come l'espressione implicita della consapevolezza di aver seguito la definizione per la procedura di costruzione della figura) ma non è comunque soddisfatta perché «sembra un uovo, è ovale» (è possibile identificare in queste parole l'uso di criteri percettivi per validare il prodotto della procedura di costruzione). Così, i bambini stessi propongono di «mettere dei bastoncini dal centro per prendere la misura». Insieme all'insegnante, si concorda di realizzare i bastoncini con striscioline di carta della stessa lunghezza. Ogni bambino, partendo da un punto sul foglio, incolla i bastoncini colorati. Quando il bambino ritiene di aver incollato un numero di bastoncini sufficiente, traccia il cerchio con la matita unendo i punti estremi dei bastoncini (**Figura 11, 12**).
Molti bambini non riescono ad eseguire la consegna al primo tentativo, così l'insegnante decide di avviare una discussione collettiva dalla quale emerge che è necessario rifare il compito perché:
– non tutti i bastoncini di carta sono stati incollati a partire dal centro;
– non sono stati incollati un numero sufficiente di bastoncini di carta;
– non sono stati toccati con la matita tutti gli estremi dei bastoncini incollati per disegnare il cerchio.
La discussione porta i bambini a dire che il cerchio così ottenuto «non è venuto bene perché i punti [estremi dei bastoncini] non sono alla stessa distanza [dal centro]» (**Figura 12**).



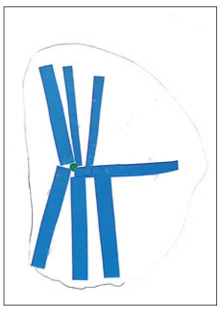


Figura 11
Rappresentazione del cerchio con invarianti in tre dimensioni.

Figura 12
Mancata rappresentazione del cerchio con invarianti in tre dimensioni.

### 3.4 Sessione 4: la circonferenza come traccia dinamica

Per rendere esplicite le relazioni geometriche tra centro (posizione centrale), raggio (bastoni) e punti sulla circonferenza (bambini o estremi dei bastoncini colorati), l'insegnante chiede di disegnare un cerchio sul pavimento, mettendo a disposizione dei bambini diversi artefatti (**Figura 13**): un cono di plastica, una corda, un bastone, un pennello, della pittura ecc.

Figura 13
Artefatti a disposizione dei bambini per poter disegnare un cerchio sul pavimento della palestra.

Tutti i bambini concordano nell'avviare l'attività misurando distanze uguali a partire dal centro. A questo scopo, usano diverse unità di misura, più o meno efficaci: la bomboletta di vernice (posizionata in orizzontale sul pavimento), il bastone, il pennello; la curva, ottenuta con la corda, la distanza definita dal centro (in **Figura 14** tramite la lunghezza del pennello), non produce un risultato soddisfacente perché non garantisce di mantenere "sempre la stessa distanza dal centro". Osserviamo che la curva mantiene ancora caratteristica di staticità.

Figura 14
Curva ottenuta usando il pennello come raggio a partire dal centro, identificato nel birillo. Per la rappresentazione della traccia, è usata la corda.

I bambini tornano all'analisi degli artefatti e decidono, autonomamente, di riutilizzare il materiale in modo diverso fissando un capo della corda al bastone centrato sul cono in plastica e l'altro capo al pennello (**Figura 15**). Immersa la punta del pennello nella pittura, i bambini iniziano a tracciare la curva che qui assume la caratteristica di dinamicità perché è la traccia di un punto che ruota attorno al centro. Non si riesce però a rispettare, come risulta evidente dalla **Figura 16** e dalla **Figura 17**, una condizione: mantenerne sempre la stessa distanza dal centro. Operativamente, cioè, la corda non viene mantenuta sempre tesa.

**Figura 15**
Un capo della corda è stato fissato al cono, che assume la posizione centrale, e l'altro capo al pennello.

Per questo, la traccia ottenuta non sembra rispondere alle condizioni di chiusura e regolarità che sono ancora le caratteristiche percettive sulla base delle quali i bambini sembrano validare i loro prodotti.

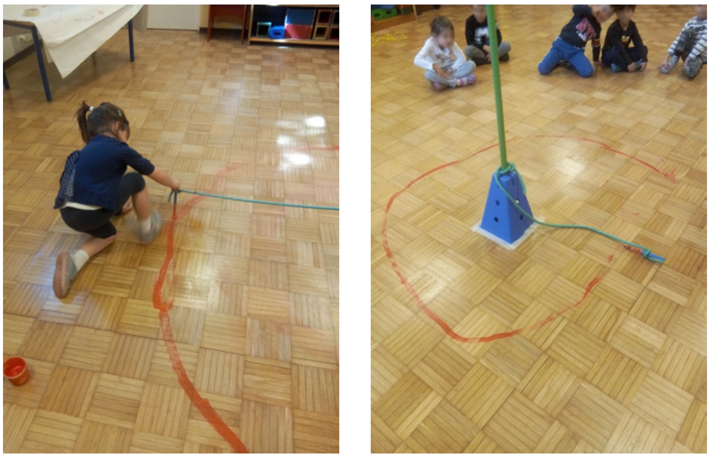


**Figura 16 – 17**
La traccia del cerchio ottenuta dinamicamente tramite pittura e pennello non rispetta le condizioni di chiusura e regolarità.

I bambini decidono allora, dopo una breve discussione, di tracciare una serie di punti sul pavimento (**Figura 18**, **Figura 19**) che consentono più facilmente di mantenere "tesa la corda" e, quindi, di mantenere sempre la stessa distanza dal centro. Questa rappresentazione ha ancora traccia delle esperienze precedenti, nelle quali i bambini prendevano il posto di questi punti. La successiva unione dei punti con una traccia continua (**Figura 19**, **Figura 20**) definisce però dinamicamente la curva come movimento del punto (punta del pennello) attorno al centro (cono).

Figura 18 – 19
Rappresentazione di punti sul pavimento.

Figura 20
Unione dei punti con una traccia continua.

### 3.5 Sessione 5: definizione "pseudo-geometrica" di circonferenza

Come è facile osservare, le attività didattiche condotte fino a questo momento si sono sviluppate nel macro-spazio di realtà e nel micro-spazio rappresentativo del foglio dove, spesso, le interpretazioni delle configurazioni ottenute si sono basate su aspetti percettivi. Quindi, per fare in modo che la descrizione delle relazioni fra centro e raggio della circonferenza si avvalga sempre più di principi geometrici piuttosto che di criteri percettivi, si definiscono consegne che richiedono l'uso della verbalizzazione: lo spazio esperienziale dei bambini si allontana dall'uso di artefatti che producono segni artefatto (o segni situati) per avvicinarsi a segni sempre più matematici, afferenti cioè allo spazio geometrico.
A questo scopo, l'insegnante avvia la discussione seguente:

I.: «Se dovessimo spiegare ad altri bambini che cosa è un cerchio, voi, che cosa direste?»
R.: «Mettiamo un punto e mettiamo le righe, i bastoni, che sono tutti uguali».
I.: «E dove mettiamo i bastoni?»
R.: «Devono stare tutti alla stessa misura, non uno più lontano e uno più vicino!»
I.: «E da dove la prendiamo la misura?»
R.: «Dal punto che sta in mezzo, dal centro».
V.: «Prendiamo un punto, il centro, e mettiamo giù i bastoni, bastoni tutti uguali, che partono dal centro. Così prendiamo la stessa *misura*, la stessa *distanza* dal centro».
I.: «Quindi, cos'è un cerchio?»
F.: «È una cosa rotonda e ci sono tutte le linee uguali dal punto, dal centro».

Nella discussione è possibile identificare descrizioni procedurali che si avvalgono di segni *artefatto* in luogo di *segni geometrici*. Per esempio, nel suo intervento, R. fa riferimento ai bastoni «che sono tutti uguali» per riferirsi a raggi della stessa lunghezza, o ancora fa riferimento alla misura della lunghezza che però identifica anche una posizione: «[i bastoni] devono stare tutti alla stessa misura».
Così, per rispondere alla domanda dell'insegnante: «cos'è un cerchio?», R. descrive la procedura di costruzione del cerchio che identifica e caratterizza la forma - non ancora come figura geometrica - in termini percettivi. La percezione, qui, è dominante rispetto alla generalizzazione.
È possibile però identificare, nell'intervento di V., una descrizione procedurale più

strutturata: prendiamo un punto, chiamato centro, disponiamo i bastoni, che devono essere tutti uguali (della stessa lunghezza), a partire dal centro. V. giustifica la necessità di bastoni uguali e disposti tutti a partire dal centro, dicendo che in questo modo si ha la stessa misura a partire dal centro (in segni matematici, possiamo dire che viene descritto il significato di raggio). Le parole (segni situati) usate da V. assumono in modo incisivo il ruolo di segni *pivot* perché sanciscono il legame fra segni artefatto e segni geometrici. Se, infatti, le parole "righe" (in qualche modo legata più al mondo della rappresentazione che al mondo reale) e "bastoni" (che invece rimanda al mondo reale), presenti una accanto all'altra nel primo intervento di R., evidenziano il ruolo della parola "bastoni, che sono tutti uguali" come sinonimo di "uguale lunghezza/misura", senza definire una relazione esplicita con la posizione centrale, altre parole usate da V. nella descrizione della procedura di costruzione, passano dall'essere strettamente correlate all'esperienza materiale e percettiva (bastoni uguali, punto nel mezzo) all'essere più vicine alla generalizzazione geometrica (lunghezza, misura, distanza, centro). Così, nell'intervento di V. la parola "bastoni", per esempio, assume il ruolo di segno *pivot*, perché è esplicitamente legata alla "distanza dal centro" e, quindi, al raggio, attraverso la parola "misura".

La discussione si conclude quindi con la caratterizzazione della circonferenza che potrà essere comunicata ad altri bambini: «Un cerchio è un "rotondo" fatto di molti punti uniti che hanno la stessa distanza (la stessa misura) dal centro».
Abbiamo definito questa caratterizzazione come *pseudo-geometrica* perché si riferisce ancora a elementi percettivi legati alla forma ma in essa è comunque possibile identificare la natura dinamica della curva come traccia generata dal movimento del punto mantenuto alla stessa distanza dal centro. In particolare, osserviamo come la parola "rotondo" si riferisca allo spazio rappresentativo, dove cioè la percezione guida l'interpretazione della figura. Al contempo però, l'espressione "punti collegati fra loro che hanno la stessa distanza dal centro" evidenzia come la curva sia concepita in modo dinamico in termini di movimento del punto attorno al centro, mantenendo la stessa distanza da esso; qui è possibile riconoscere il significato embrionale di "raggio". Si riconoscono così gli invarianti e le loro relazioni che consentono di definire la circonferenza intesa come il luogo dei punti equidistanti dal punto denominato centro.

## 4 Discussione e conclusioni

Lo studio si è proposto di illustrare un percorso didattico svolto alla scuola dell'infanzia che ha condotto i bambini all'esplorazione del cerchio, dapprima in termini percettivi e, in seguito, in termini più astratti come figura vicina, ma non completamente isomorfa alla circonferenza, nella sua definizione geometrica. La figura in oggetto, per il livello scolare in cui si lavora, viene comunque sempre etichettata in termini di "cerchio".
Il percorso didattico è stato progettato e analizzato con il quadro concettuale della Mediazione Semiotica, che ha consentito di evidenziare come l'uso di diversi artefatti, la produzione di segni legati a questi artefatti e la loro trasformazione in segni matematici tramite la mediazione dell'insegnante, abbiano contribuito alla formula-

zione di ciò che abbiamo chiamato *pseudo-definizione* di circonferenza.

Da un punto di vista metodologico, la ricerca sembra aver mostrato il ruolo importante dell'approccio multimodale come approccio efficace per promuovere l'esplorazione di figure in senso geometrico. A tale scopo, alcuni aspetti cognitivi e alcune scelte didattiche sembrano aver giocato un ruolo chiave:

– La multimodalità, come approccio didattico, coinvolge aspetti percettivi e senso-motori e sfrutta quindi il corpo per plasmare il pensiero geometrico. Così, la costruzione di un cerchio di bambini o di blocchi di legno, associate alla richiesta della loro rappresentazione o della loro descrizione, sembrano giocare un ruolo fondamentale per lo sviluppo della concettualizzazione della circonferenza. Per questo, le attività sono state contestualizzate in diversi tipi di spazio: micro-spazio (foglio) e macro-spazio (palestra, giardino ecc.), in modo tale che, per soddisfare le richieste dell'insegnante, l'esplorazione dei bambini comportasse il cambiamento di sistema di riferimento e di punto di vista.
– A tale scopo, lo spostamento dal sistema *egocentrico*, che costituisce il riferimento delle prime esplorazioni, al sistema *allocentrico*, che costituisce il riferimento nelle descrizioni successive, sembra aver permesso ai bambini di identificare le invarianti della figura geometrica (centro e distanza dal centro-raggio) descrivendone le relazioni spaziali in modo indipendente dal soggetto.
– Questa transizione sembra essere favorita sia dalla varietà degli artefatti (blocchi di legno, bastoni, bambini stessi) sia dalla possibilità di discussione e confronto con i compagni sui segni prodotti (gesti, parole, movimenti del corpo, disegni ecc.) e sul loro legame con i segni geometrici. La richiesta di "descrivere ciò che si vede" (per esempio la consegna data a V.) impone una *contrazione semiotica* (Radford, 2006, p. 12), cioè una riduzione dei segni utili alla descrizione. In questo caso, la complessità del compito aumenta, perché si deve esprimere a parole qualche cosa di generale (la relazione fra le invarianti) che prima si poteva mostrare anche con i gesti o con gli oggetti. C'è, infatti, come afferma Radford (2006, p. 12), un profondo divario fra mostrare e dire. Qui i bambini, e prima ancora V., devono lavorare con un ridotto insieme di segni, intesi come forme espressive; così, per elaborare la generalizzazione che compensi la riduzione di risorse semiotiche, devono concentrare i significati in un numero inferiore di segni/parole (Radford, 2006, p. 12). Ora, anche se nessuna esperienza del percorso descritto è stata sviluppata in un modello di tipo strettamente geometrico, i bambini sembrano capaci di trattare visivamente le informazioni (Bishop, 1988) spostandosi dal linguaggio figurale ("rotondo", "rotondo chiuso", "bastoni" ecc.) supportato talvolta dal gesto, ad un linguaggio "pseudo-astratto" (punti aventi la stessa distanza dal centro, distanza dal centro, uguale lunghezza, misura, uguale misura), per definire, in un certo senso, ciò che Radford chiama *contextual generalization* (Radford, 2006). Esse sono generalizzazioni "contestuali" per il fatto che si riferiscono al contesto specifico e agli oggetti specifici anche se possiamo osservare come non facciano direttamente cenno a caratteristiche spazio-temporali. Per questo, abbiamo chiamato la definizione prodotta dai bambini una *pseudo-definizione* di circonferenza.
– I segni *pivot*, segni ponte fra segni artefatto e segni geometrici, hanno giocato un ruolo chiave nel passaggio da segni figurali a segni pseudo-geometrici. Così, per esempio, il segno *pivot* "centro" è passato dal significato di "posizione privilegiata all'interno del cerchio di [bambini o mattoni di legno …]" al significato

di "centro della circonferenza" (punto dal quale ciascuno dei punti alla circonferenza è equidistante). I segni *pivot* sono segni che vengono assunti dalla classe con un significato condiviso. Per esempio, il segno "bastoni" viene assunto dalla classe come segno di "uguale distanza dal centro" e viene trasformato, grazie alla mediazione dell'insegnante, nel segno geometrico "raggio".

L'esperienza quindi mostra come sia possibile riflettere in termini geometrici (o pseudo-geometrici) anche alla scuola dell'infanzia e mostra come l'approccio multimodale favorisca la costruzione di significati geometrici.

**Ringraziamenti**

Il percorso didattico raccontato in quest'articolo è il frutto del lavoro del gruppo di ricerca-azione EduMath Vallée[1], composto da una trentina di insegnanti valdostane della scuola elementare e della scuola dell'infanzia, che dal 2013 lavora in verticale per una didattica della matematica innovativa. Vorrei dunque ringraziare tutte le insegnanti del gruppo per il supporto dato a questa ricerca, ma un grazie particolare va alle insegnanti della scuola dell'infanzia che direttamente hanno sperimentato in classe il percorso e hanno raccolto e analizzato, insieme all'autrice, i dati: Roberta Duclos, Cristina Gay, Stefania Spina e Claudia Thiebat.

## Bibliografia

Arzarello, F., Pezzi, G., & Robutti, O. (2007). Modelling body motion: an approach to functions using measuring instruments. In W. G. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: the 14th ICMI Study* (pp. 129–136). Boston MA: Springer US.

Bartolini Bussi, M. (2008). *Matematica. I numeri e lo spazio*. Azzano San Paolo: Junior.

Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education, 47*(3). doi:10.1007/s11858-014-0636-5.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 720-749). Mahwah: Erlbaum.

Bryant, P. (2008). Paper 5: understanding spaces and its representation in mathematics. In T. Nunez, P. Bryant, & A. Watson (Eds.), *Key understanding in mathematics learning: A report to the Nuffield Foundation*. Disponibile in http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P5.pdf (consultato il 14.01.2019)

Bishop, A. J. (1988). Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: the body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 453–470. doi: 10.1007/s10649-012-9465-z

1. EduMath Vallée è un progetto di ricerca-azione patrocinato dalla Sovrintendenza agli Studi della Regione Autonoma Valle d'Aosta. Il coordinatore scientifico del gruppo è l'autore del presente articolo.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology 22*, 455-479.

MIUR. (2012). Indicazioni Nazionali per il curriculo della scuola dell'infanzia e del primo ciclio d'istruzione.

Lakoff, G., & Nùñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York: Basic Books.

Nemirovsky, R. (2003). Three Conjectures Concerning the Relationship between body activity and Understanding Mathematics. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 105-109). Hawaii: PME.

Owens, K. (2015). Visuospatial reasoning: An ecocultural perspective for space, geometry and measurement education. New York: Springer.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sái & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM, 46*(3), 349–361.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). *Beyond words. Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91-95.

Robotti, E. (2018). Geometry in kindergarten: first steps towards the definition of circumference. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 43-50). Umeå, Sweden.

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: the development of the routine of shape identification in dynamic geometry environments. *International Journal of Education Research, 51-52*, 28–44.

**Autore/Elisabetta Robotti**
Dipartimento di Matematica – Università di Genova, Italia
robotti@dima.unige.it

# Recensioni

DdM

**Baccaglini-Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica*. Milano: Mondadori Università.**

Quali sono le conoscenze che un insegnante di matematica deve avere per insegnare nel livello secondario? Sicuramente è fondamentale avere una buona preparazione sia dal punto di vista disciplinare sia sul piano pedagogico generale, ma non si può prescindere da altre conoscenze che integrano questi due aspetti. A livello internazionale, molte ricerche in didattica della matematica si sono prodigate per far emergere questa consapevolezza nell'ambito della formazione insegnanti. Ne è un esempio il concetto di "conoscenza pedagogica dei contenuti" (pedagogical content knowledge) introdotto già nel 1986 da Shulman che costituisce un'intersezione tra la conoscenza disciplinare e la conoscenza pedagogica generale. Intersezione poi ripresa e sviluppata dagli studi di Ball e colleghi nella modellizzazione della cosiddetta "conoscenza matematica per insegnare" (mathematical knowledge for teaching). È proprio all'articolazione tra questi due piani, quello della conoscenza disciplinare e quello della conoscenza pedagogica dei contenuti, che vanno a situarsi le conoscenze didattiche disciplinari, ossia quelle conoscenze specifiche legate agli aspetti epistemologici, concettuali e didattici della disciplina. Il libro *Didattica della matematica* si focalizza precisamente su tali conoscenze, considerandole essenziali nella formazione iniziale di un docente di matematica. Il libro nasce quindi come un manuale di didattica della matematica rivolto principalmente a studenti di master o laureati in Matematica interessati all'insegnamento nel livello secondario. Nonostante questo taglio specifico, il manuale si presenta come un valido supporto a un qualsiasi corso di didattica della matematica: presentando una selezione dei principali filoni e dei più recenti risultati della ricerca in questo campo, esso risulta efficace nel fornire uno spaccato preciso ma allo stesso tempo ricco e variegato.
Discutendo il ruolo attuale della matematica nella società (a cui si torna nell'interessante appendice relativa alla divulgazione della matematica) e introducendo, in quest'ottica, la didattica della matematica, gli autori ripercorrono l'evoluzione dei modelli di apprendimento dall'inizio del XX secolo ai giorni nostri e forniscono al lettore alcune lenti teoriche con le quali poter interpretare i processi di insegnamento/apprendimento. Si tratta di una selezione fatta dagli autori che, come loro stessi precisano, non potrà mai essere esaustiva. Tuttavia, il quadro fornito risulta coerente e organico: si tratta in sostanza di uno sguardo sulle principali problematiche che un futuro docente di matematica dovrebbe conoscere e aver affrontato prima di entrare in classe. Tra queste, risulta particolarmente interessante la riflessione sul tema delle difficoltà in matematica: da un lato si evidenziano i pericoli di una identificazione fra errore e difficoltà, argomentando sulla necessità di scindere i due concetti, dall'altro si affronta l'attualissima tematica dei disturbi specifici dell'apprendimento, con riflessioni e approfondimenti che possono aiutare il docente a interpretare i diversi casi e intervenire in modo consapevole. In alcuni punti, il lettore è invitato a fermarsi e a riflettere su una domanda-stimolo proposta dagli autori per mezzo di un box intitolato "Attività". Questa modalità di interazione con il lettore è efficacemente utilizzata in tutto il libro soprattutto per proporre esemplificazioni dei costrutti teorici introdotti o per favorire la riflessione sui protocolli degli allievi inseriti nel testo.
Uno degli elementi che si apprezzano maggiormente nella lettura di questo manuale di didattica della matematica è il fatto che gli autori provengano da campi di ricerca in diversi ambiti della matematica. Anna Baccaglini-Frank e Pietro Di Martino sono ricercatori in didattica della matematica, mentre Roberto Natalini e Giuseppe Roso-

lini sono ricercatori rispettivamente in matematica applicata e in logica matematica, entrambi con una solida esperienza nella divulgazione della matematica. Dalla lettura del prodotto finale di questa collaborazione originale (e che andrebbe più spesso incentivata), si può evincere che il confronto tra le diverse esperienze e conoscenze dei quattro autori è stato ricco e fruttuoso. Ne è scaturito un libro che offre numerose piste di approfondimento, grazie anche alla ricca bibliografia, spunti di riflessione teorica così come esempi pratici: un punto di riferimento prezioso per un futuro insegnante di matematica o per un docente in servizio che voglia confrontarsi con i risultati di ricerca in didattica della matematica e che cerchi suggerimenti autorevoli per il suo lavoro.

Monica Panero
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

**Nicosia, G. G. (2018).** ***Cultura matematica ed educazione: Il caso degli allievi pakistani*****. Roma: Aracne.**

L'etnomatematica è sempre esistita, non è una disciplina moderna; basti pensare agli antichi contatti fra Indiani e Cinesi con scambio non solo di idee matematiche ma anche e soprattutto di modi di vedere e di pensare matematici basati su aspetti sociali; basti osservare che molti autorevoli autori greci classici sono stati conosciuti nel mondo medievale latino attraverso le traduzioni arabe, fortemente commentate, chiosate e integrate, con cambio nei modi di pensare (è sufficiente far cenno alle diverse interpretazioni del pensiero di Aristotele nel Medioevo arabo ed europeo); basti ricordare che quando i poveri malcapitati matematici/astronomi gesuiti tentarono di portare Euclide in Cina provocarono un risentito rigetto da parte di pensatori cinesi non avvezzi alle dimostrazioni sofisticate, dato che per loro un bel disegno chiaro, ben fatto, vale mille volte più di una lunga e dotta sofisticata dimostrazione.
Ma poi il grande Ubiratan D'Ambrosio (2002) ci regalò questa meravigliosa teoria suggestiva e avvincente nella quale tutti ci siamo avventurati, specie coloro che, come me, sono immersi quotidianamente nella diversità fra culture: nella mia stessa patria di origine perché è legge dello stato il rispetto per le attualmente esistenti 75 minoranze autoctone da tutti i punti di vista, soprattutto sociale e linguistico (più di 80 lingue ammesse ufficialmente), ma anche scientifico; nella mia patria di accoglienza perché devo spesso fare i conti con differenze che il più delle persone sembra non cogliere. Mi spiego meglio. La maggior parte degli oggetti matematici che costituiscono le basi della matematica sono stati creati altrove, non in Italia, spesso assai lontano: le cifre in India, lo zero e il sistema posizionale in India e in Messico; i fondamenti della geometria in Grecia e Turchia; gli studenti stranieri sembra debbano aderire a un modello italiano di matematica, ma in realtà è successo il contrario. Molti docenti credono inoltre che il modello scolastico nazionale sia condiviso nel mondo e non immaginano nemmeno che non sia così e che le differenze possano essere notevoli. Che l'anno solare, ad esempio, venga come spezzato per dar luogo a quello accademico/scolastico e che l'inizio dell'anno scolastico sia a settembre e non a gennaio, sembra sia una regola universale, mentre non lo è affatto: in tanti paesi del mondo l'anno scolastico segue quello solare, da gennaio a dicembre. In vari paesi che hanno lo stesso svolgimento

cronologico dell'Italia, la scuola inizia in agosto e non in settembre e finisce in giugno. Che il periodo di frequenza scolare in Italia sia così ridotto, cioè di soli 200 giorni l'anno, incuriosisce i docenti di molti altri paesi che hanno assai più giorni di scuola. Che in certi paesi la scuola sia a carattere semestrale e non annuale, stupisce molti docenti italiani. Che la scuola obbligatoria inizi a 5 anni e non a 6 e che, essendo il numero di giorni di scuola molto maggiore per anno, si vada a scuola solo fino a 17 anni e non oltre, anche per far sì che non ci siano studenti maggiorenni a scuola, stupisce molti docenti italiani. (Nel mio paese si considera ridicolo che un maggiorenne, che ha il diritto di voto ed è punibile penalmente in caso di delitto, debba però presentare la firma di un genitore se vuole uscire dall'aula due ore prima del previsto). Eccetera. Insomma, il modello italiano è italiano (o poco più) e basta. E c'è di più, sottile e importante. Una sorta di diffusa disaffezione degli adolescenti italiani nei confronti della scuola, alla quale non riconoscono più (da decenni, anche complici alcuni genitori) un ruolo che è stato determinante in passato, come trampolino di lancio verso il successo sociale futuro, dispensatrice di cultura e dunque di certezze…In certi paesi del mondo, invece, è ancora così, come nel mio di origine. "Andar bene a scuola" è fiore all'occhiello per gli studenti, motivo di distinzione e privilegio, orgoglio della famiglia.
Insomma, le occasioni di discussione di confronto sono tante; prima di arrivare alla matematica, ci sono da affrontare tanti aspetti sociali ed economici, fattori che hanno a che vedere con il futuro del singolo. Ecco rivelato e riconosciuto il senso profondo della etnomatematica.
Giovanni G. ha vissuto queste stesse discussioni alla rovescia, non in quanto straniero venuto in Italia, come me, ma in quanto italiano a stretto contatto diretto con culture straniere, dall'America Meridionale e soprattutto Brasile, per motivi familiari, a quelle orientali, Cina, Giappone, Corea e Pakistan; è una persona di squisita sensibilità e dunque questi confronti senza pregiudizi sono in lui spontanei, profondi, critici. Non ha un paese da privilegiare e da porre continuamente a confronto con gli altri come fanno in tanti; lui analizza, studia, critica con profonda e meticolosa imparzialità. Un suo libro precedente (Nicosia, 2016) è stupefacentemente colto, vi compie analisi perfette che hanno il sapore della ricerca scientifica e sociale, ma la narrazione è avvincente e personale, oggettiva ma evidente frutto di esperienza diretta.
Ora ci propone un libro profondo e dotto sulla cultura pakistana, frutto delle sue analisi precise e circostanziate, basato su esperienze reali e su una sagacia che reputo unica, tutto basato su una capacità critica e analitica che ti sorprende e ti sconvolge.
Non voglio, non posso entrare nei dettagli; ma la vividezza della narrazione, anche quando è puramente analisi, ti conquista e ti seduce.
E poi la matematica, come è ben posta in evidenza! E che belle le avvincenti chiacchierate con gli studenti pakistani (e di altre nazioni) a Bologna. Che interessante quando gli studenti si danno conto delle richieste disciplinari minime che si fanno in Italia («Le espressioni io le facevo già in seconda elementare in Pakistan»). E della differenza fra la realtà e le illusioni che avevano cullato quando hanno lasciato la loro terra d'origine per venire in Italia.
Con la sua sensibilità sottile e lungimirante, Giovanni G. fa parlare gli studenti, mettendo spesso in evidenza le differenze culturali, ma anche le analogie, l'importanza dei modelli culturali pakistani nella profondità delle radici culturali. A questo scopo c'è un bellissimo capitolo, il secondo, che si legge ghiottamente, quello sulle fondamenta ancestrali culturali del Pakistan, nel quale ho ritrovato miei precedenti studi, la logica Nyaya per esempio, che in passato ho imparato a valutare. E poi il crogiuolo di lingue, il profondo legame tra lingua e matematica com'è d'altra parte comune con l'origine

indiana, il potente apparato sociale, l'idea di famiglia allargata, l'importanza del risultato scolastico nella valorizzazione sociale, …
Non bisogna dimenticare che il Pakistan, Repubblica Islamica del Pakistan, è il sesto paese più popolato al mondo, 200 milioni di abitanti, pur misurando solo quasi 900.000 km2, un po' meno del triplo dell'Italia; il mio paese di origine, la Colombia, è assai più vasto ma non arriva a 50 milioni di abitanti. Va ricordato che il Pakistan nacque da un'origine scissionista causata dalla necessità di dare una terra ai numerosi Indiani islamici che pensarono di non poter convivere con Indiani induisti.
Il perché di alcuni esodi di Pakistani verso l'Europa non va dunque cercato nel malessere sociale o nella fuga da situazioni di guerra o di catastrofe sociale o bellica, ma dalla ricerca di una terra nella quale inserirsi e lavorare con dignità e rispetto. C'è anche chi cerca di fuggire dal sistema delle caste, ancora vivo in India e Pakistan, ancora insito nella profonda cultura popolare ancestrale, nonostante le riforme più moderne.
Va ricordato che quella terra che oggi si chiama Pakistan (il cui significato è controverso, ma più o meno: la terra delle persone pure) è stata sempre considerata la culla della civiltà mondiale, basti pensare che non solo il potente pensiero Nyaya ebbe lì origine, ma anche la cultura vedica.
Ma questo è un libro che parla di matematica, il contenuto più ghiotto di tutto il libro; e ne parla in modo semplice, cioè comprensibile, ma profondo, in quanto analitico e dettagliato, senza proporre banali confronti, ma immersioni basate sul rendiconto preciso e sulle impressioni degli studenti che confrontano i loro studi precedenti nella terra d'origine con la matematica che hanno studiato in Italia, a Bologna.
Si parla talmente tanto di confronto fra culture; la proposta qui implicita è che è giusto farlo, ma senza preconcetti, basandosi invece su un'analisi precisa e significativa, oggettiva e rispettosa.
Ecco perché, fin dall'inizio, ho voluto citare l'etnomatematica, nella sua forma più elegante e significativa, scienza alla quale questo libro si ispira dalla prima pagina all'ultima.

### Citazioni bibliografiche

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
Nicosia, G. G. (2016). *Matematica e scuola in Cina, Corea e Giappone*. Bologna: Pitagora.

Martha Isabel Fandiño Pinilla
Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica di Bologna, Italia

**Autori vari (2018-…). Schede didattiche del progetto del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica Agorà, Communicating Mathematics Education. Disponibile in: [http://www.matematicando.supsi.ch/index.php/materiali-didattici/schede-didattiche/](http://www.matematicando.supsi.ch/index.php/materiali-didattici/schede-didattiche/) (consultato il 1/04/2019).**

*Matematicando* è il nome di un gruppo di lavoro composto da docenti di scuola dell'obbligo e da formatori e ricercatori del Dipartimento formazione e apprendimento (DFA) della SUPSI. Dalla loro iniziativa è nato *Matematicando Festival*, una manifestazione dedicata alle scuole e alla cittadinanza che dal 2014 ogni due anni inonda le strade della Città Vecchia di Locarno e la Piazza grande di migliaia tra bambini, docenti, genitori e nonni. I partecipanti si trovano alle prese con la matematica in tutte le sue sfaccettature: negli origami, coi robot, nei giochi, nell'esplorazione dello spazio, negli animali, negli smartphones, ecc. Grazie al sostegno del Programma Agorà del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica, *Matematicando* è anche diventato un progetto di comunicazione scientifica, con l'obiettivo di rendere accessibile e diffondere la ricchezza di stimoli, idee ed esperienze che è cresciuta nel tempo e attraverso le tre passate edizioni di *Matematicando Festival* e non solo.

È all'interno di questa iniziativa che ha preso avvio la pubblicazione delle schede didattiche *Matematicando*. Si tratta di documenti PDF, liberamente e gratuitamente disponibili sul sito www.matematicando.supsi.ch, che presentano attività matematiche originali, corredate da indicazioni pratiche, fotografie e materiali didattici. Le attività proposte vanno a scoprire la matematica nei palazzi delle piazze, tra le api, nei giochi di probabilità, nell'arte figurativa, nella tecnologia, nella lingua italiana e in tanti altri posti. Soprattutto, sono attività pensate per essere coinvolgenti e didatticamente efficaci, e assumono la forma di giochi e sfide. Online si trovano catalogate per età di riferimento, ambito tematico e parole chiave; il che rende semplice identificare quelle che possono interessare al fruitore.

Perché le schede didattiche di *Matematicando* sono di particolare interesse e vi suggeriamo di andare a darci almeno un'occhiata? In primo luogo perché potete trovarci idee fresche e stimolanti; spero su questo di aver già risvegliato l'interesse nelle righe precedenti. In secondo luogo, perché sono ben fatte: sono chiare, concise e precise, oltre che presentate in un formato grafico che ne facilita la lettura. Infine, ed è il motivo principale, perché queste schede offrono una concretezza che non si trova con facilità. E possono farlo perché sono il frutto di un processo di lavoro che vale la pena conoscere.

Per gli amanti del parmigiano sarà interessante visitare un caseificio che lo produce: la tecnica di lavorazione è infatti all'origine della qualità del prodotto. Da questo punto di vista, conoscerne la lavorazione significa apprezzarne la bontà con maggior consapevolezza e, di conseguenza, con maggior rispetto. Nel caso di queste schede, credo che valga qualcosa di simile.

Non si tratta di schede create da esperti e poi "divulgate" presso i docenti in un processo *top-down*, ma piuttosto della felice combinazione tra l'intuizione dei docenti e la competenza dei matematici. Ogni singola scheda, infatti, nasce dal lavoro condiviso tra docenti di scuola dell'infanzia, elementare o media, e formatori e ricercatori in didattica della matematica del DFA all'interno o in continuità con il gruppo *Matematicando* citato prima. Questo lavoro può durare mesi: un docente ha un'idea, la sviluppa, la discute con gli esperti e con dei colleghi, la rivede, la porta in classe. Poi, con la classe stessa, riprende l'attività e la fa diventare una proposta per altre classi all'interno di *Matematicando Festival*. Qui l'attività viene documentata e rifinita. Dopo le giornate di *Matematicando*, viene scritta la scheda, che passa sotto la lente di due revisori e alla fine viene pubblicata.

In questo senso, ogni scheda è un lavoro corale, e, si sa, in questo ambito tante teste, se ben coordinate e orientate agli stessi obiettivi, pensano meglio di una.

Luca Botturi
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

**Pedroli O., Ramelli S. (2018). *Api e matematica nella scuola dell'infanzia*. Collana Praticamente. Bellinzona: DECS-SUPSI.**

Quando un argomento, una tematica o un problema vengono affrontati da diversi punti di vista, in maniera da far convergere più discipline nel processo di scoperta e di ricerca; quando le discipline si intrecciano, come rami d'edera, creando nodi indissolubili che contribuiscono a costruire un contesto di senso, allora stiamo adottando un atteggiamento interdisciplinare.
Il primo quaderno della collana PRATICAMENTE, progetto editoriale nato dalla collaborazione tra Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS) e Dipartimento formazione e apprendimento (DFA) della SUPSI, Canton Ticino, presenta un pragmatico esempio di percorso interdisciplinare adatto per il primo ciclo della scuola dell'obbligo. *Api e matematica nella scuola dell'infanzia*, curato dal *Centro competenze Didattica della Matematica* del DFA, illustra in maniera dettagliata e affascinante un collaudato percorso didattico, le cui origini risalgono ormai già al 2008 presso il parco Oltremare di Riccione; in quell'occasione il tema delle api venne affrontato in maniera al contempo globale e specifica, mettendo l'accento sugli aspetti matematici che caratterizzano il modo di comunicare delle api e la forma delle celle dell'alveare.
Il volume è strutturato in sei capitoli consecutivi, ai quali corrispondono le principali fasi del percorso; tali fasi descrivono in maniera dettagliata le attività che sono state proposte dalle docenti che hanno redatto il testo. Si parte dal capitolo *Api, arnie e ricorsività*, nel quale vengono illustrate le attività di scoperta legate alle arnie, che ben si prestano per affrontare i temi della ricorsività dei colori e delle sequenze. Si giunge poi al secondo capitolo, che propone una serie di attività incentrate sui temi della rappresentazione del numero, dell'enumerazione e del conteggio. Nel capitolo *Api e geometria*, facendo riferimento alla forma esagonale delle celle dell'alveare, viene approfondito il tema della tassellazione del piano. In particolare, viene presentata un'attività di scoperta attraverso la quale i bambini possono scoprire la particolare proprietà dell'esagono regolare: a parità di perimetro, infatti, l'esagono regolare è il poligono che permette di massimizzare l'area. Nel capitolo *Api e orientamento spaziale* vengono presentate le danze che le api utilizzano per comunicare. Attraverso l'osservazione, la scoperta e l'imitazione di queste danze è possibile proporre attività utili allo sviluppo delle capacità di orientamento spaziale. Oltre ad una serie di attività di movimento, ideali da proporre in spazi aperti oppure in palestra, vengono anche presentate alcune attività di robotica educativa con l'ausilio di dispositivi come il Bee-bot; siccome ci troviamo confrontati con una generazione di nativi digitali, attività di questo tipo non possono che stimolare gli allievi, permettendo loro di accedere a basilari attività di programmazione e nel contempo di sviluppare importanti competenze visuo-spaziali. *Api e ritmo* e *Api per un anno*, gli ultimi due capitoli di questo volume, presentano infine una serie di attività interdisciplinari che sono state svolte durante l'intero percorso, per celebrare le varie festività scolastiche e non solo. Odile Pedroli e Sandra Ramelli, le autrici di questo quaderno, presentano al lettore quanto sperimentato nelle loro sezioni, riuscendo con facilità a trasmettere la passione e l'entusiasmo che hanno dedicato alla realizzazione di questo appassionante percorso didattico.
In conclusione, possiamo certamente dire che si tratta di una lettura piacevole e stimolante, destinata principalmente ai docenti che sono alla ricerca di spunti interessanti da proporre ai propri allievi, ma anche a tutti coloro che, in maniera accessibile e con sguardo fanciullo, vorrebbero scoprire qualcosa di più sull'affascinante universo di questo ingegnoso (e prezioso) insetto.

Il quaderno è acquistabile presso il Centro di risorse didattiche e digitali di Bellinzona e presso il Dipartimento formazione e apprendimento di Locarno, oppure scaricabile gratuitamente, e questo fa onore agli ideatori di questo progetto editoriale, agli indirizzi https://scuolalab.ch/praticamente o http://www.matematicando.supsi.ch/.

Carlo Mina
Istituto scolastico di Locarno – Solduno, Svizzera

**Demartini, S., Fornara, S., Sbaragli, S. (2017). *Numeri e parole. Percorsi di lingua e matematica (supplemento a "Scuola dell'infanzia" n. 4-5, dicembre 2017-gennaio 2018)*. Firenze: Giunti.**

L'idea di una separazione tra cultura umanistica e cultura scientifica è ancora radicata, al punto che c'è chi sostiene, nella scuola, che gli studenti si possano dividere tra chi sviluppa una predisposizione per le abilità linguistiche e chi invece predilige il calcolo matematico. A non credere a simili pregiudizi sono gli autori di "Numeri e parole", convinti che sia invece possibile, e utile, sviluppare percorsi didattici integrati di italiano e matematica fin dalla prima scolarizzazione.
L'agile volumetto, pubblicato come supplemento alla rivista "Scuola dell'infanzia", riunisce una serie di itinerari selezionati tra quelli elaborati nell'ambito del progetto "Italmatica", promosso dal Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI e sperimentato in varie scuole italiane e svizzere, concentrandosi su "un contesto come quello della scuola dell'infanzia in cui la dimensione disciplinare non assume ancora i suoi contorni definitivi" (p. 4)
Le attività proposte sono distribuite in tre sezioni: "Matematica fra parole e rime", "Numeri e lettere" e "Storie matematiche". La prima si concentra su esercizi volti a riconoscere la differenza tra significante e significato, alcuni dei quali chiamano in causa la consapevolezza fonologica, vale a dire la capacità di individuare correttamente i suoni della lingua, altri la segmentazione sillabica, cioè l'abilità di suddividere correttamente le parole in sillabe. Le proposte didattiche prevedono conseguentemente esercitazioni di riconoscimento di rime, di sillabe e più in generale di suoni. Tra i meriti di simili esercizi va segnalata la costante cura per il coinvolgimento del bambino, ricercata ricorrendo a testi piacevoli e originali, spesso in forma di filastrocca, ora impiegati per favorire uno specifico apprendimento (come le "filastrocche numeriche", pensate per l'apprendimento della conta orale: "uno, due, tre, / conta insieme a me, / quattro, cinque, sei, / che bel tipo sei…"), ora invece per esercitare la riflessione su aspetti specifici della lingua (per esempio chiedendo di individuare la ripetizione di una specifica sillaba: "*cu*boso è un *cu*bo *cu*rioso / e tutti sanno che è molto goloso. / C*u*boso, un giorno di febbraio…").
La seconda sezione riguarda attività in cui il bambino è invitato di sperimentare "strategie efficaci ed economiche per conseguire un obiettivo concreto" (p. 34). Vengono qui proposti esercizi come la "caccia ai numeri", utile per familiarizzare con il calcolo. Armati di binocolo di cartone, gli allievi possono così scoprire di essere immersi in una realtà colma di numeri, di varie fogge e dimensioni; parallelamente, è suggerito di sperimentare la "caccia alle lettere e alle parole", dove a dover essere scovate sono ora le lettere, nascoste nella realtà circostante. I piccoli esploratori vengono in questo modo accompagnati alla consapevolezza che "il mondo è pieno di entrambi i codici,

con specifiche funzionalità" (p. 37).
La sezione finale raccoglie attività ispirate, in prevalenza, alla celebre "Grammatica della fantasia" di Gianni Rodari, dove trovano spazio varie "storie matematiche" in cui diverse declinazioni narrative sono adattate a temi aritmetici e geometrici. Tra queste, le divertenti "fiabe stravolte" di "Coneve e i sette quadrati", la cui protagonista è una Biancaneve a forma di cono (che dovrà vedersela con Piramigna, una matrigna a forma di piramide, per incontrare infine il suo principe azzurro, il bellissimo Tronco di cono), e di "Ato il quadrato", storia di un quadrato nato in un mondo di sfere, chiaramente ispirato al "Brutto anatroccolo" di Andersen. Sempre da Gianni Rodari è tratta anche la proposta del "binomio fantastico", una tecnica di scrittura creativa che consiste nell'accostare parole apparentemente inconciliabili, qui ripensata in chiave "geometrica", figurandosi l'incontro di un cubo con una sfera o di altri solidi di forme diverse.
Le attività contenute in questo volume, di cui è stato qui dato solo un breve saggio, si fanno dunque apprezzare per i numerosi spunti interessanti e originali, tali da renderlo adatto sia per l'aggiornamento dell'insegnante sia come strumento pratico per le esercitazioni d'aula.

Luca Cignetti
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera