Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 06

Didattica della Matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

DOI: 10.33683/ddm.19.6

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Repubblica e Canton Ticino, Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport (DECS).

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio Comunicazione
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Impaginazione:
Luca Belfiore

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
Matematica

06

Novembre 2019

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

Editoriale

> «Se tu hai una mela e io ho una mela e ci scambiamo le nostre mele allora tu ed io avremo ancora una mela a testa. Ma se tu hai un'idea e io ho un'idea e ci scambiamo queste idee; allora ciascuno di noi avrà due idee».
>
> (George Bernard Shaw)

Per introdurre questo editoriale prendiamo a prestito la citazione di George Bernard Shaw (1856-1950), scrittore, drammaturgo, linguista e critico musicale irlandese, vincitore nel 1925 del Premio Nobel per la letteratura. In questa semplice ed efficace frase Shaw riesce a mettere in evidenza l'importanza della *condivisione*, caratteristica che contraddistingue la filosofia di questa rivista.
Giunta ormai al sesto numero, la rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* ha favorito in questi tre anni di vita la condivisione di idee, analisi, percorsi, esperienze tra il mondo della ricerca e quello della pratica d'aula, creando significativi rapporti, contatti, scambi tra le persone che hanno arricchito ciascun individuo coinvolto.
In particolare, questo numero è fortemente incentrato sulla sperimentazione di percorsi didattici significativi, analizzati dal punto di vista dei ricercatori in didattica della matematica o raccontati dai docenti che ne hanno seguito le fasi di progettazione e implementazione.

Nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli di carattere e tematiche differenti. Il primo contribuisce alla discussione riguardo l'introduzione dell'insegnamento dell'analisi non standard nelle scuole superiori e nelle università; in particolare, si presentano i risultati preliminari di uno studio pilota su alcune *concept-image* di studenti riguardo ad alcuni concetti chiave di questa riformulazione dell'analisi classica. Il secondo articolo presenta un'indagine sulle convinzioni dei docenti di scuola elementare riguardo ai problemi matematici, realizzata attraverso interviste di cui è discussa l'analisi; le interviste si basano su diversi esempi di problemi che possono risultare significativi dal punto di vista didattico. L'ultimo contributo di questa sezione illustra un'attività di gioco-indagine, sperimentata in una classe seconda di liceo scientifico e progettata con GeoGebra seguendo l'approccio della "logica dell'indagine", con l'obiettivo di identificare l'apporto che tale approccio può offrire nell'educazione matematica degli studenti.

La seconda parte della rivista, legata alle *Esperienze didattiche*, presenta quattro significativi contributi: i primi due riferiti alla scuola elementare, gli ultimi due pensati invece per la scuola media.
Il primo articolo presenta un percorso sperimentato in una quinta elementare incentrato sullo sviluppo delle competenze argomentative attraverso l'uso formativo di quesiti INVALSI: la metodologia utilizzata è ricca di riferimenti a pratiche didattiche incentrate sul feedback, sulla valutazione fra pari e l'autovalutazione. Il secondo articolo affronta in modo stimolante e significativo l'ambito *Grandezze e misure* in terza elementare: la progettazione e organizzazione di una giornata sportiva, chiamata *Giochi Senza Frontiere delle Misure*, è l'occasione per lavorare sulle unità di misura convenzionali, indagare il funzionamento e l'uso di strumenti di misura in un'ottica di interdisciplinarità fra matematica e motricità.
Nel terzo contributo viene descritto un percorso nel quale la matematica si intreccia con la sua storia: lo scopo è studiare la possibile quadratura di alcune figure piane, inserendo la tematica nella sua evoluzione storica a partire dalla matematica

greca fino alla matematica di fine ‘800; gli allievi esplorano e collaborano al fine di realizzare un fascicolo sul tema trattato, da condividere con i compagni di altre classi. Infine, l’ultimo contributo illustra un itinerario didattico, svolto con un approccio cooperativo e differenziato, il cui fine è progettare, costruire e lanciare un razzomodello; attraverso la proposta di questa significativa situazione-problema, gli studenti approfondiscono tematiche legate alla matematica, ma non solo, in un’ottica globale fortemente motivante e carica di senso.
Siamo orgogliosi che la rivista raccolga sempre più interesse e collaborazioni; è un indicatore di quanto sia importante un luogo di condivisione, che dia spazio e respiro a un mondo, quello della didattica della matematica, che è sempre più sfaccettato, ricco di fruttuose contaminazioni da parte di altre discipline, denso di belle e significative proposte per aumentare la qualità della ricerca e della didattica dentro e fuori l’aula.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Editorial

«If you have an apple and I have an apple and we exchange these apples then you and I will still each have one apple. But if you have an idea and I have an idea and we exchange these ideas, then each of us will have two ideas».

(George Bernard Shaw)

To introduce this editorial we borrow a quote from George Bernard Shaw (1856-1950), an Irish writer, playwright, linguist and music critic, who was awarded in 1925 of the Nobel Prize in Literature. In this simple and effective sentence Shaw manages to highlight the importance of *sharing*, a characteristic that distinguishes the philosophy of this journal.
In these three years the *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* journal, now in its sixth issue, has encouraged the sharing of ideas, analyses, and experiences between the world of research and the world of classroom practices, creating significant and enriching relationships, contacts and exchanges between each person involved.
In particular, this issue focuses on the experimentation of significant didactic experiences, analysed from the perspective of Mathematics Education researchers or described by the teachers who designed and implemented these experiences in their classes.

The three articles in the section *Riflessione e ricerca* cover different themes. The first article discusses the introduction of nonstandard analysis methods in secondary schools and universities. In particular, the article reports the preliminary results of a pilot study about students' *concept images* of some key elements in this reformulation of the classic analysis. The second article is about a study on primary school teachers' beliefs about math problems; the study was developed through interviews with some teachers regarding different examples of problems, which are particularly interesting from a didactical perspective. The last article in this section describes an inquiring-game activity, tested in a scientific high school with students of grade 10. This activity was designed using GeoGebra following the "logic of inquiry" approach in order to investigate the contribution of this approach to the students' learning of mathematics.

The second part of the journal, *Esperienze didattiche*, has four interesting contributions: two of them describing activities for primary school and the other two describing experiences in lower secondary school. The first article describes a project, carried out with grade 5 students, for the development of argumentative skills using INVALSI questions in a formative approach. The methodology used in this project mainly focuses on teaching practices based on feedback, peer evaluation and self-assessment. The second article addresses in a significant way the context *Magnitudes and measures* in a third grade class. The planning and organization of a sports day, called *Giochi Senza Frontiere delle Misure*, is an opportunity to work on conventional units of measurement, to investigate the functioning and the use of measuring instruments and to experience an interdisciplinary activity between mathematics and physical education. In the third article there is an intersection between mathematics and its history: the activities proposed aim at studying the possibility of squaring some plane figures, discussing this topic with an historical perspective, from the ancient Greeks to the end of the 19th century. Students had to work in groups on this topic to create a small dossier to be shared with their schoolmates. The last contribution describes an experimental activity, realized with a cooperative and differentiated approach, to project, build and launch a rocket-model. This is a remarkable example of a significant realistic situation in which students deal with mathematics problems in a meaningful and motivating context.

We are very proud that our journal is gathering increasing interest and collaboration proposals. This is a sign of the importance of having a place where people, working in the field of Mathematics Education – an area that is becoming more and more complex and connected with other disciplines –, can share ideas to improve the quality of the research and of the teaching inside and outside the classroom.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Riflessione e ricerca

DdM

Uno studio sulla *concept-image* di nozioni di base dell'analisi non standard

Disponibile anche in inglese

On students' *concept-image* of elementary notions of nonstandard analysis

Mirko Maracci* e Ambra Marzorati
*Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia, Italia

Sunto / L'analisi non standard è una riformulazione dell'analisi matematica introdotta negli anni sessanta, che consente di estendere il sistema di numeri reali in modo da includere numeri infinitesimi e infiniti e di conseguenza semplificare, almeno a prima vista, molte nozioni centrali dell'analisi matematica. Da allora sono state formulate varie proposte per introdurre l'insegnamento dell'analisi non standard nelle università e nelle scuole secondarie. Anche se chi promuove tale approccio sostiene che i concetti di analisi non standard siano più vicini all'intuizione e più facili da comprendere e utilizzare, non esiste un corpus di ricerche che confermi queste ipotesi. Questo articolo intende contribuire a questa discussione presentando i risultati preliminari di uno studio pilota sulle *concept-image* degli studenti in analisi non standard.

Parole chiave: Analisi non standard; *concept-image*; scuola secondaria.

Abstract / Nonstandard analysis is a reformulation of mathematical analysis introduced in the 1960s, which allows for extending the system of real numbers so as to include infinitesimal and infinite numbers, and consequently simplify, at least at a first glance, many central notions of elementary calculus. Since then, various proposals have been formulated to introduce the teaching of nonstandard analysis in universities and in upper secondary schools. Even if proponents of such an approach maintain that concepts of nonstandard analysis are closer to intuition and easier to be understood and used, there is not a body of research to support such claims. This paper is meant to contribute to this discussion through reporting on the preliminary results of a pilot-study on student's concept-images in nonstandard analysis.

Keywords: Nonstandard analysis; concept-image; upper secondary school level.

1 Introduzione

L'analisi non standard (NSA) è una rifondazione dell'analisi matematica sviluppata negli anni '60 del XX secolo, dal logico e matematico Abraham Robinson (1965/2013) a partire dall'introduzione di un'estensione non archimedea di $\mathbb{R}$, l'insieme dei *numeri iperreali*, che include *numeri infiniti* e *numeri infinitesimi*; i numeri infiniti, o più brevemente infiniti, sono numeri il cui valore assoluto è maggiore di qualsiasi numero reale positivo e i numeri infinitesimi, o più brevemente infinitesimi, sono numeri il cui valore assoluto è minore di qualsiasi numero reale positivo.
Si parla di estensione dei numeri reali ai numeri iperreali, perché possono essere estese all'insieme dei numeri iperreali le operazioni aritmetiche, la struttura d'ordine e, più in generale, tutte le funzioni definite sui numeri reali, in modo che ogni *proposizione elementare* (*o del primo ordine*)[1] vera nel sistema dei numeri reali sia

1

1. Possiamo dire, seguendo Di Nasso (2003, p. 5), che «una proprietà P è espressa in forma elementare quando è espressa da una formula in cui ogni quantificatore è ristretto ad un insieme. In altre parole, ogni volta che si ha una quantificazione "per ogni x..." oppure "esiste un y...", è necessario specificare all'interno di quali insiemi le variabili x e y stanno variando: "per ogni $x \in A$..." oppure "esiste $y \in B$...". Non è invece ammesso quantificare su sottoinsiemi, cioè formule che contengono espressioni del tipo "per ogni sottoinsieme $X \subseteq A$..." non sono espresse in forma elementare».

vera anche nel sistema dei numeri iperreali e viceversa:[2] per esempio gli assiomi di campo ordinato, ma anche la maggior parte di teoremi riguardanti limiti, derivate e integrali, generalmente insegnati al livello universitario, possono essere espressi in forma elementare e quindi valgono in entrambi i sistemi.[3] 2 3

Questo ha interessanti conseguenze: in effetti, all'interno del sistema dei numeri iperreali, alcune definizioni classiche di analisi standard possono essere sostituite con definizioni formalmente "più semplici" o possono essere addirittura evitate; questo, insieme alla possibilità di fare affidamento su definizioni rigorose di infiniti e infinitesimi, consente dimostrazioni "più semplici" di alcuni enunciati classici di analisi matematica (o se vogliamo della loro riformulazione nell'ambito degli iperreali).

Anche per questo, dalla sua introduzione, la NSA ha suscitato l'interesse di logici e matematici sia per le sue possibili applicazioni nella ricerca matematica sia in vista della sua possibile introduzione nei programmi di insegnamento. In effetti, negli anni, in diversi Paesi (e soprattutto negli USA), sono state formulate proposte di insegnamento centrate sulla NSA, prima nelle università e successivamente nelle scuole secondarie (Keisler, 1976a; 1976b; Harnik, 1986; O'Donovan & Kimber, 1996). Recentemente, anche in Italia alcuni, per ora pochi, insegnanti hanno iniziato a proporre un programma di NSA all'interno delle proprie classi.

Alla base di queste proposte didattiche sembra esserci, tra le altre, la convinzione da parte di chi le sostiene che la NSA consenta di definire i concetti centrali dell'analisi matematica in modi più vicini all'*immagine*, alla *concettualizzazione spontanea*, all'*intuizione* degli studenti. Mancano tuttavia studi di ricerca in didattica della matematica che possano confermare la solidità di un tale assunto che va quindi considerato con cautela, problematizzato e sottoposto a una analisi esplicita. Questo articolo riporta i risultati preliminari di uno studio pilota (Marzorati, 2018) condotto, proprio con questo obiettivo, tra gli studenti di alcune scuole italiane che hanno affrontato come parte del curriculum di classe, al posto del tradizionale studio della analisi matematica, lo studio degli iperreali e della NSA.

Prima di presentare lo studio e discuterne i risultati, illustreremo brevemente, nel prossimo paragrafo, le principali caratteristiche comuni alle proposte didattiche che emergono dalla letteratura, nonché i motivi principali documentati in letteratura che portano alla loro adozione, e presenteremo, nel paragrafo successivo, una panoramica degli studi in didattica della matematica inerenti alla NSA.

2. Il sistema di numeri iperreali può essere formalmente introdotto tramite un approccio assiomatico o può essere costruito a partire dal sistema di numeri reali attraverso tecniche sofisticate di teoria dei modelli. Infatti i numeri iperreali possono essere definiti come classi di equivalenza di sequenze arbitrarie di reali, in cui la relazione di equivalenza è definita in termini di ultraprodotti e ultrafiltri (Keisler, 1976b).
3. Vale la pena notare quanto segue. Consideriamo, come esempio, la proprietà archimedea: per ogni coppia di numeri x,y reali positivi esiste un numero naturale n tale che $n\cdot x>y$; questa proprietà può essere estesa agli iperreali, infatti l'enunciato corrispondente – per ogni coppia di numeri x,y *iperreali* positivi esiste un numero *ipernaturale* n tale che $n\cdot x>y$ – è valido nell'insieme degli iperreali; occorre tuttavia notare che in questo caso n è un ipernaturale e non un naturale standard e può in effetti essere un numero infinito. Quindi, anche se formalmente valida per gli iperreali, la proprietà archimedea ha in questo ambito un significato completamente diverso. Questo può accadere in generale: enunciati, che restano formalmente validi, possono mutare in un certo senso di significato nel passaggio da un sistema all'altro.

2 Caratteristiche principali delle proposte didattiche in NSA

Molte proposte di insegnamento della NSA, in Italia e all'estero, si ispirano ai lavori di Keisler (1976a), che hanno giocato un ruolo di primo piano per quel che riguarda la diffusione nelle scuole dell'opera di Robinson (Kleiner, 2001).
In sintesi, diversi autori propongono un approccio assiomatico alla NSA: si assume l'esistenza di un'estensione dei numeri reali, cioè l'esistenza di un insieme di numeri, gli iperreali, che contiene i numeri reali (o meglio una copia isomorfa dell'insieme dei numeri reali), numeri infiniti e infinitesimi, tale per cui ogni funzione reale di n variabili reali è estesa in modo unico a una funzione iperreale di n variabili iperreali e ogni relazione n-aria tra numeri reali è estesa in modo unico a una relazione n-aria tra numeri iperreali (assiomi di estensione) e per il quale vale il *principio* (*o assioma*) *di transfer*.
Il principio di transfer può essere formulato come segue:

> «Principio di transfer (o principio di Leibniz):
> Sia $P(a_1,\dots,a_n)$ una proprietà degli oggetti standard $a_1,\dots,a_n$ espressa in *forma elementare*. Allora $P(a_1,\dots,a_n)$ vale se e solo se la stessa proprietà vale per le corrispondenti estensioni non standard, $[a_1^*,\dots,a_n^*]$, cioè:
> $$P(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow P(a_1^*,\dots,a_n^*)»$$
> (Di Nasso, 2003, p.18)

In questo approccio, il problema dell'esistenza o della costruzione dell'insieme degli iperreali non viene affrontato in modo esplicito, come d'altronde non viene affrontato (se non raramente) il problema dell'esistenza o della costruzione dell'insieme dei reali a partire dai razionali; l'insieme dei numeri iperreali viene presentato come un'estensione dell'insieme dei numeri reali, che a sua volta è un'estensione dell'insieme dei numeri razionali, che è un'estensione dei numeri interi… il processo di ampliamento di un insieme numerico con l'introduzione di nuovi "numeri" e il mantenimento di alcune proprietà formali dell'insieme di partenza non è in sé una novità per gli studenti, anche se talvolta è condotto senza essere problematizzato o senza essere accompagnato da una riflessione esplicita.
Per dare maggior concretezza ai numeri infiniti e infinitesimi e facilitare una loro visualizzazione sono frequentemente introdotti, come espediente, strumenti ottici immaginari: il microscopio infinitesimo e il telescopio infinito, che a seconda del fattore di scala (finito, infinito, infinitesimo) possono rendere visibili i numeri iperreali (**Figura 1**).

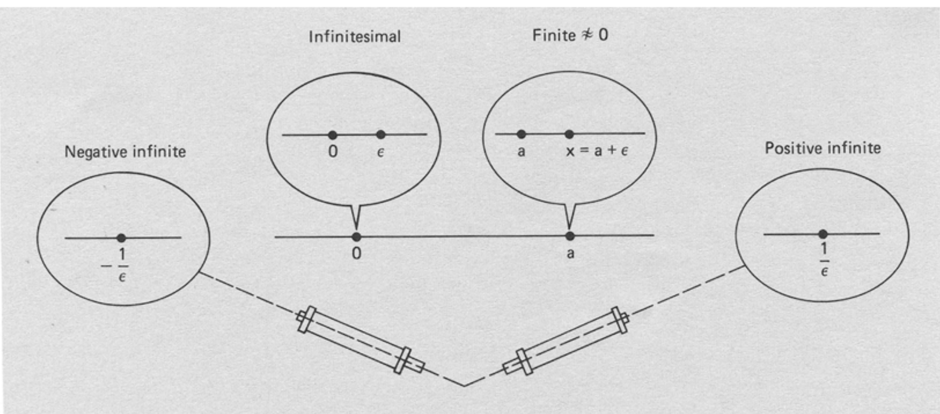


Figura 1
Microscopi infinitesimi con fattore di scala $\frac{1}{\varepsilon}$ centrato in 0 e in un numero reale a e telescopi infiniti puntati su $\frac{1}{\varepsilon}$ e $-\frac{1}{\varepsilon}$ (tratta da Harnik, 1986, p. 45).

Sono centrali in NSA le relazioni di *infinitamente vicino*, di *indistinguibile* e la funzione *parte standard*, perché a partire da queste si possono riformulare in NSA le definizioni delle principali nozioni dell'analisi standard; vediamone le definizioni.

Definizione (*infinitamente vicini*): due numeri si dicono *infinitamente vicini* se e solo se la loro differenza è un infinitesimo.
Definizione (*indistinguibili*): due numeri iperreali si dicono *indistinguibili* se e solo se il loro rapporto è infinitamente vicino a 1.

Si tratta di due relazioni d'equivalenza. I termini utilizzati *infinitamente vicino* e *indistinguibile* possono evocare significati intuitivi molto vicini tra loro, ma le due nozioni non coincidono. Ad esempio, se ε è un infinitesimo, ε e ε^2 sono due infinitesimi e dunque infinitamente vicini ma non indistinguibili (il loro rapporto non è infinitamente vicino a 1), e d'altra parte se M è un numero infinito e a un numero finito non infinitesimo, $M+a$ e M non sono infinitamente vicini ma sono invece indistinguibili.
Per quel che riguarda la relazione *infinitamente vicini*, è possibile dimostrare che dato un numero iperreale finito esiste ed è unico un numero reale infinitamente vicino a esso. Questo consente di definire la parte standard di un numero iperreale finito.

Definizione (*parte standard*): definiamo *parte standard di un numero iperreale non infinito* l'unico numero reale infinitamente vicino ad esso.

A partire da queste nozioni è possibile definire le nozioni di limite (anche se alcuni insegnanti non la presentano, in quanto non strettamente necessaria nello sviluppo della teoria), continuità, derivata e integrale senza ricorrere al formalismo $\varepsilon - \delta$. Ad esempio, se f è una funzione reale di variabile reale, e x_0 è un punto di accumulazione del dominio di f, il limite di f per x che tende a x_0 può essere definito nel modo seguente:

Definizione: diciamo che f ha limite finito per x che tende a x_0, se esiste un numero reale L tale che per ogni numero x infinitamente vicino a x_0 ma diverso da x_0, $f(x)$ è infinitamente vicino a L.

Notiamo, nella definizione, che se x è infinitamente vicino a x_0 allora è un numero iperreale non reale, e dunque le due occorrenze del simbolo f indicano sia una funzione reale di variabile reale sia la sua estensione agli iperreali, e infatti $f(x)$ dovrà essere un numero iperreale altrimenti non potrebbe essere infinitamente vicino a L.
In questa definizione, come avviene abitualmente, per non appesantire la notazione, non si distingue tra funzione reale f e la sua estensione iperreale f^*.
Concludiamo questa breve panoramica sugli aspetti specificamente matematici citando la definizione di retta tangente al grafico di una funzione. In NSA questa viene definita come la retta che passa per due punti infinitamente vicini del grafico di una funzione (**Figura 2**); e viene introdotta contestualmente alla nozione di derivata, definita come la parte standard del coefficiente angolare di tale retta.

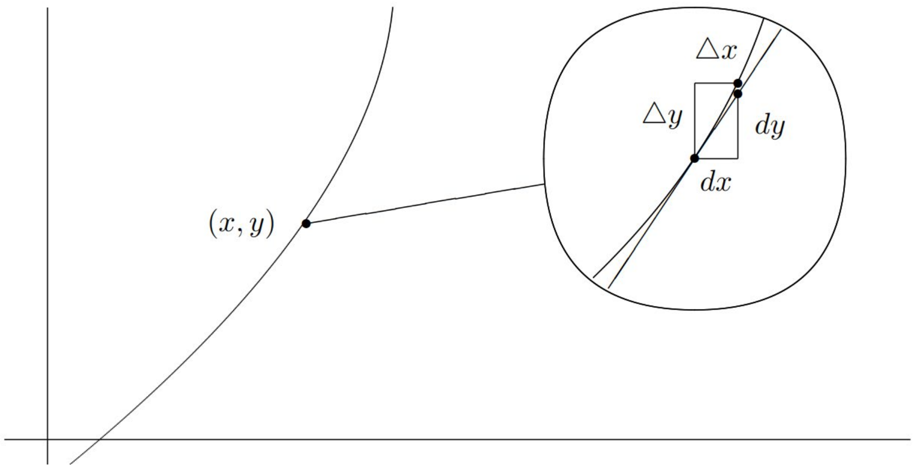


Figura 2
Microscopio infinitesimo con fattore di scala $\frac{1}{dx}$ centrato in (x,y) (tratta da Keisler, 1976b, p. 37).

Una volta introdotta la derivata è possibile enunciare e dimostrare il teorema dell'incremento, che consente di attribuire un significato preciso all'affermazione che la retta tangente al grafico di una funzione in un punto e il grafico stesso sono tra loro indistinguibili (in punti infinitamente vicini al punto di tangenza).

Teorema (*dell'incremento*). Siano f una funzione derivabile e dx un infinitesimo non nullo. Allora esiste un infinitesimo non nullo ε tale che $f(x+dx)-f(x)=f'(x)dx+\varepsilon dx$.

Come avevamo anticipato le definizioni appaiono "più semplici", alleggerite dall'aver abbandonato la formalizzazione usuale e ricorrono a termini come "infinitamente vicino" o "indistinguibili", fortemente evocativi, e allo stesso tempo definiti in modo rigoroso nel quadro della NSA.
Non ci dilunghiamo oltre nella presentazione delle caratteristiche che appaiono comuni nelle proposte di insegnamento della NSA; l'obiettivo era quello di darne una rapida illustrazione per consentire al lettore di farsi un'idea delle ragioni per le quali alcuni docenti hanno adottato questo approccio, e seguire poi la presentazione del nostro studio e la discussione dei risultati. Il lettore interessato ad approfondire questo tema può trovare indicazioni tra i riferimenti bibliografici.

2.1 Le ragioni della scelta di un approccio alla NSA

Keisler (1976a; 1976b) individua tre ragioni principali a favore dell'insegnamento della NSA: fornire agli studenti ulteriori strumenti matematici, rispetto a un approccio tradizionale, per possibili importanti applicazioni per il futuro; rendere centrali nell'impostazione teorica concetti, come quelli di derivata e integrale, più facili da comprendere e da applicare per gli studenti rispetto al concetto di limite; e, soprattutto, introdurre concetti più vicini all'intuizione degli studenti. Si tratta di posizioni generalmente condivise da chi promuove tale approccio. Machover, ad esempio, asserisce: «L'analisi non standard è uno strumento molto potente: rende molti concetti matematici molto più intuitivi; e le dimostrazioni non standard sono spesso più brevi, più facili e più "naturali" rispetto alle loro controparti standard» (Machover, 1993, p. 207, traduzione degli autori).
Harnik evidenzia anche come la NSA, fornendo la possibilità di definirle in modo esplicito e rigoroso, rende preciso e ammissibile in un discorso formale il ricorso a

espressioni quali "infinitamente piccolo" altrimenti utilizzabili solo in modo figurato o metaforico. «A livello di classe, l'importanza principale del contributo di Robinson è che rassicura noi, gli insegnanti, che quando diciamo "infinitesimo" possiamo finalmente affermare di sapere di cosa stiamo parlando» (Harnik, 1986, p. 63, traduzione degli autori).

Infine c'è chi vede nella NSA il coronamento di un percorso storico durato secoli, se non millenni, che conferisce piena riconoscibilità e dignità, dal punto di vista matematico, alle idee di infinitamente piccolo e infinitamente grande che caratterizzano l'analisi matematica rispetto agli altri settori della matematica, e che in quanto tali devono far parte del bagaglio di conoscenze di insegnanti e studenti. «Per oltre due millenni metodi infinitesimali sono stati utilizzati con grande successo da Archimede, Leibniz, Newton, Eulero e Cauchy. L'analisi non standard di Robinson è il culmine, se non una giustificazione, di queste idee» (Kleiner, 2001, p. 172, traduzione degli autori).

Nel corso del nostro studio abbiamo intervistato 5 insegnanti che insegnano NSA da almeno 3 anni, in scuole diverse di diverse città[4] per conoscere, tra le altre cose, le ragioni per le quali hanno scelto tale approccio, quali potenzialità vi vedessero e quali criticità avessero riscontrato. Anche se non intendiamo soffermarci troppo su questo punto, ci sembra interessante rilevare che, per quel che riguarda le ragioni a favore dell'insegnamento della NSA e le potenzialità che gli insegnanti vi scorgono, troviamo piena rispondenza con quanto emerge dalla letteratura. Costituiscono in generale elemento di preoccupazioni l'individuazione di un adeguato livello di rigore nell'introduzione dei numeri iperreali e la necessità di dover introdurre in poco tempo nuove relazioni che gli studenti potrebbero non distinguere facilmente. 4

Nonostante gli argomenti a favore della NSA sopra menzionati possano apparire ragionevoli, non c'è un corpus di ricerca in didattica della matematica che possa confermare in modo convincente che i concetti di NSA siano più vicini all'intuizione degli studenti (qualunque cosa si intenda per intuizione) dei concetti di analisi standard. Al contrario, la ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento su questo aspetto è piuttosto povera.

3 Ricerche sull'apprendimento degli studenti dei concetti base di analisi non standard

Come accennato sopra, la proposta dell'insegnamento della NSA al posto dell'analisi standard non sembra fino ad ora aver suscitato un grande dibattito nel panorama della ricerca in didattica della matematica.

Costituisce un'eccezione lo studio svolto negli anni '70 da Kathleen Sullivan (1976). In questa ricerca è stato proposto ad alcuni insegnanti con esperienza nell'insegnamento dell'analisi matematica standard di sperimentare un percorso didattico. Lo studio ha coinvolto 68 studenti di 5 diverse scuole. Per valutare i risultati Sullivan ha somministrato un test al gruppo di studenti coinvolto nella sperimentazione e a

4. Verona, liceo delle scienze umane, opzione economico-sociale, NSA da 3 anni; Modena, istituto tecnico industriale, NSA da 7 anni; Morbegno, istituto tecnico per geometri, NSA da 5 anni; Venezia, liceo classico, NSA da 18 anni; Milano, liceo scientifico, NSA da 7 anni.

un gruppo di controllo e ha confrontato le risposte. L'obiettivo del test era studiare le abilità degli studenti di definire e applicare concetti di base di analisi, calcolare limiti, e produrre prove nell'ambito della NSA stabilendo un confronto con l'ambito dell'analisi standard.
Anche se lo studio ha evidenziato alcune differenze interessanti tra le prestazioni dei due gruppi, le conclusioni tratte sono state piuttosto caute: da un lato, si afferma che la NSA può rappresentare un valido approccio alternativo all'insegnamento dell'analisi; dall'altro si sottolinea che la NSA non può essere considerata un modo per semplificare l'analisi – «non si tratta di "analisi resa facile"» (Sullivan, 1976, p. 375, traduzione degli autori). In particolare, nessun risultato sembra supportare la conclusione che i concetti della NSA siano più intuitivi di quelli dell'analisi.
Se consideriamo d'altro canto la letteratura relativa all'analisi standard, possiamo osservare come alcuni studi rivelino che gli studenti possano sviluppare intuizioni o idee apparentemente simili o in linea con concetti di analisi non standard. Questo può accadere ad esempio con il concetto di limite, quando gli studenti sono esposti all'uso continuo di espressioni quali "rendere una variabile arbitrariamente piccola" o "arbitrariamente grande" (Tall, 1990; Cornu, 1991). Tuttavia si tratta spesso di somiglianze solo superficiali; Tall infatti osserva: «anche se l'uso informale degli infinitesimi può sembrare più vicino all'analisi non standard, le convinzioni spontanee degli studenti sono spesso incoerenti anche con la teoria non standard» (Tall, 1993, p. 18, traduzione degli autori).
Un'eccezione interessante è rappresentata da Sarah, studentessa universitaria, che, nel contesto di un'indagine sulle concezioni degli studenti in analisi standard (Ely, 2010), ha mostrato di avere sviluppato un sistema di concezioni apparentemente coerenti con la formalizzazione non standard delle stesse: «solide concezioni della linea di numeri reali che includono quantità e distanze infinitesime e infinite» (Ely, 2010, p. 117, traduzione degli autori).

4 Il nostro progetto di ricerca

Questo articolo, lo ricordiamo, riporta i risultati di uno studio pilota il cui obiettivo principale è quello di indagare le concezioni[5] degli studenti in NSA per discutere, eventualmente confermare o respingere, l'affermazione secondo cui i concetti di NSA siano più vicini all'intuizione o alla concettualizzazione spontanea degli allievi. L'obiettivo dello studio è quindi di natura molto aperta ed esplorativa; d'altra parte il numero esiguo di studi in letteratura su questo tema non ha permesso di assumere un punto di vista meglio delineato e focalizzato. 5
Per preservare il carattere esplorativo e l'apertura del nostro studio, abbiamo deciso di inquadrarlo all'interno della teoria generale su *concept-image* e *concept-definition* elaborata da Tall e Vinner (1981) e ampiamente diffusa nella ricerca in didattica della matematica.

5. Utilizziamo nell'articolo il termine concezione secondo un'accezione comune in didattica della matematica (Artigue, 1991) per riferirci all'esistenza di una pluralità di punti di vista diversi su uno stesso oggetto matematico e distinguere la maggior o minor adeguatezza di questi punti di vista per la risoluzione di una data classe di problemi.

4.1 *Concept-image* e *concept-definition*

In ambito didattico è ampiamente riconosciuta la necessità di distinguere la definizione di una nozione all'interno di un sistema di conoscenze esplicite dal significato personale che a tale nozione viene assegnato da un individuo, esiste su questo una vasta letteratura. Nell'ambito della ricerca in didattica della matematica un riferimento classico è quello ai lavori di Tall e Vinner che propongono di distinguere tra *concept-definition* e *concept-image*.

L'espressione *concept-image* è introdotta per tener conto della dimensione non verbale, costituita da rappresentazioni visive, impressioni, esperienze, associata nella mente di un individuo alla definizione di un concetto. L'espressione *concept-image* descrive dunque «la struttura cognitiva associata ad un concetto, che include tutte le immagini mentali, le proprietà associate e i processi» (Tall & Vinner, 1981, p. 152, traduzione degli autori).

La *concept-image* si può modificare, evolve nel tempo man mano che lo studente acquisisce nuove informazioni e non costituisce necessariamente una struttura coerente: aspetti diversi, eventualmente tra loro incoerenti, possono emergere in momenti o situazioni differenti.

L'espressione *concept-definition* indica invece un'entità linguistica: una parola o una combinazione di parole e simboli usata per specificare quel determinato concetto (Tall & Vinner, 1981). Può essere formale o personale e può variare di volta in volta.

Concept-definition e *concept-image* dovrebbero idealmente interagire in sinergia nella soluzione di problemi, come ad esempio schematizzato in Figura 3. Nella figura, *concept-definition* e *concept-image* relative a una stessa nozione sono schematizzate da due celle distinte, le frecce indicano che, in questo caso, il processo di risoluzione del problema inizia con il ricorso alla *concept-definition* sollecitato direttamente nell'interpretazione della consegna, si sviluppa attraverso l'interazione tra *concept-definition* e *concept-image* e conduce a una risposta controllata in ultima istanza ancora dalla *concept-definition*.

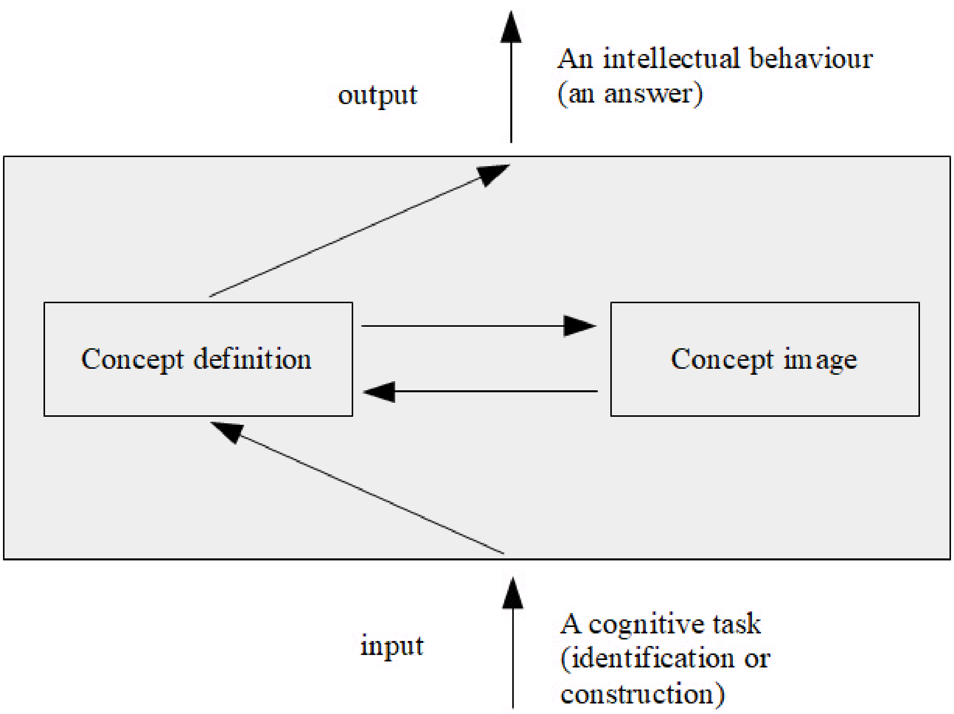


Figura 3
Interazione ideale tra *concept-image* e *concept-definition* (tratta da Vinner, 1991, p. 71).

La situazione schematizzata è ideale; in generale la dinamica tra *concept-image* e *concept-definition* può assumere forme diverse a seconda della situazione. Ad esempio un individuo può attingere alla sola *concept-definition* quando deve produrre una definizione esplicita di un concetto, o attingere alla sola *concept-image* quando una definizione non è richiesta. È il caso, ad esempio, delle risposte intuitive, in cui l'allievo risolve un problema o risponde a una domanda senza consultare la *concept-definition* (Figura 4).

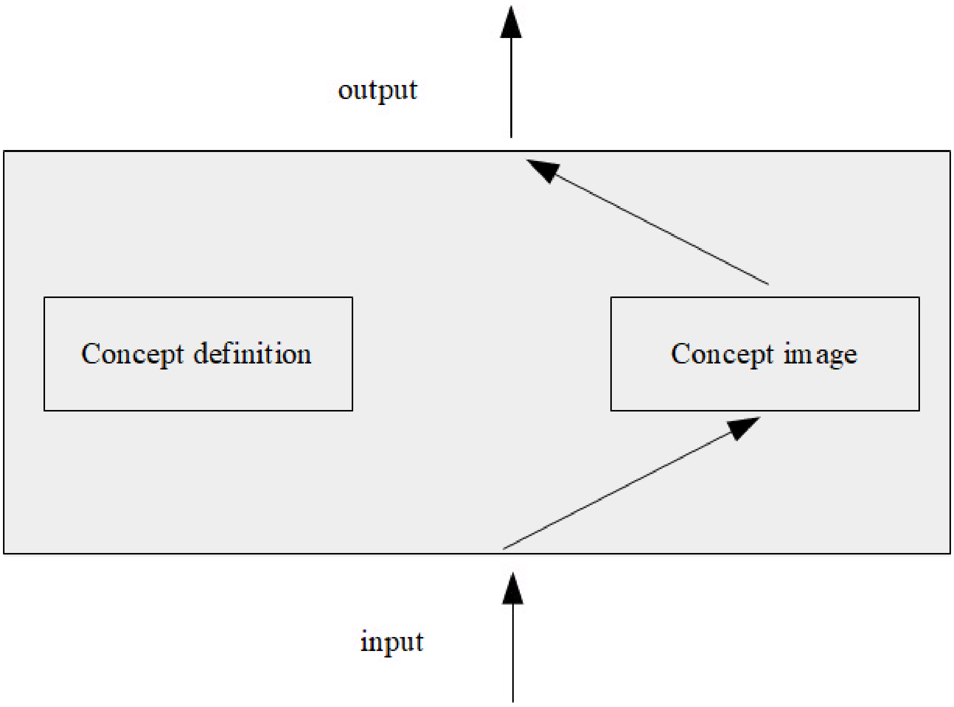


Figura 4
Mancata interazione tra *concept-image* e *concept-definition* nel caso di risposta intuitiva (tratta da Vinner, 1991, p. 73).

Questo non significa che la risposta intuitiva sia necessariamente sbagliata, ma solo che non è sottoposta al controllo esplicito della definizione dei concetti in gioco. I problemi sorgono quando la *concept-image* include aspetti non coerenti con la teoria matematica di riferimento e *concept-image* e *concept-definition* entrano in conflitto tra loro.

4.2 Contesto dello studio e partecipanti

Lo studio si è svolto nel corso dell'anno scolastico 2017/2018 e ha coinvolto 76 studenti di 4 diverse classi di 2 scuole secondarie di secondo grado[6]: una terza, una quarta e una quinta di un liceo delle scienze umane ad indirizzo economico-sociale di Verona e una quarta di un istituto tecnico industriale (perito elettronico) di Modena. Gli studenti delle classi terza e quarta di Verona hanno seguito nel corso dell'anno un percorso di introduzione all'insieme dei numeri iperreali; quelli della classe quinta di Verona hanno visto l'introduzione dei numeri iperreali in uno degli anni precedenti e nel corso dell'anno scolastico 2017/2018 hanno seguito un percorso di NSA che prevedeva l'introduzione dei concetti centrali della teoria; gli studenti della classe quarta

6. La scuola secondaria di secondo grado italiana corrisponde al quarto anno di scuola media e alla scuola media superiore del Canton Ticino.

di Modena hanno seguito nel corso dell'anno scolastico 2017/2018 un percorso che a partire dall'introduzione ai numeri iperreali è arrivato a trattare i concetti centrali di NSA, tutto in un unico anno scolastico. Questi percorsi, svolti come parte integrante dell'attività curriculare, sono stati progettati e realizzati dall'insegnante della classe.
Al termine dell'anno scolastico abbiamo proposto agli studenti un questionario da svolgere in 45 minuti che descriviamo nel prossimo paragrafo.

4.3 I questionari: struttura generale e quesiti

In questo articolo presentiamo e discutiamo i risultati raccolti tramite questionari che sono stati proposti ai 76 studenti coinvolti nello studio. Dato che gli studenti hanno svolto percorsi didattici differenti che, per via anche del diverso livello scolare, hanno coperto differenti porzioni del curriculum di NSA, abbiamo deciso di non elaborare un unico questionario, ma di assemblarne 4 diversi, uno per ogni classe coinvolta, a partire però da un unico corpo di quesiti con tratti comuni.
Abbiamo dunque progettato una serie di quesiti, alcuni aperti e altri chiusi, riguardanti diversi aspetti della NSA. Nello specifico, abbiamo individuato diversi aspetti inerenti alla NSA su cui ci sembrava importante indagare le *concept-image* degli studenti.

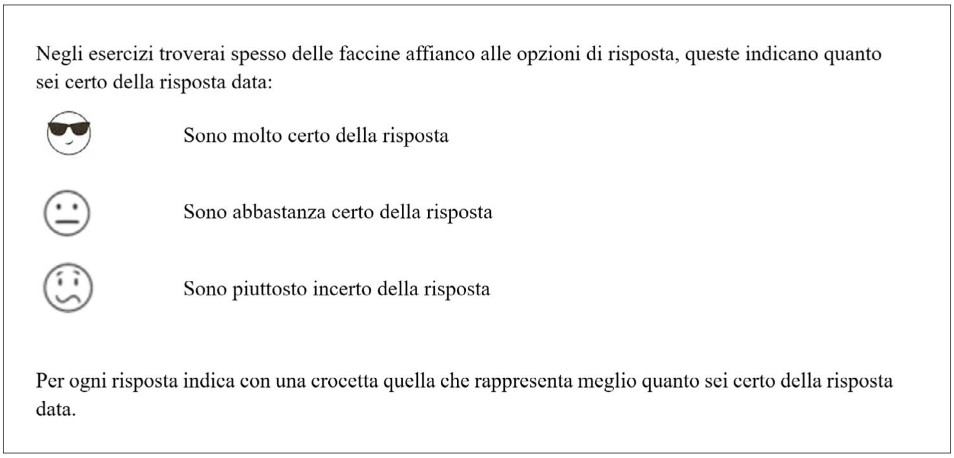
I. *La natura degli iperreali.* L'obiettivo di questo gruppo di quesiti è indagare se la presentazione esplicita, gli esempi e i problemi introduttivi proposti agli studenti hanno contribuito a creare un efficace contesto di senso per l'introduzione dei numeri iperreali.
II. *Le nozioni di infinitamente vicini, indistinguibili e parte standard.* I quesiti di questo gruppo hanno l'obiettivo di indagare concezioni sulle nozioni di infinitamente vicino, indistinguibile e parte standard.[7] 7
III. *La struttura d'ordine e la struttura di campo dell'insieme degli iperreali.* Questi quesiti sollecitano le *concept-image* degli studenti in riferimento rispettivamente alla relazione d'ordine, in particolare al confronto tra infinitesimi e tra infiniti, e all'estensione delle operazioni di campo (somma e prodotto) a infinitesimi e infiniti.
IV. *Le nozioni di limite, retta tangente al grafico di una funzione e integrale.* Come abbiamo visto, tra le ragioni a sostegno della NSA c'è la convinzione che le definizioni delle nozioni più importanti dell'analisi risultino più semplici e intuitive e più facili da trattare operativamente; questi quesiti vogliono indagare proprio questo aspetto.

Gli aspetti sopra menzionati sono tra loro intrecciati, abbiamo comunque fatto lo sforzo di elaborare quesiti che coinvolgessero prioritariamente e in modo prominente uno solo di essi, per poter meglio individuare e discutere eventuali criticità.
A partire dai quesiti prodotti, abbiamo dunque assemblato 4 diversi questionari – uno per ciascuna classe coinvolta – in modo da toccare quanti più aspetti possibili e

7. Dal punto di vista didattico pensiamo che l'introduzione troppo ravvicinata di nozioni diverse come quelle di infinitamente vicino e indistinguibile, che formalizzano aspetti che possono apparire molto simili agli studenti, possa generare confusione. Riteniamo inoltre che il concetto di infinitamente vicino possa essere interpretato come "molto vicino", quindi con un significato differente rispetto a quello formale. Secondo questa prospettiva, ad esempio, i numeri 0,0000001 e 0,0000002 possono essere considerati molto vicini, ma non sono infinitamente vicini.

facendo attenzione a inserire quesiti comuni in tutti i questionari. Il numero di quesiti varia da questionario a questionario e va da 11 a 13. La differenza principale tra i questionari riguarda la porzione di curriculum coperta. La formulazione dei quesiti e i questionari completi sono stati sottoposti ai docenti degli studenti coinvolti perché ne valutassero la coerenza con gli argomenti trattati e gli obiettivi didattici dei rispettivi corsi.

Per ciascun quesito, tranne il quesito I.1, che vedremo più avanti, abbiamo chiesto agli studenti di indicare anche il proprio grado di fiducia rispetto alla correttezza della risposta data; gli studenti potevano scegliere tra tre possibili opzioni (**Figura 5**).


Negli esercizi troverai spesso delle faccine affianco alle opzioni di risposta, queste indicano quanto sei certo della risposta data:

Sono molto certo della risposta

Sono abbastanza certo della risposta

Sono piuttosto incerto della risposta

Per ogni risposta indica con una crocetta quella che rappresenta meglio quanto sei certo della risposta data.

Figura 5
Indicatori del grado di fiducia nella correttezza delle risposte ai quesiti.

5 Discussione dei risultati

Dato il suo carattere esplorativo e, comunque, la non omogeneità tra i diversi questionari che rende difficile una sintesi unificante, abbiamo deciso di condurre una analisi di tipo qualitativo; in questa sede ci concentriamo sui quesiti le cui risposte sembrano offrire gli spunti più ricchi e stimolanti.
Per tentare di dare comunque una panoramica, il più possibile completa, andremo a esaminare (almeno) un quesito per ognuno degli aspetti toccati nei questionari: I) la natura degli iperreali; II) le nozioni di *infinitamente vicini*, *indistinguibili*, e *parte standard*; III) la struttura d'ordine e di campo degli iperreali; IV) le nozioni di limite, retta tangente al grafico di una funzione e integrale. I quesiti sono identificati con una etichetta così composta: un numero romano, che indica l'aspetto della NSA con cui il quesito può essere messo in relazione in modo prominente (I, II, III e IV, richiamati sopra); un numero (1, 2, 3…), che serve a distinguere gli uni dagli altri i problemi relativi a quello specifico aspetto; un altro numero (3, 4 o 5) con il quale si indicano le classi alle quali il quesito è stato somministrato (3ª, 4ª o 5ª); una combinazione di lettere che indicano la provincia in cui ha sede l'istituto (MO per Modena, VR per Verona). Nei testi dei questionari forniti agli studenti, i quesiti erano numerati progressivamente.

5.1 Sulla natura degli iperreali e perché sono introdotti

Nel quesito I.1 (Figura 6), presente in tutti i questionari, chiediamo agli studenti di esplicitare perché secondo loro vengono definiti i numeri iperreali. Se consideriamo gli oggetti matematici come strumenti concettuali definiti per particolari scopi (ad esempio, per risolvere problemi teorici o pratici), comprendere la natura degli oggetti matematici richiede anche avere un’idea dei contesti problematici che questi aiutano ad affrontare. Con questo quesito abbiamo quindi voluto indagare il senso che gli studenti hanno attribuito alla loro attività con i numeri iperreali: tali attività e i problemi che hanno affrontato sono sufficienti a offrire agli studenti un contesto di senso per questi nuovi numeri? Se non quello proposto, quale contesto di senso è stato attribuito dagli studenti ai numeri iperreali? Data la natura del quesito non ci sembra aver senso una classificazione delle risposte in corrette o errate. Inoltre, la richiesta di indicare il proprio grado di fiducia ci è sembrata da un lato poco significativa e dall'altro una possibile fonte di disorientamento per gli studenti.

Quesito N°1 Perché si introducono i numeri iperreali?

Indica quanto sei d'accordo con le seguenti motivazioni.

1: completamente in disaccordo

2: abbastanza in disaccordo

3: indifferente

4: abbastanza d'accordo

5: completamente d'accordo

	1	2	3	4	5
Sulla retta ci sono punti che non corrispondono ad alcun numero reale, quindi introduciamo i numeri iperreali per riempire questi spazi					
I numeri iperreali vengono introdotti per risolvere alcuni problemi pratici, come la tangente ad una parabola, o la velocità istantanea					
I numeri iperreali vengono introdotti per poter identificare quantità molto grandi e quantità molto piccole					
I numeri iperreali vengono introdotti per giustificare il postulato di Eudosso – Archimede					
I numeri iperreali sono numeri fittizi che vengono introdotti per risolvere problemi che verranno studiati in futuro					

Ti vengono in mente altre motivazioni?

Figura 6
Quesito I.1 – 3VR, 4VR, 5VR, 4MO.

Il quadro generale che emerge dalle risposte è molto articolato, ma è possibile comunque individuare indicazioni interessanti. Focalizziamo la nostra analisi sulla prima, terza e quarta affermazione (che indichiamo con A, C e D), che sono proprio quelle che più direttamente riguardano il passaggio dai reali agli iperreali.[8] 8

8. Le tabelle complete con le percentuali di scelta per ciascuna affermazione di questo quesito e di altri, per i quali non inseriremo i dati completi nel corpo dell'articolo, si trovano nell'Allegato 1.

Nella **Tabella 1** sono mostrate le percentuali di risposte degli studenti a queste affermazioni: abbiamo accorpato le risposte "abbastanza d'accordo" e "completamente d'accordo" da un lato, e "completamente in disaccordo" e "abbastanza in disaccordo" dall'altro; non sono riportate in questa tabella le percentuali delle mancate risposte e delle scelte dell'opzione "indifferente".

Affermazione	Livello di accordo	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)	5VR (13)
A	Accordo (4,5)	62,5%	66,67%	38,89%	23,08%
	Disaccordo (1,2)	8,33%	4,76%	44,44%	61,54%
C	Accordo (4,5)	79,17%	80,95%	61,11%	100%
	Disaccordo (1,2)	8,33%	19,05%	22,22%	0%
D	Accordo (4,5)	25%	19,05%	27,78%	38,46%
	Disaccordo (1,2)	58,33%	61,90%	44,44%	23,08%

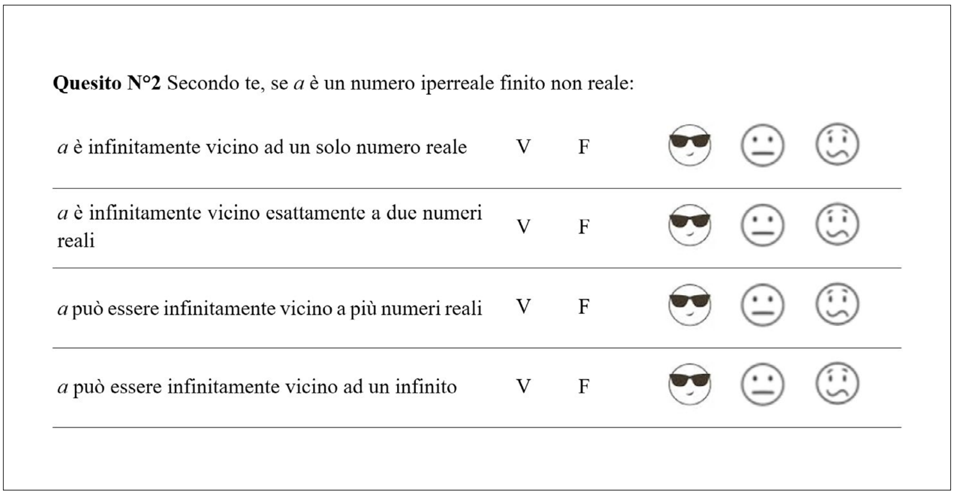
Tabella 1
Percentuali risposte quesito I.1.

Come si vede, pur con importanti differenze tra le classi, una percentuale molto alta di studenti è d'accordo o completamente d'accordo con l'affermazione C, secondo la quale i numeri iperreali vengono introdotti per definire quantità grandi e piccole. Questo risultato non è di immediata interpretazione dato che non sappiamo il senso che gli studenti hanno attribuito all'espressione "identificare quantità", che può da un lato evocare contesti e situazioni concreti e dall'altro essere usata in modo metaforico in contesti anche molto astratti; tuttavia, l'elevata percentuale di accordo segnala indubbiamente una criticità rispetto a come sono introdotti i numeri iperreali. Tali criticità emergono con ancora maggior forza se si considerano le risposte alle altre affermazioni. In particolare è da notare la forte differenza di risposte tra gli studenti delle 4 classi: da un lato gli studenti di 3VR e 4VR, dove l'introduzione degli iperreali è più recente, e dall'altro gli studenti di 4MO e 5VR, dove l'insegnamento della NSA è avviato da maggior tempo e l'introduzione degli iperreali più lontana nel tempo. Questa differenza sembra suggerire la possibilità che proprio l'introduzione dei numeri iperreali metta in crisi, almeno nell'immediato, il ruolo della retta geometrica come possibile modello dell'insieme dei numeri reali.
Infine, anche se non è altissima la percentuale di coloro che sembrano credere che l'introduzione dei numeri iperreali serva a giustificare la proprietà archimedea dei reali, appare comunque significativa la posizione degli studenti relativamente all'affermazione D: essa sembra testimoniare un marcato disorientamento e una scarsa consapevolezza da parte di più di un quarto degli studenti riguardo alle proprietà fondamentali di reali e iperreali e delle motivazioni che conducono a introdurre questi ultimi. Se consideriamo poi solo le classi 3VR, 4VR e 5VR che hanno avuto lo stesso insegnante, possiamo notare che questo straniamento sembra più diffuso tra gli studenti di quinta i quali da un lato sono quelli per i quali l'introduzione degli iperreali è più distante nel tempo ma dall'altro sono anche coloro che da più tempo lavorano con questo sistema numerico.
In sintesi, ci sembra di poter concludere che la maggior parte degli studenti consideri

inadeguato il sistema di numeri reali per trattare quantità grandi o piccole o per indicare tutti i punti su una linea. Questo potrebbe essere dovuto al modo in cui gli iperreali sono stati introdotti in queste classi: facendo uso di esempi in cui quantità molto grandi e molto piccole sono confrontate tra loro per introdurre l'idea di una quantità trascurabile rispetto a un’altra; o di dispositivi visivi che possono suggerire che ci sono punti sulla linea che non sono coperti dai reali. Le *concept-image* sia dei reali sia degli iperreali che emergono da queste risposte appaiono inadeguate dal punto di vista matematico. Lo sforzo degli insegnanti di introdurre gli iperreali facendo appello all'intuizione non sembra avere avuto successo: ciò porta a chiedersi se l'introduzione degli iperreali possa avere successo se gli studenti non sviluppano una *concept-image* appropriata del sistema dei numeri reali.

5.2 Sulle nozioni di infinitamente vicini, indistinguibili e parte standard

Come accennato nei paragrafi precedenti queste nozioni non hanno una controparte in analisi standard, ma assumono un ruolo centrale in NSA per la definizione delle nozioni di limite, derivata e integrale.
Esaminiamo 3 quesiti: i primi 2 inclusi nei questionari per le classi 3VR, 4VR e 4MO, l’ultimo incluso in tutti i questionari.



Quesito N°2 Secondo te, se a è un numero iperreale finito non reale:

a è infinitamente vicino ad un solo numero reale	V	F	
a è infinitamente vicino esattamente a due numeri reali	V	F	
a può essere infinitamente vicino a più numeri reali	V	F	
a può essere infinitamente vicino ad un infinito	V	F	

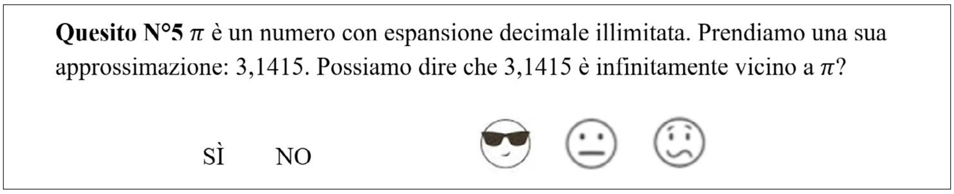
Figura 7
Quesito II.1 – 3VR, 4VR, 4MO.

Nel quesito in Figura 7 l’unica affermazione vera è la prima, le altre 3 sono false. Come si vede dalla Tabella 2 la percentuale di risposte corrette a questo quesito è complessivamente molto alta, con l’eccezione comunque significativa degli studenti della classe 3VR.

Affermazione	Opzione	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)
A	**Vero (corretto)**	**45,83%**	**85,71%**	**94,44%**
	Falso	54,17%	14,29%	5,56%
B	Vero	33,33%	4,76%	0%
	Falso (corretto)	**66,67%**	**90,48%**	**100%**
C	Vero	25%	14,29%	5,56%
	Falso (corretto)	**75%**	**80,95%**	**94,44%**
D	Vero	29,17%	28,57%	5,56%
	Falso (corretto)	**70,83%**	**71,43%**	**94,44%**

Tabella 2
Percentuali risposte quesito II.1.

Senza ulteriori approfondimenti non ci sembra possibile offrire un'interpretazione specifica del basso numero di risposte corrette per l'affermazione A dato dagli studenti della classe 3VR. È certo possibile che alcuni studenti abbiano dato risposte errate non tenendo in considerazione che il numero *a* è un iperreale finito (senza questa ipotesi l'affermazione A è falsa e la D vera); anche se, se così fosse, non si spiegherebbe perché sia avvenuto con percentuali così alte solo in questa classe. Il risultato complessivo può sembrare comunque in sé incoraggiante, ma occorre considerarlo insieme alle risposte date agli altri quesiti di questo gruppo. Vediamo ad esempio il quesito II.2 (**Figura 8**).


Quesito N°5 π è un numero con espansione decimale illimitata. Prendiamo una sua approssimazione: 3,1415. Possiamo dire che 3,1415 è infinitamente vicino a π?

SÌ NO

Figura 8
Quesito II.2 – 3VR, 4VR, 4MO.

La risposta è no: π e 3,1415 sono due numeri reali distinti, la loro differenza è ancora un numero reale e quindi non sono infinitamente vicini. Questa è una proprietà generale direttamente collegata al contenuto del quesito precedente (II.1): nessun numero può essere infinitamente vicino a due numeri reali, dato che questi a loro volta non possono essere infinitamente vicini tra loro.

Opzione	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)	Grado di fiducia [9]		
				Alto	Medio	Basso
Sì	79,17%	80,95%	38,89%	48,84%	37,21%	9,3%
No	**20,83%**	**19,05%**	**61,11%**	40%	45%	10%

9

Tabella 3
Percentuali risposte quesito II.2.

9. Le percentuali del grado di fiducia riportate sulle due righe sono calcolate in rapporto al numero totale di coloro che hanno risposto rispettivamente "Sì" (43 studenti) o "No" (20 studenti) alla domanda. La somma delle percentuali non è 100% perché ci sono studenti che pur avendo risposto alla domanda non hanno indicato il proprio grado di fiducia nella risposta data.

Se gli studenti avessero fatto ricorso alla definizione formale, avrebbero potuto facilmente rispondere correttamente alla domanda. Questa considerazione ci fa ipotizzare che gli studenti abbiano risposto sulla base di una *concept-image* della relazione "essere infinitamente vicino" e della nozione di infinitesimo, forse come "numero molto piccolo" o "piccolo a piacere", non adeguata a questo contesto, ma coerente con le risposte al primo quesito. Tale *concept-image* risulta inappropriata in questo caso, come inappropriate appaiono le *concept-image* di numero reale, espansione decimale, approssimazione ecc.
È da notare anche che circa l'85% degli studenti si dichiara completamente o abbastanza certo della propria risposta; se si considera quanto cauti sono in generale gli studenti prima di esprimere un elevato grado di fiducia in merito alle proprie risposte in matematica la percentuale appare davvero molto elevata, il che suggerisce che queste *concept-image* potrebbero essere solide, difficili da destabilizzare.

Quesito N°7 Con ε indichiamo un numero infinitesimo non nullo. Indica nella tabella qui sotto, segnando con una crocetta le caselle corrispondenti, se $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ è uguale, infinitamente vicino, indistinguibile da $1, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\varepsilon}$.

	È uguale a	È infinitamente vicino a	È indistinguibile da	Nessuna delle precedenti		
$\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$					1	
					$\frac{1}{\varepsilon}$	
					$\frac{1}{2}$	
					$\frac{1}{2\varepsilon}$	

Figura 9
Quesito II.3 – 3VR, 4VR, 4MO, 5VR.

L'unica relazione vera, tra quelle da esaminare nel quesito presentato in **Figura 9**, è che $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ è indistinguibile da $\frac{1}{2\varepsilon}$, per il resto $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ non è uguale, né infinitamente vicino, né indistinguibile da 1, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{\varepsilon}$. Vale la pena osservare che, in linea di principio, le opzioni "è uguale", "è infinitamente vicino", "è indistinguibile", non sono mutuamente esclusive: ad esempio, due numeri non infinitesimi, infinitamente vicini sono anche indistinguibili. Le risposte a questo quesito variano molto a seconda della relazione da esaminare e da classe a classe; rimandiamo all'**Allegato 1** per un resoconto dettagliato delle percentuali di risposte. Qui ci limitiamo a riportare (**Tabella 4**) le risposte relative alle possibili relazioni che sussistono tra $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ che offrono comunque lo spunto per considerazioni più generali.

$\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ sono tra loro:	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)	5VR (13)
Uguali	45,83%	28,57%	5,56%	53,85%
Infinitamente vicini	12,50%	19,05%	5,56%	7,69%
Indistinguibili	**29,17%**	**52,38%**	**83,33%**	**30,77%**
Nessuna delle precedenti	4,17%	4,76%	5,56%	7,69%

Tabella 4
Percentuali risposte quesito II.3.

La percentuale di risposte corrette varia molto da classe a classe: passa dal 29,71% della classe 3VR all'83,33% della 4MO, che su questa specifica domanda sovrasta le altre classi. Quello che può stupire nelle risposte degli studenti delle classi di Verona a questo quesito non è solo la percentuale di coloro che non riconoscono che $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ sono indistinguibili, ma anche l'alta percentuale di coloro che affermano che i due numeri sono tra loro uguali: 45,83%, 28,57% e 53,85%; tra l'altro se due numeri sono uguali sono, in particolare sono anche infinitamente vicini e indistinguibili.
Per rispondere correttamente a questo quesito, occorre richiamare le definizioni delle relazioni in gioco e poi svolgere i calcoli del caso. Ad esempio per stabilire se $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ sono infinitamente vicini occorre stabilire se $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon}$ è infinitesimo oppure no. Svolgendo alcuni calcoli, in un paio di passaggi, si arriva alla forma $1+\frac{\varepsilon}{2}$ che non è infinitesimo.
Le risposte errate possono dunque essere dovute alla presenza di una *concept-image* non adeguata e abbastanza forte da inibire il ricorso alla definizione formale, ma anche a difficoltà nello svolgere i calcoli (che tuttavia si presentano formalmente come consueti calcoli con frazioni algebriche). Per quel che riguarda questo ultimo aspetto, notiamo che molto spesso, a seconda dell'obiettivo, i calcoli con gli iperreali possono essere semplificati, formalmente, trascurando opportunamente gli infinitesimi (lo si può fare ad esempio quando si vuole calcolare la parte standard di un numero iperreale finito). Questo modo di procedere può essere in parte automatizzato, ma talvolta richiede un forte controllo concettuale. Se questo controllo è debole o manca, ad esempio perché ai concetti in gioco non è associata una *concept-image* adeguata, il rischio di errori è molto alto, contro l'ipotesi avanzata da alcuni autori sulla supposta maggior semplicità dei calcoli con gli iperreali, ad esempio per il calcolo dei limiti o per lo svolgimento di manipolazioni algebriche nelle dimostrazioni in NSA.
Errori che possono essere ricondotti a un'interpretazione analoga, cioè errori in calcoli con gli iperreali non sostenuti da un adeguato controllo concettuale, si riscontrano anche nelle risposte ad altri quesiti di questa area, su cui però non ci soffermiamo.

5.3 Sulla struttura d'ordine e la struttura di campo dell'insieme degli iperreali

Le proprietà della struttura d'ordine e di campo dell'insieme degli iperreali sono coinvolte, come abbiamo visto, anche in diversi quesiti del gruppo precedente. Anche per questa ragione qui ci limitiamo a proporre l'analisi di un solo quesito (Figura 10).

Quesito N°6 Secondo te, se ho un infinito positivo e lo sommo a sé stesso:

Ottengo ancora lo stesso infinito	V	F
Ottengo un infinito diverso, ma infinitamente vicino	V	F
Ottengo un infinito diverso, dello stesso ordine, ma a distanza infinita	V	F
Ottengo un infinito diverso di ordine superiore	V	F

Figura 10
Quesito III.2 – 3VR, 4VR.

L'unica affermazione vera è la terza. Le quattro affermazioni sono comunque presentate indipendentemente per tentare di scovare eventuali elementi contraddittori nelle *concept-image* degli studenti. Avremmo potuto formulare il quesito chiedendo agli studenti di confrontare M e $2M$, o M e $M+M$, dove M indica un infinito; abbiamo invece optato per una formulazione interamente verbale al fine di non indirizzare gli studenti verso una traduzione e un trattamento del problema in termini simbolici. Volevamo lasciare a loro la decisione e la responsabilità di individuare la modalità di trattamento secondo loro più adeguata.

Affermazione	Opzione	3VR (24)	4VR (21)
A	Vero	62,50%	19,05%
	Falso (corretto)	**37,50%**	**80,95%**
B	Vero	33,33%	23,81%
	Falso (corretto)	**66.67%**	**76,19%**
C	**Vero (corretto)**	**50,00%**	**57,14%**
	Falso	50,00%	42,86%
D	Vero	62,50%	28,57%
	Falso (corretto)	**37,50%**	**71,43%**

Tabella 5
Percentuali di risposte al quesito III.2.

Come avevamo ipotizzato in fase di progettazione del quesito, l'aspetto più interessante non è tanto la percentuale di risposte corrette per ciascuna affermazione in sé, comunque generalmente bassa, quanto il fatto che ben 26 studenti su 45 abbiano indicato come vere affermazioni tra loro contraddittorie.
Da un'analisi puntuale delle risposte emerge infatti che:

– per 13 studenti la somma di un numero infinito con sé stesso è sia uguale che diverso dal numero infinito di partenza (combinazione delle affermazioni A-C, A-D, A-C-D vere);
– per 6 studenti la somma ha sia ordine uguale sia ordine diverso da quello dell'infinito di partenza (affermazioni C-D vere);

– per 13 studenti il risultato è sia infinitamente vicino, sia infinitamente lontano dall'infinito di partenza (affermazioni B-C, B-D, B-C-D vere).

Solo 19 studenti hanno dato risposte tra loro coerenti (hanno cioè indicato una sola risposta vera) e di questi solo 10 hanno risposto correttamente a tutte le affermazioni, hanno cioè indicato come vera l'affermazione C e come false le altre affermazioni. Le risposte a questo quesito confermano dunque che non solo le *concept-image* degli studenti possono presentarsi in certe situazioni in contraddizione con la teoria, ma anche presentare elementi in contraddizione fra loro. Notiamo infine che il grado di fiducia espresso dagli studenti per le risposte date è generalmente medio-basso, a ulteriore conferma del loro disorientamento difronte a questo quesito.

5.4 Sulle nozioni di limite, tangente e integrale

Come anticipato abbiamo elaborato alcuni quesiti il cui obiettivo era indagare se effettivamente le definizioni in NSA delle nozioni centrali dell'analisi standard risultino più semplici, intuitive e facili da trattare operativamente. Questi quesiti sono stati inseriti solo nei questionari di 4MO e 5VR che hanno coperto questa parte di curriculum, e alcuni di essi hanno avuto formulazioni diverse perché le due classi hanno sviluppato questi temi in modo molto diverso. È il caso del quesito IV.1, che nella formulazione per la 5VR menziona esplicitamente il concetto di limite (quesito IV.1a, **Figura 11**), sostituito nella formulazione per la 4MO dal riferimento al concetto di asintoto (quesito IV.1b, **Figura 12**).

Quesito N°6 Di una funzione $f(x)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sai che, se M è un infinito positivo, $f(M) = 1$ e $f(2\mathrm{M}) = -1$. Cosa puoi dire di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$? Scegli una fra le seguenti:

A) Non posso dire nulla, dipende da cosa succede per altri infiniti

B) Il limite non esiste perché in due infiniti diversi la funzione ha valori diversi

C) Il limite è 0 perché la funzione oscilla fra 1 e -1

D) Altro (spiega)

Figura 11
Quesito IV.1a – 5VR.

Quesito N°9 Di una funzione $f(x)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sai che, se M è un infinito positivo, $f(M) = 1$ e $f(2\mathrm{M}) = -1$. Cosa puoi dire del comportamento della funzione all'infinito?

Scegli una fra le seguenti:

A) Non posso dire nulla, dipende da cosa succede per altri infiniti

B) La funzione all'infinito ha un comportamento non stabile perché in due infiniti diversi la funzione ha valori diversi

C) La funzione ha un asintoto in 0 perché la funzione oscilla fra 1 e -1

D) Altro (spiega)

Figura 12
Quesito IV.1b – 4MO.

L'opzione corretta per entrambe le formulazioni è la B. Infatti, in riferimento ad esempio alla formulazione IV.1a (**Figura 11**), esiste il limite finito di f per x che tende a $+\infty$ se e solo se le immagini di tutti gli infiniti positivi tramite la funzione f (o meglio tramite la sua estensione agli iperreali) hanno la medesima parte standard; il limite è invece $+\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se e solo se le immagini di tutti gli infiniti positivi sono a loro volta infiniti positivi (rispettivamente negativi). Possiamo dunque affermare che il limite di f per x che tende a $+\infty$ non esiste. Analogamente per quel che riguarda il quesito come formulato in IV.1b (**Figura 12**) possiamo affermare che la funzione non ha asintoti orizzontali. La formulazione dell'opzione B può risultare ambigua nella misura in cui si fa riferimento all'idea, non meglio precisata, di "comportamento stabile/non stabile".

Tabella 6
Percentuali risposte quesiti IV.1a e IV.1b.

Opzione	IV.1b - 4MO (18)		IV.1a - 5VR (13)	
A	5	27,78%	5	38,46%
B	**10**	**55,56%**	**3**	**23,08%**
C	1	5,56%	2	15,38%
D	2	11,11%	1	7,69%

Il numero di studenti che hanno risposto a questi quesiti è davvero troppo modesto per tentare di trarre conclusioni (**Tabella 6**). Ci limitiamo solo a constatare che il numero di risposte corrette è per entrambe le formulazioni basso, molto basso per 5VR. Ciò suggerisce che anche se la NSA offre, per il calcolo dei limiti a partire dalle definizioni analitiche esplicite delle funzioni, strumenti operativi più semplici di quelli dell'analisi standard, questo non si traduce direttamente nella costruzione di una *concept-image* più efficace dal punto di vista matematico; per cui, quando, come in questo caso, non è richiesto nessun calcolo esplicito, emergono criticità analoghe a quelle che si riscontrano nell'apprendimento dell'analisi standard. Anche il fatto che il livello di fiducia espresso dagli studenti sia prevalentemente medio-basso può essere considerato indicativo del fatto che gli studenti per primi si sono trovati disorientati di fronte a questa richiesta.
I quesiti IV.2 e IV.3 (**Figura 13** e **Figura 14**) indagano le *concept-image* relative alla nozione di retta tangente al grafico di una funzione per un suo punto.

Quesito N°11 Come spiegheresti cos'è una retta tangente a un grafico di una funzione in un suo punto?

Figura 13
Quesito IV.2 – 4MO, 5VR.

Il quesito IV.2 non chiede esplicitamente una definizione di retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto: non vuole infatti sollecitare il recupero della definizione da parte degli studenti, ma piuttosto il tentativo di esplicitare il senso personale che essi danno al concetto di tangente, facendo ricorso, eventualmente in modi impropri, a termini matematici. È noto, dalla letteratura (Biza, 2007; Vinner, 1983), che alla retta tangente al grafico di una funzione in un punto sono frequentemente assegnate caratteristiche che possono entrare in conflitto con la definizione formale, quali: la tangente è una retta che tocca il grafico in un solo punto, che non

taglia il grafico (localmente o globalmente), che non può confondersi con il grafico nemmeno per un breve tratto, che esiste sempre. Uno degli obiettivi del quesito IV.2 è constatare la presenza o meno di questi elementi anche nella *concept-image* di studenti di NSA.
Le risposte degli studenti sono piuttosto varie; è comunque possibile rintracciare alcuni tratti comuni, che sono di particolare rilevanza nel nostro studio, nello specifico:

- 14 studenti su 31 menzionano il fatto che la retta tangente tocca il grafico della funzione in un solo punto (per queste risposte usiamo l'etichetta *punto* nella **Tabella 7** di sintesi);
- 7 studenti su 31 tentano di collegare esplicitamente il coefficiente angolare della retta tangente alla derivata, alcuni descrivendo questo collegamento solo a parole, altri utilizzando espressioni simboliche (*derivata* nella tabella di sintesi);
- 5 studenti su 31 menzionano esplicitamente il fatto che la retta tangente è indistinguibile dal grafico della funzione vicino al punto di tangenza *(indistinguibile* nella tabella di sintesi).

Cinque risposte (che sono già contate sopra) fanno riferimento esplicito a più di uno di questi aspetti, come ad esempio: «è una retta che tocca la funzione in un punto ed è indistinguibile da essa». Sette studenti non forniscono alcun tentativo di spiegazione esplicita di cosa intendono per tangente (alcuni si limitano a rappresentare solo graficamente una retta tangente a un grafico di funzione, altri nemmeno questo). Gli altri studenti hanno fornito risposte diverse che non fanno esplicito riferimento a nessuno di questi aspetti e tra le quali è più difficile trovare tratti comuni; in effetti alcune risposte sono di più difficile interpretazione, ad esempio: «la retta tangente è perpendicolare alla funzione».
Può stupire il basso numero di coloro che citano l'indistinguibilità locale tra la retta tangente e il grafico della funzione, dato che si tratta di una espressione allo stesso tempo definita rigorosamente in NSA e apparentemente molto evocativa.

Etichetta	5VR (13)		4MO (18)	
Punto	7	87,50%	7	43,75%
Derivata	0	0,00%	7	43,75%
Indistinguibilità	0	0,00%	5	31,25%
Altro	3	37,50%	2	12,50%
Non rispondono/ grafico	5		2	

Tabella 7
Sintesi risposte quesito IV.2.[10]

10

Ovviamente la domanda diretta «cosa intendi per…» non è sufficiente per aver accesso alla *concept-image* di un individuo. Per prima cosa, in una situazione collegata

10. Dato che alcune risposte si riferiscono a più aspetti e che alcuni studenti non hanno risposto, le percentuali sono calcolate sul numero di risposte raccolte in ciascuna classe che contengono il tentativo di descrizione in forma verbale o simbolica esplicita. La somma delle percentuali è superiore a 100% perché, appunto, alcune risposte fanno riferimento ad aspetti diversi.

all'esperienza scolastica, uno studente può essere portato a rispondere in modo da soddisfare quelle che ritiene le attese dell'insegnante, anche se non è l'insegnante a porre la domanda. In secondo luogo, in situazioni diverse possono emergere elementi diversi della *concept-image* di un individuo. Infine, un individuo non è in generale consapevole di tutti gli elementi che compongono la propria *concept-image* riferita a un determinato concetto, per cui non potrebbe, nemmeno volendo, esprimerle tutte a parole. Abbiamo dunque accoppiato questo quesito a un altro: il quesito IV.3 (**Figura 14**) che riguarda il riconoscimento a livello grafico della retta tangente a un grafico a prescindere dall'esplicita enunciazione delle sue caratteristiche. Il quesito è ispirato e riadattato a quello utilizzato da Biza nel suo studio (2007).

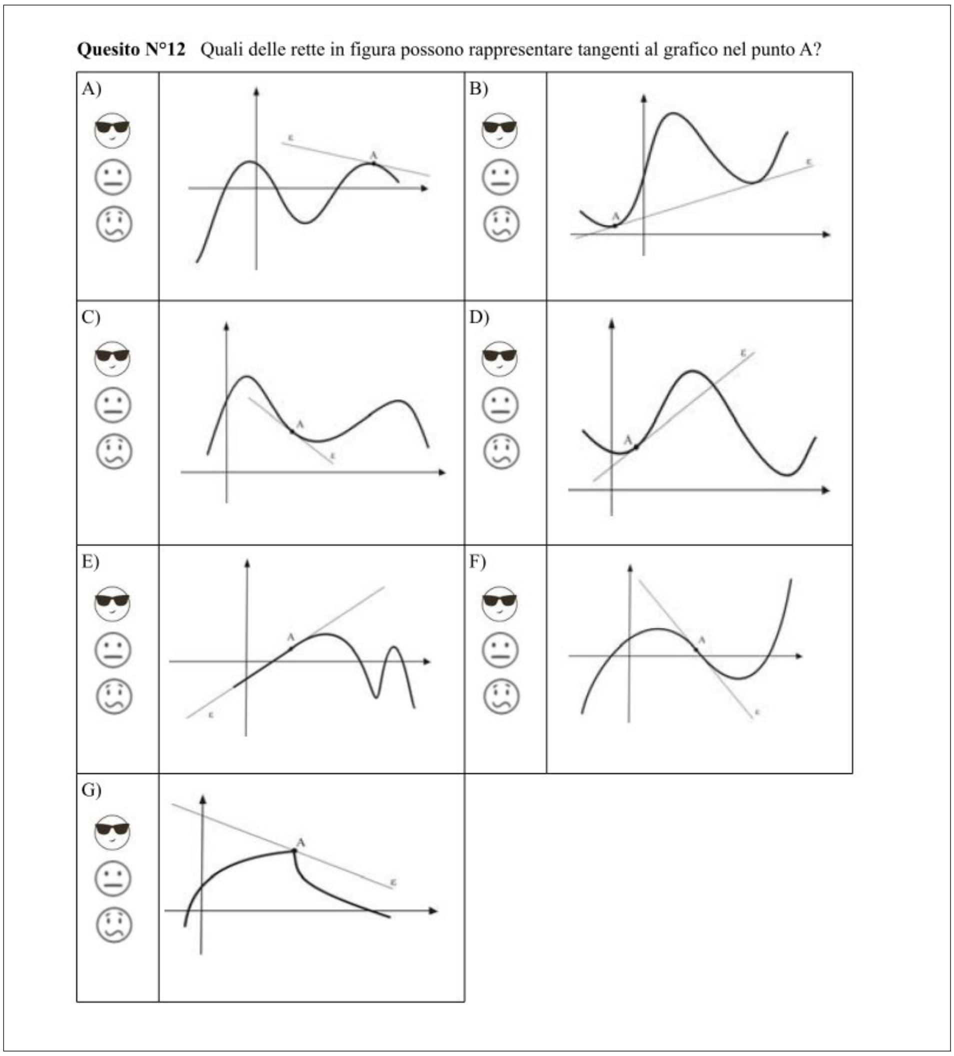


Figura 14
Quesito IV.3 – 4MO, 5VR.

La **Tabella 8** mostra una grande differenza fra le due classi. La prima osservazione è che gli studenti della classe 4MO, che hanno mostrato anche nelle risposte al quesito IV.3 una maggior ricchezza, hanno in generale risposto meglio su tutti gli item. Guardando poi separatamente le risposte all'interno delle due classi, vediamo che gli studenti di 5VR hanno risposto meglio agli item A e C, che coinvolgono situazioni che meglio corrispondono alla *concept-image* di retta tangente come retta che tocca il grafico in un solo punto, rispetto a tutti gli altri item. Le percentuali di risposte corrette agli item E ed F sono particolarmente basse: il primo rappresenta una situazione non conciliabile con una *concept-image* di retta tangente come retta che tocca il grafico di una funzione solamente in un punto, mentre il secondo rappresenta una situazione non conciliabile con una *concept-image* di retta tangente come retta che lascia il grafico di una funzione in un semipiano. Quest'ultimo elemento non emerge però in modo esplicito dalle risposte degli studenti al quesito IV.2. Nella classe 4MO la situazione è differente: per ciascun item la percentuale di risposte corrette è superiore al 70%. Può sorprendere che in questa classe gli item con le percentuali più alte di risposte corrette siano F e C, mentre è solo al terzo posto la percentuale di risposte corrette all'item A, pur rappresentando questo una situazione che possiamo dire prototipica.

Item	Opzione	5VR (13)	4MO (18)
A	**SI**	**69,23%**	**83,33%**
	NO	23,08%	16,67%
B	**SI**	**46,15%**	**72,22%**
	NO	53,85%	27,78%
C	**SI**	**61,54%**	**88,89%**
	NO	30,77%	11,11%
D	**SI**	**46,15%**	**72,22%**
	NO	46,15%	27,78%
E	**SI**	**23,08%**	**77,78%**
	NO	69,23%	22,22%
F	**SI**	**23,08%**	**100,00%**
	NO	76,92%	0,00%
G	SI	46,15%	22,22%
	NO	**53,85%**	**77,78%**

Tabella 8
Percentuali di risposte al quesito IV.3.

In generale, confrontando le risposte ai quesiti IV.2 e IV.3 possiamo osservare che gli studenti che in IV.2 hanno fatto riferimento alla indistinguibilità tra retta e grafico, o che hanno richiamato il fatto che la derivata di una funzione in un punto è il coefficiente angolare della tangente al grafico in quel punto, hanno dato un numero più alto di riposte corrette. Complessivamente sono solo 8 gli studenti che hanno risposto correttamente a tutti gli item di IV.3; di questi, nel quesito IV.2, 4 hanno fatto riferimento esplicito alla indistinguibilità, 3 alla derivata e 1 non ha risposto.

6 Conclusioni

In questo articolo abbiamo presentato e discusso i risultati preliminari di uno studio pilota condotto nel 2018 il cui obiettivo principale era quello di indagare le *concept-image* degli studenti in NSA con l'intenzione di discutere, eventualmente confermare o respingere, l'affermazione secondo cui i concetti di NSA siano più vicini all'intuizione o alla concettualizzazione spontanea degli allievi; come abbiamo ricordato, tale affermazione è alla base di molte proposte didattiche che mirano a introdurre l'insegnamento della NSA sia a livello universitario sia a livello secondario.
Dal nostro studio emerge che le *concept-image* sviluppate dagli studenti esposti a percorsi di insegnamento di NSA non appaiono in molti contesti matematicamente adeguate ed efficienti, o comunque non più di quelle sviluppate dagli studenti nei tradizionali percorsi di analisi e documentate in letteratura. In effetti molti studenti hanno dato non solo risposte errate ai compiti proposti, ma in diverse occasioni le risposte non erano coerenti tra loro, come per le risposte ai quesiti II.1 e II.2 (se confrontate tra loro), al quesito III.2 o per alcune delle opzioni del quesito II.3. In questi contesti gli studenti non sono sembrati consapevoli del conflitto tra le proprie risposte, oppure non sono riusciti a recuperare e applicare efficacemente le opportune definizioni.
Le risposte ai quesiti II.2 e I.1 inoltre suggeriscono che siano inadeguate dal punto di vista matematico anche le *concept-image* relative all'insieme dei numeri reali: inevitabilmente si pone la domanda se l'introduzione degli iperreali possa avere successo se gli studenti non hanno sviluppato una *concept-image* appropriata del sistema dei numeri reali.
Le risposte al quesito II.3 sollevano inoltre dubbi sulla supposta (maggior) semplicità dei calcoli con gli iperreali, grazie alla quale risulterebbero poi semplificate le dimostrazioni dei teoremi e la soluzione di problemi di NSA. Anche in NSA, come per altri ambiti della matematica, lo svolgimento di calcoli non opportunamente supportato da un attento controllo concettuale può generare gravi errori.
D'altra parte, le risposte al quesito IV.1 suggeriscono che anche se la NSA offre, per il calcolo dei limiti a partire dalle definizioni analitiche esplicite delle funzioni, strumenti operativi più semplici di quelli dell'analisi standard, questo non si traduce direttamente nella costruzione di una *concept-image* più efficace dal punto di vista matematico.
Per quel che riguarda i quesiti sulla *concept-image* di retta tangente al grafico di funzione in un punto, ci sembra che avere a disposizione e poter fare ricorso all'idea che tale retta è localmente indistinguibile dal grafico della funzione abbia potenzialità didattiche interessanti. Notiamo allo stesso tempo che per molti degli studenti coinvolti nello studio, questa idea non è sembrata facilmente accessibile o utilizzabile efficacemente nella soluzione dei quesiti proposti.
Ovviamente la dimensione ridotta del nostro studio e la sua natura esplorativa devono mettere in guardia dal rischio di trarre conclusioni troppo generali e affrettate. Tuttavia, riteniamo che i nostri risultati preliminari suggeriscano cautela prima di affermare che nozioni matematiche astratte – le nozioni NSA in questo caso – abbiano una natura intuitiva intrinseca. Non intendiamo opporci all'idea che sia possibile perseguire un approccio all'insegnamento dell'analisi attraverso l'introduzione della NSA o affermare che le proposte finora elaborate non possano avere interessanti potenzialità a tale riguardo: sono però necessarie ulteriori ricerche per esaminare tale potenziale e discutere eventualmente le modalità didattiche che possano consentire di sfruttarlo efficacemente.

Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare gli insegnanti che hanno collaborato in diversi modi alla realizzazione di questo studio: Paolo Bonavoglia, Christian Bonfanti, Lucia Rapella, Daniele Zambelli e Roberto Zanasi. Ringraziamo inoltre tutti gli studenti che hanno partecipato al questionario e alle altre fasi del progetto non documentate in questo articolo.

Bibliografia

Artigue, M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10*(2/3), 241-285.

Biza, I. (2007). Is the tangent line tangible? Students' intuitive ideas about tangent lines. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into the Learning of Mathematics* (Vol. 27 pp. 6 - 11). London.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-166). Kluwer: Dordrecht.

Di Nasso, M. (2003). I numeri infinitesimi e l'analisi nonstandard. *Archimede, 1*, 13-22.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 117-146.

Harnik, V. (1986). Infinitesimals from Leibniz to Robinson. Time to bring them back to school. *The Mathematical Intelligencer, 8*(2), 41-63.

Keisler, J. (1976a). *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt. Disponibile in https://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-12-23-18.pdf (consultato il 14.01.2019).

Keisler, J. (1976b). *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt. Disponibile in https://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.pdf (consultato il 14.01.2019).

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 137-174.

Machover, M. (1993). The place of nonstandard analysis in mathematics and in mathematics teaching. *The British journal for the philosophy of science, 44*(2), 205-212.

Marzorati, A. (2018). *Uno studio sull'insegnamento dell'analisi non standard nelle scuole secondarie di secondo grado*. Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Pavia, Manoscritto non pubblicato.

O'Donovan, R., & Kimber, J. (1996). Nonstandard analysis at pre-university level: naive magnitude analysis. In N. Cutland, M. Di Nasso & D. Ross (Eds.), *Nonstandard Methods and Applications in Mathematics* (pp. 235-248). Cambridge: Cambridge University Press.

Robinson, A. (2013). *Analisi non standard*. Roma: Aracne. (Titolo originale: *Non-standard Analysis* pubblicato nel 1965).

Sullivan, K. (1976). The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis

Approach. *The American Mathematical Monthly, 83*(5), 370-375.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus, 12*, 49-63.

Tall, D. (1993). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992* (pp. 13-28). Québec, Canada.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vinner, S. (1983). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. *Proceedings of the 6th PME Conference* (pp. 24-28). Antwerp, Belgium.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Autori/Mirko Maracci* e Ambra Marzorati
*Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia, Italia
mirko.maracci@unipv.it, ambra.marzorati@gmail.com

Convinzioni degli insegnanti di scuola elementare e problemi matematici

Beliefs of primary school teachers and mathematical problems

Annarita Monaco
NRD di Bologna, Università degli Studi di Roma "La Sapienza" – Italia

Sunto / L'articolo tratta delle convinzioni degli insegnanti di scuola elementare[1] riguardo ai problemi matematici.
I partecipanti alla ricerca sono stati 45 insegnanti di scuola elementare ai quali è stata sottoposta una lunga intervista al fine di indagare: le convinzioni dei docenti riguardo ai problemi matematici e al proprio ruolo nel gestirne la pratica didattica, le abitudini nell'implementare le raccomandazioni promosse dalle Indicazioni Nazionali e l'analisi di alcuni concetti chiave presenti nella premessa al documento. L'analisi qualitativa del contenuto delle interviste è stata effettuata con l'aiuto del software NVIVO 11. In questo articolo si esaminano i risultati relativi al primo aspetto indagato nelle interviste.

Parole chiave: convinzioni; rappresentazioni; problem solving; metacognizione; formazione docenti.

Abstract / The article deals with the beliefs of primary school teachers on mathematical problems. The participants in the research were 45 primary school teachers who were given a long interview in order to investigate: the teachers' convictions about mathematical problems and their role in managing the relative teaching practice, the way teachers implement the recommendations of the National Guidelines and the analysis of some key concepts occurring in the introduction to the document. The qualitative analysis of the content of the interviews was carried out with the help of the NVIVO 11 software. This article examines the results related to the first aspect investigated in the interview.

Keywords: beliefs; representations; problem solving; metacognition; teacher training.

1 Introduzione

Nelle ore in cui viene proposta la matematica nella scuola elementare, molto tempo è dedicato alla risoluzione di esercizi scritti, utili per consolidare e verificare l'acquisizione e la padronanza di regole e tecniche apprese in aula. Le proposte dei cosiddetti "problemi" sono spesso null'altro che esercizi (D'Amore, 2014) e mettono in gioco ben poco le componenti noetiche, strategiche, comunicative e semiotiche dell'apprendimento matematico; nella maggior parte dei casi ci si concentra al massimo su componenti algoritmiche (Fandiño Pinilla, 2008).
I libri di testo spesso includono numerose pagine contenenti "problemi" (in realtà esercizi, come vedremo di seguito) già suddivisi in: problemi di addizione, di sottrazione, di calcolo delle frazioni, senza soluzione o impossibili ecc., per affrontare i quali in realtà non appare necessario alcun atto strategico o creativo dell'alunno, essendo già stato implicitamente suggerito il procedimento risolutivo.
Ora, nella parte della premessa alla sezione "Matematica" delle Indicazioni Nazionali italiane (MIUR, 2012, p. 60) si legge:

1. La ricerca presentata in questo articolo è stata condotta in Italia con docenti di scuola primaria, che corrisponde alla scuola elementare in Canton Ticino.

> «Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive».

Il brano è ricco di spunti fondamentali per la riflessione dei docenti, utilissimi per orientare le scelte rispetto alle caratteristiche dei tipi di problemi da proporre agli alunni e alle metodologie e strategie da utilizzare nel corso delle attività in aula: far discutere, argomentare, proporre contesti autentici e significativi legati alla vita quotidiana, valorizzare le strategie e le rappresentazioni spontanee degli allievi, dare tempo per pensare e realizzare processi di pensiero.

Nelle aule scolastiche è ancora poco presente un ambiente di apprendimento che privilegi attività di risoluzione di problemi significativi, intendendo con questo termine problemi che permettono ai bambini di mettersi in gioco con pensieri, parole, personali rappresentazioni e che consentono loro di venire coinvolti in discussioni attive e costruttive, alla ricerca di argomentazioni che giustifichino le loro scelte. D'altra parte, le difficoltà che i docenti incontrano nel corso del loro lavoro, in matematica in generale e nei problemi nello specifico, sono svariate: il timore di non riuscire a trasmettere i numerosi contenuti previsti nel curricolo di matematica, la preoccupazione di non riuscire ad aiutare bambini che non sanno o si rifiutano di risolvere un problema, soprattutto quando esso richiede la messa in gioco di capacità strategiche e creative. Gli insegnanti spesso si chiedono: «Come possiamo fare ad insegnare le strategie utili per poter risolvere i diversi problemi? Si possono insegnare le strategie? Se sì, quali sono le strategie migliori? E se gli alunni ne inventano di nuove, come fare per seguirle e verificarle, dal momento che non sempre possiedono competenze matematiche specifiche?». Le risposte a tali domande sono complesse e non univoche. Accade a volte che gli insegnanti propongano ai loro alunni problemi che ritengono gestibili sia da loro che dagli allievi; in tal modo escludono quei problemi che richiederebbero ai bambini di sperimentare "al buio", forse perché tale situazione può attivare in loro stessi timori e insicurezze. Ripartire dai valori, dalle credenze, dalle emozioni e dai timori degli insegnanti di matematica di scuola elementare sembra essere una scelta obbligata; solo così si possono individuare ed esplicitare quegli elementi cognitivi e affettivi che impediscono ai docenti di avviare una pratica didattica dei problemi profonda ed efficace.

2 Focus sui problemi

2.1 Problemi ed esercizi

Come già anticipato, a scuola (e soprattutto nei libri di testo) spesso sono denominati "problemi" dei compiti che in realtà sono esercizi. Approfondiamo la differenza tra questi due termini, utilizzando le parole di D'Amore e Fandiño Pinilla:

> «[…] Entrambi concernono situazioni problematiche causate da vari fattori: una proposta dell'insegnante (più o meno motivata), test o quiz, effettiva e reale situazione nella quale l'alunno o la classe si ritrova… Ma gli esercizi possono essere risolti utilizzando regole o nozioni già apprese o in via di consolidamento e quindi rientrano nelle categorie "rafforzamento o verifica"; i problemi coinvolgono o l'uso di regole o nozioni (alcune anche in via di esplicitazione proprio in quell'occasione) o la successione di operazioni la cui scelta è atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso».
>
> (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2006, p. 647)

In linea con queste definizioni, potremmo dire che l'esercizio trova il proprio spazio cognitivo naturale nella zona di sviluppo effettiva descritta da Vygotskij, mentre il problema nella zona di sviluppo prossimale (Fandiño Pinilla, 2008). Negli esercizi i bambini attivano un procedimento puramente esecutivo; nei problemi è necessario un comportamento strategico e si devono prendere continuamente decisioni, mettendo in gioco, eventualmente, anche regole apprese e automatismi consolidati attraverso gli esercizi. Esercizi e problemi rappresentano attività complementari per la maturazione delle competenze matematiche.

2.2 Il problem solving

Le ore di matematica in aula, come si è già sostenuto in precedenza, sono ricche di attività attinenti l'apprendimento di regole, tecniche, simboli e formule che gli alunni devono apprendere e successivamente applicare. Una volta che ha acquisito alcune regole, l'essere umano può usarle per molti scopi, tipicamente nei rapporti con l'ambiente che lo circonda. Può fare anche qualcosa di più importante: può pensare. Ciò significa che egli è in grado di combinare fra loro gli elementi che ha già appreso, e comporre con quelli una grande varietà di regole di ordine superiore. Per fare ciò stimola sé stesso e risponde a vari tipi di sollecitazione da parte dell'ambiente. Grazie al processo di combinazione di regole vecchie in regole nuove, egli risolve problemi che sono nuovi per lui, acquistando così un patrimonio di nuove capacità (D'Amore, 2014). Quindi l'essere umano, nel nostro caso l'allievo, con gli strumenti acquisiti si pone naturalmente nuovi problemi e tenta di risolverli.
I primi studi sistematici sui metodi risolutivi nel contesto matematico risalgono a George Polya, che si pone un obiettivo didattico: insegnare a risolvere problemi. Egli assume come modello di "bravo risolutore" il matematico impegnato nell'attività di ricerca; analizza quindi i processi messi in atto da questi bravi risolutori, tentando di evidenziare quali metodi risolutivi vengono impiegati, nella convinzione di poterli insegnare.
Polya distingue 4 fasi, che sono a suo parere tipiche di ogni processo risolutivo:

- fase 1: si deve comprendere il problema;
- fase 2: si devono scoprire i legami che intercedono tra le varie informazioni, fra ciò che si cerca e i dati, per compilare un piano di risoluzione;
- fase 3: si procede allo sviluppo del piano;
- fase 4: si esamina il risultato e si procede alla sua verifica.

Il bravo risolutore, secondo Polya, si pone in modo naturale alcune domande che stimolano le operazioni mentali utili per la risoluzione e suggeriscono euristiche; tali domande costituiscono lo schema di risoluzione. In questo senso, sembra che le parole di Polya vogliano precorrere l'annuncio di alcune implicazioni didattiche di stampo costruttivista dell'apprendimento. La sua idea generale è infatti che l'insegnante, esplicitando queste domande in modo opportuno, possa localmente aiutare lo studente a risolvere uno specifico problema, e più in generale educarlo a porsi tali domande. Polya scrive:

> «Un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale».
>
> (Polya, 1945/2016, p. 7)

È accaduto, però, che i programmi educativi fondati sull'insegnamento di un repertorio di euristiche specifiche si siano rivelati fallimentari: «Gli studenti addestrati in questo modo non riuscivano a generalizzare e a trasferire le conoscenze apprese in altre situazioni» (Zan, 2010, p. 156).

Tali fallimenti aprirono il campo, agli inizi degli anni '80 del secolo scorso, a nuovi studi in didattica della matematica che, pur nel riconoscimento del grande contributo dato dagli studi di Polya, ne svilupparono un'analisi critica, mettendo in discussione l'idea che possa esistere un metodo addestrativo per insegnare a risolvere i problemi. In particolare sono stati messi in discussione i due assunti fondamentali da cui era partito Polya: il fatto che per essere un buon solutore di problemi sia sufficiente possedere un buon bagaglio di conoscenze ed euristiche, e l'efficacia dell'insegnamento delle euristiche (Baccaglini Frank, Di Martino, Natalini & Rosolini, 2018).

Schoenfeld (1985) sottolinea come Polya abbia descritto accuratamente il processo di risoluzione di un problema, ma aggiunge che ciò non è trasferibile a livello didattico, in quanto non fornisce elementi per l'uso efficiente delle strategie. Schoenfeld, nelle sue ricerche, osserva e ascolta diversi studenti alle prese con il problem solving, chiedendo loro di ragionare a voce alta e registra i tempi che essi dedicano alle diverse fasi di risoluzione.

I dati raccolti evidenziano che i "cattivi solutori" dedicano quasi tutto il tempo allo sviluppo di un piano (esplorazione). I "bravi solutori" dedicano molto tempo a riflettere sugli stati di avanzamento dei loro tentativi e saltano da una fase all'altra della risoluzione di un problema sulla base di queste riflessioni. Dunque ciò che caratterizza i buoni risolutori è la quantità e la qualità delle decisioni prese nel corso del processo risolutivo; in questo senso, un ruolo chiave è da attribuire alle competenze di natura metacognitiva, ossia alle capacità di valutare e prendere consapevolezza delle proprie risorse, di prendere decisioni efficienti, in base a tale consapevolezza. I bravi risolutori spendono la maggior parte del tempo a pensare piuttosto che a fare, ponendosi vari tipi di domande, ad esempio: «Che cosa sto facendo?». Il bravo risolutore considera più approcci, dei quali molti sbagliati, ma non li porta mai fino in fondo perché: «[…] è tanto inesorabile nel controllare e rifiutare idee, quanto ingegnoso nel generarle» (Schoenfeld, 1987, p. 194).

Schoenfeld propone di dividere il comportamento risolutivo in vari "episodi": 1. lettura; 2. analisi; 3. esplorazione; 4. pianificazione; 5. implementazione; 6. verifica; 7. transizione. In questi episodi si possono riconoscere le quattro fasi di Polya.

Volendo ragionare sulle differenze, possiamo notare la sottile distinzione tra analisi

ed esplorazione (che in Polya sono comprese nella fase di comprensione) e nell'introduzione dell'episodio di transizione.
Le ricerche di Schoenfeld sono esemplificative di come la ricerca, già tre decenni fa, avesse sottolineato la complessità del processo di risoluzione dei problemi, identificando il ruolo di fattori diversi, oltre alle conoscenze e alle euristiche (Baccaglini Frank et al., 2018).
È stata molte volte sottolineata in letteratura la significatività del promuovere un approccio per problemi a livello di educazione matematica di base, per diversi motivi: garantire una buona formazione matematica, sulla base della convinzione che il problem solving abbia in sé «il potenziale per stimolare sfide intellettuali che possano favorire lo sviluppo matematico dello studente» (NCTM, 2010); un secondo aspetto è legato alla convinzione che affrontare problemi sia l'attività potenzialmente più affascinante del fare matematica; infine un terzo aspetto è legato al contributo che l'educazione matematica può dare per la formazione del cittadino adulto (Baccaglini Frank et al., 2018).

3 Focus sulle convinzioni

3.1 Il costrutto di convinzione

Il termine *convinzione* (o *credenza*), traduzione dall'inglese *belief*, è mutuato dalla psicologia sociale (Rokeach, 1960). D'Amore e Fandiño Pinilla hanno assunto la seguente definizione di convinzione:

> «convinzione (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa; l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la concezione (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T».
> (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2004, p. 28)

Come sostengono Furinghetti e Pehkonen (2002), l'interesse per le convinzioni e i sistemi di convinzioni emerge principalmente negli anni '70, attraverso gli sviluppi nelle scienze cognitive (Abelson, 1979). L'assunto di base è che gli individui ricevano continuamente segnali dal mondo che li circonda. Secondo le percezioni ed esperienze basate su questi messaggi, gli individui traggono conclusioni su diversi fenomeni e sulla loro natura. La conoscenza soggettiva degli individui, cioè le loro convinzioni (compresi i fattori affettivi) sono una composizione di queste conclusioni. Le convinzioni, che gli individui confrontano con nuove esperienze e con le convinzioni di altri individui, sono continuamente valutate e si possono modificare. Quando viene adottata una nuova convinzione, questa farà automaticamente parte della struttura più ampia della conoscenza soggettiva degli individui, cioè del loro sistema di convinzioni. Tale sistema di convinzioni di un individuo è composto dalle sue convinzioni consce o inconsce, ipotesi o aspettative e dalle loro combinazioni (Green, 1971).
Pian piano l'accezione data al termine "beliefs" si allarga. McLeod (1985, p. 268) è uno dei primi ricercatori a sottolineare la necessità di sistemare teoricamente il concetto di convinzione in matematica: «I sistemi di convinzioni possono essere applicati

al contenuto matematico, per esempio, o all'idea che un individuo ha delle proprie possibilità di successo nel risolvere un problema».
McLeod (1989, 1992) cerca di inquadrare la ricerca sul tema e di costruire una teoria intorno al concetto di convinzione, interpretando nuovi fatti e partendo dall'assunto che le convinzioni giochino un ruolo fondamentale nei processi conoscitivi. Ogni persona ha nel suo sistema di convinzioni una struttura che possiamo quindi definire quasi-logica, nel senso che ci sono alcune "convinzioni primarie" e altre "derivate". Può capitare che in una persona, con il passare del tempo, due convinzioni si scambino i ruoli: ciò che prima era primario diventa derivato e viceversa. Questa dimensione quasi-logica può avere delle importanti conseguenze nel momento in cui si tenta di modificare una convinzione. Se ci si pone come obiettivo quello di modificare una convinzione A, che nel sistema di convinzioni dell'individuo è derivata, è chiaro che risulteranno poco efficaci gli interventi che non si preoccupino di incidere sulla convinzione primaria da cui la convinzione A deriva.
Studiare le convinzioni e la loro organizzazione in sistemi può aiutare a superare un'ambiguità spesso riscontrata in didattica della matematica: la contraddizione tra le convinzioni che un soggetto dichiara (ad esempio quando risponde a un questionario o a un'intervista) e quelle che invece "pratica", ossia quelle che guidano i suoi processi decisionali (Zan, 2010).

3.2 Insegnanti, insegnamento e convinzioni

Il concetto di convinzione fa riferimento dunque a un costrutto mentale di un individuo (o di un gruppo sociale, nel caso si tratti di convinzione diffusa), che si forma in relazione a ciò che il soggetto già conosce e alle nuove esperienze con l'ambiente. Richardson (1996) mette in luce soprattutto questo concetto di "beliefs", da intendersi come quelle convinzioni che interagiscono con la prassi e ne influenzano il cambiamento.
Tali convinzioni sono importanti elementi predittivi delle pratiche professionali e richiedono una particolare attenzione nel momento in cui si vuole mettere in atto un qualsiasi processo di cambiamento e di innovazione, in quanto agendo su tali convinzioni possiamo indirettamente agire sui comportamenti. Molteplici studi, inoltre, hanno verificato la relazione inversa: la modifica della pratica può intervenire ed agire sul cambiamento di percezioni, convinzioni, atteggiamenti (ad esempio, si veda Vannini, 2012). L'essere umano si costruisce sulla base delle esperienze quotidiane e delle concettualizzazioni che si organizzano in insiemi coerenti e sistematici che le rendono difficilmente modificabili con la sola aggiunta di informazioni o fatti. D'altra parte, perché il cambiamento possa avvenire, è necessaria una modificazione profonda della teoria esistente (Carey, 1999; Vosniadou, 1994). Ci si può interrogare su quando e come si strutturano le convinzioni degli insegnanti sull'insegnamento, su quali sono le teorie implicite sulla scuola e sull'educazione e su quali siano i processi che possono permettere la loro messa in crisi, per poter modificare i comportamenti dell'insegnante (Vannini, 2012).
Esplicitare le convinzioni latenti in contesti di formazione iniziale e continua degli insegnanti sembra essere la via maestra da percorrere. Molti studi sull'insegnamento e sulla formazione dei docenti degli ultimi anni hanno affrontato tale tematica; in questo panorama ha assunto interesse il concetto di "riflessività" applicata alla professionalità dei docenti, che fa riferimento alla prospettiva deweyana sull'"insegnante riflessivo" da una parte e alle ipotesi teoriche di Schön (1983) sull'apprendimento

degli adulti dall'altra. Si dà valore all'accompagnamento degli insegnanti in percorsi di progressiva assunzione di consapevolezza, a partire dal senso comune, fino ad arrivare a una competenza professionale sempre più piena. La formazione degli insegnanti (sia iniziale che continua) dovrebbe sempre partire dal fare esplicitare ai docenti le proprie convinzioni, al fine di poter poi agire su di esse attraverso azioni che favoriscano processi di razionalità, che siano adatti ad analizzare e a mettere in crisi convinzioni connesse a pratiche inefficaci, per poter costruire nuove convinzioni e atteggiamenti pedagogicamente fondati. Entro tali processi di ristrutturazione un ruolo importante è ricoperto dai saperi disciplinari, nel nostro caso il sapere matematico: proposto in modo scientificamente fondato, e anche credibile, tale sapere può mettere in crisi quelle convinzioni dei docenti che ostacolano l'attivazione di processi cognitivi e di approfondimento personale, oltre ogni banale accumulazione (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009).

3.3 Le convinzioni sui problemi matematici: la ricerca internazionale

La risoluzione dei problemi è una competenza chiave e un mezzo importante per lo sviluppo di altre competenze matematiche e non matematiche. Nonostante ciò, nella maggior parte dei programmi scolastici la sua inclusione rimane poco chiara e nei repertori professionali degli insegnanti essa risulta poco presente (Andrews & Xenofontos, 2014).

La ricerca sulle convinzioni degli insegnanti sulla natura dei problemi matematici indica sostanziali variazioni a livello internazionale: Cai e Nie (2007) hanno trovato differenze significative tra insegnanti cinesi e insegnanti americani, derivanti da loro esperienze come studenti di matematica. Andrews (2007) ha intervistato insegnanti ungheresi che hanno descritto la matematica come una materia che si basa su una sfida intellettuale intorno ai problemi. Altri ricercatori hanno identificato differenze sostanziali, culturalmente costruite, nelle convinzioni di insegnanti di scuola elementare in formazione iniziale a Cipro e in Inghilterra (Xenofontos & Andrews 2012, 2014). Le convinzioni degli insegnanti sui problemi e sulla risoluzione dei problemi, quindi, sono legate alle culture di appartenenza; la realtà della vita di classe ha un effetto moderatore sulle convinzioni degli insegnanti intorno alla risoluzione dei problemi. Per alcuni insegnanti, in particolare per i neo-assunti, tale realtà può compromettere il rafforzamento delle credenze relative al ruolo e al primato del problem solving nelle classi di matematica. Altri insegnanti, per attuare le convinzioni appena acquisite sui problemi e sulla risoluzione dei problemi, abbandonano le pratiche di classe esistenti, magari inadeguate, a favore di pedagogie più aperte (Andrews & Xenofontos, 2014).
Nel panorama delle ricerche effettuate a livello internazionale sul tema, ai fini del presente lavoro risulta particolarmente interessante la ricerca di Andrews e Xenofontos (2014); nella loro ricerca, i due studiosi indagano convinzioni di tre insegnanti ciprioti di scuola elementare riguardo ai problemi e alla loro risoluzione, ma anche la loro competenza come risolutori di problemi matematici e gli aspetti del relativo insegnamento. Tale studio ha non solo l'obiettivo di esaminare le interazioni tra convinzioni, competenze e pratica degli insegnanti, ma anche quello di mettere a punto un kit di strumenti appropriato per questa tipologia di studi. Gli autori ritengono che il loro specifico oggetto di ricerca possa essere meglio affrontato con uno studio di caso multiplo. Viene utilizzato un quadro teorico che tiene conto sia delle ricerche di Schoenfeld (1992, 2004), negli Stati Uniti, che delle ricerche di De Corte (1995, 2004), Verschaffel e altri nelle Fiandre (De Corte, Verschaffel, Op't Eynde, 2000).

Basandosi su questi quadri teorici, Andrews e Xenofontos (2014) costruiscono uno strumento che gli permette di acquisire narrazioni dettagliate per ciascun insegnante; in ciascuno scritto è evidente la complessa attività di relazione tra il modo in cui gli insegnanti pensano e quello in cui agiscono (Cohen, 1990; Skott, 2009; Wilkins, 2008). Dal confronto tra i tre studi di caso, emergono in particolare le convinzioni e le pratiche di una delle insegnanti; tali pratiche sembrano essere coerenti e legate a convinzioni radicate, secondo le quali i problemi sono concepiti come delle routine e dei compiti alla risoluzione dei quali dedicare un tempo limitato. L'analisi approfondita condotta da Andrews e Xenofontos (2014) gli permette di identificare regolarità e irregolarità, e di delineare, anche se in modo provvisorio, una descrizione esauriente di ciascun insegnante coinvolto.

Pehkonen (1993) affronta la problematica da un altro punto di vista, indagando le convinzioni dei formatori degli insegnanti di matematica finlandesi sull'implementazione del problem solving e raccoglie i dati mediante un questionario distribuito a 43 insegnanti nel corso di un seminario di problem solving.

I risultati sono così sintetizzati:

- la risoluzione dei problemi è importante, perché aiuta a favorire la preparazione cognitiva degli alunni;
- l'insegnamento relativo alla risoluzione dei problemi dovrebbe essere effettuato in modo creativo, flessibile e rassicurante;
- gli insegnanti dovrebbero coinvolgere gli alunni nella risoluzione dei problemi, permettendo loro di risolverli;
- la disponibilità degli alunni a studiare il problem solving è il prerequisito più importante per insegnare a risolvere problemi.

Dopo aver indagato il punto di vista dei formatori, Pehkonen (2017) si è quindi proposto di studiare le convinzioni degli insegnanti di scuola elementare finlandesi in materia di problem solving e del suo insegnamento.

Le risposte degli insegnanti, le loro idee sul problem solving e sulla pratica didattica ad esso relativa sono classificate sulla base delle seguenti categorie:

1. il significato del curriculum;
2. il significato dei materiali didattici;
3. l'insegnamento delle capacità di problem solving.

In questa ricerca si evidenzia che ci sono troppi argomenti nel curriculum matematico e c'è anche poco tempo disponibile per attuarlo; c'è fretta di insegnare i troppi argomenti di base e i soggetti più in difficoltà hanno bisogno di tempo e di supporto sugli argomenti di base. Gli insegnanti dichiarano di integrare il lavoro sui problemi con compiti aggiuntivi di problem solving, specialmente nel caso di alunni motivati e di talento; esprimono la convinzione che la risoluzione dei problemi implichi l'applicazione di conoscenze e abilità precedentemente acquisite. Nonostante riconoscano l'importanza del problem solving, gli insegnanti ammettono anche la loro non adeguatezza nell'implementare un insegnamento che corrisponda alle loro convinzioni, a causa della pressione esterna esercitata dal curriculum e dal contesto sociale di cui tale curriculum è l'espressione.

Rispetto all'insegnamento delle capacità di problem solving, dai risultati dello studio emerge che un insegnante dovrebbe: studiare le strategie con le quali il risolutore dovrebbe risolvere nuovi tipi di compiti, cioè i problemi; lasciare che l'alunno selezioni da sé quale strategia usare. Un insegnante, inoltre, dovrebbe modellare e insegnare, passo dopo passo, il pensiero in fasi o insegnare strategie di pensiero, illustrate con diversi modelli oppure ponendosi come leader che illustra, fornisce

esempi, apre problemi, spiega il proprio pensiero durante il processo di soluzione, fornisce le informazioni sulle relazioni di causa–effetto e su diverse strategie di problem solving; inoltre, i docenti mettono in evidenza che alcune strategie permettono l'avanzamento passo dopo passo nella suddivisione del problema in sottoproblemi.
Gli insegnanti pongono l'attenzione anche sulla debolezza delle loro capacità, soprattutto nel momento in cui devono dare consigli agli alunni oppure quando si tratta di riuscire a guidare un alunno in modo tale che sia comunque lui stesso a risolvere il problema. Per alcuni insegnanti è stato utile provare interesse e sperimentare strategie nella risoluzione dei problemi, perché tali elementi li hanno aiutati a cercare e a trovare i propri metodi di insegnamento e i materiali adeguati.
Pehkonen (2017) conclude pertanto che le convinzioni dei docenti sulla risoluzione dei problemi matematici facciano parte di un insieme più ampio che include le convinzioni degli insegnanti sulla natura della matematica e quelle sul suo insegnamento e apprendimento.

4 La nostra ricerca

Nel lavoro che si sta presentando si assume che il costrutto di convinzione sia uno strumento teorico utile per poter indagare le relazioni tra docenti, problemi e pratica didattica. Si focalizza l'attenzione su quegli aspetti che Zan (2010) mette in evidenza parlando dei processi di controllo che un soggetto attiva quando prende delle decisioni in un contesto di apprendimento della matematica: le convinzioni che ha sulla matematica (la sua epistemologia personale) e sulle sue teorie del successo; le convinzioni che ha su di sé e in particolare il senso di autoefficacia; un ruolo importante hanno anche gli aspetti motivazionali e, più in generale, gli aspetti affettivi e le emozioni associate alla matematica.
Le categorie citate costituiscono un punto di partenza utile per ridefinire in modo specifico gli obiettivi dello studio delle convinzioni dei docenti relativamente ai problemi.

4.1 Le domande della ricerca

Il principale interrogativo che ci si pone è il seguente:
«Quali sono le convinzioni degli insegnanti di scuola elementare nei confronti dei problemi matematici, della loro risoluzione e della relativa pratica didattica?»
Tale interrogativo si articola in tre domande di ricerca, ciascuna delle quali è ulteriormente definita attraverso alcune sotto-domande; tali sotto-domande hanno avuto la funzione di guida nella raccolta dei dati e nella loro analisi.
Di seguito si presentano domande e sotto-domande:

D1. Quali sono le convinzioni degli insegnanti di scuola elementare sui problemi matematici?
– Per gli insegnanti, quali caratteristiche deve avere un problema matematico?
– Quale/i tipologia/e di problema/i gli insegnanti apprezzano maggiormente? Per quali ragioni?
– Ci sono delle differenze tra apprezzamento di determinati problemi e una dichia-

rata disponibilità a proporli in classe? Se sì, quali sono le ragioni?
- Quale valutazione gli insegnanti danno dei problemi presenti sui libri di testo? Come li modificherebbero per renderli buoni problemi?

D2. Quali sono le rappresentazioni che gli insegnanti hanno delle Indicazioni Nazionali per il curricolo rispetto ai problemi e alla loro pratica didattica?
- Per progettare il loro lavoro sui problemi, gli insegnanti tengono conto delle Indicazioni Nazionali? Quali parti utilizzano? Come spiegano le loro risposte?
- Quali concezioni gli insegnanti hanno di alcuni concetti chiave presenti nel testo delle Indicazioni Nazionali: discussione, argomentazione, chiarezza, contesto significativo legato alla vita quotidiana?

D3. Quale ruolo deve avere l'insegnante nella gestione del lavoro didattico sui problemi?
- Quali strategie didattiche predilige un insegnante al fine di rendere più proficuo il lavoro sui problemi matematici con i suoi alunni?
- Quali convinzioni hanno gli insegnanti sugli alunni buoni risolutori? Quali strumenti può avere un insegnante per aiutare un suo alunno a diventare un buon risolutore?
- Quali bisogni formativi ha l'insegnante rispetto ai problemi e alla gestione della loro pratica didattica.

In questo contributo si esamineranno i dati e i risultati relativi alla prima domanda di ricerca.

4.2 Le scelte metodologiche

La ricerca condotta, e presentata in questo articolo, si prefigura come esplorativo-qualitativa (Lumbelli, 2006; Vannini, 2009). Si è scelto di utilizzare una traccia di intervista, come strumento per indagare i sistemi di convinzioni degli insegnanti. Tale scelta è dovuta alla considerazione che i docenti, nel rispondere alle domande poste, possano esplicitare esperienze e storie didattiche in maniera ricca e approfondita, con elementi coerenti ma anche contraddittori, e tendano a "cucirli" introducendo nessi percepiti come causali o semplicemente cronologici (Di Martino, 2004). Tali elementi sono indicativi comunque della complessità delle convinzioni, che sono il nostro oggetto di studio. È stato costruito un modello di intervista originale semi-strutturata, con domande sia aperte sia chiuse, appositamente redatta per questo lavoro di ricerca. La sua costruzione è avvenuta per gradi: il testo è la versione finale di uno strumento sperimentato in fase di try-out con 30 docenti di Roma e provincia ed è stato molte volte modificato, sia per quanto riguarda le domande, sia rispetto ai sette problemi scelti e sottoposti all'analisi dei docenti. Non tutti gli intervistati hanno mostrato le stesse abilità e disponibilità di introspezione e di verbalizzazione; in generale i 30 insegnanti coinvolti nel try-out hanno dato un grande contributo alla messa a punto dell'intervista, grazie ai loro commenti e alle loro numerose reazioni e riflessioni.

4.3 Il campione di ricerca

Per quanto riguarda la scelta del campione, si è fatto ricorso a un "campionamento casuale stratificato proporzionale", sono stati individuati tre strati di collocazione geografica: Sud e Isole, Centro, Nord. Sono stati contattati, direttamente o attraverso le direzioni didattiche, 45 insegnanti di quarta elementare delle seguenti regioni d'Italia: Lazio, Campania, Puglia, Sicilia, Emilia Romagna, Trentino Alto Adige, Piemonte, suddivisi in: 13 insegnanti del Nord, 18 del Centro e 14 del Sud e delle Isole. Per poter acquisire più elementi possibili, è stato formato un campione che avesse una buona variabilità rispetto a: aree geografiche, anzianità di servizio, numero di anni di insegnamento della matematica nella scuola elementare. Si è scelto di intervistare insegnanti di classe quarta, presupponendo che potessero essere i più adatti a immedesimarsi nella situazione di poter proporre, da lì a pochi mesi, sette problemi diversamente classificati e pensati per la classe quinta, ai propri alunni. Un altro elemento importante di variabilità è stata la formazione dei docenti, non intesa come numero di partecipazioni a corsi di aggiornamento, online o in presenza, a convegni o altro, ma come l'insieme di quelle esperienze che abbiano effettivamente modificato o avviato un processo di modifica delle convinzioni degli insegnanti sul tema oggetto di studio. La variabilità delle formazioni è stata supposta e poi verificata con i dati emersi dalle risposte fornite dai docenti alle domande della prima sezione.

4.4 L'intervista

L'intervista, nella sua versione finale, è strutturata in tre sezioni (Allegato 1).
La *prima sezione* mira a raccogliere i dati dei 45 docenti intervistati: scuola di appartenenza, anzianità di servizio, anni di insegnamento nella scuola elementare, anni di insegnamento in classe quinta elementare. Si chiede inoltre ai docenti di narrare brevemente il proprio rapporto con la matematica e in particolare con i problemi, invitandoli a raccontare le esperienze formative ritenute più significative per l'evoluzione della propria pratica didattica relativa ai problemi. Tali informazioni sono state raccolte per verificare che ci fosse una effettiva variabilità tra i diversi livelli di formazione. La sezione termina con la richiesta di esplicitare le caratteristiche auspicate per un problema matematico e la relazione percepita tra le Indicazioni Nazionali del 2012 e la propria pratica didattica relativa ai problemi.
Nella *seconda sezione*, molto più corposa, sono presentati sette problemi afferenti a diversi ambiti matematici, diversamente classificati dal ricercatore e pensati per la classe quinta elementare. Tale classificazione non è esplicitata ai docenti intervistati. I docenti sono invitati a leggere e analizzare ciascuno dei problemi sulla base di alcune sollecitazioni. Prima di tutto si sonda la disponibilità del docente a proporre ciascuno dei sette problemi agli alunni della loro futura quinta. Si chiede poi di esplorare ed esprimere il potenziale percepito di discussione e di argomentazione che ciascun problema può sollecitare, il livello di significatività e autenticità del suo contesto, la modalità organizzativa ritenuta più idonea per il lavoro in classe, la possibile utilizzazione del problema come strumento matematico: verifica, applicazione e consolidamento oppure strumento per la costruzione dei concetti. Si chiede al docente di proporre eventuali modifiche al testo per migliorarlo. Per ogni domanda posta si chiede di esplicitare le motivazioni delle risposte. Infine si invita a formare due diverse graduatorie: la prima, sulla base dell'apprezzamento personale dei problemi; la seconda, sulla base della loro percepita fattibilità in aula.
La *terza sezione*, conclusiva, raccoglie i racconti delle difficoltà, delle azioni didattiche e delle emozioni dei docenti inerenti alla trattazione dei problemi, così come sono nate e si sono sviluppate in aula. Si acquisiscono anche scelte dichiarate rispetto alle strategie didattiche ritenute più utili ai fini di una migliore produttività degli alunni nell'atto di risolvere problemi. Si indaga, infine, sulle opinioni che gli inse-

gnanti hanno dei problemi proposti sui libri di testo e si chiede, infine, di manifestare i propri bisogni formativi, per migliorare la didattica dei problemi.
Le interviste, della durata media di 70 minuti ciascuna, sono state tutte audio-registrate e trascritte. L'approccio scelto per la loro analisi è stato il "content analysis": sono state definite a priori le categorie, alla luce delle quali sono stati estratti degli stralci di testo, poi classificati (Di Martino, 2004). La lettura delle risposte ha suggerito nuove *categorie interpretative*, che hanno stimolato una nuova lettura (processo a spirale). Per poter effettuare l'analisi del contenuto è stato utilizzato il software NVIVO 11[2]. 2

4.5 I problemi scelti

Sono state utilizzate fonti diverse per poter scegliere i problemi, che sono stati poi testati e modificati in fase di try-out al fine di renderli il più possibile rappresentativi di alcune tipologie di testi, ipotizzate sulla base di criteri definiti a posteriori. Si è tenuto conto del fatto che, sui libri di testo e in letteratura, esistono diverse tipologie di testi di problemi e che ciascuna di esse ha un suo ruolo specifico, a volte anche più di uno, ai fini dello sviluppo delle diverse componenti dell'apprendimento matematico degli allievi. Spesso mancano ai problemi alcuni requisiti che rispondono a quelle caratteristiche di autenticità, significatività, aderenza alla realtà così come vorrebbero le Indicazioni Nazionali (Di Martino & Zan, 2017). Di seguito, si riportano i testi completi e si descrivono le principali caratteristiche di ciascun problema:

Rocco e il suo giardino (problema standard)

> Zio Rocco decide di sistemare il giardino della sua casa al mare. Questo giardino è a forma di rettangolo: misura 6 m di larghezza e 4,5 m di lunghezza. Lo zio decide di disporre piante con fiori sul suo contorno. Sistemando una piantina ogni 4 metri, quante piantine riesce a sistemare Rocco? Per ciascuna spende € 3,80. Quanto spende in tutto?

È un problema a più operazioni che coinvolge sia l'ambito aritmetico che quello geometrico: è assimilabile a una tipologia di problemi tipica dei libri di testo. Ci sono diversi oggetti matematici in gioco; l'alunno, per risolverlo, applica conoscenze e regole apprese a scuola.

Le monete (problema narrativo)

> Piero e Francesco partono per una gita a piedi. Piero mette nel suo zainetto 5 panini e Francesco mette 7 panini nel suo. Lungo la strada incontrano uno sconosciuto, affamato, ma senza provviste. Decidono di mettere in comune i loro panini e mangiano tutti e tre un ugual numero di panini. Al momento di lasciarsi, lo sconosciuto, come ringraziamento per il pane ricevuto, dà 5 monete a Piero e 7 a Francesco. Piero dice: «Ne devi dare solo 3 a me e 9 a Francesco. Infatti anche noi abbiamo mangiato parte dei 12 panini». Francesco dice: «Dal punto di vista della matematica Piero ha ragione. Ma l'importante

2. NVIVO è un ambiente di lavoro che permette l'importazione dei dati acquisiti con le interviste, la loro codifica in categorie e sottocategorie, la loro analisi, visualizzazione e presentazione.

> è che ognuno di noi ha messo quello che aveva: quindi dai 6 monete a Piero e 6 a me». Lo sconosciuto non sa più cosa fare. Non capisce perché dal punto di vista della matematica sarebbe più giusto dare 3 monete a Piero e 9 a Francesco.
> Prova a spiegarglielo. Tu al posto dello sconosciuto cosa faresti? 6 monete a Piero e 6 a Francesco? Oppure 3 a Piero e 9 a Francesco? Oppure 5 monete a Piero e 7 a Francesco?

Si tratta di un testo narrativo, che è la formulazione "a righe"[3] di un problema tratto dal capitolo quarto (Pane e pensiero) dell'*Uomo che sapeva contare*, (Tahan, Negrin & Zannini, 1996). Le soluzioni proposte si basano su valutazioni diverse, alcune squisitamente matematiche, altre no. I processi decisionali che portano alla scelta della soluzione sono il frutto di un bilancio tra diversi elementi, in cui entra in gioco la matematica con il ragionamento proporzionale, ma anche valutazioni di carattere morale e affettivo (Zan, 2016). 3

Una mostra in aula (compito di realtà)

> Scegli una parete della tua aula, dove esporre i tuoi lavori più significativi effettuati in classe. Misura le dimensioni della parete. Hai a disposizione cartelloni di misura 70 cm × 100 cm. Quanti cartelloni ti occorrono al minimo, se vuoi tappezzare la parete senza sovrapposizioni e buchi tra un cartellone e l'altro?

Questo problema potrebbe essere considerato un compito di realtà (oppure un compito autentico, se risponde a un effettivo bisogno della classe). I bambini potrebbero procedere in diversi modi: calcolare le dimensioni della parete dell'aula per poterne calcolare l'area e poi stabilire quanti cartoncini rettangolari della misura data sono contenuti in essa; potrebbero effettuare delle azioni concrete per vedere quanti cartoncini di quelle dimensioni si possono utilizzare; potrebbero anche rendersi conto che il risultato dell'algoritmo che emerge dal calcolo dell'area non è lo stesso di quello ottenuto quando si effettua una verifica operativa.

Il commerciante (problema standard)

> Il signor Giorgio fa il commerciante. Compra 436 penne a € 0,80 ciascuna. Rivende la metà delle penne e incassa € 266,00. Quanto guadagna per ogni penna?

Si tratta di un classico problema scolastico standard sulla compravendita: il testo è brevissimo e, tra i dati numerici, quello che potrebbe spiazzare qualche bambino è "la metà" espresso nel registro linguistico anziché simbolico (come 0,5 o ½).

3. Un problema a righe è un problema caratterizzato da una profonda integrazione fra l'aspetto matematico e quello narrativo, in contrapposizione al problema a quadretti, in cui l'attenzione dell'autore è limitata alla struttura matematica. In un problema a righe la lettura selettiva del testo non è una strategia vincente, perché i dettagli della storia sono tutti funzionali alla comprensione del problema (Zan, 2016, p.190)

Gli alunni di Anna (esercizio anticipato)

> La maestra Anna, parlando dei suoi allievi, disse: «La metà dei miei allievi ama solo la matematica. La quarta parte ama solo le scienze; 1/7 ama solo l'arte e il disegno. Inoltre tre alunni amano tutte le materie». Quanti sono complessivamente gli alunni di Anna?

Il problema è stato modificato a partire dal classico problema *Gli alunni di Pitagora*[4]. 4
Si tratta di un testo che può essere presentato agli allievi di quinta come un *esercizio anticipato*. A questo proposito, D'Amore, Fandiño Pinilla e Marazzani (2004, p. 74) distinguono un problema da un esercizio anticipato: l'esercizio anticipato è un esercizio standard, di uso e consumo molto routinario nella scuola, ad un certo punto dell'iter scolastico; solo che viene proposto come testo stimolo prima di quel momento. Gli alunni, attraverso strategie e rappresentazioni spontanee, meglio se in un setting di piccolo gruppo, potrebbero arrivare alla soluzione, così come è avvenuto in classi sperimentali. Tale problema può mettere in difficoltà gli stessi docenti che lo leggono per la prima volta oppure, ad una lettura poco attenta, potrebbe essere scambiato per un classico problema di calcolo di frazioni oppure, ancora, interpretato come problema a cui manca un dato.

Il rettangolo (prova simil-Invalsi)

> Marco dice: «Se raddoppia la misura del perimetro di un rettangolo, anche la sua area raddoppia».

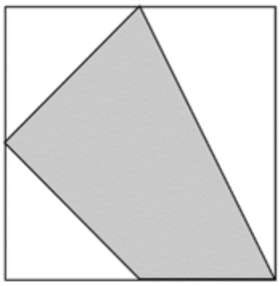
> Sei d'accordo con lui? Si No
> Giustifica la tua risposta ....

Il problema è privo di dati numerici. Mette alla prova la presenza nei bambini della misconcezione secondo cui ci sia una relazione di proporzionalità tra misura del perimetro e misura dell'area, per la quale nel momento in cui si modifica una si deve modificare anche l'altra. I bambini possono verificare con disegni o altre strategie la falsa affermazione e sono chiamati esplicitamente a giustificare le conclusioni a cui sono arrivati. Di proposito non sono stati inseriti nel testo elementi che richiamano un contesto reale.

Il giardino di Torquato[5] (non standard inclusivo) 5

> Questo è il giardino del signor Torquato:

4. https://matematichiamoblog.wordpress.com/2016/03/26/quanti-sono-gli-alunni-di-pitagora/
5. Il problema "Il giardino di Torquato" fa parte di una raccolta di problemi tratti dal RMT (Rally matematico transalpino)



Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca. Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede: «Sarà maggiore l'area della parte con i fiori o quella della parte con il prato?»

Si tratta ancora di un problema privo di dati numerici.
La figura che è all'interno del quadrato è un quadrilatero non standard. La risoluzione del problema, che mette in gioco i concetti di area e di equiscomponibilità, può prevedere la messa in gioco di diversi procedimenti risolutivi.

5 L'analisi dei dati e l'interpretazione dei risultati

5.1 Le caratteristiche di un problema matematico nelle convinzioni dei docenti

Partiamo da una prima domanda, posta ai 45 insegnanti.

1. *Quali caratteristiche deve avere, secondo te, un problema matematico?* Il contenuto delle risposte date dai docenti alla domanda è stato analizzato con il software NVIVO 11, già menzionato. In prima istanza è stata effettuata una *word frequency query* che ha permesso di ricercare le parole più frequenti nelle risposte dei docenti. Tale interrogazione ha condotto alla produzione del grafico in **Figura 1** e ai dati riassunti in **Tabella 1**.

Figura 1
Word frequency query relativa alle caratteristiche di un problema matematico.

Word	Lenght	Count
chiaro	6	21
testo	5	20
chiarezza	9	10
dati	4	10
parole	6	8
realtà	6	8

Tabella 1
Word frequency query relativa alle caratteristiche di un problema matematico.

Il grafico mostra che i termini *chiaro, chiarezza, testo* sono di gran lunga i più frequenti. Ma quale significato viene attribuito dagli insegnanti al termine chiaro? Cosa vuol dire che un problema deve essere chiaro? Per poter meglio interpretare questo aspetto, si è deciso di effettuare un'analisi più approfondita dei testi nei quali tali parole erano contenute e si è arrivati alla conclusione che i diversi significati attribuiti dai docenti sono riconducibili a una duplice classificazione:

1. chiaro in relazione a processi di comprensione linguistica;
2. chiaro in relazione a processi di comprensione matematica.

Per esemplificare, si riporta qualche testo tratto dalle risposte di alcuni docenti:

1. «Un problema deve essere chiaro, non molto lungo, non deve contenere più di due domande, più di due operazioni, perché poi i bambini si perdono. Deve contenere i dati, anche quelli nascosti, ovvio, i bambini poi ci arrivano, un po' discutendo, le classiche parole magiche, le parole chiave, che devono essere contenute nel testo, nella domanda, cerco di avviarli in forma di gioco».
2. «Deve essere chiaro, non tanto lungo. Partendo dalle domande esplicite, poi quelle implicite. Ho visto in alcuni testi che ci sono degli asterischi dove dovrebbe essere inserita la domanda implicita. È bene lasciarli e poi piano piano toglierli».
3. «Una caratteristica principale è la chiarezza. Non deve avere troppi dati, altrimenti i bambini vanno in tilt e non sono in grado di capire il testo del problema. Per chiarezza intendo il testo e anche la chiarezza dei dati matematici che non devono essere troppo arzigogolati».
4. «Deve essere non di esecuzione, di regole, ma di applicazione logica. Per i bambini che hanno difficoltà frasi brevi, a tappe; la chiarezza nella richiesta per tutti».
5. «Deve essere chiaro, deve essere un po' una sfida per chi lo fa. A volte sono poco chiari nella struttura del testo, nella comprensione del testo. A volte sono ingannevoli, perché sono messi in un italiano scorretto».
6. «Deve spingere al ragionamento. La componente logica è fondamentale. Poi la chiarezza del testo, soprattutto per bambini abbastanza piccoli. I termini devono essere comprensibili».

Le parole dei primi tre docenti (interventi 1, 2, e 3) mettono in evidenza che il costrutto "chiaro" è inteso in riferimento a un «testo non troppo lungo» e ciò potrebbe essere considerato un elemento attinente ai processi linguistici; lo stesso costrutto, però, è anche inteso, dal punto di vista dei processi matematici, in riferimento

a un testo che «non deve avere più di due domande e più di due operazioni», corredato dalle parole chiave, con la presenza anche di stratagemmi (gli asterischi) che permettono ai bambini di individuare le domande nascoste. In questo caso i docenti sembrano essere più interessati al risultato conseguito dagli allievi che devono risolvere il problema (e cioè al prodotto finale rispetto al processo). Gli interventi 4, 5, e 6 mettono in evidenza che il costrutto "chiaro" è inteso sicuramente rispetto ai processi linguistici: «italiano corretto, frasi brevi, a tappe, termini comprensibili». Dal punto di vista dei processi matematici si mette in evidenza che «deve essere un testo di applicazione logica, una sfida per chi lo fa, deve spingere al ragionamento». Tali affermazioni sembrano andare in una direzione di interesse per il processo risolutivo.
Nella **Tabella 2** sono riportate due liste di espressioni linguistiche degli insegnanti, riferibili ai due significati individuati.

Chiaro (processi linguistici)	Chiaro (processi matematici)
Messo in un italiano semplice	Non deve contenere più di due domande e due operazioni
I termini devono essere comprensibili	Deve contenere i dati, anche nascosti e le parole chiave, nel testo e nella domanda
Breve, conciso	Non deve contenere troppi dati, altrimenti i bambini vanno in tilt
A volte sono messi in un italiano scorretto	In alcuni testi ci sono gli asterischi, dove andrebbe inserita la domanda implicita
Evitare le subordinate	Chiarezza dei dati matematici, che non devono essere troppo arzigogolati
Sintassi e forma del testo	A tappe
Chiaro nell'esposizione, ben comprensibile	Se immediatamente colgo i dati, il quesito, il resto viene da sé
Non deve essere troppo lungo	
Testo spalmato e chiaro	
Limpido e lineare	

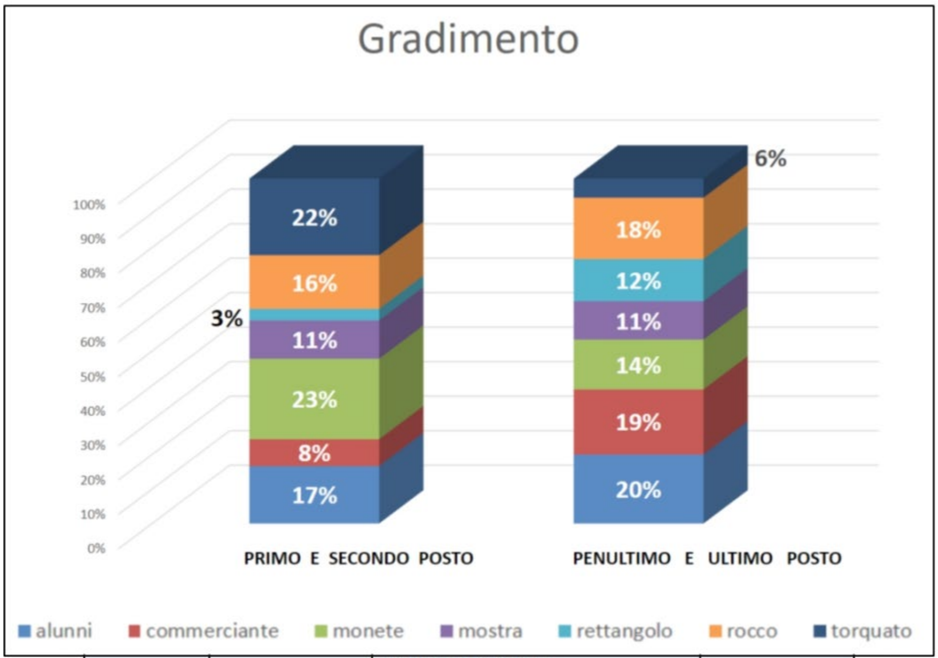
Tabella 2
Espressioni linguistiche dei docenti sul significato del termine "chiaro".

5.2 Le graduatorie dei problemi

Sono state poste ai 45 docenti le seguenti domande:

– Hai letto e analizzato i 7 problemi. Ora componi una graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ti piace di più e all'ultimo posto quello che ti piace di meno. Motiva le tue scelte.
– Componi, ora, una seconda graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ritieni più adatto da proporre in classe ai tuoi futuri alunni di quinta e all'ultimo quello che ritieni meno adatto. Motiva le tue scelte.

Nel grafico presentato in **Figura 2** sono rappresentate, nella colonna a sinistra, le percentuali di collocazione al primo o al secondo posto di ciascuno dei 7 problemi e, nella colonna a destra, le percentuali di collocazione al penultimo o all'ultimo posto degli stessi problemi.



	GRADIMENTO			
gradimento	PRIMO / SECONDO POSTO		PENULTIMO / ULTIMO POSTO	
problemi	Punteggio	% su 90 punteggi	Punteggio	% su 90 punteggi
alunni	15	17%	18	20%
commerciante	7	8%	17	19%
monete	21	23%	13	14%
mostra	10	11%	10	11%
rettangolo	3	3%	11	12%
rocco	14	16%	16	18%
torquato	20	22%	5	6%
	90	100%	90	100%

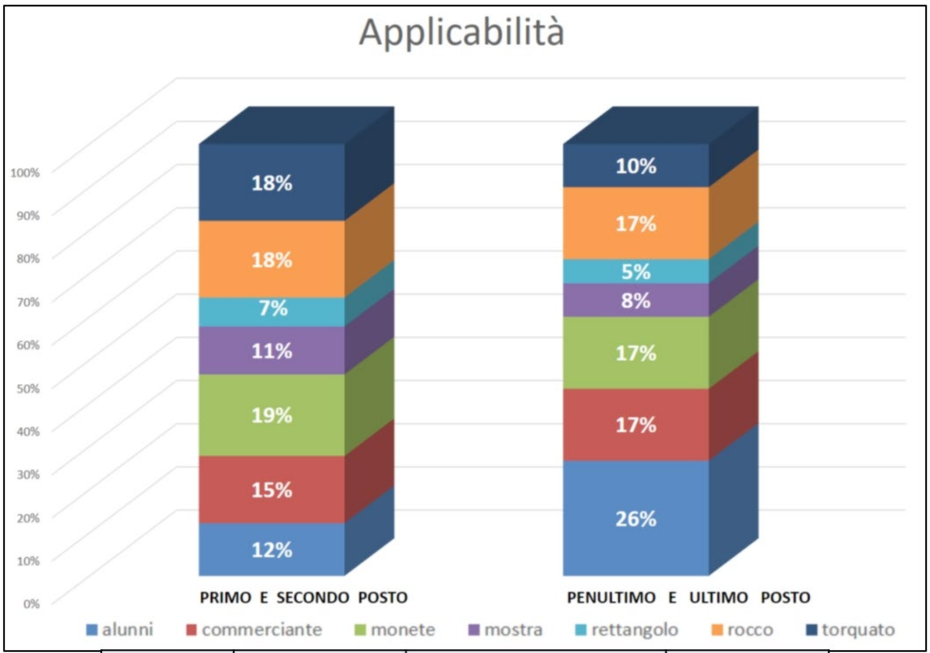
Figura 2
Grafico delle percentuali di gradimento di ciascun problema.

Il grafico mostra che un problema molto apprezzato dai docenti è stato il problema non standard inclusivo "Il giardino di Torquato", che è indicato per il 22% al primo o al secondo posto nella graduatoria di gradimento e solo per il 6% al penultimo o ultimo posto. Una lettura più analitica dei dati raccolti mostra che questo problema non è stato mai collocato dai docenti all'ultimo posto.

I problemi che mostrano un buon equilibrio nella collocazione al primo o al secondo posto da una parte e al penultimo o all'ultimo posto dall'altra, sono: "Rocco e il suo giardino" (16% e 18%), "La mostra in aula" (11% e 11%), "Gli alunni di Anna" (17% e 20%).

Il problema narrativo "Le monete" è indicato dal 23% degli insegnanti al primo o al secondo posto (la più alta percentuale); una buona percentuale di docenti, tuttavia, lo rifiuta e lo mette al penultimo o all'ultimo posto (14%). Il secondo problema standard "Il commerciante" è generalmente poco gradito: è per l'8% dei docenti al primo o al secondo posto e per il 19% al penultimo o all'ultimo posto. Lo stesso vale per il problema "Il rettangolo", che è stato poco indicato nelle prime posizioni e più indicato nelle ultime posizioni.

In **Figura 3** sono rappresentate le percentuali relative alla dichiarata applicabilità in aula dei problemi da parte dei docenti.



	APPLICABILITA'			
Applicabilita'	PRIMO / SECONDO POSTO		PENULTIMO / ULTIMO POSTO	
problemi	Punteggio	% su 90 punteggi	Punteggio	% su 90 punteggi
alunni	11	12%	24	26%
commerciante	14	15%	15	17%
monete	17	19%	15	17%
mostra	10	11%	7	8%
rettangolo	6	7%	5	5%
rocco	16	18%	15	17%
torquato	16	18%	9	10%
	90	100%	90	100%

Figura 3
Grafico delle percentuali di dichiarata applicabilità in aula dei problemi.

Dall'analisi del grafico, rileviamo che i due problemi "Il giardino di Torquato" e "Le monete" mantengono percentuali buone anche per l'applicabilità (18% e 19% al primo o al secondo posto) anche se "Le monete" è considerato meno applicabile rispetto a "Il giardino di Torquato" (17% versus 10% al penultimo o all'ultimo posto).
L'esercizio anticipato "Gli alunni di Anna" è considerato poco applicabile (27% al penultimo o ultimo posto). Il problema standard "Il commerciante" ha una posizione equilibrata tra primi e ultimi posti (15% e 17%), così anche "Rocco e il suo giardino" (18% e 17%) e "Una mostra in aula" (11% e 8%). Il problema "Il rettangolo" anche in questa graduatoria ottiene una percentuale bassa per l'applicabilità (7%), anche per la non applicabilità (6%), considerando che in caso di non applicabilità il problema ha occupato raramente le posizioni più base della classifica.
Naturalmente, trattandosi di un campione poco numeroso, possiamo parlare di tendenze, che andranno poi confermate in futuri studi effettuati su campioni estesi.
Si confrontano, ora, le due graduatorie, di gradimento e di applicabilità, per verificarne i gradi di corrispondenza (Figura 4).

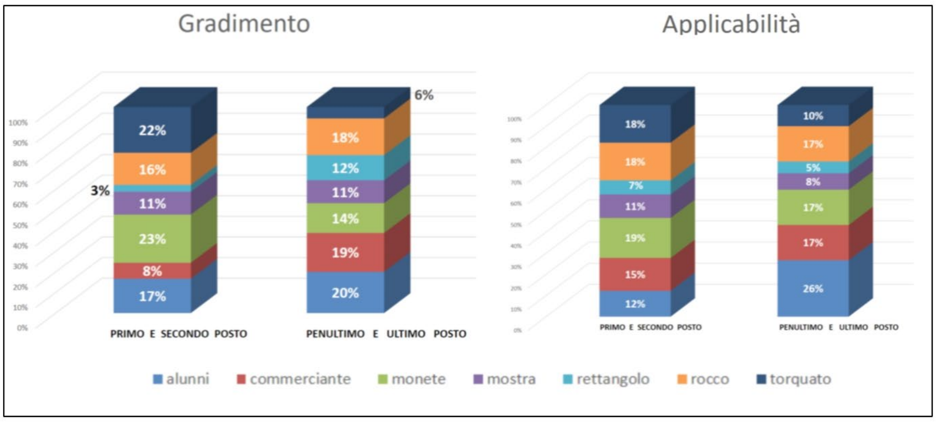


Figura 4
Confronto tra i grafici rappresentativi delle due graduatorie: gradimento e applicabilità.

Alcune osservazioni a riguardo. Il problema narrativo "Le monete" è generalmente gradito ai docenti, ma una parte di loro ritiene di non poterlo rendere applicabile in aula. Il problema non standard inclusivo "Il giardino di Torquato" è gradito e ritenuto più applicabile del precedente. "Il commerciante" (problema standard-aritmetico) è poco gradito da un buon numero di insegnanti, che comunque lo scelgono rispetto alla sua applicabilità in aula.
L'esercizio anticipato "Gli alunni di Anna", pur essendo un problema gradito, perde in applicabilità.
"Una mostra in aula" (compito di realtà) e "Il rettangolo" (prova simil-Invalsi) sono meno presenti nelle posizioni estreme al positivo o al negativo (I e II posto oppure VI e VII). Ciò significa che tali problemi occupano spesso le posizioni intermedie delle classifiche; gli insegnanti non si mostrano favorevoli verso di essi, ma nemmeno li rifiutano. In particolare, il problema scelto come compito di realtà, "Una mostra in aula", ha messo in luce alcune perplessità da parte degli intervistati, i quali spesso ne hanno commentato l'applicabilità: «è difficile per i bambini misurare la parete»; «anche se ambientato in un contesto reale non è autentico e non necessariamente coinvolgerebbe gli allievi». Più volte i docenti hanno proposto altre versioni. Si riporta, a titolo d'esempio, la proposta effettuata da un'insegnante:

> «Io inizierei a porre semplicemente il problema. "Dobbiamo fare questa cosa. Sentiamo che consigli mi date per sistemare questa cosa". Poi sentiamo un po' cosa viene fuori e poi a imbuto ci andiamo a infilare in conversazioni più centrate sulle questioni matematiche. In prima istanza: "Noi abbiamo questo mucchio di disegni. Se volessimo sistemarli, in che modo potremmo fare?". Ogni gruppetto espone la sua proposta. L'importante è lavorare in un contesto protetto, in un contesto guidato e sereno, dove nessuno si sente giudicato e le risposte dell'insegnante non hanno un significato di giudizio».

Focalizzando l'attenzione sul *rapporto tra problemi proposti e convinzioni dei docenti*, si può dire che in particolare alcuni problemi sembrano aver stimolato maggiormente le reazioni dei docenti.
A questo punto dell'analisi, sorgono nuovi interrogativi:

1. Quali sono le motivazioni addotte dai docenti per spiegare il gradimento dei testi "Il giardino di Torquato" e "Le monete"?

2. Quali sono le motivazioni addotte dai docenti per spiegare il non gradimento dei due problemi "Il giardino di Torquato" e "Le monete"?
3. Quali sono le motivazioni che i docenti hanno dato per spiegare lo scarso gradimento del testo "Il commerciante"?
4. Perché i docenti hanno considerato il problema "Il commerciante" applicabile in aula?
5. Perché il testo "Il giardino di Torquato" è stato gradito e è stato anche considerato più applicabile in classe, rispetto a "Le monete"?

5.3 Primo piano su alcuni problemi

Emerge in modo evidente che gli insegnanti intervistati hanno convinzioni diverse rispetto ai sette problemi presentati e in particolare emerge una maggiore variabilità rispetto ai tre problemi "Il giardino di Torquato", "Le monete" e "Il commerciante", che hanno sollecitato pareri contrastanti e, alcune volte, anche una bella partecipazione dei docenti intervistati, sia dal punto di vista della valutazione cognitiva che per la reazione emotiva.
Il problema "Il giardino di Torquato" è stato collocato al primo o al secondo posto nella graduatoria di gradimento dal 22% degli insegnanti per i seguenti motivi.

> «È diverso dal solito, non è il classico problema geometrico; è un problema senza numeri e presenta una figura irregolare».
> «Richiede ragionamento».
> «Tutti potrebbero arrivare alla soluzione, perché si possono usare strategie diverse, anche il ritaglio; è accessibile anche ai bambini che non ragionano».
> «Stimola il pensiero divergente, nel senso che devi far vedere le figure».
> «È uno strumento per costruire competenze».
> «Stimola la discussione e la creatività dei bambini».
> «Sviluppa la capacità di vedere in geometria».
> «Permette di riuscire a vedere, immaginarsi movimenti e spostamenti che portano a valutare equiestensione».

Il problema "Il giardino di Torquato", di contro, è stato collocato al penultimo e ultimo posto nella graduatoria di gradimento nel 6% dei casi per i seguenti motivi:

> «Non ci sono dati esplicitati».
> «È diverso dagli altri».
> «La figura potrebbe metterli in difficoltà».
> «Lo vorrei risolvere prima io».
> «È un lavoro a livello di figure geometriche, molto complesso».
> «È un problema che può essere risolto solo dai bambini intuitivi».
> «Devono ragionarci, applicare le regole della matematica, ma con il ragionamento».

Il problema "Le monete" è stato collocato al primo o al secondo posto nella graduatoria di gradimento dal 23% dei docenti; si riportano alcune delle motivazioni addotte:

«È logico, coinvolge la logica e i procedimenti logici».

> «Stimola la discussione».
> «Stimola il ragionamento».
> «Permette diverse interpretazioni (socio-affettiva e matematica)».
> «È uno strumento per costruire competenze».
> «È interessante».

Di contro, lo stesso problema è stato collocato al penultimo e ultimo posto nella graduatoria di gradimento dal 14% degli insegnanti per i seguenti motivi.

> «È complicatissimo dal punto di vista del linguaggio».
> «[Gli allievi] cercherebbero subito i numeri».
> «Devono ragionare tantissimo».
> «Lo proporrei non come testo; lo farei rappresentare, lo racconterei».
> «È farraginoso, ingarbugliato».
> «Ha troppi dati numerici».
> «Sui sussidiari non troverai mai un problema così».
> «Il bambino si può spaventare; lo dividerei in pezzetti; analizzando i pezzetti sarebbe una bella sfida…».

Il problema "Il commerciante" è stato collocato al primo o al secondo posto dall'8% degli insegnanti nella graduatoria di gradimento; riportiamo una delle motivazioni addotte e argomentate:

> «Questo è proprio sintetico al massimo. Questi sono i classici problemi che si propongono. Sì, lo proporrei, sono quei problemi classici. E qui la discussione è molto più ampia perché loro non capiscono che un commerciante deve comprare anche lui, ci deve guadagnare perché ci deve guadagnare. C'è tutta prima una discussione sul perché c'è la spesa, perché c'è il ricavo, perché c'è il guadagno. È vero che c'è la formuletta, ma in realtà loro non lo vivono, perché non sono commercianti».

Lo stesso problema è stato collocato al penultimo o ultimo posto per il 19% nella graduatoria di gradimento. Riportiamo una delle motivazioni addotte:

> «Sono problemi di compravendita e sono su tutti i sussidiari. C'è un po' di argomentazione ma non è un'argomentazione. Una volta che è stato risolto da qualcuno, questo qualcuno non fa fatica a spiegare; è una soluzione abbastanza lineare è […]. Io l'argomentazione la vedo come qualcosa di più creativo, qui di creativo non vedo quasi niente. Non è un problema che ti tocca più di tanto quando discuto in classe di queste robe qua [...]».

5.4 Gli aspetti significativi dei tre problemi

Si elencano, di seguito, gli aspetti che sono apparsi più significativi nell'analisi di questi tre problemi. Si riportano come esempi, a supporto di queste affermazioni, alcuni stralci delle interviste dei docenti.

1. Le stesse caratteristiche di uno specifico problema possono essere considerate elementi positivi per alcuni docenti ed elementi negativi per altri.

Ad esempio, sul problema "Il giardino di Torquato" sono state fatte le seguenti considerazioni contrastanti:

> «L'impatto è visivo e non ci sono dati esplicitati. No, non mi convince, perché diciamo che mancano dei dati ed è anche un lavoro a livello di figure geometriche abbastanza complesso».
> «A me piace tantissimo questo. Lo proporrei sicuramente perché è un problema che sviluppa proprio la capacità di vedere in geometria. Potrebbero affrontarlo come lavoro individuale: ciascuno vede a livello visivo, poi discussione con tutta la classe; poi farei un lavoro per gruppi eterogenei per risposte».

2. Uno stesso problema può essere considerato facile o difficile in riferimento ad uno stesso target di alunni.
   Ad esempio, a questo proposito, sul problema "Il commerciante" è stato detto:

   > «Non ci capiscono quasi niente. Per loro rivendere è guadagnare. Ecco per esempio la discussione, che però non è una discussione, non è un'argomentazione ma una confusione sui termini, sui significati. Rivende la metà delle penne e incassa. Quanto guadagna per ogni penna, per loro è la stessa cosa. La differenza non esiste».
   > «Non so se lo proporrei. Mi sembra un problema molto difficile, questo […]».
   > «C'è tutta prima una discussione sul perché c'è la spesa perché c'è il ricavo, perché c'è il guadagno. È vero che c'è la formuletta, ma in realtà loro non lo vivono, perché non sono commercianti».

3. Non è tanto importante il problema in sé quanto le modalità in cui l'insegnante presenta un problema, a renderlo un buon problema o un problema di poco valore.
   Sempre sul problema "Il commerciante" alcuni insegnanti affermano:

   > «Per me dipende da come lo poni. La discussione nasce perché il commerciante… Che cosa fa? Perché la metà? Poi il prezzo unitario, il prezzo totale. C'è di tutto e di più. È molto significativo. È anche sempre un problema di esperienza e vita reale. Noi poi in questi giorni stiamo proprio parlando del commerciante: chi è, che fa. I bambini, devo dire, sono sempre stimolati».
   >
   > «Qui c'è il discorso dell'ingrosso che secondo me è un concetto che si può introdurre. Il commerciante compra dove vendono gli stock, addirittura potrebbe andare alla fabbrica della BIC. Stimola tanto l'argomentazione e la discussione per questa cosa che dicevo di come funziona il commercio, che nemmeno io lo so».

4. Ci sono alcuni problemi che più di altri sono considerati inclusivi, in quanto danno la possibilità agli allievi di utilizzare vari tipi di strategie didattiche.
   Per il problema "Il giardino di Torquato" ad esempio, alcuni docenti affermano:
   > «Un problema che non ha numeri la sollecita la discussione, perché tu devi trovare una strategia; a me è venuta quella della sovrapposizione, ma magari a un bambino viene in mente un'altra strategia, che è diversa da quella aritmetica, mi sembra abbastanza semplice; dovrebbe essere accessibile anche

> al bambino che ragiona di meno».
> «Hanno fatto ipotesi anche quelli che non ci arrivano; hanno detto di tutto e di più. Noi accettiamo tutto. Questo è lo scopo: di stimolarli comunque a discutere e ad intervenire. In questo i nostri sono abbastanza sicuri. Facciamo sempre questa pedagogia del non timore e viene fuori di tutto e di più».
> «Stimola un po' il pensiero divergente, nel senso che devi vedere le figure e far fare una cosa su cui punto tantissimo: vedere la geometria non solo come figurine, ma scomporre e ricomporre le figure. Perché ognuno deve mettersi in discussione con sé stesso».

5. I problemi che particolarmente stimolano discussione e argomentazione possono essere proposti solo ad alcuni bambini, perché si pensa che la maggior parte degli alunni della propria classe non riesca mai ad arrivare alla soluzione.
   Per esempio, sul problema "Le monete" si riporta il pensiero di una docente:

> «Questo è un problema che io proporrei, però non a tutta la classe. Perché io ho la presenza di un portatore di handicap, la presenza di due DSA gravi e ci sono anche bambini che non hanno queste attenzioni per il ragionamento. Io lo proporrei a un gruppo della classe omogeneo. Questo lo vedo adatto a bambini che riescono a trovare quelle strategie diverse».

5.5 Problemi e libri di testo

Si affronta infine un'ulteriore questione delicata e didatticamente importante: i problemi presenti nei libri di testo. Spesso accade che, pur dichiarando il rispetto delle Indicazioni Nazionali per il curricolo, editori e autori seguano di fatto altre strade, più orientate a riprodurre una didattica di tipo tradizionale. Considerando anche che molti docenti danno grande importanza ai libri di testo, anche per ragioni pratiche e di condivisione con i colleghi, appare di particolare rilevanza investigare sulle convinzioni che i docenti hanno in proposito. È stato chiesto ai docenti, nel corso dell'intervista:

– Sei soddisfatto/a dei problemi proposti sui libri di testo? Motiva la tua risposta.
– Quali suggerimenti daresti ai responsabili di una casa editrice per migliorare i problemi proposti sui libri di testo?

Le risposte dei docenti alla prima delle due domande sono state classificate a posteriori, individuando alcuni "punti di vista" sui problemi suggeriti dai contenuti delle risposte stesse:

– il punto di vista del docente esperto in matematica;
– il punto di vista del docente che riflette sull'utilità delle proposte per il proprio lavoro;
– il punto di vista dell'insegnante che "si mette nei panni" degli alunni;
– il punto di vista del docente professionista, che valuta l'aderenza dei problemi presenti sui libri di testo a problemi "ideali" che abbiano le caratteristiche auspicate nei documenti istituzionali, in particolare nel testo delle Indicazioni Nazionali per il curricolo.

Gli insegnanti intervistati si sono dichiarati alquanto insoddisfatti dei problemi presenti sui libri di testo e le motivazioni addotte sono state classificate sulla base dei punti di vista sopra menzionati, come illustrato in Tabella 3.

Dal punto di vista del matematico	Dal punto di vista dell'utilità pratica	"Nei panni" degli allievi	Aderenza ai documenti istituzionali
Stimolano poco la logica	Semplificano il lavoro	Linguaggio non vicino ai bambini	Non in linea con le Indicazioni Nazionali
Sono esercizi e problemi standard	Sono pochi	Banali	Non utili per la certificazione delle competenze
Sono classificati per argomento: moltiplicazioni, divisioni ecc.	Si devono integrare con altri reperiti da siti o altri materiali cartacei	Noiosi e ripetitivi	Non stimolano il ragionamento
	Devono essere modificati	Testi poco chiari	Non ci sono giochi matematici né test Invalsi
	Ogni insegnante si regola a modo suo	Troppo semplici o troppo complicati	

Tabella 3
Come gli insegnanti motivano la mancata soddisfazione dei problemi proposti sui libri di testo.

Gli insegnanti intervistati hanno espresso i loro suggerimenti agli editori, così come è illustrato in Tabella 4.

Dal punto di vista del matematico	Dal punto di vista dell'utilità pratica	"Nei panni" degli allievi	Aderenza ai documenti istituzionali
Inserire problemi aperti e senza soluzione	Inserire pochi problemi ma buoni	Spazio alla creatività e a modelli intuitivi diversi	Inserire problemi più autentici e legati al reale, vivibili, concreti, legati ai tempi, al contesto dei bambini
Inserire problemi storici	Affiancare guide per i docenti dove si danno proposte e anche soluzioni	Inserire problemi giocosi, giocati, creativi	Non dare delle regole di risoluzione ai bambini, per permettere di lavorarci con il loro ragionamento
Differenziare i problemi sullo stesso argomento	Gli autori sono gli esperti, quindi non si mette in discussione l'utilità dei problemi proposti	Far fare ai bambini cose in pratica	Inserire esercizi ma anche problemi che stimolino il ragionamento
Inserire problemi di vari livelli e gradi di difficoltà	Arricchire i testi	Inserire problemi legati a vocaboli semplici, per ceti bassi	Inserire problemi stimolanti, che diano modo di discutere
	Dare agli insegnanti degli spunti per costruire problemi ad hoc, in situazione	Dare la possibilità di uno o più step: un bambino arriva ad un punto, un altro bambino ad un altro	Proporre prove simil-Invalsi

Tabella 4
Suggerimenti per le case editrici riguardanti i problemi nei libri di testo.

Analizzando le tabelle e tenendo conto dei dati acquisiti, grazie a un'analisi ulteriormente approfondita dei testi delle risposte, si possono effettuare le seguenti considerazioni:

1. I problemi dei libri di testo non soddisfano molto i docenti intervistati per quanto riguarda aspetti che sono riferibili a questioni più prettamente matematiche; sono pochi i "veri" problemi presenti, non rispondono ai bisogni degli allievi e non sono in linea con i documenti istituzionali, nello specifico con le Indicazioni Nazionali per il curricolo. È chiaro che i diversi aspetti citati sono in relazione tra loro: ad esempio, laddove si chiede di inserire problemi che siano "giocosi, giocati, creativi" ci si riferisce ai bisogni dei bambini, ma anche ad aspetti matematici e all'aderenza alle Indicazioni Nazionali.
2. Gli insegnanti mostrano di essere abbastanza consapevoli delle differenze che ci sono tra *esercizi* e *problemi*, ma sono pochi coloro che mostrano di conoscere la letteratura di riferimento e di averne fatto oggetto di riflessione professionale, individualmente o a scuola. Molti insegnanti lamentano la presenza massiccia, nei libri di testo, di esercizi utili per verificare l'acquisizione di regole apprese in aula, piuttosto che di problemi, che possono mettere in gioco: ragionamento, vari modelli intuitivi, creatività degli allievi.
3. Per quanto riguarda le caratteristiche specifiche che i problemi dovrebbero avere, si insiste molto su quanto i problemi disponibili siano noiosi, ripetitivi, a volte banali, espressi in un linguaggio poco vicino ai bambini e poco chiaro. Per questi ultimi aspetti i problemi proposti dai libri di testo non sono ritenuti in linea con il testo delle Indicazioni Nazionali.
4. Per quel che riguarda gli aspetti più prettamente pratici per il lavoro in aula, gli insegnanti intervistati si ritengono soddisfatti, perché hanno la possibilità di avere dei materiali da utilizzare, anche se spesso devono integrarli con altri problemi oppure sono costretti a modificare i testi proposti, per renderli più chiari o più significativi. Alcuni insegnanti credono che siano proprio gli autori dei libri i veri esperti e dunque non se la sentono di proporre alcun cambiamento, riponendo in loro (gli autori) assoluta fiducia.
5. Gli insegnanti intervistati si mostrano molto propositivi e creativi, nel momento in cui sono invitati a dare consigli ai responsabili di una casa editrice per poter migliorare le proposte sui libri scolastici e parascolastici; essi utilizzano, nel definire i problemi "desiderati", tanti aggettivi che fanno riferimento a concetti importanti presenti nelle Indicazioni Nazionali: autentici, legati al reale, vivibili, concreti, legati ai tempi, legati al contesto dei bambini, giocosi, giocati, creativi. Tali aggettivi evidenziano le aspettative e i bisogni dei docenti di avere a disposizione problemi "diversi" per i loro allievi. Gli insegnanti insistono anche sulla necessità che si curi maggiormente la chiarezza dei testi, anche per favorire l'accessibilità ai problemi da parte dei bambini di ceto basso, cercando sempre però di non cadere nella banalità.
6. Alcuni insegnanti manifestano il bisogno di avere a disposizione problemi che rassicurino gli alunni (e forse loro stessi): problemi a più step, per esempio, oppure graduati, che prevedano diversi gradi di soluzioni, dal più facile al più difficile. Tali problemi darebbero ai bambini la possibilità di essere gratificati dal raggiungimento di un risultato, anche se solo ai primi livelli di difficoltà. Tali problemi darebbero anche modo ai docenti di monitorare i livelli di competenza raggiunti dai loro allievi.

6 Conclusioni: discussione dei risultati e implicazioni didattiche

Nella prima parte dell'intervista gli insegnanti hanno analizzato sette problemi, selezionati e modificati appositamente, assumendo di essere confrontati con *sei diverse tipologie:* problema standard, problema narrativo, compito di realtà, esercizio anticipato, quesito simil-Invalsi, problema non standard inclusivo. Ciascuno dei sette problemi ha determinato, da parte degli insegnanti intervistati, risposte ben connotate, che sono state acquisite, analizzate e interpretate. I docenti si sono espressi in modo diametralmente opposto nei confronti di uno stesso problema, e ciò è apparso in modo evidente nel corso dell'analisi e della valutazione del problema narrativo "Le monete". Grazie alle due diverse "classifiche", di gradimento e di applicabilità in aula, è stato possibile prendere atto di eventuali incongruenze tra ciò che gli insegnanti dichiarano di apprezzare e ciò che invece sentono di poter proporre in aula, lavorando con i propri allievi.
Alcuni docenti hanno modificato le loro convinzioni su alcuni problemi nel corso dell'intervista stessa; si può ipotizzare che ci sia stato un inizio di cambio di convinzioni, proprio grazie alla possibilità di avere un "tempo dedicato" per poter riflettere su una vasta gamma di prove, per conoscerle meglio, valorizzandone le specifiche caratteristiche e potenzialità. Ciò ha "smosso" in alcuni docenti il proposito di poter modificare le proprie scelte didattiche e di portare la classe all'altezza di tali compiti, anziché la decisione di non somministrarli.
Una classificazione dei problemi matematici, così come è stata proposta nel corso delle interviste effettuate, potrebbe costituire uno spunto da cui partire per attuare confronti "in orizzontale", tra i docenti delle diverse classi, ma anche una riflessione da effettuare "in verticale", nei contesti di costruzione di curricula che abbracciano tutto il ciclo scolastico, dalla scuola dell'infanzia alla scuola media.
In questo modo i docenti potrebbero approfondire le potenzialità formative dei diversi problemi, così come potrebbero individuarne i limiti. Ciò avrebbe il beneficio di sviluppare un atteggiamento critico e costruttivo rispetto alla grande quantità di problemi e di prove di diversa natura che i docenti ritrovano nei testi scolastici e parascolastici, per poter operare una scelta oculata, consapevole e mirata dei problemi da presentare agli alunni, ipotizzando, perché no, una revisione e una riscrittura degli stessi, anche eventualmente in collaborazione con gli alunni.
Una molteplicità di proposte da parte degli insegnanti potrebbe inoltre valorizzare più stili cognitivi; sollecitare molteplici strategie rappresentative e comunicative; sviluppare e consolidare importanti competenze matematiche e non matematiche, in linea con i documenti nazionali e internazionali. Si ritiene che i traguardi formativi, auspicati per il problem solving sia nei documenti nazionali che nei documenti internazionali, siano raggiungibili puntando sulla molteplicità e sulla varietà delle proposte, e dunque presentando problemi di varia natura e di livello diverso, in modo tale da attivare le diverse intelligenze e gli svariati approcci personali degli alunni presenti nelle classi.
Si potrebbero poi configurare piste di autoformazione che abbiano anche il vantaggio di far acquisire agli insegnanti non solo una consapevolezza circa la propria visione della matematica e dei problemi matematici, ma anche, attraverso il confronto con i colleghi, delle possibili molteplicità di queste visioni (Zan, 2010).

Bibliografia

Abelson, R. (1979) Differences between belief systems and knowledge systems. *Cognitive Science, 3*, 355–366.

Andrews, P. (2007). The curricular importance of mathematics. A comparison of English and Hungarian teachers' espoused beliefs. *Journal of Curriculum Studies, 39*(3), 317–338.

Andrews, P., & Xenofontos, C. (2014). Analysing the relationship between the problem-solving-related beliefs, competence and teaching of three Cypriot primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(4), 299–325.

Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori, Milano.

Cai, J., & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. *ZDM, 39*(6), 459–473.

Carey, S. (1999). Sources of conceptual change. In E. Scholnick, K. Nelson, S. Gelman & P. Miller (Eds.), *Conceptual Development* (pp. 292–326). London: Lawrence Erlbaum.

Cohen, D. (1990). A revolution in one classroom: The case of Mrs. Oublier. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 12*(3), 311–329.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica, 3*, 27–50.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 6*, vol. 29 A-B, 645–664.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. In F. Frabboni & M. L. Giovannini (Eds.), *Professione insegnante* (pp. 145–153). Milano: Franco Angeli.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Marazzani, I. (2004). "Esercizi anticipati" e "zona di sviluppo prossimale": comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. *La matematica e la sua didattica, 2*, 71–95.

De Corte, E. (1995). Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Psychologist, 30*(1), 37–46.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied Psychology: An International Review, 53*(2), 279–310.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics learning. In M. Boekaerts, P. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-regulation* (pp. 687–726). San Diego: Academic Press.

Di Martino, P. (2004). *Difficoltà in matematica e sistemi di convinzioni.* Tesi di dottorato. Università degli studi di Pisa.

Di Martino, P., & Zan, R. (2017). *Insegnare e apprendere la matematica con le Indicazioni nazionali.* Ebook. Firenze: Giunti Scuola.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Trento: Erickson.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs*: *A hidden Variable in Mathematics Education* (pp. 39–57). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

Lumbelli, L. (2006). Costruzione dell'ipotesi ed astrazione nella pedagogia sperimentale, 25–60.

McLeod, D. (1985). Affective issues in research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

McLeod, D. (1989). The role of affect in mathematical problem solving. In D. McLeod & V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*. New York: Springer-Verlag.

McLeod, D. (1992): Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*. New York: MacMillan.

MIUR. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf (consultato il 07.10.2019)

NCTM. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning? Disponibile in https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf (consultato il 07.10.2019)

Pehkonen, E. (1993). What are Finnish teacher educators' conceptions about the teaching of problem solving in mathematics? *European Journal for Teacher Education, 16*(3), 237–256.

Pehkonen, E. (2017). Finnish elementary teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching, *La Matematica e la sua Didattica, 25*(1), 13–27.

Polya, G. (2016). Come risolvere i problemi di matematica. Utet Università Torino, 2016. (Titolo originale: *How to solve it* pubblicato nel 1945).

Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. In J. Sikula, T. J. Buttery & E. Guyton (Eds.), *Handbook of Research on Teacher Education*. A project of the Association of Teacher Educators (pp. 102–119). New York, NY: Macmillan Library.

Rokeach, M. (1960). *The Open and Closed Mind: Investigations into the Nature of Belief Systems and Personality Systems*. New York: Basic Books.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, New York.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. Schoenfeld (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 189–215). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2004). The math wars. *Educational Policy, 18*(1), 253–286.

Schön, D. A. (1983, trad.it. 1993). Il professionista riflessivo. *Per una nuova epistemologia della pratica*. Bari: Dedalo.

Skott, J. (2009). Contextualising the notion of 'belief enactment'. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(1), 27–46.

Tahan, M., Negrin, F., & Zannini, L. (1996). *L'uomo che sapeva contare: una raccolta di avventure matematiche*. Salani.

Vannini, I. (2009). Ricerca empirico-sperimentale in Pedagogia: alcuni appunti su riflessione teorica e sistematicità metodologica. *Ricerche di pedagogia e didattica, 4*(1), 1000–1025.

Vannini, I. (2012). Come cambia la cultura degli insegnanti. *Metodi per la ricerca empirica in educazione*. Milano: Franco Angeli.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and Modeling the Process of Conceptual Change. In S. Vosniadou (Ed.), Special Issue on Conceptual Change. *Learning and Instruction, 4*, 45–69.

Wilkins, J. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 139–164.

Xenofontos, C., & Andrews, P. (2012). Prospective teachers' beliefs about problem-solving: Cypriot and English cultural constructions. *Research in Mathematics Education, 14*(1), 69–85.

Xenofontos, C., & Andrews, P. (2014). Defining mathematical problems and problem solving: prospective primary teachers' beliefs in Cyprus and England, *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 279–299.

Zan, R. (2010). *Difficoltà in matematica (osservare, interpretare, intervenire)*. Milano: Springer.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Roma: Carocci Faber.

Autore/Annarita Monaco
NRD di Bologna, Università degli Studi di Roma "La Sapienza" – Italia
annarita.monaco@uniroma1.it

Un gioco-indagine per scoprire teoremi di geometria

An inquiring-game activity to discover geometry theorems

Carlotta Soldano* e Gaetano Di Caprio°

*Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione – Università degli Studi di Torino, Italia

°Istituto di Istruzione Superiore Erasmo da Rotterdam – Nichelino (Torino), Italia

Sunto / Il presente articolo illustra un'*attività di gioco-indagine* progettata all'interno di GeoGebra a partire da un teorema di geometria euclidea, riformulato secondo l'approccio della Logica dell'Indagine (Hintikka, 1999). L'obiettivo della ricerca è analizzare il contributo che la Logica dell'Indagine, implementata all'interno di ambienti di geometria dinamica, può offrire nell'educazione degli studenti alla scoperta e alla riorganizzazione logica della loro conoscenza matematica. L'attività didattica, sperimentata nell'anno scolastico 2018-2019 in una classe seconda liceo scientifico, è stata organizzata in tre fasi: il gioco, l'indagine e la discussione di classe. L'analisi dei processi investigativi e argomentativi degli studenti, unitamente all'analisi a priori dell'attività, intende evidenziare come questo tipo di percorso possa avvicinare gli studenti ad intuire ciò che definiamo il lavoro "vero" del matematico, che consiste nell'esplorare, congetturare, verificare e dimostrare teoremi.

Parole chiave: Attività di gioco-indagine; ragionamento regressivo; logica dell'indagine; gioco semantico; relazioni geometriche.

Abstract / This article illustrates an inquiring-game activity designed within GeoGebra starting from a Euclidean geometry theorem reformulated according to the approach of the Logic of Inquiry (Hintikka, 1999). The aim of the research is to analyze the contribution that the Logic of Inquiry, implemented within dynamic geometry environments, can offer in the education of students to the discovery and logical reorganization of their mathematical knowledge. The didactic activity, experimented in the school year 2018-2019 in a secondary school scientific class, was organized in three phases: the game, the investigation and the class discussion. The analysis of students' inquiring processes and argumentation, together with the a priori analysis of the activity, intends to highlight how this type of activity can bring students closer to what we define as the "true" work of the mathematician, which consists in exploring, conjecturing, verifying and proving theorems.

Keywords: Inquiring-game activity; regressive reasoning; logic of inquiry; semantical games; geometric relationship.

1 Introduzione

Come viene messo in luce dal MIUR nel "Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione", tra le finalità dell'asse culturale matematico c'è anche l'acquisizione delle abilità necessarie «per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine conoscitiva e di decisione» (MIUR, 2007). In particolare, le competenze argomentative costituiscono la base per preparare gli studenti alla dimostrazione, attività che contraddistingue il pensiero matematico maturo. Garuti, Boero, Lemut e Mariotti (1996) sostengono che in alcuni casi possa esistere una "continuità cognitiva" tra i processi di produzione di congetture e la costruzione di dimostrazioni. Essa si verifica se gli studenti, nella fase di produzione della congettura, innescano un'intensa attività

argomentativa riguardo la plausibilità delle loro affermazioni e, nella fase dimostrativa, si ricollegano agli argomenti prodotti nella fase di produzione della congettura, riorganizzandoli secondo catene deduttive.
Gli ambienti di geometria dinamica si rivelano particolarmente efficaci nella costruzione di enunciati e significati matematici perché permettono agli studenti di effettuare intense attività di esplorazione che favoriscono la produzione di congetture e argomentazioni. Le esplorazioni avvengono attraverso lo strumento di trascinamento che consiste nel muovere un elemento della figura sullo schermo ottenendo in questo modo altri esemplari della stessa famiglia di figure. Trascinando un elemento geometrico dinamico è possibile distinguere «punti (e in generale oggetti) *liberi* – cioè costruiti come nuovi oggetti sullo schermo – da punti (oggetti) *dipendenti* – cioè costruiti a partire da altri elementi, con cui sono messi in relazione» (Antonini & Baccaglini Frank, 2015, p. 260). Attraverso questa esperienza è possibile notare gli *invarianti di trascinamento* che consistono in proprietà che definiscono e caratterizzano gli oggetti geometrici o in enunciati di tipo condizionale, ossia enunciati del tipo "se… allora…". Quando viene trascinata una figura all'interno degli ambienti di geometria dinamica, non sempre si conservano le proprietà che definiscono la figura stessa. Le costruzioni dinamiche le cui proprietà si conservano durante il trascinamento, vengono dette costruzioni robuste (Healy, 2000; Laborde, 2005), le costruzioni che si "deformano" perdendo le loro proprietà caratteristiche, vengono dette *soft*. Nell'insegnamento-apprendimento della geometria, gli ambienti di geometria dinamica possono essere utilizzati per la progettazione di attività in cui viene chiesto agli studenti di esplorare e congetturare proprietà geometriche, tra cui quelle espresse in forma condizionale, osservate in fase esplorativa come invarianti di trascinamento. A tal fine, generalmente, vengono proposti agli studenti problemi aperti (Arsac, 1999), ossia problemi che non svelano la soluzione o la risposta, ma in cui viene descritta una configurazione e viene chiesto agli studenti di produrre congetture riguardanti le relazioni tra gli elementi della configurazione descritta dal problema. Queste esperienze si rivelano particolarmente utili perché avvicinano gli studenti alla doppia natura *figurale* e *concettuale* degli oggetti geometrici (Fischbein, 1993). Ogni oggetto geometrico è il prodotto della sua definizione e possiede una natura concettuale ma allo stesso tempo possiede anche una natura figurale che consiste nella sua rappresentazione grafica. Questa duplice natura rende gli oggetti geometrici dei *concetti figurali* (Fischbein, 1993). È fondamentale che gli studenti comprendano e armonizzino i due aspetti, per non lasciarsi trarre in inganno da elementi grafici presenti nella rappresentazione dell'oggetto geometrico e per sviluppare un pensiero produttivo in geometria.
In questo studio, anziché proporre agli studenti problemi aperti, abbiamo scelto di innescare l'esplorazione e la produzione di congetture e argomentazioni attraverso un *gioco semantico* appositamente progettato a partire dall'enunciato di un teorema di geometria. Partendo da una situazione empirica di gioco all'interno dell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra, gli studenti vengono guidati nella scoperta dell'enunciato del teorema e nella sua dimostrazione, intrecciando aspetti pratici-empirici con gli aspetti teorici e logici. Si tratta quindi di un'attività didattica in cui aspetti logici e geometrici si intrecciano inscindibilmente nella scoperta e costruzione della conoscenza matematica.

2 Quadro teorico di riferimento

In questa ricerca, la Logica dell'Indagine e la Semantica della Teoria dei Giochi, sviluppate dal logico e filosofo finlandese Jaakko Hintikka (1929-2015), costituiscono il quadro teorico con cui è stato progettato il gioco attraverso cui sono stati analizzati i protocolli degli studenti.
Secondo la Semantica della Teoria dei Giochi, è possibile stabilire la verità degli enunciati matematici attraverso giochi semantici, ossia sfide tra un *verificatore* che deve mostrare la verità di un enunciato e un *falsificatore* che deve cercare di stabilirne la falsità. Ci limiteremo a considerare giochi semantici associati ad enunciati del tipo «per ogni x, esiste y tale che $S(x,y)$». Per mostrare la verità di questo tipo di enunciato è sempre possibile immaginare un gioco tra un falsificatore che controlla la variabile x e un verificatore che controlla la variabile y. Il falsificatore sceglie un valore della variabile x e il verificatore deve trovare il valore della variabile y che rende vera $S(x,y)$. In base alla semantica della teoria dei giochi, se esiste una strategia vincente per il verificatore del gioco allora l'enunciato è vero, altrimenti è falso. Grazie a tale strategia, il verificatore ha la possibilità di vincere qualsiasi sia il valore di x proposto dal falsificatore. Per chiarire la dinamica di gioco, la illustreremo attraverso un semplice esempio. Consideriamo l'enunciato «per ogni numero naturale n esiste un numero naturale m tale che $m\text{-}3n=1$». Per stabilire la verità di questo enunciato possiamo immaginare un gioco in cui un falsificatore sceglie il valore di n e un verificatore deve far vedere che per quel valore di n esiste un numero naturale m che gli permette di vincere il gioco. Se il falsificatore sceglie ad esempio $n=7$, il verificatore mostrerà che con $m=22$ vince il gioco perché $22\text{-}3\cdot 7=1$. Dal momento che l'insieme dei numeri naturali è chiuso per moltiplicazione e addizione, il verificatore ha la possibilità di vincere sempre. Infatti, basterà scegliere il numero consecutivo del triplo del numero scelto dal falsificatore per verificare l'enunciato su qualsiasi numero naturale scelto dal falsificatore. Essendo un gioco competitivo, il falsificatore cercherà di mettere in difficoltà il verificatore, proponendogli ad esempio valori di n molto grandi. Dal momento che esiste una strategia vincente per il verificatore del gioco, l'enunciato è vero secondo la semantica della teoria dei giochi.
La Logica dell'Indagine è una logica diversa dalla logica classica, si tratta di una logica interrogativa, basata sulla dialettica della domanda e della risposta. Essa, accanto al ragionamento di tipo deduttivo, ammette anche forme di ragionamento *ampliativo*, attraverso le quali nuovi elementi, non contenuti all'interno delle premesse del ragionamento, possono essere introdotti nel discorso. Queste forme di ragionamento sono il risultato di *abduzione* (Peirce, 1960). Per comprendere l'abduzione e la sua differenza rispetto alla deduzione, proponiamo un esempio classico, illustrato da Peirce stesso (Peirce, 1960, p. 372). Immaginiamo di sapere che una certa borsa è piena di fagioli bianchi e di vedere per terra dei fagioli bianchi, possiamo allora inferire «Questi fagioli provengono da quella borsa». Questa inferenza è un'abduzione, ossia un'ipotesi che permette di spiegare i fatti osservati. Schematicamente potremmo descriverla così:

A: Questi fagioli sono bianchi.
B: Questi fagioli vengono da quella borsa.

So che $B \rightarrow A$ (cioè che se questi fagioli vengono da quella borsa *allora* questi fagioli sono bianchi) e che A è vera (cioè che questi fagioli sono bianchi); inferisco che B sia vera (ossia che questi fagioli vengono da quella borsa).

Si tratta di un ragionamento diverso dalla deduzione che parte dall'ipotesi B e dalla conoscenza che $B \rightarrow A$ e conclude A.
In un ragionamento deduttivo a partire dalla regola ($B \rightarrow A$) e dal caso (B) si ricava il risultato (A), in un ragionamento abduttivo a partire dalla regola ($B \rightarrow A$) e dal risultato (A) si ipotizza il caso (B). Ovviamente un'abduzione ha solo un certo grado di probabilità di essere vera, quei fagioli bianchi potrebbero provenire dal sacchetto di un passante che li ha persi camminando.
Le abduzioni sono forme di ragionamento utilizzate dai detective nelle loro indagini. Immaginando di dover analizzare la scena di un crimine alla ricerca dall'assassino, il metodo investigativo, generalmente, non procede per via esclusivamente deduttiva, ma prevederà l'alternarsi e l'intrecciarsi di ragionamenti di tipo *regressivo* (Barbero & Gómez-Chacón, 2018), ossia partendo da ciò che si sa si procede "all'indietro" alla ricerca dei fatti da cui discende, e di tipo *progressivo*, ossia "in avanti" dai fatti alle loro conseguenze. I passi regressivi nel ragionamento possono essere il frutto di abduzioni. Ragionamenti progressivi e regressivi sono il cuore di ciò che Hintikka chiama la Logica dell'Indagine e saranno oggetto di analisi dello studio di caso che presenteremo in questo articolo.

3 Metodologia

La Logica dell'Indagine ha costituito la base per la progettazione di un'attività di gioco-indagine all'interno dell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra. Tale attività è stata oggetto di una sperimentazione didattica effettuata in una scuola secondaria di secondo grado[1], con la finalità di studiare l'intreccio tra processi d'indagine e processi dimostrativi secondo l'approccio della logica dell'Indagine. L'attività didattica, progettata e sperimentata nell'anno scolastico 2018-2019, è stata organizzata in tre fasi: il gioco prevede una sfida in GeoGebra tra due studenti che, seguendo le regole riportate in una scheda, ricoprono di volta in volta il ruolo di verificatore e falsificatore e utilizzano un file GeoGebra appositamente progettato come *terreno di gioco*. Il design è ispirato ai giochi semantici di Hintikka (1998) e, potenzialmente, può essere implementato su qualsiasi enunciato matematico esprimibile nella forma "per ogni... esiste…". All'interno di questo contesto, le variabili controllate dai giocatori sono punti di figure dinamiche che il verificatore e il falsificatore trascinano al fine di raggiungere i rispettivi obiettivi. In questa fase gli studenti devono scoprire la strategia vincente per il verificatore del gioco, ossia la condizione geometrica attraverso cui guidare le proprie mosse per vincere sempre. L'*indagine* è guidata da apposite domande volte a scoprire, formulare, dimostrare e generalizzare l'enunciato del teorema su cui si basa il gioco. In questa fase l'ambiente di geometria dinamica potrà essere utilizzato come supporto nella formulazione e validazione delle congetture. Infine, la *discussione* di classe prevede la condivisione delle scoperte e delle riflessioni degli studenti e l'istituzionalizzazione del sapere matematico su cui è basata l'attività.
La sperimentazione è stata svolta nelle ore di matematica curriculari in una settimana di aprile 2019, coinvolgendo sedici studenti di seconda liceo scientifico (grado

1. La scuola secondaria di secondo grado italiana corrisponde ai gradi 9-13, comprende quindi la quarta media e la scuola media superiore svizzere.

10). Quattordici di questi studenti conoscevano già le dinamiche di questi giochi perché erano stati coinvolti in una sperimentazione analoga l'anno precedente [per approfondimenti vedere Soldano e Sabena (2019)]. La durata della sperimentazione è stata di quattro ore, articolate come segue nell'arco di tre giorni:

– Primo giorno: attività introduttiva avente l'obiettivo di presentare un teorema matematico (teorema della divisione euclidea) attraverso il gioco della corsa a 20 (Brousseau, 1997). Durata complessiva: un'ora.
– Secondo giorno: attività di gioco-indagine in GeoGebra. Durata complessiva: due ore, di cui circa trenta minuti dedicati al gioco e il restante tempo alla scheda di riflessione sul gioco.
– Terzo giorno: commenti alle risposte date dagli studenti nella scheda di riflessione sul gioco e sistematizzazione della conoscenza matematica. Durata complessiva: un'ora.

I dati raccolti sono costituiti da un video di una coppia di studenti mentre svolge l'attività di gioco-indagine, il video della discussione di classe condotta il terzo giorno e i protocolli di tutti gli studenti.

All'interno degli ambienti di geometria dinamica, grazie alla possibilità di trascinare gli oggetti geometrici ed osservare gli effetti di questi movimenti, è possibile favorire l'esplorazione, la formulazione di congetture e la loro generalizzazione. Attraverso la progettazione di opportune situazioni didattiche, gli studenti possono sentire l'esigenza di dimostrare quanto osservato o scoperto per spiegarselo o per convincere sé stessi e/o gli altri. Dal punto di vista della ricerca, l'obiettivo dell'attività consiste nel cercare di armonizzare il divario epistemico e cognitivo messo in luce in letteratura riguardo al passaggio dall'esplorazione empirica alla dimostrazione teorica. Dal punto di vista didattico l'attività ha l'obiettivo di promuovere negli studenti il bisogno di dimostrare partendo da un contesto di gioco e investigazione, che si suppone possa far nascere tale bisogno. La nostra ipotesi è che la dinamica verificatore/falsificatore fornisca agli studenti una base concreta su cui elaborare riflessioni teoriche.

4 L'attività di gioco-indagine

L'attività di gioco-indagine che è oggetto del presente articolo prende ispirazione dal problema presentato al Rally Matematico Transalpino negli anni 2000 riportato in Figura 1:

Questo è il giardino del signor Torquato:

Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.
Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

"Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?"

E voi che cosa ne pensate?
Spiegate la vostra risposta.

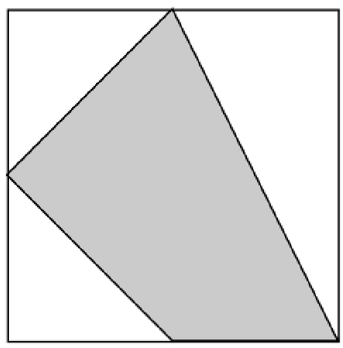


Figura 1
Problema proposto nel Rally Matematico Transalpino.

Scomponendo la figura in triangoli a due a due congruenti, è possibile stabilire l'equivalenza delle due aree messe a confronto.
Generalizzando questo problema, abbiamo proposto agli studenti un'attività di gioco-indagine il cui obiettivo è la scoperta della condizione necessaria e sufficiente da cui deriva l'equivalenza tra le aree. La **Figura 2** riporta la schermata del gioco implementato in GeoGebra:

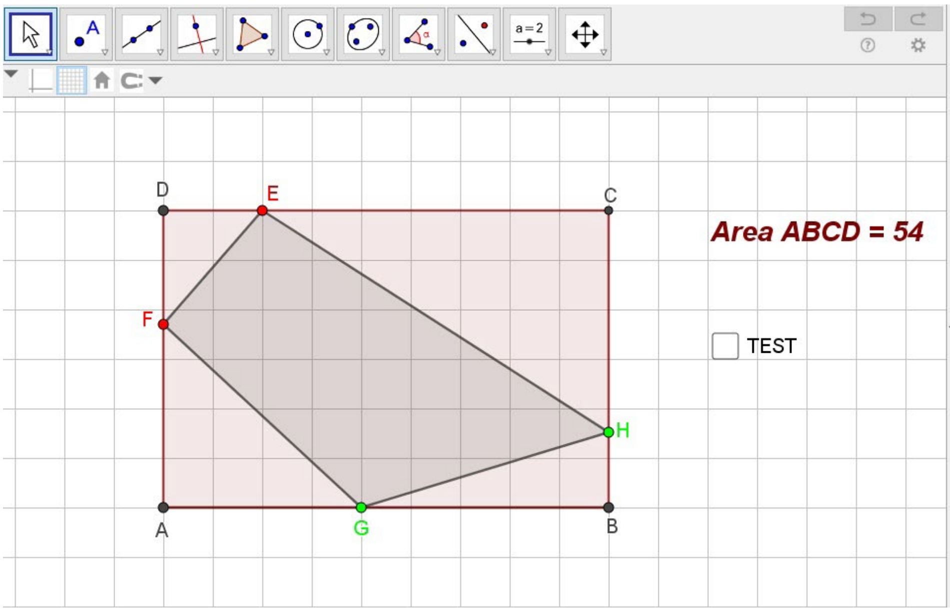


Figura 2
Schermata del gioco oggetto della sperimentazione.

A differenza del quesito del Rally Matematico Transalpino, il gioco richiede di variare il quadrilatero inscritto $EFGH$ affinché la sua area sia pari alla metà di quella del rettangolo $ABCD$. I vertici di $EFGH$ sono oggetti trascinabili sui rispettivi lati di $ABCD$ su cui sono definiti. Quando (e solo quando) almeno una coppia di vertici opposti è allineata parallelamente ad un lato del rettangolo si verifica che l'area di $EFGH$ è la metà dell'area di $ABCD$. Questa condizione rappresenta la strategia vincente che garantisce al verificatore di vincere il gioco qualsiasi sia la configurazione dei punti E e F proposta dal falsificatore.
Riportiamo di seguito le istruzioni del gioco date agli studenti:

- All'interno della vostra coppia stabilite un *verificatore* e un *falsificatore*. Ogni sfida è costituita da *due mosse* e da *un test*.
- La prima mossa è quella del falsificatore che muovendo i punti E ed F deve fare in modo che l'area di $EFGH$ *non sia la metà* dell'area del rettangolo $ABCD$.
- La seconda mossa è del *verificatore* che muovendo i punti G e H deve fare in modo che l'area $EFGH$ *sia la metà* dell'area del rettangolo $ABCD$.
- Quando il verificatore ha concluso la sua mossa il falsificatore clicca su TEST per verificare se il verificatore ha raggiungo l'obiettivo. In caso affermativo, segnate, nella tabella sottostante, un punto al verificatore. In caso contrario, segnate il punto al falsificatore.
- Cliccate su TEST per nascondere il valore dell'area di $EFGH$ e iniziate una nuova sfida (scambiatevi i ruoli e gli obiettivi ogni due partite e giocate un totale di otto partite).

Come messo in luce dalle regole del gioco, l'esito della sfida viene stabilito in base al

valore dell'area di $EFGH$ visualizzabile cliccando su TEST.
Terminata la fase di gioco inizia la fase di indagine guidata dalle seguenti domande stimolo:

1. Qual è la strategia vincente per il verificatore? Ossia: quale condizione geometrica permette al verificatore di raggiungere l'obiettivo qualunque sia la mossa del falsificatore?
2. Qual è il teorema che avete scoperto? Formulate un enunciato nella forma "Se…allora…"
3. Scrivete le ipotesi, la tesi e dimostratelo.
4. La condizione che avete individuato come ipotesi è solo sufficiente o è anche NECESSARIA?

Per rispondere, formulate il *teorema inverso*, ossia il teorema che si ottiene invertendo ipotesi e tesi:

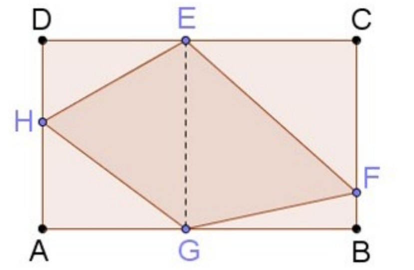
5. Adesso, giocando altre partite, cercate di stabilire se il teorema inverso è vero o falso. Scrivete le vostre osservazioni.
6. FACOLTATIVO: Se avete concluso che il teorema inverso è vero, dimostratelo. Se avete concluso che è falso, fornite un contro esempio.
7. Se al posto del rettangolo $ABCD$ ci fosse un parallelogramma, il teorema che avete scoperto sarebbe ancora valido? Scrivete le vostre osservazioni.

Partendo dall'esperienza di gioco, le domande intendono condurre gli studenti alla scoperta del teorema su cui è basato il gioco. In particolare, la domanda 1 richiede l'esplicitazione della condizione necessaria e sufficiente a garantire che l'area di $EFGH$ sia la metà dell'area di $ABCD$. Tale condizione può essere espressa in vari modi:
– una diagonale di $EFGH$ deve essere parallela ad un lato di $ABCD$;
– una diagonale di $EFGH$ deve essere perpendicolare ad un lato di $ABCD$;
– due vertici di $EFGH$ devono essere simmetrici rispetto ad un asse di simmetria di $ABCD$.

Gli studenti, inizialmente, potrebbero individuare una condizione sufficiente ma non necessaria, ad esempio:
– entrambe le diagonali di $EFGH$ devono essere parallele/perpendicolari ai lati di $ABCD$.

La domanda 2 prevede la riformulazione di quanto scoperto utilizzando il connettivo logico "Se … allora…". Per rispondere a questa domanda gli studenti dovrebbero inserire come ipotesi la condizione geometrica individuata come risposta alla domanda 1 e come tesi la relazione tra le aree che si osserva ogni volta in cui si verifica tale condizione. Una possibile formulazione potrebbe essere:
– Se una diagonale del quadrilatero $EFGH$ inscritto al rettangolo $ABCD$ è parallela ad un lato del rettangolo allora l'area di $EFGH$ è la metà dell'area di $ABCD$.

Questa domanda intende creare un distacco dalla situazione empirica del gioco e guidare gli studenti verso una generalizzazione teorica.
Una volta formulato il teorema, la domanda 3 richiede la sua dimostrazione. Riportiamo in Figura 3 una possibile dimostrazione che gli studenti coinvolti nella sperimentazione potrebbero produrre.



<u>IPOTESI:</u>
ABCD rettangolo
EG//DA

<u>TESI:</u>
EFGH = ½ ABCD

<u>DIMOSTRAZIONE:</u>

Il triangolo EGH è metà del rettangolo AGED (stessa base EG e stessa altezza)

Il triangolo EGF è metà del rettangolo BGEC (stessa base EG e stessa altezza)

Quindi EGH+EGF è metà di AGED+ BGEC, ossia EFGH = ½ ABCD (c.v.d)

Figura 3
Possibile risposta alla domanda 3.

Le successive tre domande riguardano il teorema inverso: innanzitutto viene richiesta la sua formulazione, successivamente la verifica empirica della sua verità utilizzando il gioco ed infine la sua dimostrazione. Per quanto riguarda la formulazione, basterà che gli studenti scambino ipotesi e tesi del teorema formulato come risposta alla domanda 3. Per stabilire la sua verità usando il gioco, gli studenti potrebbero ragionare sulla contronominale e quindi osservare che mettendo le diagonali di $EFGH$ non parallele ai lati di $ABCD$ l'area di $EFGH$ non è mai la metà di $ABCD$ oppure provare ad ottenere la relazione tra le aree senza la condizione sulle diagonali ed osservare che ciò è impossibile. La dimostrazione del teorema inverso non è semplice, pertanto in fase di sperimentazione l'abbiamo lasciata facoltativa. È possibile procedere per assurdo in due diversi modi: sfruttando l'equiscomponibilità delle figure o usando il teorema di Talete. Infine, l'ultima domanda richiede una generalizzazione del teorema scoperto indebolendo l'ipotesi riguardante il tipo di quadrilatero $ABCD$ in oggetto. Se il teorema viene formulato usando la condizione di parallelismo tra una diagonale di $EFGH$ e un lato di $ABCD$, allora è possibile generalizzarlo per i parallelogrammi. Il medesimo risultato non può essere ottenuto se viene usata la condizione di perpendicolarità.
La progettazione di questa attività didattica prevede quindi la scoperta, la formulazione e la dimostrazione di un primo teorema, successivamente la formulazione, la verifica e la dimostrazione del teorema inverso ed infine la generalizzazione dei due teoremi attraverso l'indebolimento delle sue ipotesi. Con questa attività gli studenti avranno la possibilità di scoprire tre teoremi veri e, nella discussione di classe, di riflettere sul perché per un matematico un teorema non è bello e non è finito fin quando non viene espresso nella terza formulazione.

5 Analisi delle produzioni degli studenti

La coppia videoregistrata è composta da Viola e Andrea[2]. Entrambi avevano partecipato alla sperimentazione l'anno precedente lavorando insieme. Dopo aver giocato per circa venti minuti ed essersi sfidati in sette partite, tutte vinte dal falsificatore 2

2. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i nomi sono stati cambiati.

tranne l'ultima, Viola e Andrea, si accingono a sfidarsi per l'ultima volta. Andrea è il verificatore e ha prodotto la configurazione vincente di **Figura 4** ma non ne è consapevole. Viola, il falsificatore, nota la configurazione vincente e incoraggia Andrea a premere il tasto TEST per accertare la vittoria.

1. V.: «Vai vai! È giusto [guardando la **Figura 4**]!»
2. A.: «Sono il migliore due volte!»
3. V.: «Vuoi sapere perché è giusto?»
4. A.: «Mm…»
5. V.: «Questo qua lo vedi [indicando il triangolo rettangolo AFB, **Figura 4**]? Due rettangoli… se tracci una linea [traccia metaforicamente FH con la penna] ne viene un altro uguale… tracciando la linea si vede che questo qui [indicando HCD] è uguale a questo qui [indicando DFH]. Quindi per forza devono essere uguali».

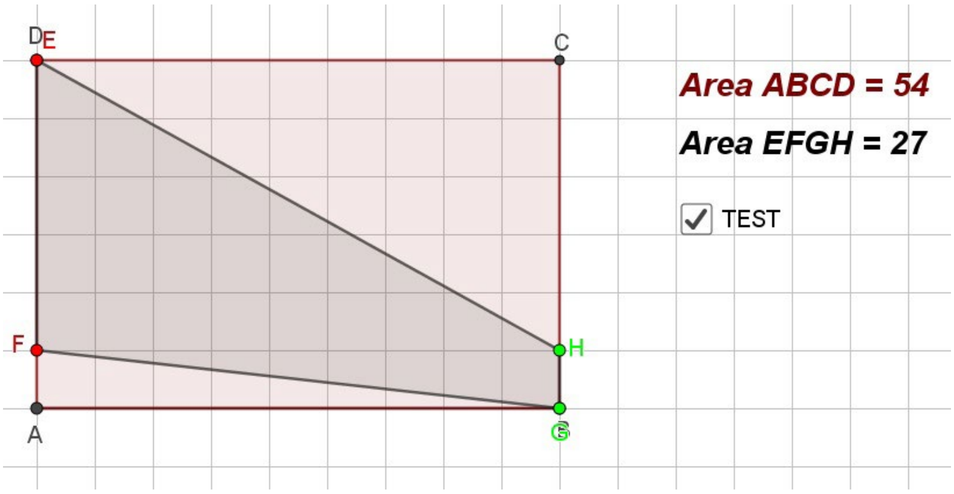


Figura 4
Configurazione vincente prodotta da Andrea.

Dalla trascrizione si nota che Viola non ha ancora scoperto la strategia vincente del verificatore, ossia la condizione che permette al verificatore di vincere qualsiasi sia la configurazione prodotta dal falsificatore. Nonostante ciò, il parallelismo della diagonale FH rispetto al lato AB viene usato implicitamente per dimostrare la congruenza tra le coppie di triangoli AFB e BHF, CDH e DFH. Viola capisce che nella **Figura 4** l'area di $EFGH$ è la metà dell'area di $ABCD$ (intervento 1) e attivando un ragionamento di tipo *regressivo*, produce una dimostrazione che pur non essendo rigorosa e completa permette di mostrare perché si verifica tale relazione tra le aree delle due figure. Qualche minuto dopo Viola formula una prima congettura circa la condizione geometrica che permette al verificatore di ottenere la relazione tra le aree:
Congettura 1: «EF e GH devono essere paralleli ai lati del rettangolo».
La congettura, che implica che $EFGH$ sia un trapezio, non è corretta. Probabilmente è frutto di una generalizzazione della **Figura 4** che non tiene in considerazione tutte le configurazioni che gli studenti hanno osservato in precedenza. È possibile ottenere questa configurazione solo se il falsificatore porta E o F a coincidere con un vertice del rettangolo. Nel formulare la congettura 1, Viola compie un ulteriore passo indietro nel ragionamento, perché dalla dimostrazione passa alla formulazione dell'ipotesi del teorema.
Viola, dopo aver formulato la congettura, sposta il punto E sul lato DC come illustrato in **Figura 5**, lasciando visibile il valore dell'area di $EFGH$ e si accorge che la congettura da lei formulata era errata.

6. V.: «Però così non è cambiato niente (osservando la Figura 5, ottenuta dopo aver spostato E). Allora non c'entra niente che devono essere paralleli ai lati. Guarda se metti così è sempre 27 l'area però non sono paralleli».

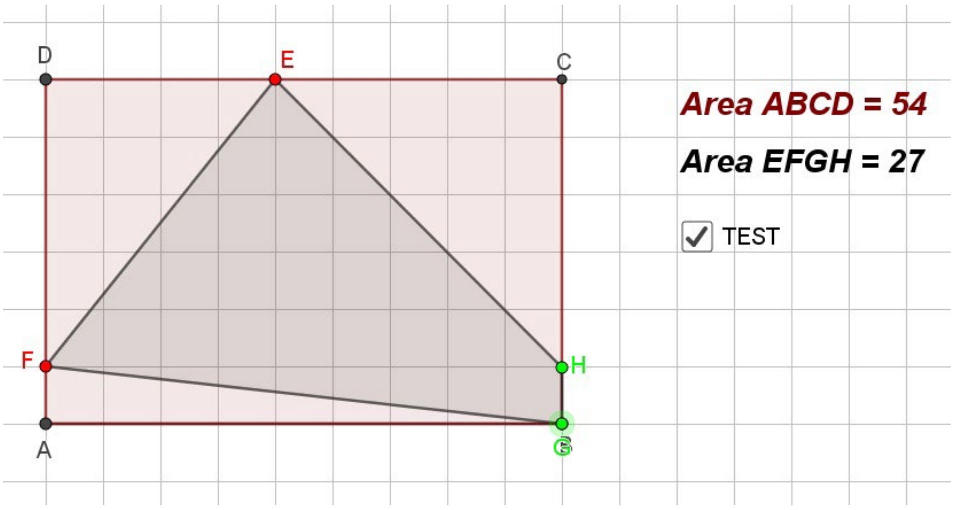


Figura 5
Controesempio alla congettura 1.

Viola, spostando il punto E, ottiene la configurazione di **Figura 5** che rappresenta un controesempio alla congettura 1 da lei formulata. Si tratta infatti di una configurazione in cui la tesi riguardante la relazione tra le aree è soddisfatta, ma l'ipotesi di parallelismo di una coppia di lati opposti del quadrilatero $EFGH$ non è verificata.
Qualche minuto dopo, in seguito ad un'esplorazione con il gioco in cui produce la configurazione illustrata in **Figura 6**, Viola formula un'altra congettura.
Congettura 2: «Se fai le diagonali perpendicolari ti viene».

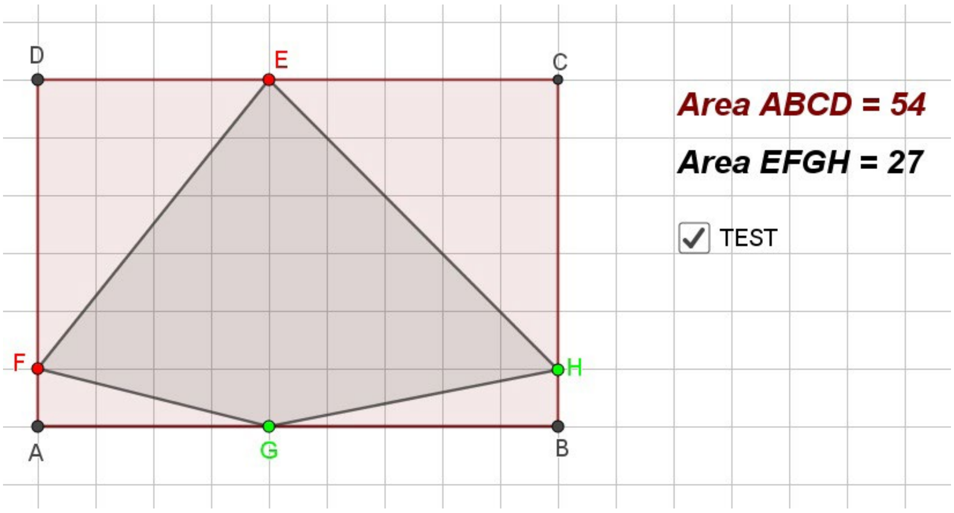


Figura 6
Condizione né necessaria né sufficiente affinché l'area di $EFGH$ pari alla metà dell'area di $ABCD$.

L'osservazione di Viola non è corretta, la condizione di perpendicolarità delle diagonali non è né necessaria né sufficiente. Si tratta di un esempio lampante in cui l'aspetto "figurale" può interferire con l'aspetto "concettuale". È vero che le diagonali sono perpendicolari ma questo è una conseguenza del fatto che sono parallele ai lati del rettangolo. Quindi la "vera" condizione è quella di parallelismo con almeno

uno dei lati del rettangolo e non di perpendicolarità tra le diagonali, pertanto la congettura 2 è errata.
A questo punto Viola e Andrea fanno un'altra osservazione relativamente alla perpendicolarità delle diagonali. Nel file GeoGebra costruiscono una diagonale e poi con il comando "retta perpendicolare" costruiscono una retta passante per E perpendicolare alla diagonale FH e si accorgono che questa retta non coincide con la diagonale EG, come mostrato dalla **Figura 7**.

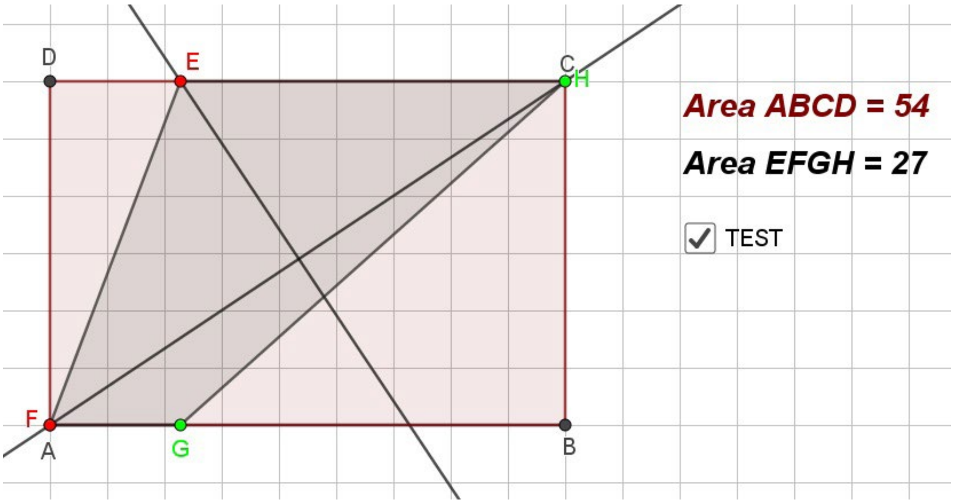


Figura 7
La condizione di perpendicolarità non è necessaria affinché l'area sia la metà.

Per verificare che la perpendicolarità delle diagonali non è una condizione necessaria, Viola ha rovesciato il suo ragionamento che da *regressivo* diventa *progressivo*. Si noti che rispetto alla congettura 2 (la perpendicolarità come condizione sufficiente) Viola ed Andrea non producono un vero e proprio controesempio.
A questo punto, Viola e Andrea riattivano il ragionamento *regressivo* e, osservando la **Figura 8**, formulano una nuova strategia.
Congettura 3: «Se due punti opposti sono sulla stessa retta allora l'area del trapezio è metà dell'area del rettangolo».

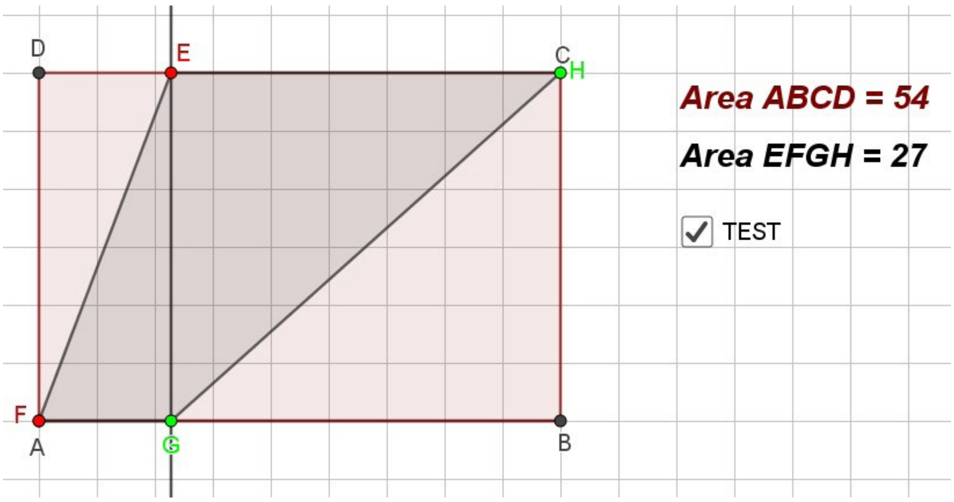


Figura 8
Configurazione prodotta durante la formulazione della congettura 3.

La congettura 3 non è ancora espressa in linguaggio matematico chiaro e corretto, ma mostra che gli studenti stanno focalizzando la loro attenzione sulla diagonale EG, elemento su cui si fonda la condizione necessaria e sufficiente per ottenere la relazione tra le aree desiderata. Il ragionamento attivato nel produrre questa nuova congettura è nuovamente di tipo *regressivo*, dalla tesi all'ipotesi.
Al momento della formulazione della congettura 3, gli studenti fanno riferimento unicamente alla configurazione del trapezio. Viola ed Andrea attivano un ragionamento per casi: in generale la strategia vincente consiste nel fare le diagonali perpendicolari, tranne nel caso della configurazione trapezio in cui «due punti opposti stanno sulla stessa retta».

7. V.: «Però anche così però viene [guardando la Figura 9]!»
8. A.: «Eh?»
9. V.: «Anche così viene bene… Quando lo dividi viene uguale. Vedi questo triangolo rettangolo qua [indicando CEH]? Se ci tracci un'altra linea viene un triangolo rettangolo uguale [tracciando metaforicamente una retta passante per H e parallela a CD]… E poi c'è questo qui [indicando GBH], se ci tracciassi una linea [riferendosi alla retta passante per H e parallela a CD] viene così e sono uguali».
10. A.: «Sì. [Viola muove prima H e poi F, lasciano EG parallelo ad AD] Abbiamo trovato E e G e quindi ora se muovi F e H… indipendentemente da cosa muovi rimane sempre 27… E e G devono star lì».
11. V.: «E ma allora non tutti i punti devono essere allineati solo E e G… Mentre se proviamo ad allineare questi due [allinea FH e muove G]… Basta che due punti siano allineati».

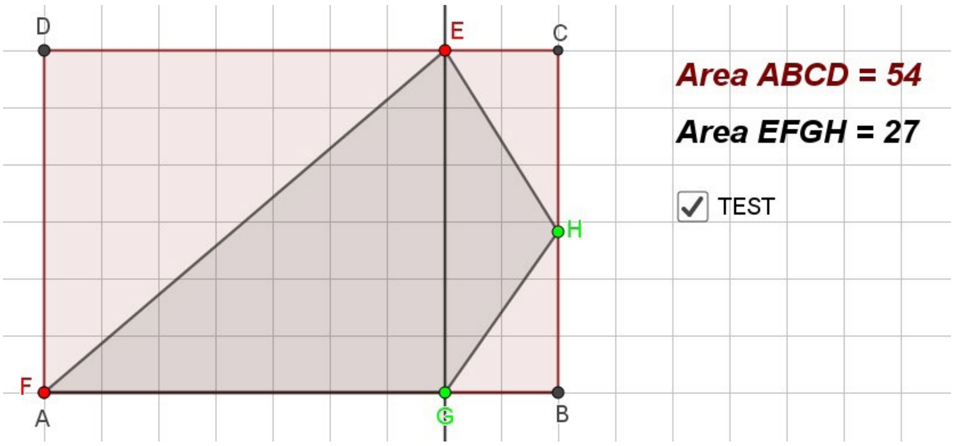


Figura 9
Nuova configurazione vincente.

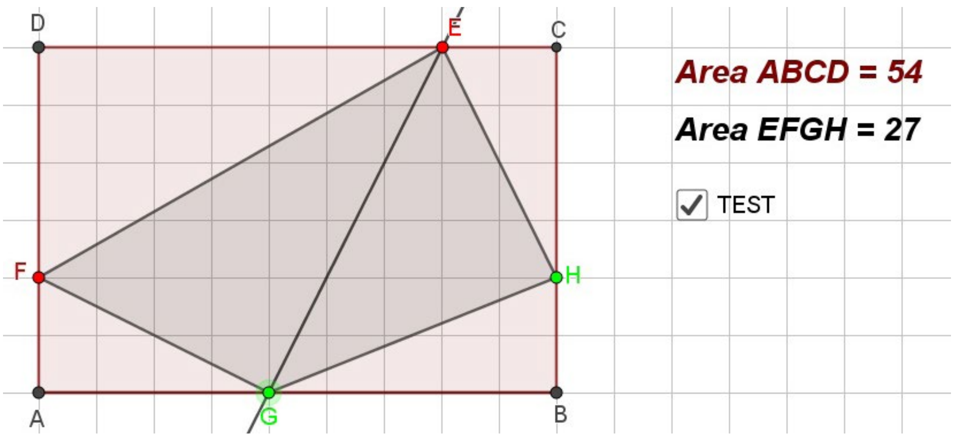


Figura 10
Generalizzazione della congettura.

Gli studenti producono una nuova configurazione vincente che non rientra nei casi precedenti perché non è un trapezio e non ha le diagonali perpendicolari. Una volta scoperta questa configurazione vincente, Viola riattiva il ragionamento *regressivo* perché dall'osservazione della tesi passa alla dimostrazione a parole che l'area di $ABCD$ è il doppio dell'area di $EFGH$ usando l'equiscomponibilità (intervento 9). Terminata la dimostrazione, Viola inizia a muovere prima F e poi H, lasciando invariate le posizioni di E e G, intanto Andrea generalizza quanto osserva (intervento 10). Viola completa la generalizzazione iniziata da Andrea considerando l'altra diagonale di $EFGH$: mette FH parallelo ad AB (vedere Figura 10) e inizia a muovere G.
Gli studenti concludono quindi che «Basta che due punti siano allineati», congettura già individuata precedentemente ma che pensavano valesse solo per le configurazioni in cui $EFGH$ era un trapezio.
Una volta generalizzata la congettura, Viola e Andrea esplorano il caso degenere in cui $EFGH$ è un triangolo e constatano che la relazione tra le aree continua a valere dimostrando che l'area del rettangolo $ABCD$ è il doppio dell'area del triangolo di uguale base a altezza.

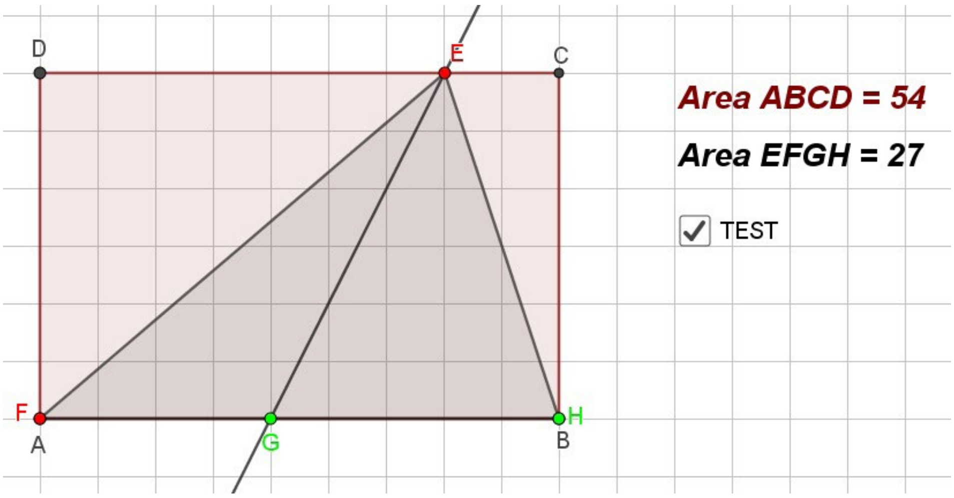


Figura 11
Esplorazione di un caso degenere.

Al termine di questa esplorazione gli studenti specificano ciò che era rimasto poco chiaro nella congettura 3: «Sulla stessa retta vuol dire che EG è parallelo ad AD».
Dopo circa un'ora di gioco ed indagine gli studenti esprimono la congettura corretta usando un linguaggio matematico appropriato.

6 Conclusioni

La Figura 12 riassume il processo di scoperta della condizione necessaria e sufficiente su cui è basato il gioco. In ciascun riquadro è riportato il minuto in cui Viola e Andrea iniziano il processo descritto e l'eventuale configurazione prodotta. La freccia rivolta a destra indica che il ragionamento che permette il passaggio tra i due processi descritti nei riquadri è di tipo *progressivo*, mentre la freccia rivolta a sinistra indica un ragionamento di tipo *regressivo*. I riquadri sono disposti su quattro righe che corrispondono alle quattro congetture formulate (congettura 1,2,3 e la generalizzazione della congettura 3). Ciascuna riga deve essere letta da sinistra a destra.

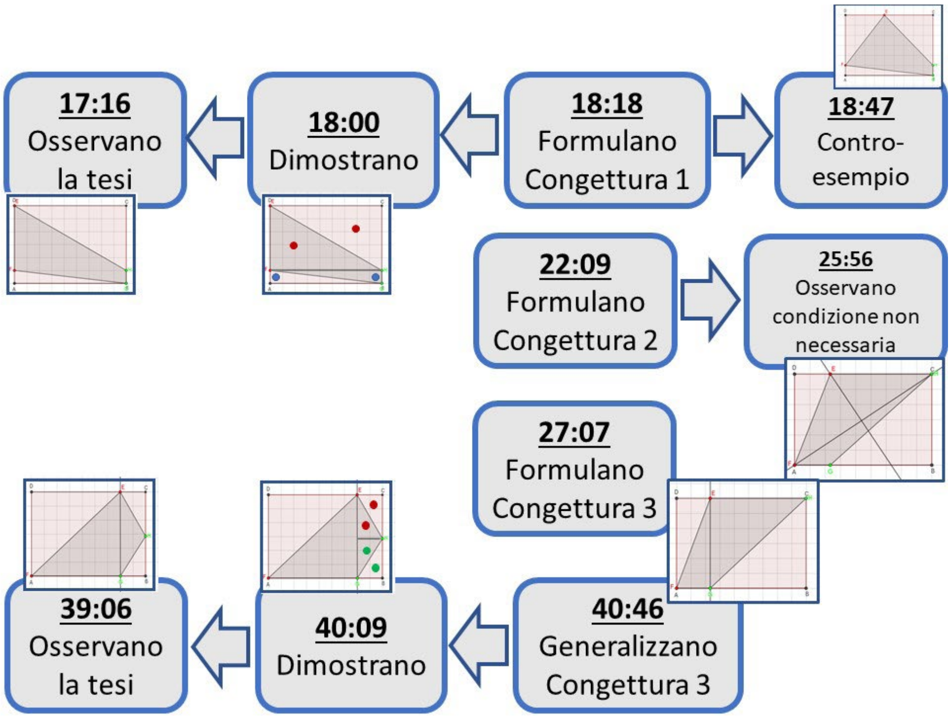


Figura 12
Processo di scoperta di Viola e Andrea.

Partendo dall'osservazione della relazione tra le aree (minuto 17:16) gli studenti compiono un passo indietro nel ragionamento e dimostrano la relazione (minuto 18:00). Il loro processo di pensiero segue un ordine inverso rispetto a quello seguito dal processo deduttivo indicato dalla direzione della freccia. Dopodiché compiono un ulteriore passo indietro e formulano una prima congettura che qualche secondo dopo confutano con un controesempio. Al minuto 22:09 formulano una seconda congettura che rappresenta una errata concettualizzazione della situazione osservata. Si accorgono che questa congettura non permette di spiegare tutti i tipi di configurazione osservati nel gioco, ad esempio il caso del trapezio. Al minuto 27:07 formulano una terza congettura che prende in considerazione l'elemento geometrico corretto, ossia una diagonale di $EFGH$ ma che non è ancora espressa in linguaggio matematico chiaro e corretto (non si parla esplicitamente di parallelismo della diagonale di $EFGH$ e del lato di $ABCD$). La scoperta di una nuova configurazione che non rientra nei casi trattati precedentemente li porta a reiterare il ciclo: al minuto 40:09 ritornano sulla dimostrazione e operando un ulteriore passo indietro nel ragionamento generalizzano la terza congettura a tutti i casi possibili.

Nel caso descritto, è possibile riconoscere nei processi di esplorazione, indagine e dimostrazione attivati dagli studenti la logica dell'indagine in atto: il ragionamento *regressivo* si attiva nella formulazione di congetture, il ragionamento *progressivo* si manifesta nella produzione delle dimostrazioni e nella verifica delle congetture. Attraverso la produzione di controesempi le prime due congetture si rivelano errate mentre soltanto la congettura 3 permette di spiegare tutte le configurazioni vincenti. La minuziosa indagine effettuata dagli studenti ha permesso loro di "maneggiare" con gli elementi del teorema, dandogli un significato e un senso. Grazie ad essa, Viola e Andrea hanno tutti gli elementi per enunciare e dimostrare formalmente il teorema. Si tratta solo di riprendere gli elementi osservati in fase di indagine e sistemarli in corrette catene deduttive. Dopo aver riconosciuto la correttezza della congettura 3, infatti, Viola e Andrea producono l'enunciato «Se una diagonale del quadrilatero

$EFGH$ inscritto al rettangolo $ABCD$ è parallela ad un lato del rettangolo allora l'area di $EFGH$ è la metà dell'area di $ABCD$», corredandolo di una dimostrazione scritta senza difficoltà.
Dall'analisi di questa attività appare dunque plausibile che il processo della logica dell'indagine supporti efficacemente la continuità cognitiva (Garuti, Boero, Lemut & Mariotti, 1996) tra fase di esplorazione e fase di dimostrazione.
È importante osservare che con questo tipo di attività gli studenti hanno usato GeoGebra lavorando sia sul piano empirico che sul piano teorico nel momento in cui formulano argomentazioni e dimostrano quanto osservato empiricamente. L'ambiente di geometria dinamica con all'interno le dinamiche del gioco semantico alla Hintikka sembra quindi supportare gli studenti nel passaggio al piano teorico, che tante volte rischia di restare appiattito dall'evidenza empirica.

Bibliografia

Arsac, G. (1999). Variations et variables de la démostration géométriques. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 19*(3), 357–390.

Antonini, S., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Il trascinamento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 38* A-B.3, 257-278.

Barbero, M., & Gómez-Chacón, I.M. (2018). Analysing regressive reasoning at university level. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N. M. Hogstad (Eds.), *Proceeding of INDRUM 2018* (pp. 204–213), University of Agder: Kristiansand, Norway.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MIUR. (2007) *Decreto ministeriale n. 139, 22 agosto 2007.* Roma: Ministero Istruzione Università e Ricerca. Disponibile in https://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/dm139_07.shtml (consultato il 19.09.2019).

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139–162.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., & Mariotti, M.A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 113–120), Valencia, Spain: PME.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 103–117), Hiroshima, Japan: PME.

Hintikka, J. (1998). *The principles of mathematics revisited*. Cambridge University Press.

Hintikka, J. (1999). *Inquiry as inquiry: a logic of scientific discovery.* Springer Science & Business Media.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. In W.C. Yang (Ed.), *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics* (pp. 22-35), Korea: National University of Education.

Peirce, C. S. (1960). *Collected papers*. In C. Hartshorne & P. Weiss (Eds.), Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

Soldano, C., & Sabena, C. (2019). Semiotic potential of inquiring-game activities. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien & P. Vale (Eds.), *Proceedings of 43th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 319–327), Pretoria, South Africa: PME.

Autori/Carlotta Soldano* e Gaetano Di Caprio°
*Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino
°Istituto di Istruzione Superiore "Erasmo da Rotterdam", Nichelino (Torino)
carlotta.soldano@unito.it; gaetano.dicaprio@istruzione.it

Esperienze didattiche

DdM

ESPERIENZA DIDATTICA

Sviluppare e valutare competenze argomentative in matematica: un percorso per la scuola elementare

Developing and assessing argumentative competences in mathematics: an educational path for primary school

Anna Maria Brunero* e Monica Panero°
*Istituto Faà di Bruno – Torino, Italia
°Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI – Locarno, Svizzera

Sunto / Le competenze argomentative stanno assumendo oggigiorno un ruolo sempre più cruciale in ambito educativo all'interno di una società in continuo mutamento, che richiede al singolo capacità critiche e comunicative sempre più sviluppate. Come è possibile far evolvere e valutare competenze così strutturate alla scuola elementare? Questo lavoro descrive un percorso sviluppato con una classe quinta di scuola elementare quasi completamente estranea alla pratica di argomentare per iscritto in matematica. Un aspetto centrale della metodologia implementata risiede nel fatto che i criteri validi per produrre e valutare un'argomentazione sono costruiti con gli allievi, in una serie di lezioni incentrate sul feedback, sulla valutazione tra pari e sull'autovalutazione.
In particolare, abbiamo sperimentato le potenzialità di un uso formativo di quesiti INVALSI, nati per una valutazione esterna, di sistema, qui reinterpretati come un'occasione per discutere e argomentare in classe, tracciando un possibile percorso per lo sviluppo delle competenze argomentative in matematica.

Parole chiave: argomentazione; feedback; prove INVALSI; criteri di valutazione; abilità metacognitive.

Abstract / Argumentative competences are nowadays assuming an increasingly crucial role in education within a society in continuous change, which requires the individual to develop increasingly critical and communicative skills. How is it possible to make evolve and to evaluate such structured competences in primary school? This paper presents an educational path developed with a fifth-grade class which was almost completely unrelated to the practice of arguing in writing in mathematics. A central aspect of the implemented methodology lies in the fact that the valid criteria for producing and evaluating an argument are constructed with the students, through a series of lessons focused on feedback, peer evaluation and self-assessment. In particular, we have tested the potentialities of a formative use of INVALSI items, born for an external assessment, reinterpreted here as an opportunity to discuss and argue in the classroom, describing a possible way for the development of argumentative competences in mathematics.

Keywords: argumentation; feedback; INVALSI test; evaluation criteria; metacognitive skills.

1 Introduzione

Nell'era delle cosiddette "Four Cs 21st century skills" (*Critical thinking, Creativity, Collaboration, Communication:* National Education Association, 2015), l'argomentazione sta assumendo un ruolo sempre più importante tra le competenze fondamentali nella formazione di uno studente affinché sviluppi capacità critiche e comunicative, vitali per riuscire nella scuola e nel mondo del lavoro. Nonostante sia messa chiaramente in luce nei principali riferimenti istituzionali, questa esigenza formativa non è ancora del tutto entrata a far parte delle pratiche d'aula più usuali. L'argomentazione in matematica, in particolare in forma scritta, rimane una pratica ancora poco diffusa alla scuola elementare in quanto può sembrare difficile da sviluppare e soprattutto da valutare. Diventa quindi essenziale sviluppare metodologie didattiche che consentano di lavorare sulla verbalizzazione, sulla spiegazione e sull'argomentazione con gli allievi fin dalla scuola dell'infanzia. Questo articolo si propone proprio di presentare, analizzare criticamente e disseminare un'esperienza realizzata con alunni frequentanti la classe quinta elementare che avevano lavorato poco, se non per nulla, sull'argomentazione in matematica, soprattutto in forma scritta.

1.1 Le competenze argomentative nei riferimenti istituzionali

Nei quadri di riferimento delle indagini a livello internazionale e nei diversi programmi scolastici nazionali che ne sono influenzati, lo sviluppo di competenze argomentative appare come un obiettivo di apprendimento trasversale e transdisciplinare da perseguire fin dai primi anni di scuola. Per quanto riguarda la matematica, il framework PISA (OECD, 2017) include le azioni di «riflettere su argomentazioni matematiche e spiegare e giustificare risultati matematici» (OECD, 2017, p. 69) nel modello della *literacy* matematica come parte del processo di utilizzare concetti matematici, fatti, procedure e ragionamenti. Anche il framework di matematica del TIMSS 2019 (Lindquist, Philpot, Mullis & Cotter, 2017) include, nel dominio cognitivo del ragionamento, il processo di giustificazione inteso come «fornire argomentazioni matematiche per supportare una strategia o soluzione» (Lindquist et al., 2017, p. 24).
In accordo con queste linee guida, in Italia – Paese nel quale è stata svolta l'esperienza didattica riportata in questo articolo – le Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012) sottolineano che la matematica «contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri». Tra i traguardi che l'allievo deve raggiungere per uno sviluppo delle competenze al termine della scuola elementare (sezione Matematica, MIUR, 2012) in Italia, si legge:

- «Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria».
- «Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri»[1]. 1

Tuttavia, argomentare non è solamente una competenza da sviluppare ma può rappresentare anche, come afferma Morselli (2014), il fondamento di un efficiente metodo didattico focalizzato sulla costruzione di significati matematici. Per fare ciò, l'insegnante deve essere capace di cogliere e sfruttare le occasioni per discutere con i propri allievi di *come* e *perché* una certa strategia matematica funzioni e al contempo di analizzare, spesso a caldo nell'immediato, le spiegazioni date dagli studenti, cercando di far emergere gli impliciti. Come si può dedurre dai traguardi per lo sviluppo delle competenze sopra riportati, un contesto fertile in cui l'insegnante può creare opportunità per argomentare è individuato nelle attività di risoluzione di problemi. L'argomentazione infatti è strettamente interconnessa con il problem solving (Di Martino, 2017): per avere accesso al ragionamento risolutivo seguito

1. Anche nel Piano di Studio per la scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015) si possono individuare dei traguardi di competenza molto simili, relativi alla risoluzione di problemi e alla costruzione di ragionamenti, nonché l'intero processo cognitivo *Comunicare e argomentare*.

da un allievo abbiamo bisogno di informazioni sulle strategie e sui processi che ha attivato (ossia abbiamo bisogno che l'allievo ci spieghi come ha ragionato) e sulle giustificazioni delle scelte fatte (ossia abbiamo bisogno che l'allievo ci spieghi perché ha ragionato in quel modo).
Questa stretta connessione fra le competenze di problem solving e di argomentazione è anche sostenuta nel quadro di riferimento delle prove standardizzate a livello nazionale italiano, somministrate dall'istituto INVALSI. Nel framework di matematica (INVALSI, 2017) si individuano tre dimensioni valutative (conoscere, risolvere problemi e argomentare) e si definiscono come strumentali sia le competenze di problem solving sia quelle argomentative, perché entrambe necessarie allo svolgimento di compiti più ampi e complessi.
Proprio la valutazione della dimensione dell'argomentazione viene presentata all'interno del quadro di riferimento delle prove di matematica come uno dei limiti della rilevazione standardizzata a livello nazionale, dal momento che essa viene valutata secondo la scelta dell'affermazione corretta e l'individuazione della sua giustificazione tra quelle proposte, tralasciando la valutazione della capacità di produrre e poi giustificare un'affermazione a partire da una data situazione (INVALSI, 2017).

2 Quadro teorico

In questo paragrafo presenteremo e articoleremo gli elementi teorici che hanno guidato le nostre scelte metodologiche.

2.1 Spiegazione, giustificazione e argomentazione in matematica

Nel paragrafo precedente, abbiamo utilizzato più volte i termini "argomentazione", "spiegazione" e "giustificazione". Nel linguaggio comune questi termini sono spesso utilizzati come sinonimi, ma nel nostro caso non lo sono. È opportuno chiarire il significato con cui verranno impiegati in questo articolo, basandoci sulle distinzioni che si possono ritrovare in letteratura.
Alcuni ricercatori (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992; Yackel, 2001) propongono una distinzione tra spiegazione e giustificazione, a seconda delle diverse funzioni che esse svolgono. Si fornisce una *spiegazione* per chiarire aspetti del proprio ragionamento matematico che potrebbero non risultare evidenti agli altri. In casi specifici, tale spiegazione svolge la funzione di *giustificazione* se è fornita per reagire alle contestazioni di apparenti violazioni dell'attività normativa matematica. Una giustificazione matematica è quindi un caso particolare di spiegazione matematica che fa riferimento più direttamente a proprietà matematiche o criteri condivisi.
In uno studio esplorativo sulle spiegazioni fornite durante l'attività di risoluzione di problemi da parte di allievi dai 3 agli 8 anni, Levenson e Barkai (2013) hanno identificato diverse tipologie di funzioni di una spiegazione, tra cui appunto quella giustificativa. Nel complesso le funzioni identificate sono quattro, qui rinominate *descrittiva*, *giustificativo-procedurale*, *giustificativo-concettuale* ed *esplorativo-generalizzante*.

1. Funzione *descrittiva:* la spiegazione serve per descrivere il processo di pensiero del solutore o il modo in cui ha risolto il problema; risponde alla domanda: «Come hai risolto il problema?».

2. Funzione *giustificativo-procedurale:* la spiegazione serve per giustificare la ragionevolezza e la plausibilità di una strategia o soluzione; risponde alla domanda: «Perché hai risolto il problema in questo modo?».
3. Funzione *giustificativo-concettuale:* la spiegazione giustifica la strategia utilizzata sulla base di proprietà e generalizzazioni matematiche; risponde ancora alla domanda: «Perché hai risolto il problema in questo modo?» ma facendo riferimento a dei fondamenti teorici.
4. Funzione *esplorativo-generalizzante:* la spiegazione è un passo verso nuove esplorazioni che conducono a generalizzazioni della strategia; più che rispondere a una domanda esterna, è un momento in cui il solutore si pone delle domande: passa dal *risolvere* al *porsi* problemi.

Le spiegazioni che svolgono la prima funzione, come sostengono Yackel (2001) e Krummheuer (2000), possono avere un format narrativo dal momento che sono strettamente connesse con il processo comunicativo di *spiegare come* si è proceduto, passaggio per passaggio, per risolvere il problema. Le spiegazioni che ricoprono la seconda o la terza funzione, ossia le giustificazioni, hanno come obiettivo *spiegare perché* ossia chiarire la razionalità di un'azione (Krummheuer, 2000) fondandosi o meno su proprietà matematiche. Le spiegazioni che ricoprono l'ultima funzione, infine, possono generare famiglie di situazioni problematiche a cui appartiene il problema risolto e innescare ulteriori esplorazioni in cui queste famiglie diventano nuovi oggetti di ragionamento (Nunokawa, 2010) e possono perciò costituire il primo passo verso una dimostrazione matematica.
Esposte le diverse possibili funzioni di una spiegazione matematica, ed evidenziate quelle che in particolare la rendono una giustificazione, passiamo a considerare il suo ruolo in un'argomentazione matematica. Consideriamo la spiegazione come elemento costitutivo di un'argomentazione: quest'ultima quindi, dei tre termini che stiamo discutendo in questo paragrafo, assume un'accezione più ampia. A sostegno di questa affermazione, ci riferiamo al modello di Toulmin (1975) secondo cui un'argomentazione è un discorso che a partire da certi *dati* (*data*) porta a delle *conclusioni* (*claim*). A fare da ponte tra i dati e le conclusioni è la *garanzia* (*warrant*), ossia una serie di concatenazioni logiche dalle quali, partendo dai dati, derivano le conclusioni. Tale garanzia, a sua volta, è supportata da un *fondamento* (*backing*). Siamo consapevoli che per utilizzare tale modello come lente in campo educativo, esso deve essere adattato o integrato. In origine, infatti, tale modello si fonda sull'idea che la logica funzioni come la giurisprudenza (Toulmin, 1975), quindi come un processo in tribunale in cui l'avvocato deve difendere la propria tesi costruendo argomentazioni a favore, in modo predeterminato e statico. Diversi ricercatori in didattica della matematica hanno utilizzato questa lente teorica con successo nelle loro analisi, arricchendola e integrandola con altri quadri propri della ricerca in educazione (e.g., Arzarello & Sabena, 2011; Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp & Tanguay, 2011). Inoltre, come vedremo nel prossimo paragrafo, altri ricercatori come i già citati Krummheuer, Yackel e Cobb, hanno ampliato il modello di Toulmin, adattandolo al contesto educativo della classe in cui le argomentazioni vengono costruite e negoziate tra gli allievi e possono variare in itinere in modo dinamico.
In questo articolo, a seconda della sua funzione, identificheremo la garanzia come spiegazione o come giustificazione. A guidare il nostro lavoro vi è l'ipotesi che le quattro funzioni delle spiegazioni matematiche, presentate da Levenson e Barkai (2013) in ordine crescente di consapevolezza circa la risoluzione di un problema, possano suggerire un possibile percorso evolutivo da promuovere per far sviluppare le competenze argomentative degli alunni.

2.2 Dimensione sociale dell'argomentazione e norme socio-matematiche

Lo studente, se viene costantemente stimolato a spiegare il proprio procedimento e le ragioni delle proprie scelte, ha l'opportunità di verbalizzare il proprio ragionamento e di beneficiare di questa attività individuale che lo aiuta a chiarire ed organizzare il proprio pensiero. Inoltre, una volta pronunciata, un'argomentazione non è più un prodotto interno, ma è socializzato e funge da atto comunicativo. Tenendo conto delle dinamiche di classe, Krummheuer (1995) osserva che un'argomentazione può anche essere costituita interattivamente da diversi partecipanti, composta da diverse proposizioni situate, non predeterminate ma negoziate dai partecipanti mentre interagiscono. Analogamente, ciò che conta come spiegazione accettabile in matematica può essere interattivamente costituito come una "norma socio-matematica" (Yackel & Cobb, 1996) che viene elaborata dal gruppo classe come base condivisa per la comunicazione attraverso discussioni collettive guidate dall'insegnante. Per assicurare una buona comunicazione con l'insegnante e con i pari, lo studente deve essere guidato a formulare le proprie argomentazioni in modo *corretto, chiaro e completo* (nel seguito, ci riferiremo a questi tre criteri come "le 3C"). Un discorso argomentativo è:

– corretto, quando non ci sono errori di tipo matematico nella conclusione o nella spiegazione data;
– chiaro, se è comprensibile per un interlocutore (insegnante o compagni);
– completo, se tutti i passaggi del ragionamento che conduce dai dati alla conclusione sono esplicitati (Cusi, Morselli & Sabena, 2017).

Altri progetti, tra cui ad esempio il progetto Avimes-Piemonte (De Luca, Demartini, Migliano, Savioli, Serratore & Vio, 2008), a cui ci siamo ispirate per la nostra esperienza didattica, hanno lavorato esplicitamente con gli allievi di scuola elementare per identificare e condividere dei criteri espliciti per valutare argomentazioni matematiche. Affinché questi criteri siano interiorizzati dagli alunni e possano sostenere l'evoluzione delle loro spiegazioni, infatti, è importante che siano proprio gli studenti a individuarli, discuterli e costruirli interattivamente con l'insegnante, facendoli diventare così una norma socio-matematica della classe. È esattamente quello che ci siamo proposte di fare in questa esperienza didattica, mettendo in campo strategie tipiche della valutazione formativa, con l'obiettivo di fornire agli allievi degli strumenti per poter valutare il proprio lavoro e quello dei pari e per poter avanzare nella propria comprensione.

3 Metodologia

La metodologia e gli esempi che discuteremo in questo articolo si contestualizzano in un progetto più ampio che abbiamo condotto nel corso dell'anno scolastico 2017/18 in undici classi quinte di tre scuole primarie[2] di Torino, in qualità di ricercatrici esterne, coinvolgendo circa 250 allievi e 11 insegnanti. L'obiettivo del progetto è stato quello di elaborare, sperimentare e analizzare possibili usi formativi di prove standardizzate, nello specifico le prove INVALSI di matematica, incentrando il lavoro

2

2. La scuola primaria italiana equivale alla scuola elementare nel Canton Ticino.

su un feedback continuo, pensato per essere comprensibile all'allievo e utile per permettergli di progredire nello sviluppo delle sue competenze argomentative.
Con questa ipotesi di lavoro, alcuni quesiti delle prove di quinta, somministrate dal 2009 ad oggi, sono stati selezionati e riadattati allo scopo di raccogliere argomentazioni prodotte dagli allievi. A tal fine, abbiamo progettato con gli insegnanti di classe ogni intervento in aula decidendo il tema e le modalità di lavoro (lavoro di gruppo, a coppie, discussione collettiva ecc.). Successivamente, abbiamo preparato i materiali e costruito una scheda individuale, con la quale raccogliere le argomentazioni scritte dei bambini. Tale scheda individuale era costituita da tre quesiti INVALSI relativi al tema della lezione, generalmente proposti a risposta aperta e sempre accompagnati dalla richiesta «Spiega come hai fatto/ragionato» o «Spiega perché la tua risposta è corretta». Nel caso in cui il quesito fosse a scelta multipla, abbiamo sempre aggiunto «Giustifica la tua scelta». La formulazione della domanda può influenzare la risposta data. Così una richiesta come «Spiega come hai fatto/ragionato» stimola in risposta una spiegazione con funzione principalmente descrittiva; al contrario, «Spiega perché la tua risposta è corretta» o «Giustifica la tua scelta» spinge verso spiegazioni di tipo giustificativo.
Tali richieste sono state aggiunte ai quesiti INVALSI originali, che per diverse ragioni (tra cui vincoli di tempo e necessità di una valutazione oggettiva, vedi **par. 1.1**) richiedono raramente una spiegazione della risposta fornita. Ciò non impedisce però all'insegnante di sfruttare questa possibilità in classe, anzi il docente è incoraggiato a utilizzare domande o problemi interessanti come risorsa per avere accesso al ragionamento e alle strategie messe in atto dagli studenti e stimolare la discussione in classe. In quest'ottica, sono state condotte diverse ricerche in Italia per indagare e promuovere un uso didattico delle prove. Si vedano, ad esempio, la «Ricerca didattica sull'uso delle prove INVALSI (area matematica) del primo ciclo del S.N.V. nella didattica in classe»[3] o il già citato progetto Avimes-Piemonte (De Luca et al., 2008). 3
Individuando nei quesiti un'occasione per lavorare sull'argomentazione, ci siamo focalizzate sia sul prodotto (analizzando la risposta) che sul processo (analizzando la spiegazione). In parallelo con il modello di Toulmin, la risposta è la conclusione, mentre la spiegazione è la garanzia che permette allo studente di giungere a quella conclusione partendo dai dati forniti (testo e dati del problema, contesto, relazioni tra i dati, …). I feedback forniti agli allievi relativamente alle argomentazioni da loro prodotte si sono evoluti da una lezione alla successiva con una crescente attenzione al processo risolutivo, al ragionamento e all'autoregolamentazione, in linea con le implicazioni didattiche riportate nello studio di Hattie e Timperley (2007): l'efficacia con cui un feedback può avvicinare l'allievo agli obiettivi di apprendimento dipende in parte dal livello a cui esso viene dato (sul compito, ossia sul prodotto; sullo svolgimento del compito, ossia sul processo; per favorire l'autoregolamentazione nell'allievo; sull'individuo in quanto persona, relativo ad aspetti affettivi).
Durante l'anno scolastico 2017/18, abbiamo incontrato gli allievi il più regolarmente possibile, circa una volta ogni sei settimane. Ciascuna lezione in classe durava in media due ore e trenta minuti ed era strutturata nel seguente modo (si veda la **Figura 1**):

1. Fase del feedback: si iniziava con un feedback sulla lezione precedente che, a partire dalle argomentazioni scritte dagli allievi nelle schede individuali di

3. Maggiori informazioni al seguente link: https://www.dm.unipi.it/webnew/it/ricerca/ricerca-didattica-sulluso-delle-prove-invalsi-area-matematica-del-primo-ciclo-del-snv-nella-didattica-in-classe

fine lezione, prevedeva un lavoro a coppie o di gruppo seguito da una discussione collettiva, come preciseremo nel prossimo paragrafo;

2. Fase dell'attività: seguiva un'attività laboratoriale sul tema matematico scelto con l'insegnante, spaziando su tutti i nuclei disciplinari in base alle conoscenze in corso di apprendimento;
3. Fase di produzione individuale: si chiudeva distribuendo la scheda individuale relativa al tema della lezione.

Al termine di ogni lezione, le schede individuali degli studenti venivano raccolte e analizzate con l'insegnante di classe al fine di utilizzare le spiegazioni stesse dei bambini come base per organizzare e condurre la fase del feedback della lezione successiva.

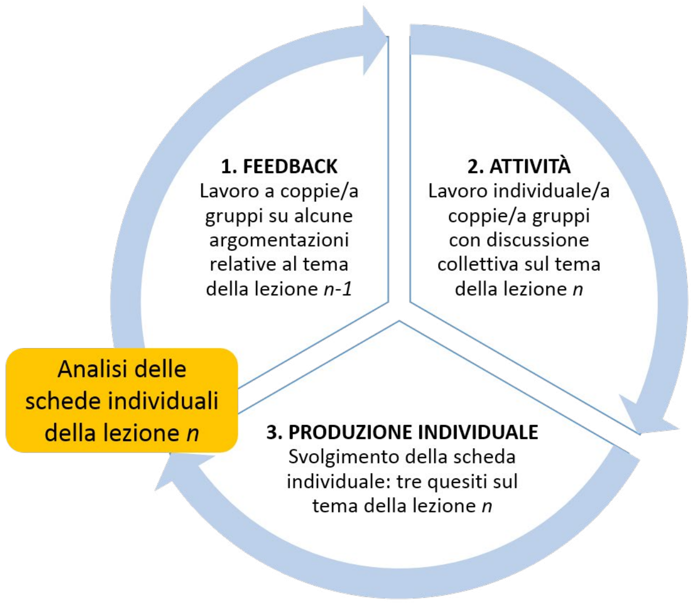


Figura 1
Struttura di ogni lezione.

4 Descrizione delle lezioni

In questo paragrafo entreremo nel dettaglio delle varie lezioni svolte in una delle classi coinvolte nel progetto, riportando in particolare alcuni esempi di protocolli, estratti di discussione e reazioni degli studenti, legati principalmente alla fase del feedback. Prima di avviare il percorso, abbiamo analizzato con l'insegnante di classe i risultati dei suoi allievi ottenuti tre anni prima nella prova INVALSI di seconda elementare, in modo da individuare domande che allora erano risultate critiche per la maggior parte degli alunni: domande D2, D3, D5, D7, D9, D18 della prova L02 del 2015. Abbiamo quindi creato un breve test preliminare composto dai 6 quesiti individuati, resi a risposta aperta con richiesta di spiegazione (**Allegato 0**), e l'abbiamo riproposto agli allievi nel mese di ottobre 2017.

4.1 Prima lezione: novembre 2017

La prima lezione è stata dedicata all'ambito geometrico, in particolare al concetto di perimetro dei triangoli, tema che la classe stava ripassando in quel momento.

4.1.1 Fase del feedback – «Questa cosa di spiegare in matematica è una cosa nuova!»

La prima lezione si è aperta con un feedback sul test preliminare relativo non solo alle risposte fornite, ma soprattutto alle spiegazioni scritte. Per affrontare questa analisi con gli alunni si è scelto di creare dei grafici, uno individuale per ciascun allievo e uno comune della classe, costituiti da due colonne suddivise in 6 caselle, ognuna relativa a una domanda del test: una colonna rossa riguardante la correttezza delle risposte e l'altra blu relativa alla validità della spiegazione (**Figura 2**).

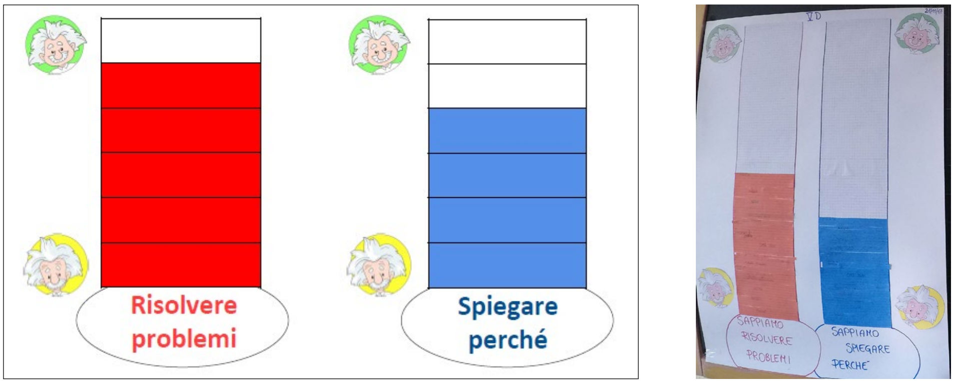


Figura 2
Un esempio di grafico individuale (a sinistra) e collettivo (a destra).

Utilizzando i termini del modello di Toulmin (1975), la colonna rossa del grafico si riferisce alla *conclusione*, mentre la colonna blu si riferisce alla *garanzia* che tale conclusione deriva dai *dati* forniti dal problema, integrati con opportune riflessioni e inferenze. I grafici utilizzati con i bambini hanno consentito di approcciare la valutazione di un'argomentazione matematica, nel caso di attività di risoluzione di problemi, nella sua interezza, ossia considerando nell'insieme tutte le componenti: dati, conclusioni e garanzia. La scelta di proporre la valutazione per mezzo di un grafico si fonda su uno strumento utilizzato nel progetto FaSMEd[4] (Panero, 2017) risultato particolarmente 4
significativo, perché ha permesso fin da subito di chiarire e condividere con gli allievi gli obiettivi del lavoro e rendere il singolo responsabile del proprio apprendimento.
La fase del feedback si è svolta in modalità interattiva, con un'analisi dapprima individuale del grafico ricevuto. Come è possibile notare in **Figura 2**, oltre al grafico relativo al proprio andamento nel test preliminare, ogni alunno ha ricevuto i punti ottenuti (caselline colorate di rosso e di blu) da incollare all'interno del grafico della classe. Con la costruzione di un grafico collettivo abbiamo voluto coinvolgere tutti gli allievi nell'obiettivo di "far crescere le colonne della classe", soprattutto quella blu, sottolineando, con l'atto fisico dell'incollare anche un solo punto, che ciascuno di loro avrebbe potuto dare un contributo importante nel raggiungimento di questo obiettivo.
Durante questa prima lezione, il feedback si è principalmente focalizzato sugli aspetti affettivi e relativi alla visione che gli allievi avevano della matematica. Questa scelta è stata dettata dal fatto che gli alunni fossero perlopiù abituati ad argomentare solamente in forma orale e con modalità poco strutturate: per la maggior parte di loro

4. *Formative Assessment in Science and Mathematics Education:* https://microsites.ncl.ac.uk/fasmedtoolkit/

l'attività di argomentare per iscritto non era affatto familiare. La messa in evidenza delle due dimensioni (saper risolvere il problema e saper spiegare come/perché si risolve così) è risultata funzionale per esplicitare con gli alunni che tra di esse esiste un forte legame: è tanto importante saper risolvere un problema quanto saper spiegare ciò che si è fatto e perché si fa così.
Mentre il grafico della classe veniva costruito alla lavagna incollando i punti ottenuti dai singoli allievi, abbiamo condotto una discussione in plenaria, rilanciando le osservazioni degli allievi e proponendo continue domande stimolo, come per esempio «Quale colonna sarà più alta?», «Perché pensate che sarà più bassa quella blu?», «Sono collegate le due colonne?». Tali domande sono risultate efficaci per un'analisi del grafico, che si è poi focalizzata principalmente sulla colonna blu intitolata "Spiegare perché", che comportava un'abilità meno sviluppata per gli allievi.
Le capacità di autovalutazione rispetto ai propri limiti, risorse, possibilità e modalità di pensiero, relative alla capacità di utilizzare le informazioni apprese, ovvero imparare ad imparare (Commissione europea, 2007), sono emerse fin da subito con commenti come «Forse siamo stati più bravi a fare i problemi e non questa cosa di spiegare, perché è una cosa nuova e forse siamo meno esperti», «Il grafico si riempirà più di rosso che di blu». Questo strumento ha permesso, da un lato, di chiarire e condividere con i bambini tramite un linguaggio semplice e visivo gli obiettivi del nostro lavoro, dall'altro, di far emergere bisogni individuali e della classe rispetto a quegli obiettivi. Fin dall'inizio dell'esperienza, poi sempre di più lezione dopo lezione, gli allievi sono diventati consapevoli del fatto che spiegare per iscritto il proprio ragionamento o la propria motivazione di una scelta in matematica potesse risultare più difficile per loro rispetto a risolvere il problema, ma che fosse altrettanto importante e utile. Una delle domande stimolo che abbiamo posto di frequente è stata «A qualcuno è capitato, mentre scriveva la propria spiegazione, di avere un'idea su come risolvere il problema o di capire che il proprio ragionamento fosse sbagliato o incompleto?».
Questo tipo di feedback grafico, sia individuale che collettivo, è stato quindi mantenuto all'inizio di tutte le lezioni poiché fornisce un'immagine istantanea dell'andamento del singolo e della classe, commentabile e comprensibile agli allievi, senza alcun tipo di traduzione in voto o giudizio con finalità sommativa. Ci è capitato anche che alcuni alunni, talvolta, pur scrivendo molto, non siano riusciti ad ottenere neanche un punto in nessuna delle due dimensioni: questa eventualità non era stata considerata a priori e ha determinato una regolazione dell'uso dello strumento del grafico in itinere. Si è scelto, in questi casi, di non consegnare all'alunno il grafico bianco, in quanto sarebbe stato solo fonte di ansia, ma di dedicare un momento individuale parallelamente alla costruzione collettiva del grafico da parte dei compagni per ripercorrere la scheda con l'alunno in questione e chiarire, almeno oralmente, le sue spiegazioni. Sono stati gli alunni stessi a proporre, durante l'intervista, una correzione di alcune risposte o spiegazioni che avevano scritto, potendo così colorare i punti ottenuti sul loro grafico individuale e contribuire a quello collettivo, una volta rientrati in classe.

4.1.2 Fase dell'attività e di produzione individuale

Una volta conclusa la fase del feedback, abbiamo proposto un'attività intitolata "Cannucce e triangoli", ispirandoci al progetto m@t.abel. Abbiamo chiesto agli alunni, divisi in gruppi, di costruire dei triangoli piegando in due punti cannucce di lunghezza prestabilita (18 cm) per arrivare a mettere a fuoco le proprietà del triangolo, in particolare la disuguaglianza triangolare che lega le lunghezze dei tre lati.

Affinché i bambini potessero dedurre questa proprietà a partire da un buon numero di diversi casi possibili, abbiamo distribuito cannucce graduate (con tacche poste a distanza di 1 cm l'una dall'altra) e un sacchetto contenente bigliettini numerati da 1 a 17. La consegna prevedeva di tirare a sorte la lunghezza dei primi due lati, garantendo così la casualità nella piegatura. Inoltre, ogni gruppo doveva annotare tutti i tentativi in una tabella: sia i casi riusciti sia quelli in cui non si formava un triangolo. Abbiamo riportato alla lavagna i risultati ottenuti dai vari gruppi, e attraverso la manipolazione del materiale e una discussione collettiva, i bambini sono arrivati a intuire che, nei casi in cui si forma il triangolo, la somma delle lunghezze di due lati è sempre maggiore della lunghezza del terzo lato.
Al termine della lezione, abbiamo distribuito la scheda individuale (**Allegato 1**), i cui quesiti sono un riadattamento degli item INVALSI: 1. D04 L05 2016[5], 2. D07 L06 5
2012, 3. D14 L05 2009.

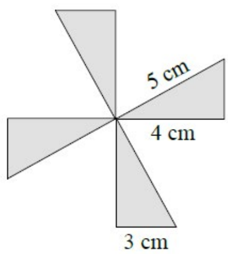
4.2 Seconda lezione: gennaio 2018

La seconda lezione è stata dedicata a far emergere le 3C come criteri per valutare un'argomentazione e a un'attività sulle proprietà delle operazioni e sulle espressioni.

4.2.1 Fase del feedback – «Non si capisce! Abbiamo dovuto rileggerla mille volte!»

Per preparare la discussione, abbiamo preventivamente selezionato un quesito tra i più critici dal punto di vista dell'argomentazione (**Figura 3**) e, relativamente al quesito scelto, abbiamo selezionato quattro argomentazioni fornite dai bambini (**Tabella 1**) in modo che non contenessero errori nella risposta (*conclusione*), ma che differissero tra loro nella spiegazione (*garanzia*). Come criteri per la selezione abbiamo utilizzato le 3C: una spiegazione era corretta, chiara e completa, mentre alle altre tre mancava almeno uno di questi tre criteri.

3) Mario ritaglia quattro triangoli uguali e costruisce la girandola che vedi nella figura.



Scrivi un'espressione per trovare il perimetro della girandola:

____

Spiega perché la tua espressione permette di risolvere il problema: ____________________

Figura 3
Terzo quesito della scheda individuale della prima lezione (**Allegato 1**).

5. Qui e in seguito, nel codice Dxx Lyy AAAA, xx indica il numero della domanda, yy indica il livello scolare e AAAA indica l'anno di somministrazione della prova INVALSI da cui è tratto il quesito selezionato.

Nello specifico, la spiegazione A [«Io ho fatto questa espressione perché dovevi trovare la somma dei lati (cioè il perimetro) e moltiplicarla per 4 cioè i quattro triangoli rettangoli»] è chiara, corretta e completa; la spiegazione B («Perché i triangoli sono quatro[6] e o fatto per 4») è parzialmente corretta, ma non è chiara né completa (che cosa ha moltiplicato per 4?); la spiegazione C («perché ho moltiplicato i lati uguali per la misura dei lati»), oltre a non essere coerente con ciò che l'allieva ha scritto nella risposta, non è né corretta, né chiara, né completa (non spiega da dove ha preso il fattore moltiplicativo 4, ad esempio); la spiegazione D («Perché la mia espressione dice che dobbiamo moltiplicare le misure date per quattro che sono i triangoli») è corretta e chiara, ma non completa (non spiega che i prodotti parziali vanno poi sommati tra loro). 6

A

Scrivi un'espressione per trovare il perimetro della girandola:

[(5+4+3)]x4=48

Spiega perché la tua espressione permette di risolvere il problema: IO HO FATTO QUESTA ESPRESSIONE PERCHÉ DOVEVI TROVARE LA SOMMA DEI LATI (CIOÈ IL PERIMETRO) E MOLTIPLICARLA PER 4 CIOÈ I QUATTRO TRIANGOLI RETTANGOLI

B[7] 7

Scrivi un'espressione per trovare il perimetro della girandola:

3+4+5x4=48

Spiega perché la tua espressione permette di risolvere il problema: PERCHÉ I TRIANGOLI SONO QUATRO E O FATTO PER 4.

C

Scrivi un'espressione per trovare il perimetro della girandola:

(5x4)+(4x4)+(3x4)=48

Spiega perché la tua espressione permette di risolvere il problema: Perché ho moltiplicato i lati uguali per la misura dei lati

D

Scrivi un'espressione per trovare il perimetro della girandola:

(5x4)+(4x4)+(3x4)=

Spiega perché la tua espressione permette di risolvere il problema: perché la mia espressione dice che dobbiamo moltiplicare le misure date per quattro che sono i triangoli

Tabella 1
Quattro spiegazioni selezionate per la discussione a coppie e di classe.

6. Gli errori di ortografia sono volutamente mantenuti nelle trascrizioni delle spiegazioni dei bambini.
7. Si noti che, in questa argomentazione, la conclusione non è corretta; mancano infatti le parentesi alla somma: (3+4+5). Gli allievi, durante la discussione, hanno subito suggerito di inserirle; poi ci siamo concentrati sulle quattro spiegazioni.

In classe, quindi, abbiamo consegnato una scheda contenente il problema scelto (Figura 3) e le quattro argomentazioni selezionate (Tabella 1); gli allievi hanno lavorato a coppie con la consegna di individuare "la migliore" tra tutte le spiegazioni, motivando la loro scelta. In questo modo, le produzioni di quattro allievi sono state messe a disposizione di tutti, adottando una delle strategie chiave di valutazione formativa: «attivare gli alunni come risorse educative gli uni per gli altri» (Black & Wiliam, 2009, p. 8). Nella discussione iniziale di queste prime lezioni volevamo che fossero gli alunni stessi a fornire un feedback per ogni argomentazione, individuando così le caratteristiche di una spiegazione che insegnante, allievi e compagni potessero ritenere valida in matematica. Il feedback proposto si è focalizzato al livello del ragionamento/procedimento seguito per risolvere il compito, con una maggiore attenzione ai processi (Hattie & Timperley, 2007). Nel complesso è stato possibile osservare nelle diverse classi una grande attenzione e precisione nel valutare le spiegazioni, con massima cura nei dettagli, più frequentemente di quanto previsto in fase di analisi a priori. Il fatto di esprimersi su una spiegazione fornita da un loro compagno e non da un adulto (o da un insegnante) ha creato nella classe un clima di tranquillità. La terminologia dei tre criteri di correttezza, chiarezza e completezza è stata introdotta a partire dai commenti degli alunni. Motivando la scelta di una spiegazione piuttosto che un'altra, i bambini hanno esclamato:

- «Si capisce bene» o «Si capisce al volo»;
- «È la più dettagliata», «Spiega di più nei particolari, dice l'operazione che ha fatto» o «Le altre sono andate subito al punto mentre questa invece è più specifica»;
- «È tutto giusto».

Al contrario, per escludere una spiegazione, nella loro ricerca della migliore, hanno affermato:

- «Abbiamo dovuto rileggerla mille volte!» o «Non si capisce»;
- «Non c'è l'operazione, l'ha fatta nella sua mente» o «Manca un pezzo»;
- «L'operazione è sbagliata» o «Ha scritto … ma voleva dire …».

Man mano che gli allievi formulavano questi "criteri" di scelta o di esclusione per una spiegazione, li abbiamo scritti alla lavagna mantenendo le parole dei bambini e raggruppandoli in tre categorie. Abbiamo poi chiesto ai bambini di esprimere con una sola parola o un solo aggettivo tutte le spiegazioni che presentavano le caratteristiche di una stessa categoria. Abbiamo introdotto così le 3C che sono state richiamate ogni qual volta fosse richiesta una spiegazione, sia durante lo svolgimento delle schede individuali al termine di ogni lezione sia nelle discussioni collettive, nell'arco dell'intero progetto.

4.2.2 Fase dell'attività e di produzione individuale

Anche per questa attività, abbiamo ripreso una proposta del progetto m@t.abel, intitolata "Il bersaglio". Gli alunni, divisi in piccoli gruppi, dovevano trovare il numero maggiore che si potesse ottenere come risultato di un'espressione, utilizzando alcuni numeri assegnati, da considerare tutti e una volta sola, e potendo scegliere tra le quattro operazioni, anche ripetendole. Il primo set di numeri assegnato era costituito da 2, 3, 5, 10. L'attività continuava con l'introduzione del numero 1, elemento neutro della moltiplicazione, in un primo momento, e del numero 0, elemento neutro dell'addizione e assorbente della moltiplicazione, in un secondo momento. Infine, si è resa più sfidante la situazione introducendo il numero decimale 0,5. Per mezzo

della discussione guidata dall'insegnante sono stati condivisi e analizzati i risultati, le espressioni utilizzate e le strategie seguite da ogni gruppo e si è ragionato sulla loro efficacia per ogni fase dell'attività, riprendendo nel complesso le proprietà delle quattro operazioni.
Al termine della lezione è stata distribuita la scheda individuale (**Allegato 2**) i cui quesiti sono ispirati ai tre item INVALSI: 1. D22 L06 2012, 2. D18 L05 2016, 3. D32 L05 2013.

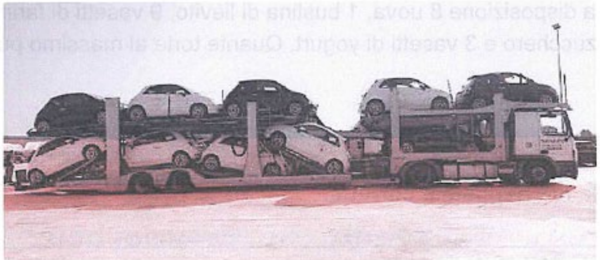
4.3 Terza lezione: marzo 2018

La terza lezione è stata dedicata alla riformulazione di alcune spiegazioni usando le 3C e a un'attività sul tema delle frazioni, in particolare sul confronto e sull'equivalenza fra frazioni.

4.3.1 Fase del feedback – «Manca quel pizzico in più»

Per questa fase abbiamo ripreso le modalità di lavoro, risultate funzionali durante la seconda lezione: grafico individuale e della classe, lavoro a coppie su quattro argomentazioni relative a un quesito (il secondo dell'**Allegato 2**), seguito da una discussione collettiva guidata dall'insegnante. La consegna data alle coppie all'inizio della lezione è stata di provare ad assegnare i punteggi sia alla risposta al quesito sia alla spiegazione data, come se stessero costruendo i grafici individuali degli allievi in questione. Per quanto riguarda la risposta, i bambini potevano assegnare 0 punti se era quella errata e 1 punto se era quella corretta. Invece, per quanto concerne la spiegazione, abbiamo portato i bambini a riflettere sul fatto che accade spesso che non siano presenti tutti e tre i criteri di correttezza, chiarezza e completezza, senza però che la spiegazione sia comunque da rigettare totalmente. La presenza simultanea, per esempio, del criterio della correttezza e della chiarezza non implica necessariamente quello della completezza, per cui può risultare all'atto valutativo che una risposta possa essere corretta matematicamente, chiara per l'interlocutore, ma non completa nei vari passaggi. Per la spiegazione, quindi i bambini potevano assegnare 1 punto se erano presenti tutti i criteri, mezzo punto se ne mancava uno, 0 punti se mancavano due o tutti e tre i criteri.
L'attenzione spostata interamente sul processo ha permesso agli alunni di rintracciare nelle varie spiegazioni la presenza o la mancanza dei tre criteri. Il feedback si è spinto verso il livello di autoregolamentazione, per incoraggiare gli allievi a porsi le domande necessarie per valutare la presenza o meno dei criteri individuati, rileggendo un'argomentazione come se fosse la propria e provando a dare un "peso" (attraverso il punteggio) alla mancanza di uno o più criteri.
L'assegnazione dei punti in questa fase è stata fondamentale per poter interiorizzare ulteriormente i criteri di valutazione adottati per l'analisi delle spiegazioni proposte dagli alunni per iscritto e far riflettere la classe sulla necessità di introdurre il mezzo punto. Gli allievi hanno avviato spontaneamente, in alcuni casi, un processo di rielaborazione e riformulazione della spiegazione: «Se avesse scritto … allora avrebbe preso un punto». Tale processo è stato incoraggiato e supportato nella discussione collettiva, in cui gli allievi hanno provato a completare, chiarire o correggere le spiegazioni selezionate, rendendo così operativi i criteri.
A questo proposito, risulta significativa la discussione sull'argomentazione riportata in **Figura 4** («Sono necessari 7 camion. Perché 10 macchine stanno in un camion altre 10 in un altro e fanno 2 camion e si va avanti così, però un camion dovrà trasportare solo 2 macchine»).

2) **Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.**



In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.
Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

Risposta: Sono necessari ..7.. camion.

Spiega perché la tua risposta è corretta: PERCHÉ 10 MACCHINE STANNO IN UN CAMION ALTRE 10 IN UN ALTRO E FANNO 2 CAMION E SI VA AVANTI COSÍ, PERÓ UN CAMION DOVRÁ TRASPORTARE SOLO 2 MACCHINE.

Figura 4
Una delle argomentazioni discusse in aula relativa al secondo quesito dell'**Allegato 2**.

Riportiamo qui di seguito un estratto della discussione (Ric. sta per "Ricercatrice").

1. Ric.: «Proviamo a dare i punti. Quanti punti ha preso questa spiegazione?».
2. G.: «Manca quel pizzico in più per arrivare a 0,5 [...] Potrebbero essere anche 70, 80, 90 macchine!».
3. S.: «Bastava, bastava mettere…».
4. Ric.: «Correggiamola, correggiamola! Bastava mettere?».
5. S.: «Bastava mettere i 6 ca… ehm… 6 per 10».
6. Ric.: «"E si va avanti così", poteva mettere tra parentesi 6 × 10».
7. I.: «No, io avrei messo "e si va avanti così per 6 volte"».
8. Ric.: «Eh! E poi ci scrivevi l'operazione, esatto».
9. M.: «Forse se avesse messo quello si poteva prendere uno 0,5 o addirittura un punto se lo faceva giusto, perché alla fine era corretta».

L'intervento di Giacomo[8] (intervento 1) fa emergere non solo la comprensione del criterio valutativo, e cioè il fatto che la spiegazione non sia completa e non possa ottenere un punto, ma anche che gli servirebbero degli strumenti per poter definire ciò che manca, ossia per lui quel «pizzico in più». L'attenzione ai dettagli nella valutazione è molto forte da parte degli alunni, che cercano di riformulare l'argomentazione utilizzando il loro vocabolario e il loro lessico [si vedano i tentativi di Samuele e di Igor (interventi 3, 5 e 7)] in modo che soddisfi tutti i criteri per ricevere un punto pieno, come osserva Mattia (intervento 9). 8

8. Per la tutela della privacy dei bambini coinvolti, i nomi sono stati cambiati.

4.3.2 Fase dell'attività e di produzione individuale

L'attività proposta durante la terza lezione era incentrata sul tema delle frazioni, richiamato attraverso la storia di cinque amici che decidono di partecipare a una gara di corsa. Allo scadere del tempo, nessuno di loro ha completato l'intero percorso. Ricevono comunque un attestato con su scritto la frazione di percorso completata: Marco ha percorso $\frac{1}{2}$ del percorso, Giada $\frac{1}{4}$, Valerio $\frac{8}{12}$, Giorgia $\frac{5}{6}$ e infine Luca $\frac{2}{3}$. Come si sono posizionati i cinque amici in classifica? Chi ha fatto più strada? Chi ne ha fatta di meno? Ogni allievo ha ricevuto la scheda relativa a un personaggio e ne ha rappresentato graficamente la parte di percorso completata su una striscia unitaria data (uguale per tutti), mobilitando così conoscenze matematiche relative alla frazione come parte-tutto e come operatore; per poter rispondere alle domande, però, ha dovuto cercare i compagni con gli altri quattro personaggi e operare un confronto dei percorsi lavorando in gruppo. Gradualmente, stimolati dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, gli alunni hanno richiamato il significato di frazione equivalente, confrontando in particolare i percorsi di Valerio e di Luca. Alla lavagna queste ed altre frazioni sono state posizionate, o meglio appese, sulla linea dei numeri, ispirandosi a un'attività del percorso "Frazioni sul filo" (Robotti, Censi, Segor & Peraillon, 2016).
Al termine dell'attività, abbiamo distribuito la scheda individuale (**Allegato 3**), i cui quesiti prendono spunto dai tre item INVALSI: 1. D30 L05 2016, 2. D19 L05 2014, 3. D11 L05 2016.

4.4 Quarta lezione: aprile 2018

Nell'ultima lezione abbiamo lavorato sull'autovalutazione e sulla valutazione tra pari, mentre l'attività proposta ha toccato il tema delle proprietà dei poligoni (triangoli e quadrilateri).

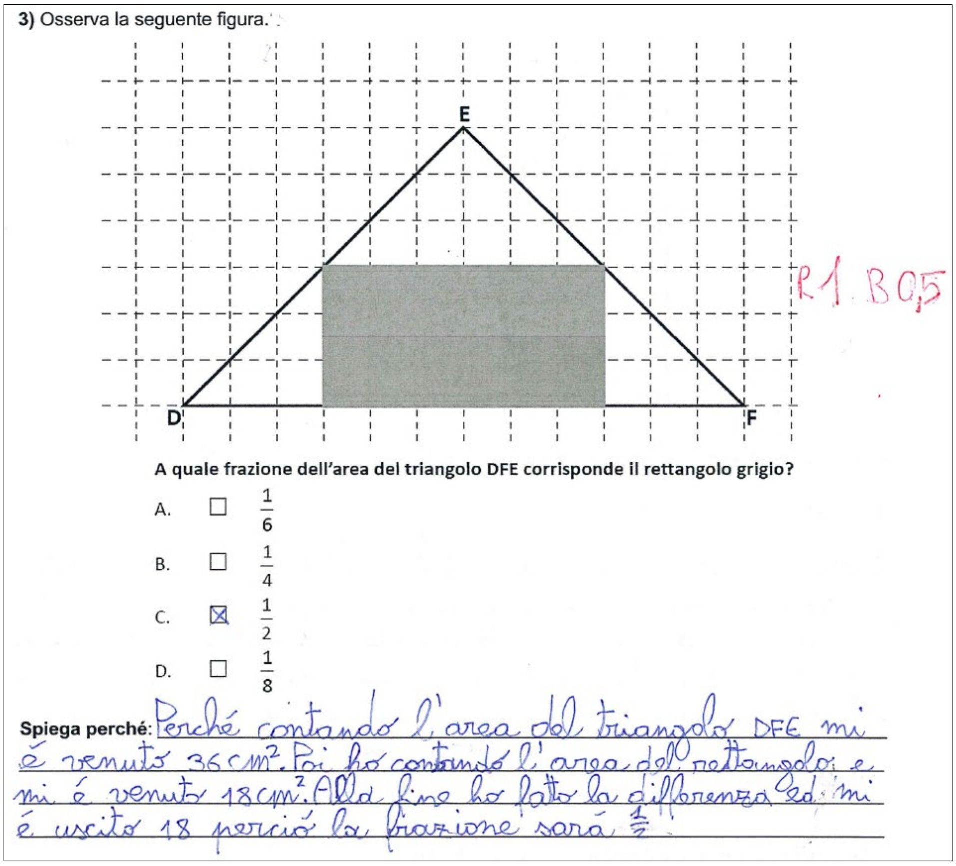
4.4.1 Fase del feedback – «Quale sarà quella giusta?»

Prima di consegnare i grafici individuali, abbiamo proposto che ogni alunno valutasse la propria scheda, avendo la possibilità di confrontarsi con i propri compagni a coppie o a gruppi di tre. Si è scelto di far confrontare allievi che avessero ottenuto globalmente punteggi simili, ma con risposte e spiegazioni anche molto differenti. Secondo Schwarz e Linchevski (2007), infatti, due allievi che hanno commesso errori simili difficilmente riusciranno ad autocorreggersi anche lavorando insieme, e allo stesso modo, un allievo che legge un metodo di risoluzione simile al suo, tendenzialmente parte dal presupposto che sia corretto.
I gruppi non erano quindi composti casualmente, bensì abbiamo fatto in modo di raggruppare allievi le cui schede fossero in un certo senso "complementari", come nell'esempio riportato in **Tabella 2**.

	Nostra valutazione della scheda individuale della terza lezione					
GRUPPO 1	**Quesito 1 risposta**	**Quesito 1 spiegazione**	**Quesito 2 risposta**	**Quesito 2 spiegazione**	**Quesito 3 risposta**	**Quesito 3 spiegazione**
Allievo A	1	1	1	0	0	0,5
Allievo B	0	0,5	0	1	1	1

Tabella 2
Un esempio di composizione dei gruppi di lavoro.

Sui tre quesiti della scheda individuale relativa alla lezione precedente (Allegato 3), l'allievo A ha risposto correttamente alle domande 1 e 2 e ha dato una spiegazione chiara, corretta e completa solo alla domanda 1; l'allievo B ha risposto correttamente alla domanda 3, ma ha dato una spiegazione valida alla domanda 2 (anche se la risposta è errata) e alla domanda 3. L'allievo A e l'allievo B hanno lavorato in coppia, confrontando le proprie schede, in modo che A potesse aiutare B nelle risposte 1 e 2 e nella spiegazione 1. D'altra parte, B avrebbe potuto aiutare A nella risposta 3 e nelle spiegazioni 2 e 3. Non sapendo quale spiegazione fosse "la migliore", ciascun allievo è stato invitato a rileggere criticamente la propria e a difenderla agli occhi del compagno. Insieme dovevano decidere se entrambe o solo una meritasse un punto, oppure se entrambe dovevano essere riviste alla luce dei criteri, proponendo delle aggiunte o delle riformulazioni (usando una penna di un altro colore sulla propria scheda). Questo lavoro può funzionare nella misura in cui gli alunni sono spinti a ripensare e a verbalizzare il proprio ragionamento per spiegarlo al compagno e a fornire argomenti matematici convincenti per sostenere la propria risposta: la presenza delle spiegazioni scritte è, a questo scopo, un supporto importante. Questa ultima fase del feedback ha combinato una valutazione tra pari con un'autovalutazione, proponendo tutte e quattro le tipologie di feedback suggerite da Hattie e Timperley (2007): sul prodotto, sul processo, a livello auto-regolamentativo e affettivo.
Il grafico individuale è stato consegnato solo al termine di questo lavoro di gruppo e gli allievi hanno potuto confrontarlo con i punteggi auto-assegnati. Il fatto di ricevere questa valutazione dell'insegnante solo in un secondo momento è stato vissuto da alcuni allievi con una lieve frustrazione. I gruppi più deboli sono stati aiutati dall'insegnante o dalle ricercatrici, ma gli altri gruppi hanno svolto il lavoro autonomamente, incontrando spesso il dubbio di quale fosse la spiegazione migliore tra due spiegazioni ugualmente corrette, chiare e complete, ma non identiche. Risulta interessante a questo proposito lo scambio avvenuto tra Marta ed Eva nella fase di auto-assegnazione dei punti alle spiegazioni da loro fornite al terzo quesito della scheda individuale (Figura 5 e Figura 6).



3) Osserva la seguente figura.

E

D F

R1 B0,5

A quale frazione dell'area del triangolo DFE corrisponde il rettangolo grigio?

A. ☐ $\frac{1}{6}$

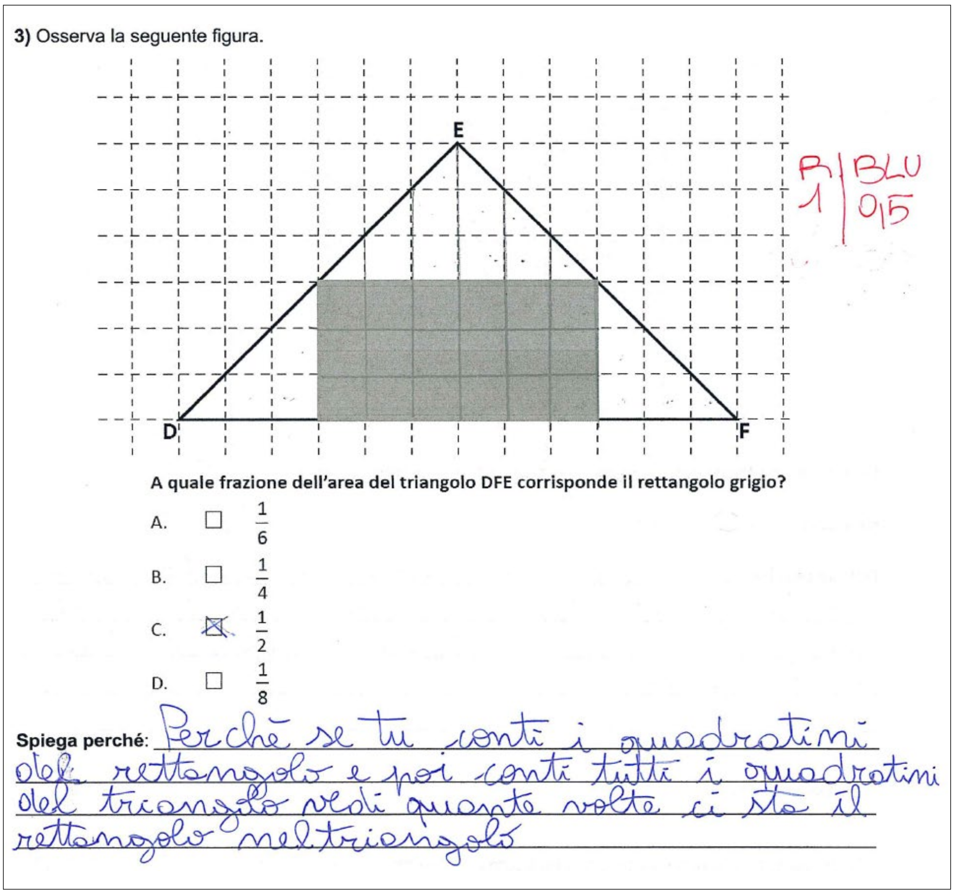
B. ☐ $\frac{1}{4}$

C. ☒ $\frac{1}{2}$

D. ☐ $\frac{1}{8}$

Spiega perché: Perché contando l'area del triangolo DFE mi é venuto 36 cm². Poi ho contando l'area del rettangolo e mi é venuto 18 cm². Alla fine ho fatto la differenza ed mi é uscito 18 perciò la frazione sarà $\frac{1}{2}$

Figura 5
Svolgimento del quesito 3 di Marta.



3) Osserva la seguente figura.

E

D F

R 1 | BLU 0,5

A quale frazione dell'area del triangolo DFE corrisponde il rettangolo grigio?

A. ☐ $\frac{1}{6}$

B. ☐ $\frac{1}{4}$

C. ☒ $\frac{1}{2}$

D. ☐ $\frac{1}{8}$

Spiega perché: Perchè se tu conti i quadrotini del rettangolo e poi conti tutti i quadrotini del triangolo vedi quanto volte ci sta il rettangolo nel triangolo

Figura 6
Svolgimento del quesito 3 di Eva.

Riportiamo qui di seguito un estratto della loro discussione.

1. M.: «Ok leggo io [legge la sua spiegazione, **Figura 5**]. Perché contando l'area del triangolo DFE mi è venuto 36 cm^2 poi contando l'area del rettangolo mi è venuto 18 cm^2 alla fine ho fatto la differenza e mi è uscito 18, perciò la frazione sarà $\frac{1}{2}$ ».
2. E.: «No io non ho fatto così! [legge la sua spiegazione, **Figura 6**] Perché se tu conti i quadratini del rettangolo e poi conti tutti i quadratini del triangolo vedi quante volte ci sta il triangolo nel rettangolo».
3. M.: «Quindi?».
4. E.: «Quale sarà?».
5. M.: «Maestra, ma qual è quella giusta?».
6. Ric.: «Provate a deciderlo voi».
7. M.: «Secondo me la tua no».
8. E.: «Ma no guarda: 1, 2, 3, 4… [conta i quadratini del rettangolo] 36. Poi 1, 2, 3, 4… [conta i quadratini del triangolo] ecco 18. Quindi ci starebbe due volte».
9. M.: «Perché se conti quanti quadrati ci sono nel rettangolo e poi tutti quelli del triangolo vedi quante volte ci sta il triangolo nel rettangolo… Mmm…».
10. E.: «Quindi la mia è la più giusta?».
11. M.: «Quanti punti ti daresti? 1 o 0,5?».
12. E.: «Io 0,5 a me. A te darei tipo 1».
13. M.: «No 0,5 anche a me. Maestra, ma qual è quella giusta? Noi abbiamo deciso, ma non siamo tanto sicure».

Le richieste degli interventi 4 e 13 segnalano il bisogno delle due alunne di un confronto con la valutazione dell'insegnante per poter decidere con certezza la validità delle loro spiegazioni, tra loro differenti perché legate a due diverse strategie di risoluzione del problema.
Nel momento di confronto con il feedback fornito dal grafico individuale, abbiamo discusso soprattutto dei casi in cui i punteggi auto-assegnati dagli alunni si discostavano molto da quelli proposti dal loro grafico individuale.

4.4.2 Fase dell'attività e di produzione individuale

L'attività progettata per questa lezione si è basata sulla creazione di una versione "geometrica" del gioco classico dell'indovina chi. Gli alunni, suddivisi a coppie, hanno ricevuto il disegno di alcune figure geometriche con la richiesta di creare per ciascuna un identikit. La descrizione, che prevedeva il ripasso delle caratteristiche principali di ciascuna figura geometrica, nonché delle formule dell'area e del perimetro, è stata scritta su una carta a parte, mentre i disegni delle varie figure sono state ritirati dall'insegnante. A questo punto l'insegnante ha scambiato gli identikit fra le coppie ed è seguita una fase di *matching*: ogni coppia doveva riconoscere la figura corrispondente all'identikit ricevuto, trovarla tra i disegni disponibili, e incollarla sul retro della descrizione, completando così la realizzazione della carta da gioco. Poteva quindi iniziare il gioco vero e proprio in cui gli alunni, questa volta in gruppo, avevano a disposizione tutte le carte su un banco, girate dalla parte della figura, potendo consultare la descrizione sul retro in caso di bisogno; l'insegnante proponeva degli indizi per poter identificare una determinata figura e il gruppo, indizio dopo indizio,

escludeva delle carte fino a trovare la figura in questione.
Al termine dell'attività, abbiamo distribuito la scheda individuale (**Allegato 4**), i cui quesiti sono una rivisitazione dei tre item INVALSI: 1. D04 L05 2016, 2. D16 L05 2012, 3. D6 L05 2015.

5 Discussione dei risultati

In questo paragrafo, categorizzeremo ed esemplificheremo le spiegazioni raccolte e analizzate in questa classe, in modo da riprendere le diverse funzioni di una spiegazione matematica proposte da Levenson e Barkai (2013). Mostreremo, inoltre, come l'uso formativo delle prove INVALSI qui proposto e le fasi del feedback implementate in questo percorso didattico abbiano permesso una graduale evoluzione delle argomentazioni scritte prodotte dagli allievi.

5.1 Evoluzione delle spiegazioni: uno sguardo al singolo

Durante la prima lezione, abbiamo raccolto parecchie spiegazioni non accettabili in matematica, ma è stato interessante analizzarne le tipologie, non essendo categorizzate in letteratura. Alcune le abbiamo classificate come *affettive* (ad esempio, «Io non sono sicuro infatti e l'ho fatto a caso»), altre come *deleghe formali* a un prototipo visto probabilmente sul libro di testo (ad esempio, «Perché l'ho già visto altre volte»), altre ancora come semplici *ripetizioni della domanda* (ad esempio, «Perché avevo trovato un'espressione»).
Come feedback per gli allievi che non sapevano bene da dove iniziare per scrivere una spiegazione matematica, abbiamo suggerito loro di provare a *descrivere come* si è risolto o si risolve il problema (la funzione *descrittiva*). Ci siamo quindi date come obiettivo quello di far sì che tutti gli alunni raggiungessero, nelle loro spiegazioni matematiche fornite per iscritto, almeno la funzione *giustificativo-procedurale*, che risponde alla domanda «Perché hai risolto così il problema?»; per gli allievi con una consapevolezza matematica maggiore, ci siamo prefissate che padroneggiassero anche quella *giustificativo-concettuale*, che risponde alla stessa domanda ma con espliciti riferimenti teorici. Nel perseguire questi obiettivi, è stato utile il lavoro sui criteri di chiarezza, completezza e correttezza. Nello specifico, per favorire l'evoluzione dalla funzione *descrittiva* a quella *giustificativo-procedurale*, cercavamo di innescare la domanda auto-regolamentativa «Perché ho fatto così?» al fine di completare e chiarire al meglio la spiegazione fornita; per favorire l'evoluzione dalla funzione *giustificativo-procedurale* a quella *giustificativo-concettuale*, tentavamo di far emergere la domanda auto-regolamentativa «Perché si può fare così in matematica?» al fine di completare ancora più nel dettaglio la spiegazione fornita, ponendo l'attenzione anche al linguaggio matematico utilizzato.
In questa classe abbiamo potuto identificare alcuni singoli casi di allievi le cui competenze argomentative sono migliorate molto rispetto all'inizio dell'esperienza. Presentiamo, di seguito, il caso di Alessandro e quello di Davide.

5.1.1 Il caso di Alessandro

Alessandro è un bambino molto timido e insicuro, con forti difficoltà in matematica, che nella prima lezione di novembre ha spiegato le proprie risposte sul piano affettivo («Io non sono sicuro infatti e l'ho fatto a caso») oppure ripetendo la domanda («Avevo trovato un'espressione»). Con Alessandro abbiamo lavorato anche individualmente, quando nessuna delle tre risposte da lui fornite aveva totalizzato punti per il grafico individuale e di classe. Il fatto di fornirgli feedback individuali e di seguirlo più nello specifico nei laboratori proposti ha sortito effetti positivi. Alessandro ha acquisito maggior sicurezza nelle spiegazioni scritte, provando dapprima a realizzarne alcune di tipo descrittivo, come quella in **Figura 7** («(2,50×4)+(4,20×3)=10+12,60=22,60. Perché ho moltiplicato per quattro il costo del girasole perché ci sono 4 girassoli poi ho moltiplicato per tre il costo delle rose perché ci sono 3 rose e gli ho addizionati»); poi producendo spiegazioni *giustificativo-procedurali* corrette, chiare e complete, come quella in **Figura 8** («Saverio. Perché ho diviso 1:4 che fa 0,25, 1:3 che fa 0,31 e 1:2 che 0,5 e quindi la somma minore è $\frac{1}{4}$ »); infine cimentandosi con spiegazioni *giustificativo-concettuali*, come quella in **Figura 9** («Perché sotto ha un angolo retto»).

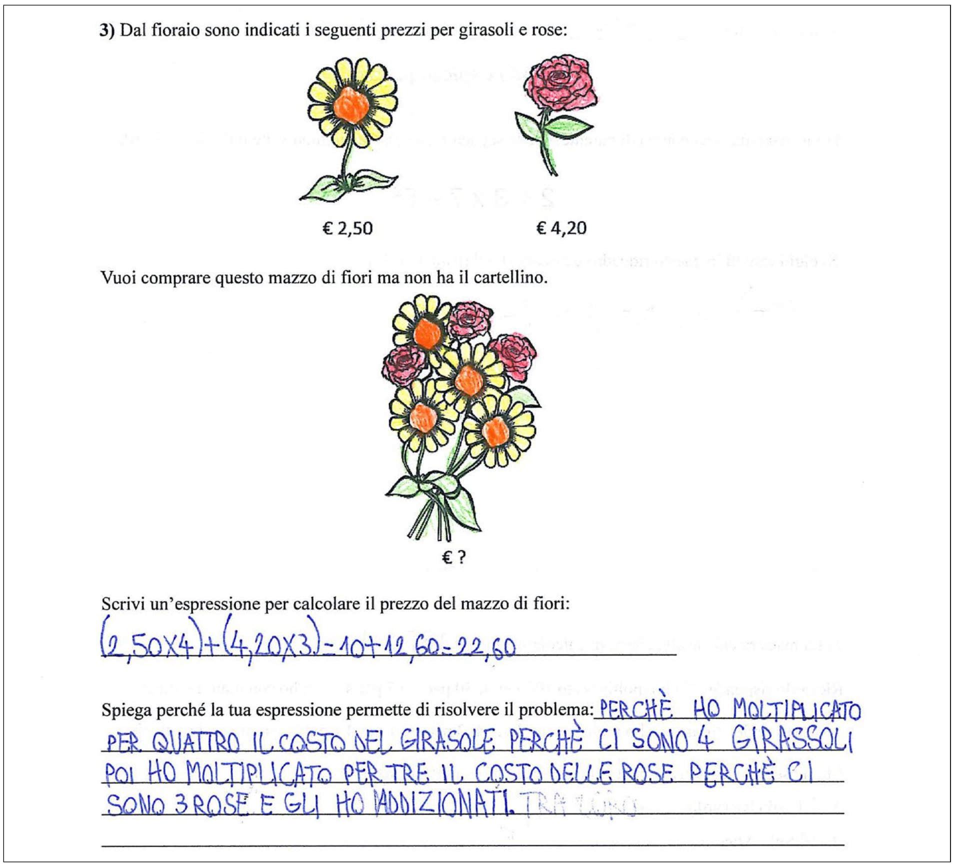


Figura 7
Argomentazione con spiegazione descrittiva (quesito 3, **Allegato 2**, gennaio 2018).

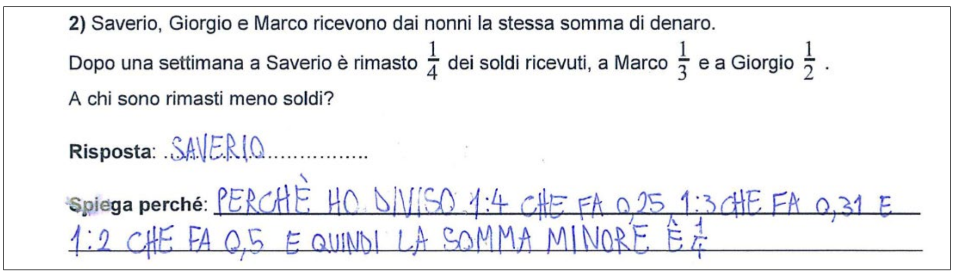


Figura 8
Argomentazione con spiegazione giustificativo-procedurale (quesito 2, **Allegato 3**, marzo 2018).

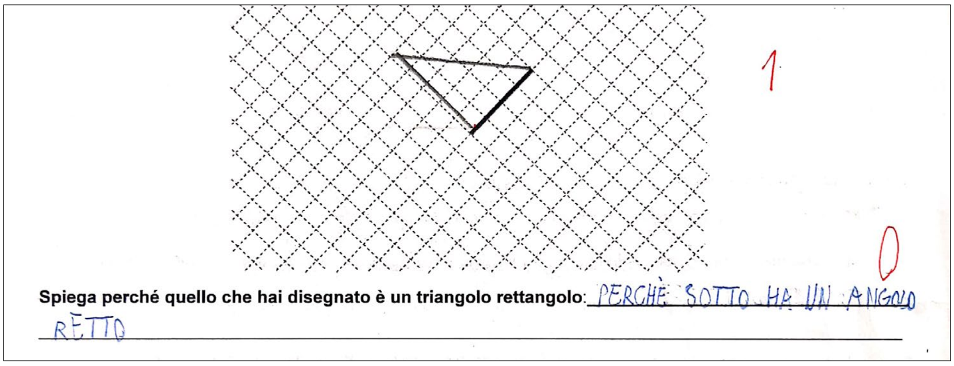


Figura 9
Argomentazione con spiegazione giustificativo-concettuale (quesito 1, Allegato 4, aprile 2018).

5.1.2 Il caso di Davide

Davide è un bambino sensibile e irrequieto, con spiccate capacità logiche e d'intuizione. Nella prima lezione, a novembre, aveva già fornito una spiegazione *giustificativo-procedurale* chiara, corretta e completa, relativa all'espressione per trovare il perimetro della girandola (Figura 3):

> «5×4+3×4+4×4=48 cm. Io ho scritto questa espressione perché: calcolando che ogni triangolo ha un lato da 3 cm uno da 5 cm e uno da 4 cm, ho fatto 5×4 poi 3×4 ed in fine 4×4; poi ho sommato tutti i risultati per farmi venire come risultato il perimetro della girandola».

Nella seconda lezione, ha scritto spiegazioni *giustificativo-procedurali* che risultano solo parzialmente valide, come quella in Figura 10: «Ho fatto questa espressione perché ho calcolato i numeri delle marcherite e le ho moltiplicate per il numero del prezzo e la stessa cosa con le rose»; Davide doveva abituarsi a esplicitare tutti i passaggi per rendere complete le sue spiegazioni e a utilizzare un linguaggio più preciso per renderle più chiare. Nella scheda di marzo le sue spiegazioni *giustificativo-procedurali* sono risultate chiare, corrette e complete, come quella in Figura 11: «Ho risposto a Saverio perché $\frac{1}{4}$ è il numero più piccolo». Davide spiega perché ha risolto così il problema, ma non perché $\frac{1}{4}$ sia minore di $\frac{1}{3}$ e di $\frac{1}{2}$. Nell'ultima lezione Davide ha affinato le sue spiegazioni *giustificativo-concettuali* come quella in Figura 12: «Disegnando sulle figure e osservando mi sono reso conto che tutte le figure nel riquadro A, hanno 1/2 assi di simmetria». Accompagnata dal disegno, questa spiegazione fa anche riferimento a che cosa significhi che una figura è simmetrica.

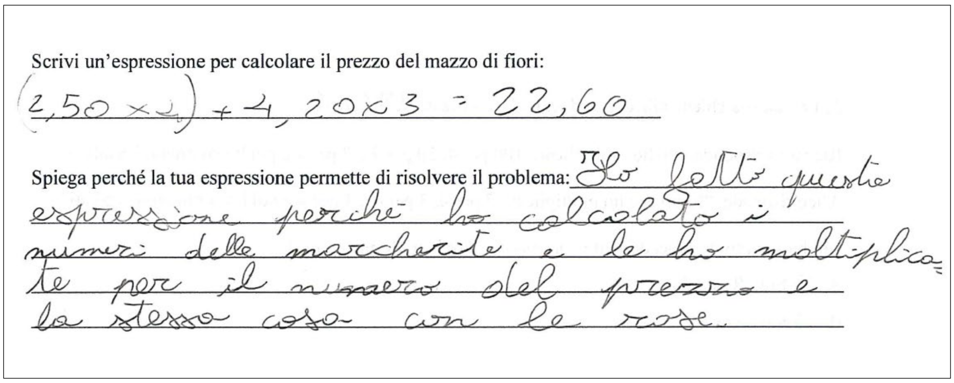
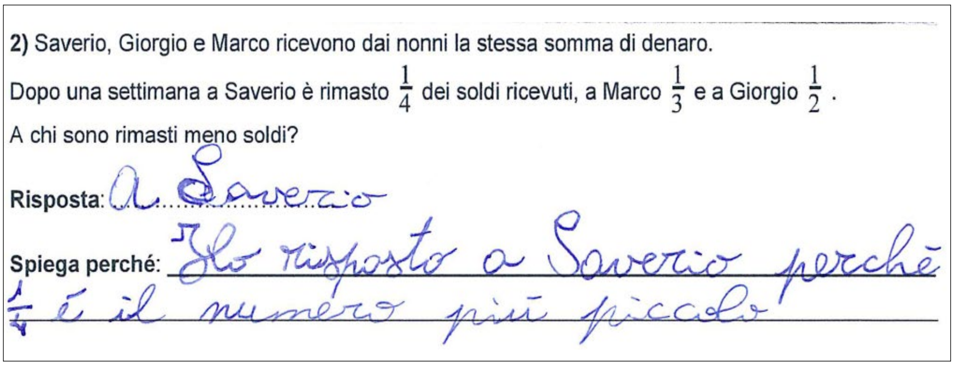

Scrivi un'espressione per calcolare il prezzo del mazzo di fiori:
(2,50 × 2) + 4,20 × 3 = 22,60
Spiega perché la tua espressione permette di risolvere il problema: Ho fatto questa espressione perchè ho calcolato i numeri delle marcherite e le ho moltiplicate per il numero del prezzo e la stessa cosa con le rose.

Figura 10
Argomentazione con spiegazione giustificativo-procedurale (quesito 3, Allegato 2, gennaio 2018).


2) Saverio, Giorgio e Marco ricevono dai nonni la stessa somma di denaro.

Dopo una settimana a Saverio è rimasto $\frac{1}{4}$ dei soldi ricevuti, a Marco $\frac{1}{3}$ e a Giorgio $\frac{1}{2}$.

A chi sono rimasti meno soldi?

Risposta: a Saverio

Spiega perché: Ho risposto a Saverio perchè $\frac{1}{4}$ è il numero più piccolo

Figura 11
Argomentazione con spiegazione giustificativo-procedurale (quesito 2, Allegato 3, marzo 2018).

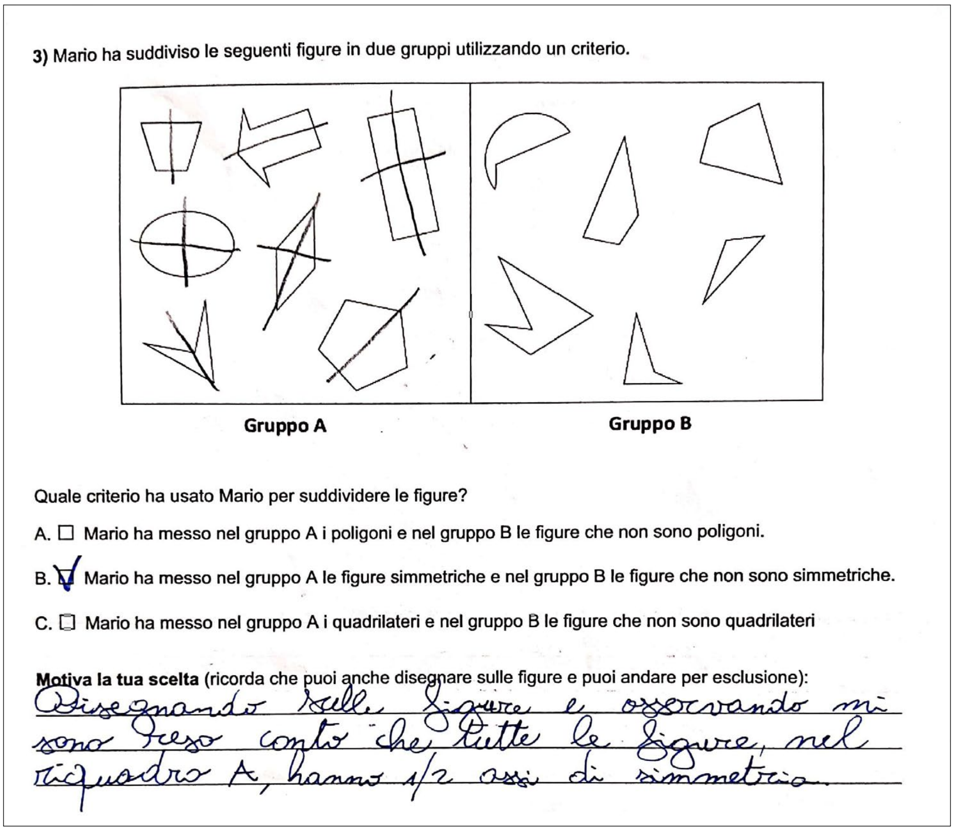


Figura 12
Argomentazione con spiegazione giustificativo-concettuale (quesito 3, Allegato 4, aprile 2018).

5.2 Evoluzione delle spiegazioni: uno sguardo alla classe

Possiamo inoltre identificare una globale evoluzione delle competenze argomentative degli allievi. Con ogni scheda individuale, abbiamo raccolto 57 spiegazioni (salvo casi di assenza di cui abbiamo tenuto conto), ossia 3 per ogni allievo, di cui riportiamo un'analisi in Tabella 3. Tra le spiegazioni con funzione *descrittiva*, abbiamo individuato alcune sotto-tipologie ricorrenti:

– Di tipo esperienziale, quando la spiegazione fa riferimento a un evento vissuto dall'allievo, a un fatto ricorrente nella sua vita quotidiana o scolastica, a sue osservazioni empiriche. In alcuni casi, ad esempio, gli alunni hanno fatto riferimento all'attività appena svolta.
– Per esclusione, quando la spiegazione descrive il procedimento di esclusione a una a una delle diverse opzioni di risposta fornite.
– Con verifica mediante esempio o schema, quando l'allievo sente la necessità di

fare un esempio numerico o di abbozzare un disegno o uno schema per rendere più chiara la sua spiegazione.

Riteniamo questi casi interessanti dal punto di vista didattico per essere consapevoli, come insegnanti, delle possibili tipologie di argomentazione che i bambini possono produrre, soprattutto all'inizio di un percorso formativo sull'argomentazione nell'ambito del problem solving.

Funzione spiegazione	21.11.2017		30.01.2018		16.03.2018		09.04.2018	
Descrittiva	**20**	35%	**24**	53%	**16**	30%	**17**	30%
esperienziale	6		-		3		-	
per esclusione	-		6		1		2	
verifica con esempio/schema	-		-		5		1	
di cui matematicamente valide	*3*		*8*		*3*		*7*	
Giustificativo-procedurale	**7**	12%	**8**	18%	**20**	37%	**3**	5%
di cui matematicamente valide	*1*		*5*		*11*		*1*	
Giustificativo-concettuale	**13**	23%	**-**	-	**12**	22%	**23**	40%
di cui matematicamente valide	*6*		*-*		*2*		*12*	
Diversa categorizzazione (*tutte non valide matematicamente*)	14	25%	2	4%	4	7%	13	23%
affettivo	3		-		1		-	
delega formale	5		-		2		1	
ripetizione della domanda	6		2		1		12	
Vuote	3	5%	11	24%	2	4%	1	2%
TOTALE	57		45		54		57	

Tabella 3
Analisi delle funzioni delle spiegazioni raccolte durante l'esperienza didattica.

Analizzando la tabella, possiamo osservare che nelle prime due lezioni gli allievi hanno prodotto spiegazioni perlopiù *descrittive*, mentre quelle di tipo *giustificativo-procedurale* e *giustificativo-concettuale* sono aumentate nelle ultime due lezioni. In particolare, è anche cresciuta la percentuale di spiegazioni matematicamente valide in queste due categorie e risulta più evidente per le spiegazioni *giustificativo-concettuali*: nell'ultima lezione, metà delle giustificazioni fornite, con espliciti riferimenti a concetti teorici, sono risultate chiare, corrette e complete.

Il fatto che, per alcune lezioni, vi sia una percentuale più alta di un certo tipo di spiegazione può essere dovuto sia alla tematica e all'ambito affrontati, sia a come sono state poste le domande, in modo da incoraggiare maggiormente una certa funzione esplicativa. A questo scopo, per esempio, abbiamo volutamente riproposto due volte uno stesso quesito (n.1, Allegato 1 e Allegato 4), che non era stato discusso con i bambini tra una lezione e l'altra: la prima volta abbiamo chiesto agli allievi di *spiegare come* avessero proceduto, mentre la seconda volta abbiamo chiesto loro di *spiegare perché* il risultato fosse corretto; abbiamo effettivamente raccolto nel secondo caso spiegazioni quasi unicamente *giustificativo-concettuali* (16 casi su 19).

In un'altra occasione, abbiamo proposto un quesito di tipo *cloze* in cui erano dati quattro numeri razionali (due rappresentati mediante frazioni e due rappresentati mediante numeri decimali) ed era richiesto di posizionarli sulla retta numerica su cui erano già state identificate quattro possibili etichette (si veda il primo quesito dell'Allegato 3). Abbiamo appositamente chiesto agli allievi di *spiegare come* avessero ragionato per posizionare i numeri; volevamo infatti vedere se si sarebbero spinti oltre, cercando di giustificare la loro procedura. Ebbene, sono risultate più numerose le spiegazioni di tipo *giustificativo-procedurale* rispetto a quelle *descrittive* (attese, per il tipo di domanda).

6 Conclusioni

Le potenzialità della metodologia implementata si evincono dall'evoluzione delle argomentazioni degli alunni, di cui abbiamo presentato qualche esempio significativo. Questo mostra anche che le funzioni suggerite da Levenson e Barkai (2013) possono essere interpretate come vere e proprie tappe, attraverso le quali guidare l'alunno passo a passo.

A questo proposito il ruolo dell'insegnante diviene centrale nel suggerire vere e proprie domande stimolo e nel differenziarle in base alle tappe raggiunte dall'alunno; tali domande, se interiorizzate, lo direzionano nel suo percorso di consapevolezza, partendo da quesiti del tipo «Come hai risolto il problema?» per passare a «Perché hai risolto il problema in questo modo?» e a «Perché hai potuto risolvere il problema in questo modo in matematica?». Questo aspetto è fondamentale anche per quanto riguarda la valutazione delle argomentazioni fornite dagli alunni: chi valuta deve ben tener conto che le modalità e il lessico con cui richiede un'argomentazione veicola determinati aspetti a discapito magari di altri e può suscitare l'insorgere di un tipo di spiegazione invece di un altro. Consapevole di ciò, l'insegnante può favorire con le sue domande l'attivazione di un certo tipo di funzione, consentendo però sempre all'allievo di scegliere a sua discrezione la funzione che gli permette di esprimere in forma chiara, corretta e completa il suo pensiero.

Per accompagnare e stimolare l'evoluzione delle spiegazioni in termini di funzione, è stato fondamentale lavorare sui criteri per scrivere e riconoscere un'argomentazione valida in matematica, utilizzando diverse tipologie di feedback, con un focus crescente sul processo e sull'autoregolamentazione. Lezione dopo lezione, è stato possibile avviare un lavoro sul piano metacognitivo incoraggiando ogni allievo a imparare a porsi delle domande che lo potessero aiutare nello scrivere una spiegazione corretta («Ho ricontrollato le operazioni e i termini matematici che ho usato? Sono corretti?»), chiara («Ho riletto la mia spiegazione? Si capisce bene quello che volevo dire?») e completa («Ho messo tutti i passaggi?»). Come emerge dai risultati raccolti, questo percorso ha anche favorito lo sviluppo delle abilità metacognitive degli alunni nel corso dell'intero anno scolastico. L'abilità di riflettere sul proprio ragionamento in maniera consapevole sia sul processo di argomentazione e problem solving sia sulla valutazione è emerso durante le varie fasi del lavoro svolto. Gli alunni hanno avuto modo di riflettere sui processi attivati e hanno dimostrato di avere interiorizzato i criteri scelti per la valutazione delle argomentazioni a tal punto da estenderli alla loro pratica matematica anche al di fuori delle nostre lezioni, facendoli divenire veri e propri strumenti di autovalutazione. Lo si può evincere dall'intervento di un alunno che sostiene di aver imparato «qualcosa di nuovo» dal progetto «per esempio, per correggere pensare a, pensare alle 3C mi è servito molto, perché le 3C non le avevamo mai usate per correggere e possono aiutarci in matematica».

Il percorso messo in atto nei suoi aspetti metodologici ha delineato, inoltre, un possibile uso formativo delle prove INVALSI di matematica che, per tutti i risultati analizzati e discussi, si è rivelato un valido supporto, se riadattato per lavorare sull'argomen-

tazione e se usato in dialogo con le conoscenze e le competenze matematiche in corso di apprendimento. In quest'ottica la dimensione sociale è stata determinante a diversi livelli per la riuscita del percorso, come è emerso durante l'ultima lezione, in cui un'alunna sostiene di aver imparato «qualcosa di nuovo» perché il progetto le ha insegnato «sì qualcosa di matematica e di geometria però ti insegna anche a confrontarti con i compagni per trovare la soluzione e a capire, perché se hai sbagliato con gli altri riesci a capire meglio il perché».
In un'esperienza di questo tipo, vi sono anche dei limiti. Innanzitutto, la scansione temporale degli interventi potrebbe essere resa più fitta e continuativa. Inoltre, per lavorare su competenze così complesse, quali quelle argomentative, il lavoro dovrebbe aver inizio fin dalla scuola dell'infanzia, a livello orale, e a partire dal primo ciclo della scuola elementare, anche a livello scritto. Le idee e gli scenari presentati e discussi in quest'articolo possono prendere vita molto prima con i piccoli allievi, nella speranza che lo sforzo di mettere nero su bianco in maniera chiara, corretta e completa il proprio ragionamento fornisca all'allievo anche un supporto per ragionare e apprendere in matematica, e non solo.

Ringraziamenti
Ringraziamo per la disponibilità e l'accoglienza la maestra Patrizia e i suoi allievi di quinta che hanno partecipato a questo progetto nella scuola primaria "Murialdo" di Torino.

Bibliografia

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 189-206.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5-31.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal, 29*, 573-604.

Commissione europea. (2007). *Competenze chiave per l'apprendimento permanente. Un quadro di riferimento europeo*. Lussemburgo: Ufficio delle pubblicazioni ufficiali delle Comunità europee.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promuovere strategie di valutazione formativa in Matematica con le nuove tecnologie: l'esperienza del progetto FaSMEd. *Annali online della didattica e della formazione docente, 9*(14), 91-107.

De Luca, M., Demartini, L., Migliano, P., Savioli, K., Serratore, E., & Vio, E. (Eds.). (2008). *Argomentare: un "laboratorio" per le competenze*. AVIMES-VALMAT.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Bellinzona.

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 1*, 23-37.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2011). Argumentation and proof in the mathematics classroom. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-367). Springer, Dordrecht.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research, 77*(1), 81-112.

INVALSI. (2017). *Quadro di riferimento delle prove di matematica del sistema nazionale di valutazione*. Disponibile in https://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2017/QdR2017_190417.pdf (consultato il 26.08.2019).

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: studies of argumentation in primary mathematics education, *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 22-32.

Levenson, E., & Barkai, R. (2013). Exploring the functions of explanations in mathematical activities for children ages 3-8 year old: The case of the Israeli curriculum. In *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2158-2167).

Lindquist, M., Philpot, R., Mullis, I. V. S., & Cotter, K. E. (2017). TIMSS 2019 Mathematics Framework. In I. V. S. Mullis & M. O. Martin (Eds.), *TIMSS 2019 Assessment Frameworks* (pp. 11-25). Disponibile in http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/ (consultato il 26.08.2019).

MIUR. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale*. Le Monnier.

Morselli, F. (2014). Spiega perché, spiega come… Argomentare alla scuola dell'infanzia. In C. Sabena, G. Cerrato & E. Scalenghe (A cura di), *L'apprendimento nella scuola dell'infanzia. Riflessioni teoriche ed esperienze didattiche* (pp. 127-142). Roma, Aracne.

National Education Association. (2015). An educator's guide to the "four Cs". *Preparing 21st Century Students for a Global Society*. Disponibile in http://www.nea.org/tools/52217.htm (consultato il 26.08.2019).

Nunokawa, K. (2010). Proof, mathematical problem-solving, and explanation in mathematics teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 223-236). New York: Springer.

OECD. (2017), *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*, revised edition, PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en

Panero, M. (2017). Che cosa so fare con le frazioni?. *Atti del VII Convegno Nazionale DI.FI.MA.*, 379-389.

Robotti, E., Censi, A., Segor, I., & Peraillon, L. (2016). *Frazioni sul filo. Strumenti e strategie per la scuola primaria*. Collana Artefatti intelligenti. Erickson.

Schwarz, B. B., & Linchevski, L. (2007). The role of task design and argumentation in cognitive development during peer interaction: The case of proportional reasoning. *Learning and Instruction, 17*, 510-531.

Toulmin, S. (1975). *Gli usi dell'argomentazione*. (trad. it. by Bertoldi G.). Rosenberg & Sellier.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25, vol. 1*, (pp. 1–9). Utrecht.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 390-408.

Autori/Anna Maria Brunero* e Monica Panero°
*Istituto Faà di Bruno – Torino, Italia
°Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera
brunero.annamaria@gmail.com, monica.panero@supsi.ch

Grandezze e misure fra aula e palestra

Magnitudes and measures between the classroom and the school gym

Luca Crivelli
Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera

ESPERIENZA DIDATTICA

Sunto / Il presente contributo ha lo scopo di descrivere un percorso didattico rivolto agli allievi di scuola elementare, all'inizio del secondo ciclo[1], proposto e sperimentato sull'arco di un intero anno scolastico. Gli allievi sono confrontati con una situazione complessa: l'organizzazione di una giornata sportiva all'interno dell'istituto scolastico, chiamata Giochi Senza Frontiere delle Misure. Gli studenti lavorano dapprima sulle unità di misura convenzionali, ne indagano il funzionamento e imparano ad usare in modo appropriato gli strumenti di misura convenzionali; infine, viene richiesto loro di concepire e gestire alcuni giochi di squadra per i loro compagni di scuola. Le tematiche e gli argomenti trattati in aula nell'ambito *Grandezze e misure* diventano così dei giochi di movimento e di squadra in palestra, in un'ottica di interdisciplinarità fra matematica e motricità.

Parole chiave: situazione – problema; motricità; grandezze; misure.

Abstract / This contribution aims to present a didactic experience designed for primary school. The project, conducted in a third grade classroom throughout an entire school year, implied the organization of a sport tournament inspired by a popular TV Show called Giochi Senza Frontiere (It's a Knockout!). The students work on conventional units of measurement, investigate how they work, and also how to use instruments of measurement in an appropriate way; finally, they are asked to conceive and to handle some team games for their schoolmates. The topics developed in the classroom within the context *Magnitudes and measures* thus become games of movement and teamwork in the school gym, from an interdisciplinary perspective between mathematics and motor skills.

Keywords: realistic situation; sport; magnitudes; measure.

1 Introduzione

I *Giochi senza frontiere* erano una manifestazione ludica e sportiva particolarmente conosciuta e apprezzata in Europa negli anni '80 e '90 del secolo scorso. Le squadre, provenienti da diversi paesi, si sfidavano in giochi di abilità, fortuna e resistenza, guadagnando i punti necessari per vincere il torneo. Le varie prove, bizzarre e divertenti, erano caratterizzate da un tema comune, spesso strettamente legato alla nazione che ospitava la competizione.

L'idea di sperimentare un percorso ispirato a questi giochi, ormai divenuti leggendari per chi ha avuto la fortuna di seguirli in televisione, è nata dalla volontà di proporre delle attività che portassero la matematica fuori dall'aula scolastica, in particolare negli spazi esterni alla scuola e dentro alla palestra. Per la progettazione delle attività del percorso si è presa ispirazione da alcuni materiali e libri in circolazione (Brandenberg et al., 2013; Cottino et al., 2011; Daynes, 2016; Novelli, 2016), riformulati, adattati e integrati con materiali ideati dai docenti.

1. In Canton Ticino, l'inizio del secondo ciclo coincide con la classe terza elementare.

La classe per cui è pensato il progetto è una terza elementare. Gli sperimentatori sono due docenti titolari di scuola elementare, Luca Crivelli e Vanessa Henauer, in collaborazione con la docente di educazione fisica Simona Cantù.
L'interdisciplinarietà non è l'unico focus: le varie fasi del percorso sono caratterizzate da un'attenzione particolare nei confronti della valutazione. Come descritto in particolare nel **par. 4**, per monitorare l'evoluzione delle competenze degli allievi si sceglie di favorire una pluralità di sguardi (valutazione da parte del docente, dei compagni, dell'allievo stesso) e di strumenti, con l'obiettivo di creare una rubrica valutativa che funga da raccoglitore per tutte le informazioni rilevate. Tale rubrica permette di tracciare un quadro completo delle competenze degli allievi nell'arco dell'intero anno scolastico.

2 Quadro organizzativo

Il percorso prevede una grande situazione – problema[2] da affrontare e risolvere: gli allievi sono chiamati a sfruttare le competenze costruite durante l'intero anno scolastico, nell'ambito disciplinare di *Grandezze e misure* (DECS, 2015), per progettare e proporre al resto dell'istituto scolastico delle sfide ludiche e sportive. Il percorso è articolato in cinque fasi distinte: la prima prevede che la situazione problema venga lanciata e condivisa con la classe. La seconda, la terza e la quarta fase sono legate all'approfondimento di alcune grandezze e misure (misure di tempo, misure di lunghezza e misure di massa e capacità). Il progetto si conclude con l'ideazione e la realizzazione delle sfide sportive che sono proposte nella giornata di Giochi Senza Frontiere: in quest'ultima fase, gli allievi devono implicarsi e mettere a frutto quanto allenato e visto in classe, effettuando misurazioni legate alle diverse grandezze e confrontando i numeri ottenuti per stabilire i vincitori.
Per avere un'idea di come l'intero percorso è distribuito sull'arco dell'anno scolastico, da settembre a giugno, si osservi la **Figura 1**.

Figura 1
Rappresentazione grafica della temporalità del percorso, da settembre a giugno.

2. Secondo Castoldi (2011, p. 186), la situazione-problema è «un problema da risolvere in un dato contesto operativo, all'interno dei vincoli e delle risorse poste dal contesto stesso», ovvero l'oggetto stesso, il fine ultimo del progetto.

Prevedendo un tempo di lavoro di 1-2 unità didattiche[3] settimanali, il percorso si svolge durante l'intero anno scolastico, per un totale di circa 35 momenti, e si può quindi considerare parte integrante della progettazione annuale di matematica per l'ambito *Grandezze e misure*. Molte delle attività inserite nel progetto sono a carattere interdisciplinare e possono trovare spazio, nella griglia oraria settimanale, durante le ore previste per educazione fisica o per arti plastiche.

3 Il percorso didattico

Trattandosi di un percorso lungo e complesso, l'articolazione operativa descritta di seguito è stata suddivisa in più sottoparagrafi, in modo da rendere la descrizione delle attività più fruibile e meno dispersiva. Vista la mole di contenuti, è stato necessario un importante lavoro di sintesi: in allegato, è possibile trovare i materiali concreti utilizzati in classe o citati solo superficialmente nel testo, così da farsi un'idea più precisa dell'effettivo lavoro svolto in classe, e poter eventualmente replicare alcuni dei momenti d'apprendimento descritti.

3.1 Lancio della situazione – problema

Prima di lanciare la situazione – problema della giornata sportiva, viene proposta un'attività introduttiva sulle grandezze, che ha la funzione di far chiarezza sulla terminologia che poi verrà impiegata durante il resto del percorso. Il docente mostra alla classe diversi oggetti (un orologio, una bottiglia, una statuetta, un filo, una clessidra, una mela) e chiede ai ragazzi di trovare delle singole parole che possano descriverli. In seguito, chiede loro di selezionare, fra tutte le qualità scritte alla lavagna, solo quelle che si possono misurare; ad esempio, non si può attribuire un valore numerico al colore di un oggetto, mentre è possibile farlo per la sua lunghezza, o per la sua massa. Al termine della discussione viene fatta chiarezza su alcuni termini e concetti: gli oggetti che ci circondano hanno delle qualità. Alcune di queste qualità si possono misurare: si tratta delle grandezze. Misurare significa attribuire, tramite uno strumento e rifacendosi a un'unità di misura, un valore alla grandezza in questione (**Figura 2**).

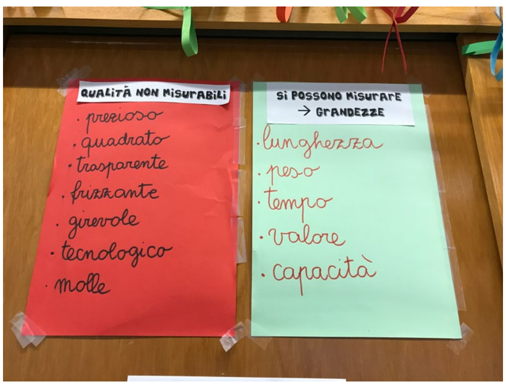


Figura 2
Cartelloni di sintesi realizzati al termine dell'attività sulle qualità degli oggetti.

3. Una Unità Didattica, o UD, ha la durata di 45 minuti.

Alla classe è quindi proposto un filmato risalente agli anni '90, un estratto dei Giochi Senza Frontiere (Link). Al termine del filmato, il docente pone alcune domande atte a verificare che la classe abbia compreso la natura e lo spirito dei giochi: cosa rappresentano le diverse squadre? Qual è il tema che accomuna le varie sfide? Come si stabilisce il vincitore? Quale tipo di gioco viene proposto?

La situazione – problema viene quindi lanciata: in collaborazione con la docente di educazione fisica, la classe si occuperà di organizzare una grande giornata di Giochi Senza Frontiere delle Misure (in seguito GSFM). Viene avviata una prima discussione, in cui il docente esplicita alcuni elementi essenziali volti a facilitarne l'organizzazione:

- i GSFM saranno la giornata di chiusura dell'anno scolastico, in giugno;
- parteciperanno tutti gli allievi dell'istituto, dalla scuola dell'infanzia alla quinta elementare;
- i giochi avranno un tema in comune, cioè quello delle grandezze e delle rispettive misure;
- i giochi verranno organizzati nel corso dell'anno, in seguito a percorsi più o meno brevi legati alle misure di tempo, lunghezza, massa e capacità (descritti sinteticamente nei par. 3.2, 3.3 e 3.4);
- la classe terza, cioè quella direttamente coinvolta nella sperimentazione, sarà responsabile dello svolgimento dell'intera giornata.

Per tenere una traccia visibile durante l'intero percorso, il docente propone la realizzazione di un *lapbook* legato alle grandezze e alle misure (Figura 3). Il *lapbook* può essere definito come un particolare tipo di cartellone riassuntivo e interattivo: ci sono linguette, parti mobili, carte estraibili e piccoli testi (Gottardi & Gottardi, 2016). Inizialmente il *lapbook* ha solo il titolo, ma al termine dell'anno sarà completo con informazioni e promemoria di ogni tipo.

Lo strumento è pensato per essere personalizzato con annotazioni degli allievi, e avrà una doppia funzione: da un lato, potrà essere utilizzato come mezzo per istituzionalizzare e fissare alcuni apprendimenti e scoperte fatte in classe; dall'altro, riguardandone gli elementi, sarà possibile allenarsi e ritornare sui numerosi concetti messi in evidenza nelle diverse fasi del percorso. Il *lapbook* scelto per questo particolare percorso è una rielaborazione di quello progettato e pubblicato da Gottardi e Gottardi (2016).

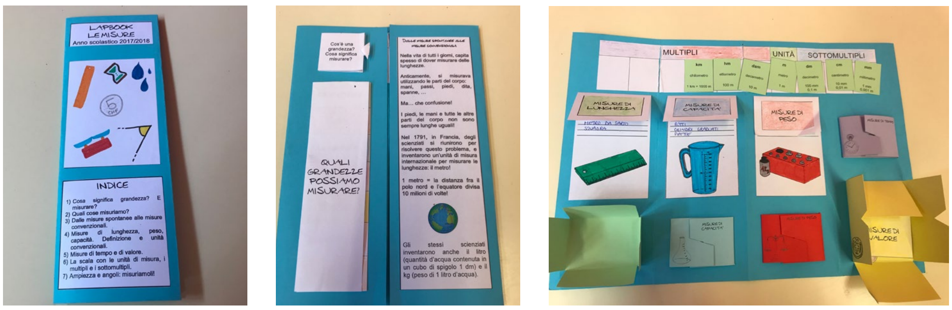


Figura 3
Il *lapbook* completato, fotografato alla fine dell'anno scolastico.

3.2 Le misure di tempo e la lettura dell'orologio

La prima fase del percorso prevede un approfondimento sulle misure di tempo, con particolare attenzione alla lettura dell'orologio analogico. Prima ancora di iniziare, il docente chiede alla classe di portare da casa degli strumenti che possano essere utilizzati per misurare il tempo. Le prime attività proposte hanno il semplice scopo

di far vivere agli allievi esperienze significative che prevedano l'utilizzo spontaneo di tali strumenti: un esempio su tutti sono delle semplici sfide di abilità, in cui ognuno possa registrare il tempo impiegato per compiere determinate azioni: quanto tempo si impiega a costruire una torre di cubi di legno? Quante volte, in un minuto, si riesce a scrivere il proprio nome su di un foglio bianco?
Giunge poi una nuova richiesta da parte del docente: oltre agli strumenti portati da casa, in classe sono da sempre a disposizione delle clessidre. Purtroppo, però, hanno tutte una durata standard di un minuto, e a volte non sono comode per misurare altri intervalli di tempo: sarebbe interessante avere uno strumento, per esempio, che possa essere impiegato per misurare il tempo a disposizione di ogni allievo quando, al lunedì mattina, vuole raccontare il proprio fine settimana ai compagni. Viene così lanciata un'attività laboratoriale che riguarda la costruzione di clessidre, utilizzando materiale di fortuna recuperato a casa o nell'aula. A gruppi, gli allievi stabiliscono una durata indicativa della clessidra che intendono costruire, e realizzano dapprima un progetto, illustrandone le parti importanti e il funzionamento. In un secondo tempo, si passa al recupero del materiale e alla costruzione vera e propria dello strumento. Al termine della costruzione, la durata di ogni clessidra viene misurata con degli orologi. Il dato rilevato viene scritto su di un'etichetta, in seguito posta sulla clessidra stessa. Le clessidre costruite (**Figura 4**) rimangono a disposizione della classe e vengono utilizzate come timer, per esempio per stabilire i turni di parola in una discussione, o il tempo massimo da impiegare per riordinare l'aula al termine di un'attività.

Figura 4
Le clessidre costruite durante l'attività laboratoriale.

Viene quindi portata l'attenzione della classe su di un altro strumento che, almeno all'apparenza, è piuttosto conosciuto: l'orologio. Questa attività può essere introdotta proponendo il taboo matematico (**Allegato 1**); il gioco consiste nel far indovinare ai propri compagni, attraverso una descrizione verbale, strumenti di misura e termini legati alla matematica, con però il divieto di utilizzare alcune parole proibite indicate sulle carte. Se lo strumento da indovinare fosse proprio l'orologio, quali sarebbero le parole proibite che renderebbero difficile il gioco? La costruzione della carta del taboo *orologio*, fatta insieme agli allievi, diventa uno spunto per far emergere le loro conoscenze riguardanti questo strumento.
A partire dall'osservazione degli esempi portati da casa, il docente media una discussione volta a far chiarezza sui nomi delle parti che compongono l'orologio: in quelli analogici si può individuare il quadrante e le lancette di secondi, minuti e ore.

In questa fase, si mette l'accento sulle differenze anche macroscopiche che ci sono fra i vari strumenti, facendo una distinzione fra orologio digitale, più facile da leggere, e quello analogico, leggermente più complesso. A coloro che sanno già leggere l'ora sull'orologio analogico viene chiesto di descrivere agli altri alcune tecniche e strategie efficaci. È in questo frangente che è utile proporre la progettazione e la realizzazione di un orologio didattico, uno strumento che l'allievo potrà in seguito utilizzare per allenarsi nel leggere o riprodurre degli orari (**Figura 5**). Ognuno riceve un quadrante, che andrà completato aggiungendo lancette e decorazioni a piacere. Il quadrante ha ben indicati i numeri delle ore, e delle piccole tacche che facilitano il conteggio dei minuti. Allo stesso tempo, sul quadrante è presente la distinzione fra le ore mattutine (dall'1 al 12) e quelle pomeridiane (dalle 13 alle 24); qualora non fosse ancora emerso il discorso, è l'occasione per affrontare, tramite discussione, questo aspetto particolare spesso meno conosciuto dai bambini.

Figura 5
Esempi di orologi didattici costruiti dagli allievi.

A questo punto, è utile proporre delle attività di allenamento in cui gli allievi meno competenti nella lettura dell'ora possano familiarizzare con essa giocando, e vivendo situazioni realistiche e concrete. Gli allievi più competenti già in partenza, invece, rivestono il ruolo di tutor, oppure possono dedicarsi all'utilizzo di un linguaggio sempre più specifico («meno un quarto», «e tre quarti» ecc.). Risulta interessante, in questo senso, la possibilità di proporre attività a postazioni, in cui esercitarsi nella lettura dell'orologio, e più in generale sul concetto di orario e di tempo che passa, in maniera differenziata:

1. *Lancia e gira:* si gioca in tre. Il primo allievo lancia dei dadi, su cui sono indicate delle ore e dei minuti. Il secondo allievo, dopo aver osservato i dadi, gira le lancette del proprio orologio o di un orologio didattico fornito dal docente, indicando l'orario ottenuto. Il terzo allievo controlla che le lancette siano posizionate correttamente e descrive agli altri un'attività che è possibile fare a quell'ora del giorno. Si procede cambiando i ruoli (**Figura 6**).
2. *Caccia alle parole:* si tratta del classico gioco delle categorie, in cui per diverse categorie prestabilite (nomi, frutti ecc.) occorre trovare e scrivere delle parole che abbiano la stessa lettera iniziale. Sono gli allievi stessi a tenere il tempo, utilizzando un timer da cucina, e fermandosi quando questo scade (**Allegato 2**).

3. *Cosa? Quando?:* ognuno riceve un pennarello e quattro carte, su cui sono indicate alcune possibili attività legate al quotidiano (prendere l'autobus, fare colazione, guardare la tv ecc.). Ogni allievo osserva le immagini, e prova ad assegnare a ognuna di esse un orario adeguato. Su ogni carta è indicato un orologio digitale e uno analogico, che sono da completare con l'orario scelto, utilizzando il pennarello. Quando tutti hanno completato le carte, le si riordina mettendole in ordine cronologico, dall'attività che si svolge più presto a quella che si svolge più tardi nell'arco della giornata.

Figura 6
Delle allieve giocano a riprodurre degli orari su di un orologio didattico, durante un'attività a postazioni.

Come esplicitato in fase d'introduzione, l'interdisciplinarità con l'educazione fisica è uno degli aspetti focali attorno al quale è costruita l'intera progettazione. Per questo motivo, in questa fase del percorso sono previste anche attività di allenamento in palestra, come quella dell'orologio vivente. Il gioco prevede la collaborazione da parte di tutti gli allievi: due bambini dirigono i lavori, mentre gli altri eseguono ciò che viene loro richiesto dai compagni. Parte della classe forma, con i propri corpi e sdraiandosi a terra, il quadrante dell'orologio. Il lavoro consiste nel rispondere alle domande di un quiz. La soluzione alle domande poste corrisponde a un orario (ad esempio, «A che ora finisce la scuola al pomeriggio?»). I due allievi che dirigono l'attività devono far sdraiare due compagni, che rappresentano le lancette, in modo tale che l'orario rappresentato dall'orologio umano sia la risposta alla domanda del quiz posta dal docente (Figura 7).

Figura 7
Parte della classe riproduce un orario, le 15:00 in punto, sull'orologio vivente.

Sempre in collaborazione con il docente di educazione fisica, è possibile invitare gli allievi a utilizzare strumenti di misurazione come orologi e cronometri anche durante le normali lezioni in palestra. Allo stesso tempo, può essere interessante proporre discussioni legate al tempo e allo sport: in quali discipline le prestazioni degli atleti dipendono dal tempo impiegato per svolgere una determinata azione?

3.3 Le misure di lunghezza

Si tratta della fase del progetto più lunga e articolata, perché riguarda principalmente la scoperta della necessità e dell'utilità delle unità di misura convenzionali, fatta tramite attività di esplorazione ma anche ripercorrendo alcune tappe della storia della matematica relative a questa tematica.
Il percorso sulle misure di lunghezza viene introdotto leggendo e mostrando le immagini delle prime pagine di un libretto intitolato *Crictor, il serpente dal cuor d'oro* (Ungerer, 1963). La lettura viene interrotta nel momento in cui la protagonista, Luisa, decide di confezionare un abitino di lana per il proprio serpente domestico. Si pone il quesito ai bambini: quanto lungo dovrà essere l'abito su misura che la Signora Luisa dovrà creare per il suo serpente? Da un cestino posto al centro dell'aula si fanno fuoriuscire dei serpenti di corda. I bambini suddivisi in gruppetti misurano la lunghezza del serpente-corda utilizzando parti del proprio corpo o degli oggetti che trovano in aula, e registrano i risultati ottenuti su una scheda accompagnatoria (**Allegato 3**). La misurazione viene effettuata dal gruppo quattro volte, cambiando sempre l'oggetto scelto come unità di riferimento. A fine lavoro viene lasciato un momento di spazio agli allievi per confrontarsi e mettere in comune impressioni, eventuali difficoltà o incertezze avute durante l'attività.
A distanza di qualche giorno, si propone quindi una nuova misurazione del serpente. Questa volta la scelta dell'unità di misura non sarà libera, ma sarà una parte del corpo o un oggetto non convenzionale particolare, scelta durante l'attività precedente da ciascun gruppo. I bambini, seguendo le indicazioni sull'oggetto da utilizzare, misurano la lunghezza del serpente-corda e indicano i risultati in una tabella (**Allegato 4**). Questa proposta permette il confronto tra le misurazioni rilevate, visto che gli oggetti utilizzati sono gli stessi per tutti.
Successivamente vengono presentati i dati registrati da ciascun gruppo. L'obiettivo è quello di mettere in evidenza le probabili differenze che a questo punto possono emergere. Perché un gruppo misurando la lunghezza del serpente con la ciabatta ha ottenuto un numero diverso dagli altri? Il docente media una discussione sulle possibili motivazioni che stanno alla base della diversità dei risultati ottenuti. Dalla riflessione degli allievi sulle possibili cause (strumento uguale ma utilizzato in modo diverso, oggetto non perfettamente identico ecc.) dovrebbe emergere che è più opportuno scegliere alcuni strumenti già conosciuti, anche se non ancora molto utilizzati in classe, come il metro. D'altra parte, le problematiche nel trovare uno strumento comune che permetta di minimizzare le differenze tra i risultati delle misurazioni effettuate sono le stesse che hanno accompagnato l'uomo nel corso della storia. Per questo motivo, viene presentato un riassunto dell'evoluzione delle misure di lunghezza e dei vari metodi utilizzati nel corso degli anni, al fine di capire come e perché si sia giunti ad una soluzione condivisa dalla maggior parte dei paesi del mondo. Questa presentazione in Power Point (**Allegato 5**) ha lo scopo di fare chiarezza e di precisare l'importanza di avere uno strumento di misura convenzionale, di chiarire come si sia arrivati a stabilirlo e di come debba essere utilizzato.
Per approfondire l'argomento e per scoprire come sono costruite le unità di misura

convenzionali per la lunghezza, vengono quindi proposte due attività laboratoriali distinte che permettono di lavorare con diversi strumenti e unità di misura (nello specifico metro, decimetro, centimetro e millimetro).
La prima proposta permette di comprendere e manipolare al meglio il metro come strumento e come unità di misura. I bambini, dopo aver sperimentato gli strumenti di misura messi a loro disposizione (metro da muratore, metro da sarto, riga da 1 m della lavagna, riga centimetrata da 50 cm, riga da 30 cm, righello da 15 cm) hanno il compito di costruire un metro di cartoncino sul quale indicano, con colori differenti, le diverse unità di misura: il metro, il decimetro, il centimetro e il millimetro (**Figura 8**).
Durante il lavoro è importante osservare e ascoltare i ragionamenti che i bambini esplicitano per poter rilanciare concetti o formulazioni corrette. Si potrebbero per esempio accorgere che 1 m e 35 cm equivalgono a 135 cm, oppure che occorrono 10 dm per ottenere 1 m.

Figura 8
Esempio di metri in cartoncino su cui sono indicate diverse unità di misura.

La seconda attività laboratoriale proposta riguarda la costruzione di una linea del tempo che indichi gli anni dal 1750 in poi. La linea del tempo, che in seguito verrà utilizzata durante le lezioni di geo-storia, deve avere alcune caratteristiche precise stabilite dal docente: per poter essere appesa alla parete dell'aula deve essere lunga al massimo 7 metri, deve indicare con precisione gli anni 1750, 1800, 1850, 1900, 1950, 2000 e 2018, e deve risultare facilmente leggibile una volta appesa sul muro in classe (**Figura 9**). Per posizionare al meglio i singoli anni e i particolari avvenimenti storici studiati in classe, gli allievi utilizzano il metro da muratore o da sarto. Il docente osserva, cercando di intervenire il meno possibile, e lasciando che i gruppi portino avanti in autonomia il proprio progetto. Anche in questa attività, gli allievi manipolano lo strumento convenzionale e ne approfondiscono il funzionamento.

Figura 9
Esempio di linea del tempo appesa in classe.

Per dare a tutti la possibilità di allenare sia l'utilizzo di uno strumento di misura convenzionale (la riga), sia la lettura di una misurazione, vengono quindi proposte quattro attività a postazioni:

– *La gara di corsa:* i bambini a turno, lanciano il dado, e avanzano lungo un percorso, rappresentato da una linea spezzata (**Allegato 6**), di un numero di centimetri pari al numero ottenuto con il dado. Per misurare la distanza da percorrere utilizzano la riga centimetrata. Ogni volta segnano il punto raggiunto con un pennarello, e passano il turno al compagno. Vince chi arriva per primo al traguardo.
– *Dadi e stima:* a turno, i bambini lanciano due dadi (uno su cui sono scritte le sigle *mm*, *cm*, *dm* e *m*, e un altro con i numeri da 1 a 10). Chi ha lanciato il dado pensa a un oggetto che possa essere di quella lunghezza. Se i compagni sono d'accordo, il bambino ottiene 1 punto. Se chi ha lanciato il dado riesce a prendere l'oggetto e a portarlo agli altri, ottiene 2 punti. Vince chi ha più punti alla fine della partita (**Figura 10**).

Figura 10
Allieve alle prese con l'attività *Dadi e stima*.

– *Misuriamoci:* utilizzando il supporto di una scheda (**Allegato 7**) ciascun bambino completa una sorta di carta d'identità sulle misure del proprio corpo e dell'oggetto preferito. Per rilevare alcune misurazioni è importante che i bambini collaborino con i compagni, utilizzando gli strumenti di misurazione che preferiscono.
– *Seguiamo le indicazioni:* i bambini scelgono a piacere una tra le diverse attività proposte (**Allegato 8**), che riguardano la realizzazione di disegni seguendo delle informazioni ben precise. Per riuscire al meglio è indispensabile seguire le indicazioni passo a passo e utilizzare lo strumento di misura (la riga) con attenzione e precisione.

Analogamente a quanto fatto per le misure di tempo, anche per le lunghezze vengono individuate attività significative da svolgere in palestra, durante le ore di educazione fisica.

In questo senso, è interessante la possibilità di far misurare le lunghezze dei diversi campi da gioco, utilizzando strumenti convenzionali o sfruttando i vari attrezzi come unità di riferimento (**Figura 11**).

Figura 11
Gli allievi utilizzano le panchine come unità di misura per stabilire la lunghezza del campo da basket.

Sono inoltre diversi gli sport in cui le lunghezze sono rilevanti al fine di stabilire il valore di una prestazione: il lancio della pallina o del peso, il salto in lungo, il salto in alto, il salto triplo ecc. Queste discipline possono essere individuate insieme alla classe tramite una discussione. In un secondo tempo, il docente può chiedere agli allievi di praticarle in prima persona, sfruttando le competenze costruite in aula per registrare e confrontare i risultati ottenuti (**Figura 12**).

Figura 12
Gli allievi utilizzano il decametro a bindella per stabilire la lunghezza del lancio della pallina.
I tappetini, posti a distanza regolare, aiutano nel compito fungendo da punto di riferimento.

3.4 Le misure di massa e di capacità e la preparazione di un dolce

In questa quarta fase del percorso vengono affrontate le ultime due grandezze previste nella progettazione: la massa e la capacità.
L'attività inizia con la proposta, da parte del docente, di realizzare un dolce in vista dei festeggiamenti per la conclusione del progetto, i muffin alle fragole e limone. La cucina è un luogo privilegiato in cui destreggiarsi fra bilance e liquidi da misurare.

Dopo aver consegnato la scheda con la ricetta (**Allegato 9**), l'insegnante lascia alla classe il tempo necessario per leggerla e per fare eventuali domande. La maniera in cui sono presentati gli ingredienti, utilizzando cioè varie unità di misura per la massa e per le capacità, dovrebbe far sorgere più di un dubbio: a quanto corrispondono 20 dag di farina? E 10 cL di yogurt? Si propone quindi di mettere da parte la ricetta e di allenarsi per meglio comprendere quel linguaggio, specifico e legato alle due nuove grandezze trattate.
La prima attività di allenamento per queste nuove grandezze prevede che il docente lasci in fondo alla classe una serie di oggetti di diverso tipo: vasi, ciotole, bottiglie ecc., facendo in modo che ci sia almeno un oggetto per ogni allievo (**Figura 13**). Viene quindi chiesto a ognuno di scegliere l'oggetto che preferisce e di formare una lunga fila, facendo in modo che all'inizio ci sia il bambino con l'oggetto meno capiente, in fondo quello con l'oggetto più capiente. Il docente lascia il tempo di discutere, intervenendo solo come mediatore, nel caso in cui gli allievi non riescano da soli a risolvere eventuali disaccordi.

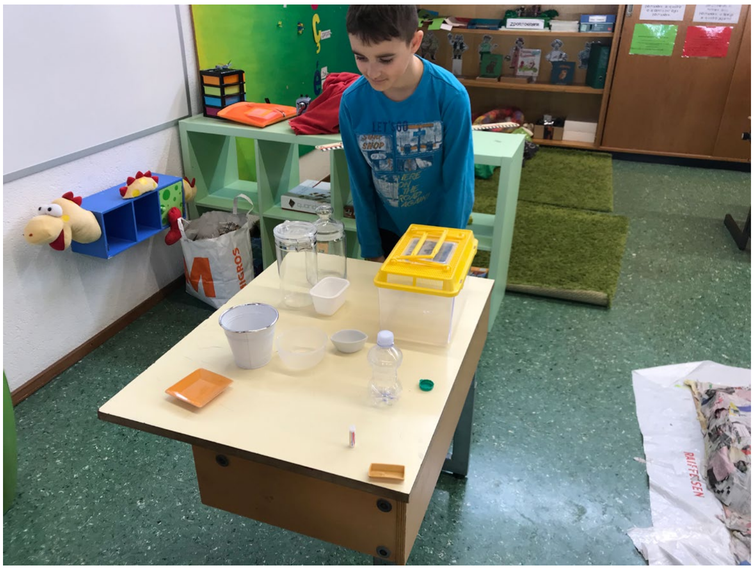


Figura 13
Il momento della scelta degli oggetti che poi andranno riordinati dal meno capiente al più capiente.

Una volta formata la fila, il docente chiede a ogni allievo di provare a stimare, esprimendosi in maniera libera, la capienza dell'oggetto che ha scelto. Registra le risposte alla lavagna, senza commentare o valutare l'effettiva correttezza delle stesse. Il docente invita quindi a osservare e a riflettere sui tipi di unità di misura scelti per stimare la capienza degli oggetti: ce ne sono alcuni simili? Ce ne sono alcuni che sembrano meno adatti o del tutto scorretti? Mediando una discussione, il docente cerca di portare la classe verso la presa di coscienza che, come per le misure di lunghezza, anche per mettersi d'accordo sulla capienza è stato necessario inventarsi un sistema convenzionale.
Con gli stessi oggetti, si ripete l'attività, considerando però la massa e non la capienza: l'ordine sarebbe diverso? Facendo delle analogie con quanto visto in precedenza, e ai cartelloni con la scala delle unità di misure di lunghezza, il docente favorisce la scoperta del grammo (e in un secondo tempo, per analogia, del litro), con le loro sigle e abbreviazioni. Sempre procedendo per analogia, è quindi possibile ricostruire interamente le scale delle unità di misura convenzionali (**Figura 14**).

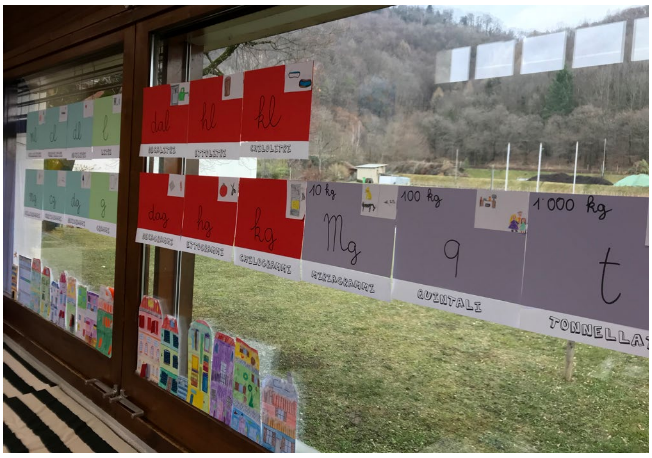


Figura 14
Scala delle unità di misura convenzionali per la massa e per la capacità, appese in classe.

Per facilitare gli allievi, probabilmente meno esperti nel campo delle misure di massa e capacità rispetto a quelle di tempo e lunghezza, può essere utile a questo punto svolgere un'attività che serva a farsi un'idea concreta delle grandezze in gioco; il docente chiede di immaginarsi degli oggetti o dei recipienti che possano rappresentare le unità di misura raccolte nella scala convenzionale: 1 hg può essere il peso[4] di un mazzo di carte, 1 dL il contenuto di un piccolo bicchiere ecc. Qualora il compito dovesse risultare difficile, il docente e gli allievi possono affidarsi al libro *3 tappi e un barattolo* (Julve & Trius, 2011), su cui si trovano diverse soluzioni originali per ogni unità di misura. In questa fase, è importante far trovare più di una soluzione per ogni unità di misura: 1 kg può essere la massa di una confezione di farina, ma anche del vocabolario a diposizione della classe. Su ogni cartellone con le unità di misura, si mettono almeno due disegni rappresentativi della stessa (**Figura 15**).

Figura 15
Particolare della scala di misura della capacità: un centilitro può essere il contenuto di un tappo, o di una siringa per iniezioni.

Ora che le unità di misura convenzionali sono definite, è possibile procedere con una serie di attività che permettano di allenarle e di viverle da un punto di vista più pratico. Ecco alcuni esempi:

4. Nonostante la grandezza in gioco sia la massa, con i bambini si è scelto di utilizzare il termine "peso", di uso comune e per loro più familiare.

1. *Misuriamo:* la verifica della capacità degli oggetti che in precedenza erano stati presentati per essere riordinati, tramite l'utilizzo di cilindri graduati o di altri strumenti. Allo stesso modo, si verifica anche la massa degli oggetti utilizzando bilance elettroniche o a due piatti.
2. *La caccia al recipiente:* si parte alla ricerca, in tutta la scuola e a casa, di oggetti che possano contenere dei liquidi. Quindi, si cerca di stabilire quale sia il meno capiente e il più capiente, procedendo prima empiricamente e utilizzando poi strumenti trovati in laboratorio (pipette, cilindri e caraffe graduate ecc.) per verificare le ipotesi.
3. *La stima delle misure di massa:* attività che segue modalità simili a quelle dei quiz. Il docente sceglie un oggetto e lo mostra alla classe. Gli allievi, a gruppetti, discutono e ne ipotizzano la massa, solo tramite l'osservazione. Quindi hanno la possibilità di manipolare e soppesare l'oggetto, e di correggere la propria stima. Si procede alla verifica, e il gruppo che si è maggiormente avvicinato alla massa corretta guadagna un punto. Vince la sfida chi, al termine del quiz, ha guadagnato più punti.
4. *La stima delle misure di capacità:* attività che avviene in maniera analoga a quella descritta nel punto precedente, ma in cui gli allievi stimano la capienza di alcuni recipienti.

Anche per massa e capacità, le esercitazioni avvengono in parallelo anche in palestra. In particolare, vengono proposte due attività.
Nell'attività della *bilancia umana* il docente predispone una panchina rovesciata, sopra un coperchio di cassone, a ricreare una grande bilancia a due piatti. I bambini, divisi in due gruppi, hanno a disposizione del materiale di piccole dimensioni e di massa differente. L'attività si svolge sotto forma di staffetta: un bambino deve prendere un oggetto e collocarlo sulla bilancia creata con la panchina. A seguire, gli altri bambini faranno la stessa cosa, collaborando affinché la bilancia risulti in equilibrio al termine del gioco. Lo stesso esercizio può essere in seguito riproposto usando le persone al posto degli oggetti; i bambini hanno l'occasione di confrontarsi e organizzarsi in base alla massa di ognuno, salendo sulla bilancia e facendo in modo che alla fine risulti in equilibrio (**Figura 16**).

Figura 16
In palestra, cercando di trovare l'equilibrio della bilancia gigante.

L'attività del *trasporto dell'acqua*, invece, si svolge fuori dalla palestra. Si tratta di una staffetta competitiva, in cui due o più squadre si sfidano nel trasportare la maggior quantità d'acqua lungo un percorso a ostacoli predisposto dal docente. Per trasportare l'acqua, ognuno può scegliere fra diversi strumenti: spugne, bicchieri bucati, piatti fondi, mestoli. L'acqua va trasportata fino a un catino. Allo scadere del tempo prefissato dal docente, si procede insieme alla misurazione della quantità d'acqua per stabilire il gruppo vincitore. Può essere interessante proporre una discussione sugli strumenti utilizzati per il trasporto: agli allievi si chiede prima di stimare quanto liquido riescono a trasportare, e in seguito si passa alla verifica.
Prima di concludere questa fase, dopo tutti gli allenamenti svolti, il docente propone alla classe di tornare a leggere la ricetta dei muffin. Le unità di misura di massa e capacità, così come l'utilizzo degli strumenti adatti per le misurazioni degli ingredienti, non dovrebbero essere più un problema. La classe viene quindi suddivisa in piccoli gruppi da 3-4 allievi. All'interno dei gruppi vengono suddivisi i compiti, in modo che ognuno debba occuparsi della misurazione di parte degli ingredienti, aggiungendoli di volta in volta al composto. Il docente coglie l'occasione per osservare i piccoli cuochi al lavoro, prendendo delle annotazioni relative alle prestazioni degli allievi grazie all'utilizzo di una griglia (per una descrizione più approfondita di questo momento, si faccia riferimento al par. 4).

3.5 L'ideazione dei giochi per la giornata dei GSFM

L'invenzione dei giochi avviene nel corso dell'intero anno scolastico, al termine di ognuna delle tre fasi che hanno caratterizzato il lungo percorso, descritte nei par. 3.2, 3.3 e 3.4. Singolarmente o a piccoli gruppi, durante lezioni specificatamente dedicate all'organizzazione dei GSFM, gli allievi propongono dei giochi di movimento legati alle diverse grandezze affrontate in classe o in palestra.
I punti da tenere in considerazione per ideare giochi realizzabili sono stabiliti dal docente:

1. Protagonista del gioco dev'essere una grandezza e la sua relativa misura (misure di tempo, misure di lunghezza, misure di massa e misure di capacità).
2. Ogni gioco deve durare al massimo 30 minuti, considerando anche il momento delle spiegazioni.
3. Il gioco dev'essere una sfida fra due gruppi di circa 10 bambini.
4. Il gioco deve essere adatto ai bambini del primo e del secondo ciclo: in questo senso c'è la possibilità di proporre due varianti, una più semplice e una più complessa.

Le proposte di gioco vengono dapprima presentate alla classe e discusse. In seguito, se non ci dovesse essere una proposta che mette tutti d'accordo, si procede a una votazione per alzata di mano.
Una volta stabiliti i giochi, il docente propone una discussione sul sistema di punteggio: come per i Giochi Senza Frontiere, occorre trovare un modo per tenere i punti, in modo da poter stabilire la squadra vincitrice al termine della giornata. Quando anche questo aspetto è chiarito, all'interno della classe ci si divide i ruoli: gli allievi, divisi in gruppi, sono i responsabili di uno dei quattro giochi e devono occuparsi di scriverne il regolamento e di prepararne il materiale.
In questa fase del percorso, il docente coglie l'occasione per mettere a confronto le

idee degli allievi mediando discussioni, ponendo domande e cercando di far emergere, in un'ottica costruttiva, le possibili criticità che potrebbero presentarsi nel momento di realizzazione delle sfide. Per facilitare il compito, è auspicabile l'organizzazione di momenti in cui vengono simulate le varie sfide: il gruppo organizzatore gestisce il gioco, un gruppetto partecipa affrontando l'attività e i restanti compagni sono osservatori esterni (**Figura 17**). Al termine della simulazione, ci si ritrova per uno scambio di opinioni, e per trovare possibili strade per raffinare la proposta in vista dei GSFM veri e propri.

Figura 17
La simulazione di una sfida riguardante le misure di lunghezza.

3.6 La giornata dei GSFM

La realizzazione ha nella giornata dei giochi il suo momento più forte e significativo. Mettendo a frutto tutte le competenze costruite nel corso dell'anno scolastico, gli allievi spiegano e gestiscono, in collaborazione con i docenti dell'istituto, le sfide legate alle diverse grandezze studiate in classe.
I partecipanti, divisi in gruppi chiamati ognuno con il nome di uno strumento di misura, si sfidano nei quattro giochi preparati dalla classe nel corso dell'intero anno scolastico. A dipendenza dell'andamento delle sfide, guadagnano delle riproduzioni di soldi e monete che potranno impiegare per acquistare bibite e vivande durante il pranzo in comune. Al termine della giornata, dopo un confronto dei risultati ottenuti, vengono proclamati i vincitori, che possono sfilare davanti ai compagni d'istituto come nella migliore tradizione dei *Giochi Senza Frontiere*.
Il ruolo degli allievi organizzatori è decisamente importante: oltre ad aver preparato il materiale, pianificato la giornata da un punto di vista di spazi e tempi, sperimentato in prima persona i giochi, devono spiegare il regolamento, misurare le prestazioni dei partecipanti, e confrontare i risultati per stabilire i vincitori.
Per farsi un'idea dei giochi progettati e realizzati, e più in generale delle attività proposte durante la giornata dei GSFM, si consiglia la visione di un breve filmato riassuntivo (**Allegato 10**).

4 La valutazione

La valutazione delle competenze è un tema senz'altro complesso e delicato, soprattutto in progetti articolati e lunghi come questi. Castoldi (2016) mette in evidenza la necessità di pensare a un impianto valutativo che tenga in considerazione diversi strumenti di analisi e di raccolta dei dati. In questo senso, i momenti di valutazione previsti nel corso del progetto sono stati il più possibile variegati: alcuni avevano lo scopo di spingere l'allievo ad autovalutarsi, altri ancora di favorire la valutazione fra pari, mentre alcuni puntavano a fare un punto su cosa l'allievo sapesse fare, dal punto di vista del docente. Allo stesso tempo, si è cercato di non puntare il riflettore solo sul prodotto, ovvero sul risultato finale del lavoro dell'allievo, ma anche sui processi che hanno portato a tale risultato. Per strutturare gli strumenti di valutazione, è stato necessario un lavoro sugli indicatori di raggiungimento del traguardo, stabilendo a priori quali siano i comportamenti osservabili attesi dall'allievo che indichino il manifestarsi della competenza (Allegato 11).
Gli strumenti di valutazione utilizzati sono riassunti nella Tabella 1.

Chi valuta	Strumento utilizzato
Docente	– Rubrica di prestazione sulla lettura dell'orologio (utilizzata nella fase del percorso descritta nel par. 3.2). – Prova scritta sulle misure di lunghezza (utilizzata nella fase del percorso descritta nel par. 3.3). – Griglia di osservazione sull'utilizzo degli strumenti per la massa e la capacità (utilizzata nella fase del percorso descritta nel par. 3.4). – Prova scritta conclusiva sull'intero percorso annuale legato alle diverse grandezze e misure (utilizzata al termine del percorso).
Allievo (autovalutazione)	– Formulario di autovalutazione sull'intero progetto e sul percorso annuale dei GSFM (utilizzato al termine del percorso).
Compagno (valutazione fra pari)	– Attività di valutazione fra pari sull'utilizzo degli strumenti di misura della lunghezza (utilizzata nella fase del percorso descritta nel par. 3.3).

Tabella 1
Sintesi dei momenti valutativi e descrizione degli strumenti impiegati.

Di seguito, una descrizione dei diversi momenti valutativi.

Rubrica di prestazione sulla lettura dell'orologio (Allegato 12).
L'attività di valutazione è svolta individualmente: il docente si occupa di un allievo alla volta, tramite un colloquio, mentre i compagni lavorano autonomamente svolgendo esercizi individuali. Utilizzando del materiale, come gli orologi didattici costruiti e delle immagini relative ad alcuni momenti della giornata (colazione, ricreazione, merenda ecc.), il docente pone delle domande e fa delle richieste all'allievo, registrandone la prestazione in una rubrica. Questo strumento presenta i cinque indicatori di raggiungimento del traguardo nella prima colonna: per ognuno di que-

sti indicatori sono descritti tre livelli (base, intermedio e avanzato). Al termine del colloquio con l'allievo, il docente fa la somma del punteggio: 0 punti se l'allievo non è stato in grado di rispondere in alcun modo alle richieste avanzate, 1 punto per gli indicatori osservati a livello base, 2 punti per gli indicatori osservati a livello intermedio, 3 punti per gli indicatori osservati a livello avanzato. La prestazione dell'allievo può quindi essere valutata con un punteggio che va da 0 a 15 punti.

Prova scritta sulle misure di lunghezza (Allegato 13).
Si tratta di una prova scritta svolta individualmente, da ogni allievo, e che quindi il docente sottopone alla classe intera allo stesso momento. Le richieste sono facilmente riconducibili agli esercizi e alle attività di allenamento svolte in classe, così come agli indicatori di raggiungimento del traguardo stabiliti per le misure di lunghezza. A ogni esercizio è attribuito un punteggio. Al termine della prova, il docente fa una somma totale dei punti ottenuti da ogni allievo, per un massimo di 12 punti.

Attività di valutazione fra pari sull'utilizzo degli strumenti di misura della lunghezza (Allegato 14).
L'attività viene svolta a coppie, e riguarda la scelta e l'utilizzo di strumenti per misurare delle lunghezze. Un allievo è il misuratore, l'altro è l'osservatore/consigliere. Il misuratore ha a disposizione un grande numero di strumenti diversi, e degli oggetti di cui è chiamato a misurare una delle lunghezze. L'osservatore/consigliere ha invece a disposizione un foglio, su cui deve attribuire alla prestazione del compagno un punteggio da 0 a 7 punti, scrivendo eventuali consigli o spunti volti a favorire un miglioramento. Il punteggio e i consigli vengono letti dal misuratore e discussi con il consigliere in presenza del docente.

Griglia di osservazione sull'utilizzo degli strumenti per la massa e la capacità (Allegato 15)
Il docente suddivide la classe in piccoli gruppetti da tre allievi. Ogni gruppo ha il compito di preparare dei muffin alle fragole, misurando gli ingredienti prima di mescolarli fra loro per cuocerli. Il momento di misurazione degli ingredienti è svolto individualmente: l'allievo ha a disposizione la ricetta e una moltitudine di strumenti fra cui scegliere. Il docente si limita a osservare il suo operato, registrandone in una griglia di osservazione i comportamenti. Il doppio + indica una prestazione molto positiva, il + una prestazione generalmente positiva, l'onda ~ una prestazione mediocre, il – una prestazione generalmente negativa, il doppio – una prestazione molto negativa. Per ogni prestazione a cui è stato assegnato almeno un simbolo +, il docente attribuisce quindi un punto, per un totale massimo di 10 punti. Oltre ai simboli, che rendono veloce e immediata la registrazione delle osservazioni, il docente si annota a margine del foglio eventuali comportamenti interessanti o appunti utili.

Formulario di autovalutazione sull'intero progetto e sul percorso annuale dei GSFM (Allegato 16).
Si tratta di un formulario di autovalutazione, in cui l'allievo è chiamato a riflettere sul proprio operato relativo all'intero percorso svolto insieme. Uno dopo l'altro, gli indicatori di raggiungimento del traguardo e i contenuti trattati in classe vengono sottoposti all'allievo, che si trova quindi chiamato a valutare quanto sente di padroneggiare conoscenze, tecniche e processi cognitivi. Oltre a domande legate a contenuti disciplinari, sono previsti interrogativi sull'impegno profuso durante le ore di lavoro in classe. L'allievo è infine chiamato a segnalare se desidera approfondire tematiche ritenute ancora non del tutto chiare.

Prova scritta conclusiva sull'intero percorso annuale legato alle diverse grandezze e misure (**Allegato 17**).
Si tratta di una prova scritta svolta individualmente, da ogni allievo, e che quindi il docente sottopone alla classe intera allo stesso momento. Le richieste non sono per forza riconducibili agli esercizi e alle attività di allenamento svolte in classe, ma sono volte a verificare che l'allievo sia in grado di trasferire le proprie competenze affrontando situazioni diverse ma risolvibili grazie alle competenze acquisite. La prova è suddivisa in quattro parti, ognuna legata a una delle diverse grandezze trattate. Gli esercizi sono da svolgere con matita e gomma, scrivendo sul foglio, ma anche utilizzando strumenti e oggetti a disposizione nell'aula. A ogni esercizio è attribuito un punteggio. Al termine della prova, il docente fa una somma totale dei punti ottenuti da ogni allievo, per un massimo di 26 punti.
Tutti i dati raccolti durante le attività di valutazione vanno a confluire, nel corso dell'anno, in una tabella chiamata *Rubrica di valutazione* (**Tabella 2**). Si tratta di uno strumento riassuntivo che, analizzato alla fine del percorso, permette di avere una visione sintetica delle competenze e delle prestazioni degli allievi nei diversi momenti dell'anno. Per il docente, la rubrica è uno strumento utile da considerare nel momento in cui è chiamato a esprimere una valutazione numerica legata alla disciplina (per esempio nel compilare la valutazione di fine anno scolastico), ma può anche fungere da spunto per una discussione con l'allievo stesso, in un'ottica formativa.

Allievo	Tempo	Lunghezza		Massa e capacità	Verifica conclusiva		Osservazioni
	Osservazione da parte del docente con rubrica di prestazione sulla lettura dell'orologio	*Prova scritta sulle misure di lunghezza (stima e disegno segmenti)*	*Valutazione fra pari sull'uso degli strumenti di misura di lunghezza*	*Osservazione da parte del docente sull'uso dello strumento durante la preparazione della merenda*	*Formulario di autovalutazione sull'intero percorso*	*Prova scritta conclusiva sull'intero percorso*	
A.	13/15	11/12	8/10 → scegliere strumenti adatti	10/10	Sì 7/11 No 1/11 Forse 3/11	19/26	Sbaglia gli orari mattino e pomeriggio, qualche incertezza sulle misure di capacità
B.	13/15	10.5/12	9.5/10 → attenzione alla precisione!	9/10	Sì 7/11 No 0/11 Forse 4/11	22/26	
C.	15/15	11/12	9/10 → migliorare la velocità	6/10 Non considera la tara	Sì 7/11 No 2/11 Forse 2/11	23/26	
D.	11/15	11.5/12	9/10 → usare strumenti adatti	4/10 Fatica nella lettura delle unità di misura	Sì 4/11 No 0/11 Forse 7/11	19.5/26	Riprendere la scala delle misure di massa e capacità, e la stima delle masse
E.	14/15	10.5/12	9/10 → non distrarsi	8/10	Sì 5/11 No 5/11 Forse 1/11	23.5/26	Imprecisioni nello scrivere gli orari mattino/pomeriggio

F.	6/15	8/12	6/10 → essere precisi, pensare prima di agire	5/10 Impegno per essere preciso	Sì 3/11 No 6/11 Forse 2/11	15/26	Risponde correttamente nelle misure di lunghezza. Fa confusione fra massa e capacità
G.	15/15	10.5/12	8.5/10 → non distrarti!	5/10 Fatica nella lettura delle unità di misura	Sì 9/11 No 0/11 Forse 2/11	23.5/26	Difficoltà nelle misure di massa e capacità (stima e utilizzo delle diverse unità di misura)
H.	14/15	9/12	10/10	6/10 Fatica nella lettura delle unità di misura	Sì 6/11 No 1/11 Forse 4/11	25/26	Necessita una ripresa sulla scala delle misure di massa e capacità
I.	14/15	10/12	10/10	8/10 Fatica nella lettura delle unità di misura	Sì 6/11 No 0/11 Forse 2/11	20.5/26	Difficoltà nelle misure di massa e capacità (stima e utilizzo delle diverse unità di misura)
L.	15/15	11/12	10/10	6/10 Difficoltà uso cilindro graduato	Sì 8/11 No 0/11 Forse 3/11	17.5	Difficoltà nell'utilizzo e nella stima di misure di massa e capacità
M.	15/15	11/12	9/10	6/10 Difficoltà uso cilindro graduato	Sì 8/11 No 1/11 Forse 2/11	21.5/26	
N.	15/15	11.5/12	9/10 → usa strumenti adatti	7/10	Sì 7/11 No 0/11 Forse 4/11	20.5/26	Errori commessi nell'uso di dm e dL (1L e 50 dL al posto di 1L e 5 dL)
O.	14/15	8.5/12	5/10 → scegli strumenti adatti	6/10	Sì 5/11 No 1/11 Forse 5/11	16.5/26	Riprendere la scala e l'utilizzo delle misure di massa e capacità
P.	10/15	9.5/12	5/10 → scegli strumenti che conosci!	3/10	Sì 5/11 No 3/11 Forse 3/11	16/26	Insicurezza generale sulle ore del mattino/pomeriggio, sulla stima delle misure di massa
Q.	13/15	11/12	8.5/9 → scegli strumenti adeguati	10/10	Sì 6/11 No 0/11 Forse 5/11	23/26	

Tabella 2
Un esempio di rubrica di valutazione compilata, con commenti personali inseriti dal docente o dai compagni nelle fasi di valutazione fra pari.

5 Conclusioni e bilancio dell'esperienza

L'esperienza in aula è stata molto articolata, e di conseguenza fare un bilancio critico completo ed esaustivo è un'operazione delicata e difficile. In questo ultimo paragrafo, ci si limiterà quindi ad esporre, in maniera libera, alcune considerazioni riguardanti potenzialità e criticità delle attività sperimentate.
Percezioni positive sono senz'altro legate all'interdisciplinarità del progetto. La collaborazione con la docente di educazione fisica è stata fruttuosa, e la vicinanza delle tematiche trattate in aula con il tipo di attività proposta in palestra ha permesso una condivisione di senso con la classe particolarmente efficace. La divisione fra aula e palestra è stata comunque piuttosto netta: ai docenti è sembrato interessante che, pur avendo una coerenza di fondo e organizzando momenti di condivisione e di scambio, il docente titolare e la docente specialista mantenessero ruoli distinti, e proponessero delle attività che sentissero proprie, nel rispetto delle diverse aree disciplinari.
La situazione – problema legata all'organizzazione dei GSFM ha funto da motore per l'intero percorso, e ha saputo motivare la classe anche a lungo termine. Dopo il lancio, avvenuto a fine settembre, gli allievi hanno avuto modo di sperimentare, allenarsi e ideare i giochi, realizzando la giornata solo a inizio giugno. Se l'idea di avere una situazione – problema che guidasse l'intera programmazione annuale di matematica per l'ambito *Grandezze e misure* poneva dei dubbi soprattutto legati a una possibile eccessiva durata nel tempo delle attività, una volta terminata la sperimentazione tutti gli attori coinvolti si sentono di poter consigliare questo tipo di approccio. La motivazione principale, cioè l'organizzazione della giornata dei GSFM, è rimasta sempre viva negli allievi, che hanno potuto così trovare senso nelle diverse fasi del progetto, anche in quelle meno legate allo sport e ai giochi di squadra.
Durante il percorso, a più riprese è stato possibile proporre alla classe situazioni concrete, ancorate al reale. Le attività relative all'ambito *Grandezze e misure*, in effetti, permettono trasposizioni didattiche particolarmente variegate, legate per esempio alle arti plastiche e alla cucina. Numerose sono state anche le occasioni, nel corso dell'anno, di far effettuare agli allievi misurazioni di ogni tipo in situazioni non previste o programmate. Questa pluralità di sguardi e di situazioni è stata senz'altro vincente, ed è stato naturale tentare di favorirla in ogni modo.
Un ultimo aspetto vincente che si intende evidenziare riguarda la strutturazione della rubrica valutativa, con il tentativo di favorire una varietà di modalità di verifica e valutazione. Seppure si tratti appunto di un tentativo, e alcuni strumenti utilizzati prestino il fianco a più di una critica da un punto di vista metodologico, l'impressione è che la strada tracciata sia quella giusta. Avere tanti strumenti diversi, e valutare in tanti modi e momenti diversi, fornisce un quadro decisamente completo e variegato dei risultati e delle competenze del singolo allievo. La rubrica, una volta completata, rappresenta un buon riassunto del percorso svolto, e gli elementi in essa registrati sono decisamente più interessanti rispetto a una semplice nota assegnata dopo una verifica di stampo classico, somministrata una volta terminate le attività.
Osservando proprio la rubrica valutativa emerge un primo aspetto negativo. Per motivi di tempo (la parte di percorso sulle misure di lunghezza si è protratta più del previsto) e, forse anche per la natura stessa delle attività proposte, gli allenamenti legati alle misure di massa e di capacità si sono rivelati non del tutto efficaci. Molti allievi hanno riscontrato delle difficoltà nel gestire le scale delle unità di misura convenzionali di queste due grandezze.

Si può ipotizzare che la decisione di trattarle insieme possa essere non del tutto vincente; probabilmente, concentrarsi su una sola grandezza alla volta avrebbe favorito la comprensione di alcuni concetti e la padronanza delle competenze di base su cui si intendeva lavorare. Le attività stesse, poi, sempre per questioni di tempo sono risultate essere agli occhi degli sperimentatori meno stimolanti ed efficaci rispetto a quelle sulle misure di lunghezza. In futuro, si ritiene importante tentare di concentrarsi di più su esperienze concrete di misurazione, lasciando più tempo per familiarizzare con le unità di misura convenzionali di massa e capacità, di certo meno vicine al vissuto quotidiano del bambino rispetto a quelle di lunghezza o di tempo.
Un ultimo aspetto migliorabile riguarda la decisione di proporre un percorso su *Grandezze e misure* interdisciplinare con l'area motoria, ma in qualche modo slegato dagli altri due ambiti disciplinari previsti per il secondo ciclo (*Numeri e calcolo* e *Geometria*), come specificato nel Piano di studio (DECS, 2015). Questa scelta, fatta per evitare che il percorso risultasse ancora più variegato e complesso di quanto non sia già stato, ha però alcuni limiti che è facile immaginare: è impossibile trattare in classe le *Grandezze e misure* senza che siano implicate anche molte competenze numeriche, e una maggiore attenzione a favorire questo tipo di dialogo intradisciplinare sarebbe auspicabile.

Bibliografia

Brandenberg, M., Diener, M., von Grünigen Mota Campos, S., Höhtker, B., Keller, B., Keller, R., & Müller, N. B. (2013). *Matematica vol.3*. Zürich: Materiale Didattico dei Grigioni.

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze*. Roma: Carocci Editore.

Castoldi, M. (2016). *Valutare e certificare le competenze*. Roma: Carocci Editore.

Cottino, L., Dal Corso, E., Francini, M., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., Ricci, M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011). *Misura*. Bologna: Pitagora.

Daynes, K. (2016). *Il libro dei perché: il tempo*. Londra: Usborne Editore.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 10.10.2019).

Gottardi, G., & Gottardi, G. (2016). *Imparo con i lapbook – Matematica e scienze – Classe terza*. Trento: Erickson Editore.

Julve, Ò., & Trius, M. (2011). *3 tappi e un barattolo*. Roma: Carlo Gallucci Editore.

Novelli, L. (2016). *Ciao, sono Tempo. Milano*: Francesco Brioschi Editore.

Ungerer, T. (1963). *Crictor, il serpente dal cuor d'oro*. Bologna: Electa Kids.

Autore/Luca Crivelli
Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera
lcrivelli@supsi.ch

Un percorso di storia della matematica nella scuola media: la quadratura di figure piane

An experience of History of Mathematics in lower secondary school: the quadrature of plane figures

ESPERIENZA DIDATTICA

Vittoria Fontana Bollini e Giovanna Lepori
Scuola media – Bellinzona 1 – Svizzera

Sunto / Il presente contributo descrive un percorso didattico di matematica rivolto ad allievi di quarta media[1]. Il progetto ha lo scopo di studiare la possibile quadratura di alcune figure piane, inserendo l'attività nel suo contesto storico, dai matematici greci del V secolo a.C. fino a Ferdinand Lindemann nel 1882. Grazie all'esplorazione e alla collaborazione, gli allievi giungono a realizzare un fascicolo con la quadratura dei principali poligoni da destinare a compagni di altre classi.

Parole chiave: scuola media; quadratura; costruzioni geometriche; situazione – problema; collaborazione tra pari.

Abstract / This contribution describes a didactic experience in mathematics for ninth grade students. The project aims to study the possible quadrature of some plane figures, framing the activity in its historical context, from Greek mathematicians of the fifth century BC to Ferdinand Lindemann in 1882. Thanks to exploration and collaboration, the students come to realize a booklet with the quadrature of the main polygons meant for schoolmates of other classes.

Keywords: lower secondary school; quadrature; geometrical constructions; realistic situation; peer collaboration.

1 Introduzione

In questo articolo si descrive il percorso sulla quadratura di figure piane realizzato in due classi di corso attitudinale[2] di quarta media. La prospettiva è quella della storia della matematica: il tema della quadratura rappresenta un punto di partenza ideale per approfondire la nascita e lo sviluppo del concetto di dimostrazione nel pensiero occidentale. La costruzione geometrica eseguita con riga e compasso, la descrizione dei suoi passi per mezzo del linguaggio e la verifica algebrica dell'equiestensione dei poligoni considerati, permettono agli allievi di confrontarsi con diversi registri semiotici e di applicare fondamentali proprietà di geometria sintetica. Infine, la modalità di lavoro proposta per il percorso, sulla scia della pedagogia per progetti, mira ad attivare competenze collaborative e comunicative. Per sviluppare questo percorso ci siamo riferite ad alcune fonti, tra cui Bunt, Jones e Bedient (1987), D'Amore e Sbaragli (2017) e Odifreddi (2011).

1. In Canton Ticino, dopo le scuole elementari è previsto un ciclo di scuola secondaria della durata di quattro anni.
2. Negli ultimi due anni di scuola media ticinese gli allievi sono suddivisi in classi di due livelli in base alle capacità in matematica e in tedesco: il livello attitudinale e il livello base.

2 Quadro concettuale

La valorizzazione della storia della matematica nella programmazione didattica non è certamente una novità e le sue ricadute, in termini di apprendimento, sono riconosciute da tempo. Si tratta in alcuni casi dell'esposizione aneddotica da parte del docente della vita e delle scoperte effettuate dai matematici; in altri casi invece si presentano attività classiche come la conversione da diversi sistemi numerici del passato (ad esempio i geroglifici egizi e i numeri romani) o l'applicazione di procedure che derivano dall'antichità (come nel caso della misurazione dell'altezza della piramide di Cheope e del crivello di Eratostene). In questo percorso si intende piuttosto dare la possibilità agli allievi di confrontarsi con gli aspetti epistemologici di un problema matematico, di immergerli negli ostacoli che questo ha comportato storicamente e di stimolarli, attraverso una situazione coinvolgente, a superarli. A questo proposito riteniamo utile, prima di affrontare le fasi del percorso, fornire alcune indicazioni preliminari sulle radici storiche della quadratura di figure piane e sulle costruzioni geometriche che verranno utilizzate.

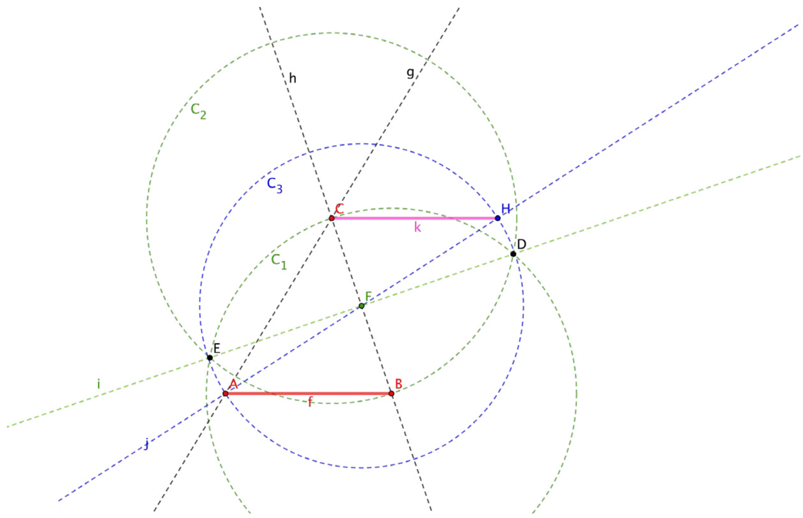
2.1 Conoscenze storiche

Le civiltà che precedettero o affiancarono quella greca interpretavano i fenomeni naturali sulla base delle loro credenze mitologiche e religiose. Tali civiltà, ad esempio quella egizia o quella babilonese, svilupparono, allo scopo di facilitare il commercio, l'agricoltura ed altri aspetti della vita quotidiana, una matematica di tipo pratico e dogmatica che forniva ricette e metodi senza giustificare le proprie affermazioni. Per gli storici, un tale approccio era certamente collegato alla struttura politico-sociale di quelle civiltà.
È intorno al 600 a.C., con il fiorire della civiltà greca, che tra i filosofi nasce una diversa visione del mondo, basata sulla ragione. La mente umana diventa l'arma più potente per indagare la natura delle cose e il suo strumento privilegiato è la matematica. Con lo sviluppo della democrazia greca, i cittadini non sono più sottomessi all'autorità ma sono liberi di partecipare al dibattito pubblico. Anche i matematici avvertono per la prima volta il bisogno di giustificare i propri risultati. La matematica diviene allora dimostrativa: non si limita più a fornire delle ricette, ma indaga sul problema ben più importante del perché. Se la matematica fin dall'inizio è stata caratterizzata da due filoni principali, l'aritmetica, con il concetto di "molteplicità" e quindi di numero, e la geometria, con quello di spazio, è pur vero che la matematica greca privilegia questo secondo filone, nel tentativo di evitare lo scoglio delle grandezze incommensurabili.
In ambito geometrico, lo sviluppo della dimostrazione è uno degli episodi più significativi della storia della matematica. Agli inizi la dimostrazione si limitava a coincidere con la costruzione geometrica, effettuata con riga non graduata e compasso. In seguito, alla costruzione fu affiancata la trascrizione scritta dei suoi passaggi. Ben presto i geometri greci compresero che la trascrizione permetteva di generalizzare la procedura di giustificazione, passando dal particolare al generale.
Se Talete (624-545 a.C. circa) è considerato il padre della geometria dimostrativa e Pitagora (570-500 a.C. circa) il più importante matematico greco, è a Ippocrate di Chio, vissuto attorno al 440 a.C., che viene attribuita la più antica dimostrazione matematica giunta fino a noi in una forma presumibilmente autentica: la quadra-

tura della lunula. Noi non possediamo l'opera di Ippocrate, ma un sommario di Simplicio del 530 d.C. che discute gli scritti del 335 a.C. di Eudemo, il quale a sua volta aveva riassunto l'opera di Ippocrate.
L'importanza che il teorema di Ippocrate riveste nella storia della matematica non è legata unicamente alla presunta autenticità della sua dimostrazione. Il fatto è che con la quadratura delle lunule di Ippocrate si generò fra i matematici greci l'errata convinzione che fosse possibile quadrare il cerchio. Ma, nonostante gli sforzi profusi, il problema restò irrisolto fino a quando, nel 1882, il matematico tedesco Ferdinand Lindemann riuscì a dimostrare definitivamente che la quadratura del cerchio è un compito impossibile, trasferendo il problema dall'ambito geometrico a quello numerico (Dunham,1992).

2.2 Costruzioni con riga non graduata e compasso

Uno dei problemi che impegnò i matematici del V secolo a.C. fu quindi quello di quadrare una figura piana. Ma cosa si intende per quadratura di una figura piana?
La quadratura di una figura piana è la costruzione con riga non graduata e compasso di un quadrato avente area uguale a quella della figura piana considerata.
L'idea di ricondurre l'area di una figura piana qualsiasi a quella di un quadrato fu un problema particolarmente affascinante per il popolo greco. Quadrare qualsiasi figura piana, anche la più complessa, significava realizzare il sogno di un mondo governato dalla ragione e dall'ordine, sostituendo la regolarità all'irregolarità, la simmetria all'asimmetria, la perfezione all'imperfezione, la razionalità all'irrazionalità.
Gli strumenti utilizzati, la riga non graduata e il compasso, erano strumenti essenzialmente poveri, a disposizione di tutti e alla portata delle tecnologie dell'epoca, ma soprattutto erano strumenti prediletti perché con il primo si poteva costruire la figura più perfetta ad una dimensione, la linea retta, e con il secondo quella a due dimensioni, il cerchio. Con tali strumenti, i matematici dell'epoca realizzarono costruzioni geometriche complesse e ingegnose.
Volendo procedere in maniera del tutto filologica, occorrerebbe tener conto del fatto che, nella matematica greca, il compasso veniva inteso come "collassante" o "molle", cioè incapace di mantenere la sua apertura nel momento in cui si cambiava il centro della circonferenza da tracciare: la possibilità di riportare misure con questo strumento era pertanto preclusa (Montagnoli, 2014).
Vediamo come, con questo vincolo, si può ad esempio costruire un segmento k parallelo e congruente al segmento f (**Figura 1**).



Costruzione del segmento k, parallelo al segmento f e ad esso congruente.

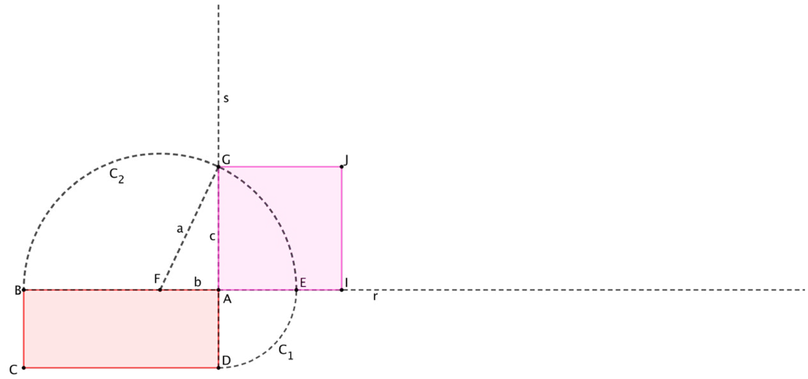
1. Sia f il segmento di estremi A e B. Sia C un punto non appartenente al segmento f.
2. Si tracciano le rette g e h rispettivamente passanti per A e C e per B e C.
3. Si tracciano le circonferenze C_1 $(B;\overline{BC})$ e C_2 $(C;\overline{CB})$; siano E e D i punti di intersezione tra le circonferenze C_1 e C_2.
4. Si traccia la retta i, passante per i punti E e D. Sia F il punto di intersezione delle rette i e h. F è punto medio del segmento BC.
5. Si traccia la retta j passante per A e F e la circonferenza C_3 $(F;\overline{FA})$.
6. Sia H il punto di intersezione della retta j con la circonferenza C_3, diverso da A.
7. Sia k il segmento CH. k è il segmento parallelo a f e ad esso congruente.

Figura 1
Costruzione con riga non graduata e compasso "collassante" o "molle".

Nel percorso realizzato in classe abbiamo deciso di lavorare con un comune compasso e, esplicitando la nostra scelta agli allievi, di utilizzarlo anche per riportare misure. Si può infatti dimostrare che, con il compasso collassante, è possibile tracciare una circonferenza con un raggio pari a un segmento dato. Il vantaggio della nostra scelta effettuata in classe è in termini pratici notevole: il numero di passi che caratterizzano le quadrature si riduce notevolmente ma le costruzioni non perdono nulla della loro bellezza.
Vedremo di seguito le costruzioni fondamentali, realizzate con GeoGebra, che a partire dalla quadratura del rettangolo portano a quella delle lunule. Sono in questa sede lasciate al lettore le costruzioni più comuni e frequenti, ad esempio il punto medio di un segmento, la perpendicolare e la parallela ad una retta data passante per un punto.

2.2.1 La quadratura del rettangolo

Il primo passo di questo percorso è la quadratura del rettangolo. Il procedimento è descritto nella Proposizione 14 del secondo libro degli *Elementi* di Euclide (IV secolo a.C. – III secolo a.C.). Nella descrizione del procedimento (**Figura 2**) si danno per già conosciute la procedura per trovare il punto medio di un segmento e quella per costruire un quadrato dato il lato con riga non graduata e compasso.



Sia $ABCD$ un rettangolo

1. Si traccia la semiretta r con origine in B passante per A.
2. Si traccia la circonferenza $C_1\ (A;\overline{AD})$ di centro A e raggio AD.
3. Sia E il punto di intersezione tra la circonferenza C_1 e la semiretta r.
4. Sia F il punto medio di BE.
5. Si traccia la circonferenza $C_2\ (F;\overline{FE})$ di centro F e raggio FE.
6. Si traccia la semiretta s con origine in D passante per A.
7. Sia G il punto di intersezione della semiretta s con la circonferenza C_2.
8. Si costruisce il quadrato $AIJG$ di lato AG.

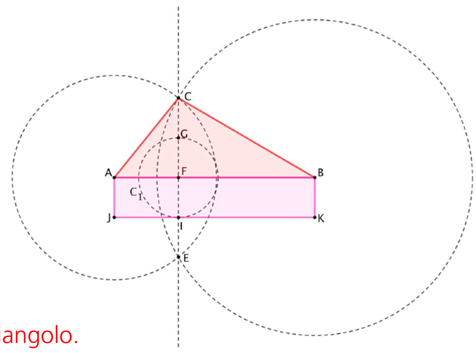
Figura 2
Procedura per la quadratura di un rettangolo.

Dimostriamo che l'area del rettangolo $ABCD$ è uguale a quella del quadrato $AIJG$.

Sia: $\overline{FG} = a;\ \overline{FA} = b;\ \overline{GA} = c$. Allora $\overline{BA} = a+b;\ \overline{AD} = a-b$.
Il triangolo AGF è rettangolo in A. Quindi per il teorema di Pitagora: $b^2+c^2=a^2$.
L'area del rettangolo $ABCD$: $A_{ABCD} = (a+b) \cdot (a-b)$.
L'area del quadrato $AIJG$: $A_{AIJG} = c^2$.
Per il teorema di Pitagora: $A_{ABCD} = (a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2=c^2=A_{AIJG}$.

2.2.2 La quadratura del triangolo

Nella costruzione che segue (Figura 3) si danno per conosciute la costruzione con riga non graduata e compasso della retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data, la procedura per trovare il punto medio di un segmento e la costruzione con riga non graduata e compasso di un rettangolo dati due segmenti.



Sia ABC un triangolo.

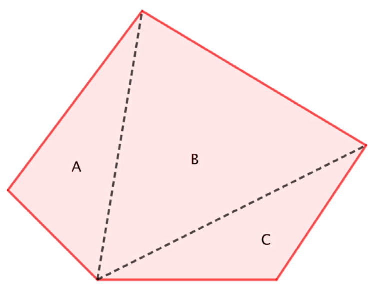
1. Si traccia la retta r passante per C e perpendicolare al segmento AB.
2. Sia F l'intersezione tra la retta r e il segmento AB.
3. Si trova il punto medio G del segmento FC.
4. Sia I il punto di intersezione tra la retta r e la circonferenza $C_1\ (F;\overline{FG})$ di centro F e raggio FG.
5. Si costruisce il rettangolo $AJKB$ di lati AB e AJ parallelo e congruente a $\overline{FI}$.

Figura 3
Procedura per la costruzione di un rettangolo equivalente a un triangolo dato.

L'area del triangolo ABC è equivalente a quella del rettangolo $AJKB$. La dimostrazione è lasciata al lettore. Una volta costruito il rettangolo equivalente al triangolo di partenza, grazie al procedimento illustrato nel paragrafo precedente si potrà costruire il quadrato equivalente al rettangolo ottenuto. Poiché l'equivalenza gode della proprietà transitiva, il triangolo di partenza sarà equivalente al quadrato così ottenuto.

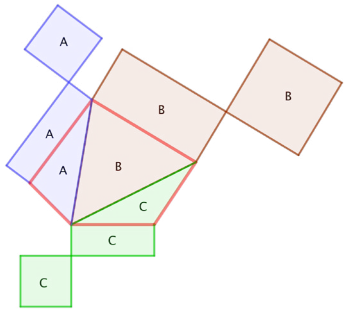
2.2.3 La quadratura del poligono

Consideriamo un poligono qualsiasi, come quello in Figura 4. La procedura per la quadratura di un poligono qualsiasi sfrutta le costruzioni viste nei due paragrafi precedenti, unite alla possibilità di scomporre ogni poligono in triangoli.



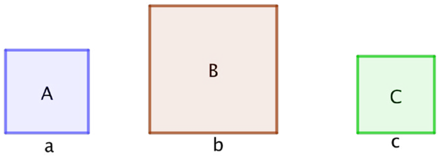
Si tracciano le diagonali del poligono che partono da un singolo vertice, suddividendolo in triangoli di area A, B, C. L'area del poligono è quindi $A+B+C$.

Figura 4
Suddivisione del poligono in triangoli.



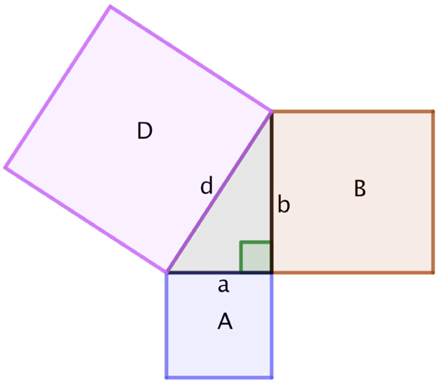
Si quadrano i triangoli di area A, B, C applicando la procedura del paragrafo precedente. I quadrati ottenuti hanno area A, B, C.

Figura 5
Quadratura dei triangoli che compongono il poligono.



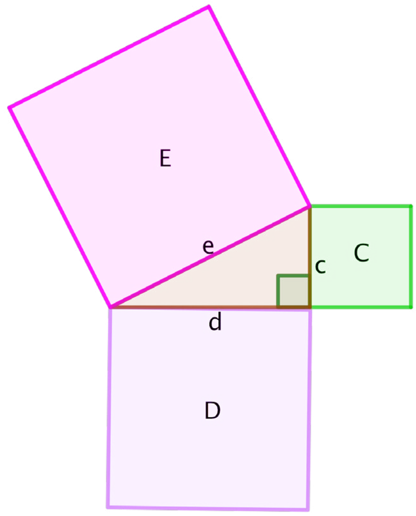
Siano a, b, c i lati dei quadrati di area rispettivamente A, B, C.

Figura 6
Quadrati equiestesi ai triangoli che compongono il poligono.



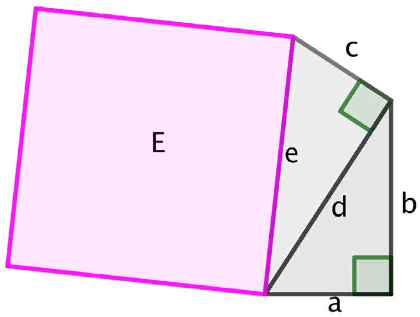
Si costruisce il triangolo rettangolo di cateti a, b. Sia d la sua ipotenusa. Si costruisce il quadrato di lato d. Per il teorema di Pitagora:
$D=d^2=a^2+b^2=A+B$.

Figura 7
Costruzione del quadrato D.



Si costruisce il triangolo rettangolo di cateti d, c. Sia e la sua ipotenusa.
Si costruisce il quadrato di lato e. Per il teorema di Pitagora:
$E=e^2=d^2+c^2=D+C$.

Figura 8
Costruzione del quadrato E equiesteso al poligono dato.



I due passi delle **Figure 7** e **8** possono far parte di un'unica costruzione, come si può osservare in questa figura.

Figura 9
Costruzione unica del quadrato E equiesteso al poligono dato.

Dimostriamo che il quadrato di lato e ha la stessa area del poligono di partenza:

$$E=e^2=d^2+c^2=a^2+b^2+c^2=A+B+C.$$

Questa procedura può essere facilmente adattata a un poligono qualsiasi, anche nel caso in cui la figura sia la differenza tra due aree quadrabili, utilizzando ancora il teorema di Pitagora. Nel caso mostrato in **Figura 10**, infatti, è sufficiente quadrare il triangolo di colore bianco. Una volta fatto ciò, si può utilizzare il teorema di Pitagora per ricavare un quadrato equivalente al poligono di partenza.

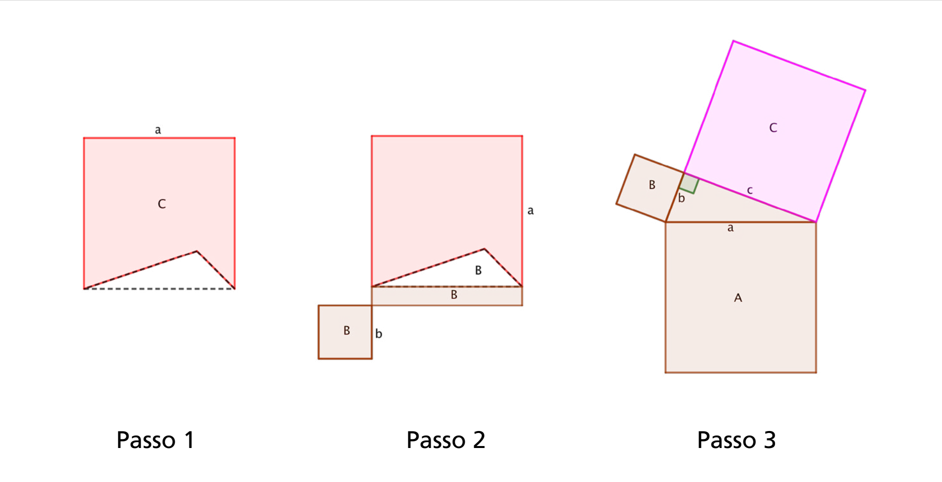
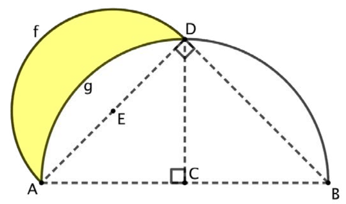


Figura 10
Quadratura del pentagono di area C.

2.2.4 La quadratura della lunula di Ippocrate

La lunula è una figura piana delimitata da due archi di circonferenza. Ippocrate non quadrò la lunula in generale, ma alcune particolari lunule, che aveva prima attentamente costruito (**Figura 11**).



1. Si traccia una semicirconferenza di centro C e diametro AB.
2. Si costruisce in essa il triangolo isoscele ABD.
3. Sia E il punto medio del segmento AD.
4. Si traccia la semicirconferenza f di centro E e diametro AD.
5. Si consideri il quarto di circonferenza g. La figura racchiusa tra i due archi f e g prende il nome di lunula di Ippocrate.

Figura 11
Costruzione della lunula di Ippocrate.

Il ragionamento di Ippocrate per quadrare la lunula si fonda su tre teoremi:
1. Il teorema di Pitagora.
2. Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo (Talete).
3. Le aree di due cerchi stanno tra loro come i quadrati dei loro diametri.

Ippocrate dimostrò che l'area della particolare lunula (in giallo in **Figura 12**) è uguale a quella di un triangolo (il triangolo ACD, in viola in **Figura 12**). Avendo già dimostrato la quadrabilità dei triangoli, ne consegue che la lunula è quadrabile.

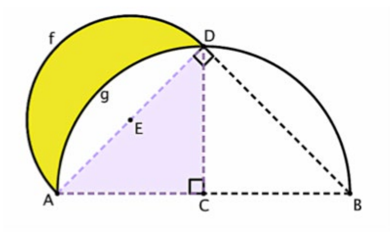


Figura 12
Dalla lunula al triangolo.

Seguiamo i dettagli della sua dimostrazione.

Per comodità poniamo:

A_1: area del semicerchio ADf	A_3: area del quarto di cerchio $ACDg$
A_2: area del semicerchio ADB	A_4: area del segmento circolare ADg
A_L: area della lunula	A_T: area triangolo ACD

– Il triangolo ABD è rettangolo e isoscele. Per il **Teorema 1**:
$(\overline{AB})^2=(\overline{AD})^2+(\overline{BD})^2=2\cdot(\overline{AD})^2$.

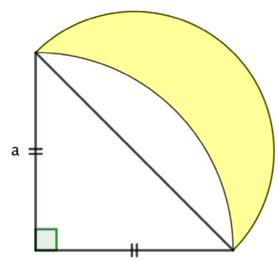
– Dato che AB è il diametro del semicerchio ADB e AD è quello del semicerchio ADf, per il **Teorema 3**: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{AD}^2}{2\cdot\overline{AD}^2}=\frac{1}{2}$.

Ne consegue che:

– L'area del semicerchio ADf è uguale all'area del quarto di cerchio $ACDg$:
$A_1=\frac{1}{2}A_2=A_3$.

– Sottraendo ad ADf e ad $ACDg$ il segmento circolare ADg, si ottiene che l'area della lunula è equivalente all'area del triangolo ACD:
$A_L=A_1-A_4=A_3-A_4=A_T$.

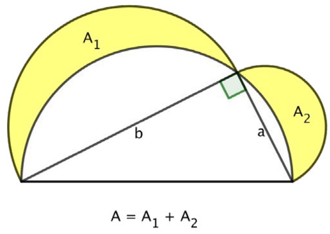
Vediamo ora la quadratura di altre lunule, riportate qui sotto, di cui daremo una dimostrazione con gli strumenti algebrici alla portata degli allievi di quarta media.



L'area della lunula (A_L) è equivalente a quella del triangolo rettangolo isoscele (A_T) su cui è costruita.
Sia a il cateto del triangolo rettangolo isoscele. L'area della lunula si può ottenere come differenza fra l'area del semicerchio e l'area del segmento circolare. In simboli:

$$A_L=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^2\pi=\frac{1}{2}a^2=A_T$$

Figura 13
Quadratura della lunula costruita sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele.



L'area complessiva delle due lunule (A) è uguale all'area del triangolo rettangolo (A_T) su cui sono costruite.
Siano a, b i cateti del triangolo rettangolo.

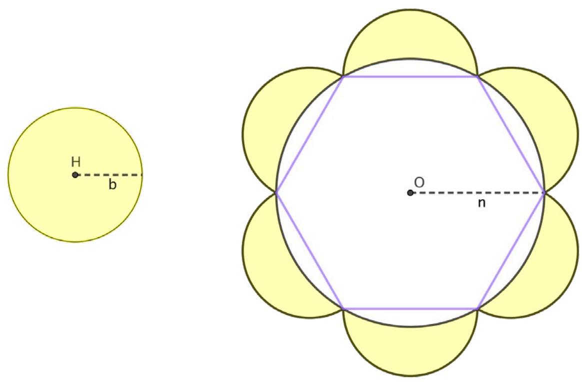
$$A=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2+\frac{ab}{2}-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=\frac{ab}{2}=A_T$$

Figura 14
Quadratura delle lunule costruite sui cateti di un triangolo rettangolo.

Anche in questi casi, avendo già dimostrato la quadrabilità dei triangoli, ne consegue quella delle lunule.
Ippocrate riuscì, a quanto sembra, a quadrare tre diversi tipi di lunule, mentre nel 1771 il matematico Leonhard Euler trovò altri due tipi di lunule quadrabili.
Alla fine del ventesimo secolo N. G. Tschebatorew e A. W. Dorodnow dimostrarono che queste cinque erano proprio le uniche lunule quadrabili.

2.2.5 Tentativi di quadrare il cerchio

Come abbiamo già detto, la quadratura delle lunule di Ippocrate riaccese la speranza, nei matematici, di riuscire a quadrare il cerchio. Molti furono i tentativi che si susseguirono nei secoli. Ne vediamo uno (**Figura 15**) che Alessandro di Afrodisia (210 circa) attribuì allo stesso Ippocrate.



1. Si costruiscono le circonferenze C_1 $(H;b)$ e C_2 $(O;n)$ con $n=2b$.
2. Si costruisce l'esagono E inscritto in C_2.
3. Si costruiscono sei semicirconferenze i cui diametri sono i lati dell'esagono.

Si consideri la regione in giallo formata dal cerchio C_1 e dalle sei lunule, delimitate dalle sei semicirconferenze e da C_2.

Figura 15
Le lunule costruite sull'esagono regolare.

Dimostriamo che l'area della regione in giallo è equivalente a quella dell'esagono.

Per comodità poniamo:

A_R: area della regione gialla	A_E: area dell'esagono
A_L: somma delle aree delle sei lunule	A_1: area di C_1
A_2: area di C_2	A_S: area di un semicerchio di diametro n

– La figura a destra può essere vista come la composizione del cerchio C_2 più sei lunule oppure come l'esagono E più i sei semicerchi costruiti sui suoi lati. Da ciò deriva la seguente uguaglianza: $A_E+6\cdot A_s=A_2+A_L$.

– Il raggio del cerchio C_2 è il doppio di quello di C_1. Quindi: $A_2=4\cdot A_1$.

– Le semicirconferenze hanno lo stesso raggio di C_1. Quindi: $A_1=2\cdot A_s$.

Ne consegue che: $\begin{cases} A_E+6\cdot A_s=A_E+3\cdot A_1 \\ A_2+A_L=4\cdot A_1+A_L \end{cases}$ quindi: $A_E=A_1+A_L=A_R$.

Conseguenza di questo risultato è che l'area della circonferenza C_1 è data dalla differenza tra l'area dell'esagono e quella delle lunule.
Secondo Alessandro di Afrodisia, Ippocrate avrebbe ricavato da questo risultato la quadrabilità del cerchio, data la quadrabilità dell'esagono e delle lunule. Il vizio del ragionamento sta nel fatto che la quadrabilità delle lunule costruite sull'esagono non è dimostrata. In verità tali lunule non sono quadrabili. Secondo la maggior parte degli studiosi, è improbabile che Ippocrate sia incappato in un errore tanto grossolano.

2.2.6 La soluzione al problema della quadratura del cerchio

Come abbiamo già anticipato, la parola fine all'annoso problema della quadratura del cerchio è stata messa dal matematico tedesco Ferdinand Lindemann che nel 1882 dimostrò che il cerchio non è quadrabile, trasferendo il problema dall'ambito geometrico a quello numerico.
Vediamo a grandi linee la sua dimostrazione.

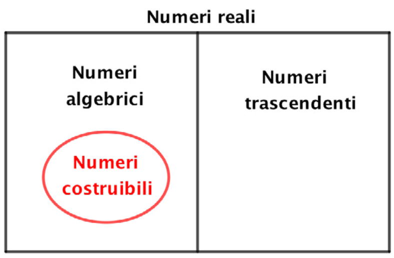


Figura 16
Numeri costruibili con riga non graduata e compasso.

– L'insieme dei numeri reali si suddivide in due insiemi disgiunti: quello dei numeri algebrici, soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi, e quello dei numeri trascendenti. L'insieme dei numeri costruibili, con riga non graduata e compasso, è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri algebrici (**Figura 16**).

– Si consideri il cerchio di raggio 1 e quindi di area π. Per disegnare un quadrato con pari area occorrerà disegnare il suo lato, di misura $\sqrt{\pi}$.
– Lindemann dimostrò che π e $\sqrt{\pi}$ sono numeri trascendenti e quindi non costruibili.

3 Le fasi del percorso

Dopo aver ripercorso gli elementi storici e concettuali della quadratura delle figure piane, possiamo addentrarci nella sua trasposizione didattica. In questo articolo verrà presentato l'intero percorso, realizzato in 15 ore lezione, ma è possibile ridurne la durata apportando le modifiche che il docente riterrà necessarie: ad esempio guidando maggiormente l'attività o tralasciando la realizzazione del fascicolo. Il percorso è stato realizzato in due corsi paralleli di quarta attitudinale; ciò ha permesso di lavorare, in alcuni momenti a classi unificate e in modalità *team teaching*: benché per chi scrive rappresenti un valore aggiunto, questa modalità di lavoro non è una condizione necessaria alla realizzazione del percorso.

3.1 Introduzione

3.1.1 La valenza culturale della quadratura

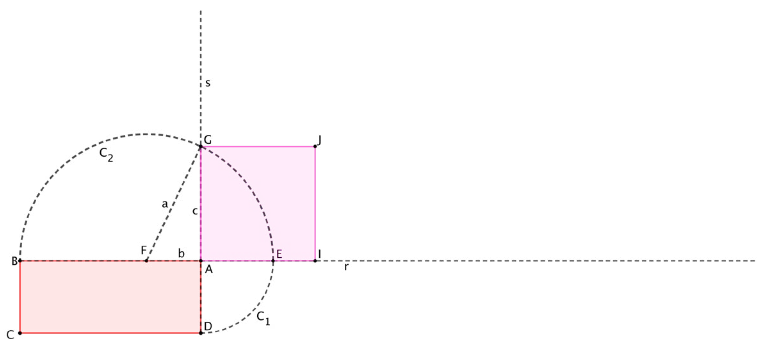
Il percorso sulla quadratura delle figure piane prende avvio da un'analisi di tipo semantico: propone cioè agli allievi, sulla base di testi autentici presenti nel web, un *brain storming* iniziale sul significato dell'espressione idiomatica "quadrare il cerchio" (**Allegato 1**).
Con questa riflessione gli allievi hanno la possibilità di avvicinarsi alla valenza culturale della matematica e all'utilizzo dei suoi termini, che, entrando a far parte del linguaggio comune, possono assumere un senso figurato. Gli estratti si riferiscono al mondo del cinema, del calcio e della moda, temi che stimolano la partecipazione degli allievi in quanto vicini ai loro interessi. Può essere sicuramente utile affrontare questa introduzione in collaborazione con il docente di italiano, per approfondire, ad esempio, l'uso delle figure retoriche o del linguaggio settoriale.
In questa prima fase è importante che il docente eviti di prendere posizione sulla possibilità di quadrare il cerchio con riga e compasso, così da mantenere viva la curiosità degli allievi. Nelle nostre classi, ad esempio, era emersa l'ipotesi che l'espressione significasse «riuscire a fare una cosa molto difficile».
Dopo aver sottoposto ad interpretazione l'espressione idiomatica nella sua globalità, si affronta più in dettaglio il significato del verbo "quadrare" dal punto di vista matematico: anche in questo caso, il docente, in forma dialogata, chiede alla classe di formulare delle ipotesi. Gli allievi, spesso, utilizzano il concetto di uguaglianza tra figure geometriche senza essere pienamente consapevoli della grandezza alla quale fanno riferimento. Domande del docente come:
– Cosa intendi per "uguali"? Nella forma?
– Nella lunghezza dei perimetri? Nella misura dell'area della superficie?
– Puoi venire alla lavagna a disegnare due figure che ritieni uguali? Sono tutti d'accordo?

aiutano i discenti a esplicitare la relazione di uguaglianza tra due figure piane. Grazie alla guida e ai feedback del docente, gli allievi giungono a comprendere il significato

della quadratura in senso geometrico.
Gli studenti affrontano in seguito, a coppie, la lettura della scheda (**Allegato 2**) nella quale si sottolinea il senso e il valore di questa costruzione nella civiltà dell'antica Grecia e se ne istituzionalizza il significato.

3.1.2 La quadratura del rettangolo

Un primo esempio di quadratura con riga non graduata e compasso permette di verificare le conoscenze pregresse necessarie per affrontare il percorso, quali il confronto della misura della superficie di due poligoni e l'utilizzo corretto di riga e compasso per costruzioni di base come riportare segmenti, determinare punti medi e costruire quadrati (**Allegato 3**). Alla classe, suddivisa in gruppi, viene mostrata l'immagine della quadratura del rettangolo. Agli allievi è richiesto inizialmente di dimostrare l'equiestensione del rettangolo e del quadrato dati per mezzo di un'uguaglianza algebrica (domanda a), e successivamente di riprodurre la costruzione a partire da un nuovo rettangolo (domanda b), elencandone i passi risolutivi (domanda c).
In generale le prime due consegne vengono affrontate da allievi di quarta media senza troppe difficoltà: la dimostrazione algebrica presuppone infatti la conoscenza del teorema di Pitagora e di semplici tecniche di calcolo (vedi **par. 2.2.1**).
Più ostica risulta invece la terza richiesta della scheda, quella cioè di elencare i passi della costruzione, in quanto gli allievi potrebbero faticare a esplicitare il processo risolutivo seguito e a utilizzare un linguaggio specifico per descrivere procedure di tipo geometrico. Sarà quindi fondamentale, nello svolgimento di tutto il percorso, prestare particolare attenzione allo sviluppo di una terminologia adeguata, mostrando agli allievi con esempi concreti i pericoli di un linguaggio impreciso e la conseguente necessità di utilizzare termini chiari e condivisi. Per dare un esempio concreto delle difficoltà incontrate nella stesura dei passi della quadratura del rettangolo nelle nostre classi, riportiamo la versione redatta da un gruppo di allievi (**Figura 17**).



1. Apriamo il compasso su AD e spostiamo il punto D lungo la retta AB.
2. Poi troviamo il punto centrale F della retta AB e tracciamo un semicerchio.
3. Prolunghiamo la retta AD fino a raggiungere il semicerchio.
4. Riportiamo con il compasso l'apertura AG spostando la punta sulla retta AB, lasciando l'altra punta su AE, creando così il punto I.

Figura 17
Bozza iniziale della descrizione della quadratura del rettangolo.

Attraverso la messa in comune del processo risolutivo adottato e la riflessione sul linguaggio geometrico, verrà costruita una versione finale e il più possibile rigorosa della costruzione, poi riportata su una scheda e consegnata ad ogni allievo all'inizio della lezione successiva (Allegato 4).
Tra gli scopi di questa attività vi è quindi anche quello di lavorare sulla terminologia, affinché possa servire da riferimento per il lavoro successivo: come abbiamo visto in precedenza, la quadratura del rettangolo rappresenta infatti un passaggio chiave per dimostrare equiestensioni di molte altre figure piane.
Questa fase del percorso si conclude con una riflessione del docente di tipo epistemologico sul concetto di dimostrazione (Allegato 5). È infatti importante chiarire agli allievi che la dimostrazione algebrica, come quella da loro utilizzata nella quadratura del rettangolo, ha una storia piuttosto recente nello sviluppo del pensiero scientifico occidentale ed è la conclusione di un lungo percorso iniziato proprio nella Grecia antica (vedi par. 2.1). Anche in questo caso è possibile collaborare con il docente di storia che, ad esempio tramite l'analisi dell'affresco La scuola di Atene di Raffaello, può ripercorrere i tratti salienti della nascita del pensiero razionale e della democrazia ateniese.

3.2 Situazione – problema

La situazione – problema, proposta verbalmente alla classe, è la seguente:

> Il compito della vostra classe è quello di elaborare un fascicolo, destinato ad allievi di quarta media, con la raccolta delle quadrature delle principali figure piane. Per preparare le bozze del fascicolo avete a disposizione 8 ore lezione, il computer e, naturalmente, la consulenza del docente.

La consegna è volutamente molto aperta e richiama l'idea del lavoro per progetti: al quarto anno di scuola media, gli allievi sentono la forte esigenza di poter organizzare in modo autonomo il proprio apprendimento e scegliere liberamente come affrontare un determinato compito. Questa situazione problema fa inoltre leva sul forte sentimento dell'appartenenza al gruppo, spingendo la classe a cercare le forme migliori di collaborazione per raggiungere l'obiettivo richiesto. Molte sono senz'altro le vie percorribili per un'efficace modalità di lavoro e anche nei nostri due corsi abbiamo potuto osservare due scelte differenti: nella prima classe è stata nominata un'allieva "responsabile" che assegnava ai compagni le figure da quadrare e ne coordinava il lavoro, nella seconda invece si è istaurata una sorta di leadership condivisa, con discussioni e decisioni collettive. In entrambe le classi, le quadrature sono state distribuite in base al numero di lati e affrontate in piccoli gruppi. Gli allievi hanno intuito velocemente che la via maestra per quadrare le diverse figure piane è quella di trasformarle in rettangoli con la stessa area: la buona conoscenza delle proprietà di triangoli, quadrilateri particolari e poligoni regolari ha permesso loro di eseguire la costruzione senza incontrare grandi difficoltà (Figura 18).

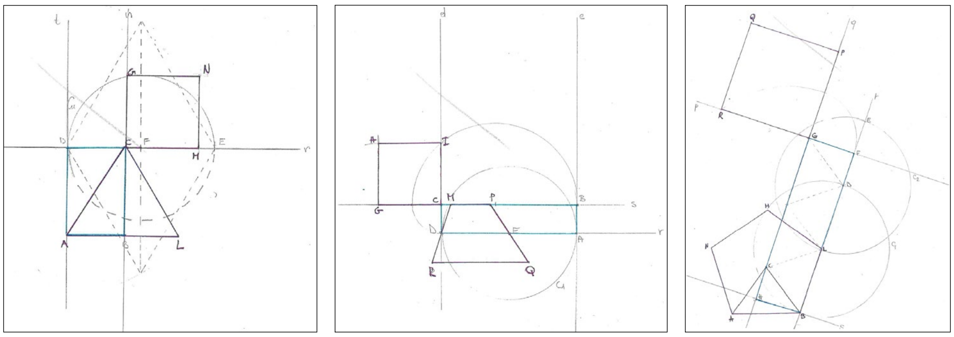


Figura 18
Quadratura del triangolo isoscele, del trapezio e del pentagono regolare.

Uno dei nodi centrali dell'attività è stato quello di applicare il teorema di Pitagora per la quadratura dei poligoni generici, confrontando di volta in volta la superficie di tre quadrati (**Figura 19**). In una classe è stato sufficiente sollecitare una discussione collettiva per attivare questa risorsa, nell'altra è stato necessario un aiuto maggiore da parte della docente.

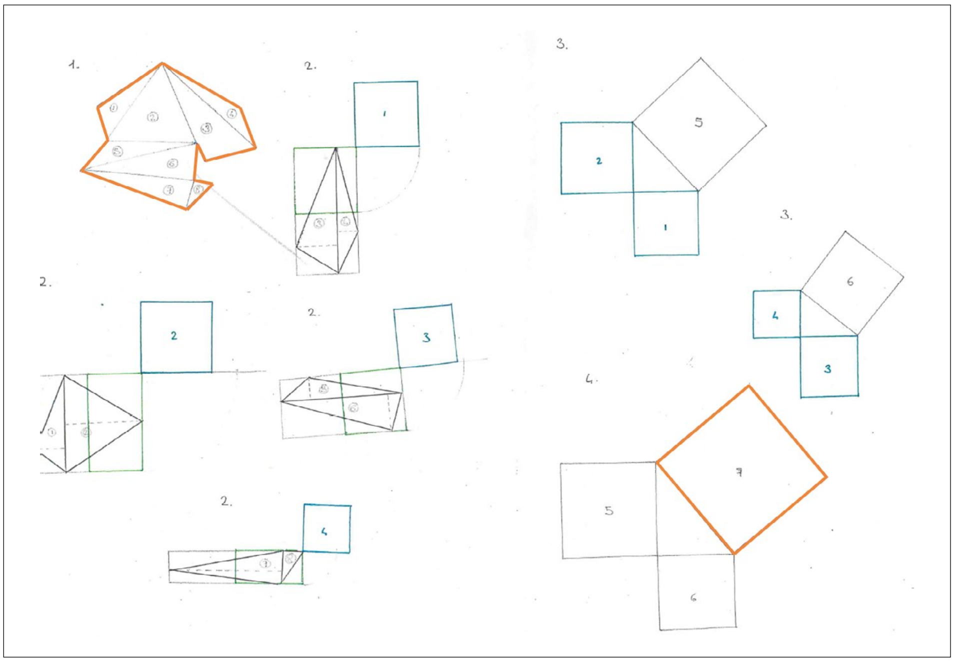


Figura 19
Quadratura di un ennagono generico.

Due sono gli aspetti delicati in questa fase del percorso: da un lato la precisione nel disegno e, come già ribadito, la descrizione dei passi per la costruzione. Come detto in precedenza, l'utilizzo di un linguaggio chiaro e preciso nelle costruzioni geometriche, rappresenta una grande sfida per l'allievo di scuola media, che va quindi accompagnato da vicino. Nel nostro caso è risultato opportuno ritirare il materiale prodotto dai vari gruppi alla fine di ogni lezione e annotare i feedback da fornire all'inizio della lezione successiva: correzioni, riflessioni e spunti che possono venire discussi con tutta la classe o in modo mirato nei diversi gruppi. In questo ultimo caso, per noi è stato utile preparare delle liste di controllo da proporre agli allievi tramite la lavagna luminosa e stimolarli così ad accordarsi su alcune scelte di tipo editoriale o sulla formulazione dei passi che venivano utilizzati con maggior frequenza (**Allegato 6**).
Gli allievi hanno deciso di redigere i passi delle loro costruzioni con il computer;

questa scelta, se da un lato ha permesso di migliorare il fascicolo in termini estetici e di chiarezza, dall'altro ha però comportato un necessario approfondimento del *tool Equation* a disposizione del programma Word. Naturalmente, maggiori saranno la precisione e la completezza delle costruzioni richieste dal docente, maggiore sarà il tempo che gli allievi dovranno dedicare alla preparazione del fascicolo. Anche il grado di pilotaggio da parte del docente influisce notevolmente sulla durata della situazione – problema: la durata del percorso può variare notevolmente se si fornisce agli allievi una rappresentazione iniziale delle figure da quadrare come è stato fatto nel caso del rettangolo.

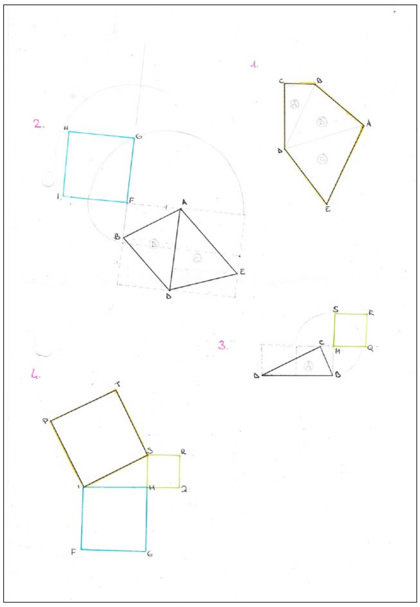
3.3 Approfondimento

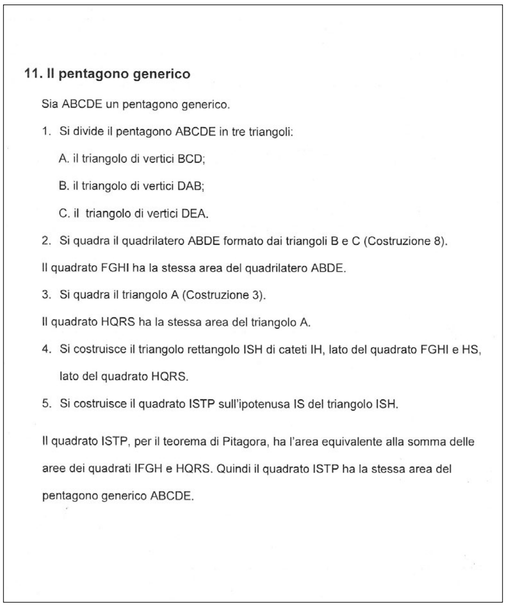
Gli allievi, dopo aver affrontato la quadratura delle figure poligonali, si sono interrogati spontaneamente su quella delle figure curvilinee, dalla quale il percorso ha avuto origine. Abbiamo quindi proposto una riflessione a gruppi sulle lunule di Ippocrate, dopo aver introdotto la figura del matematico greco (Allegato 7). La dimostrazione algebrica dell'equivalenza tra l'area delle lunule e quella del triangolo rettangolo su cui sono costruite, rende la costruzione di questa quadratura di semplice esecuzione e si riduce di fatto a quella del triangolo (vedi par. 2.2.4).
È stato interessante notare come i gruppi che avevano lavorato sulla quadratura dei triangoli, si siano in questa occasione messi a disposizione dei loro compagni spontaneamente in qualità di tutor, come nel modello dell'apprendimento cooperativo Jigsaw[3]. 3
Al termine di questa attività, il docente informa la classe dei molti tentativi realizzati nel corso dei secoli per quadrare il cerchio con riga non graduata e compasso e della dimostrazione della sua impossibilità individuata nel 1882 (vedi par. 2.2.6). Diversi allievi delle nostre classi hanno reagito con stupore e un pizzico di delusione a questo finale inatteso della storia della quadratura. Probabilmente, a causa delle aspettative implicite che caratterizzano il contratto didattico, alcuni allievi ritengono che ogni problema posto dal docente porti sempre a una soluzione e sono quindi disorientati dalla non quadrabilità del cerchio per mezzo di strumenti geometrici. Nel corso di una lezione riassuntiva, il docente riprende in forma dialogata gli aspetti disciplinari più rilevanti emersi durante il lavoro: dalle proprietà delle figure piane, necessarie per costruire il rettangolo equiesteso al poligono di partenza, all'applicazione del teorema di Pitagora nel caso di poligoni generici.

3.4 Realizzazione del fascicolo

A questo punto del percorso agli allievi della classe non rimane che valutare la veste grafica del fascicolo e realizzarlo. Nel nostro caso gli allievi hanno scelto la copertina, il formato, l'impaginazione e la struttura, decidendo di aggiungere un'appendice con le costruzioni di base. Noi docenti, per una questione di tempi, ci siamo assunte l'incarico di trasformare i loro disegni cartacei in formato pdf, di abbinarli ai passi delle costruzioni già redatti dagli allievi in Word e di stampare i fascicoli così assemblati (Figura 20 e 21). In questa fase è naturalmente possibile, e sicuramente fruttuosa, la collaborazione con la docente di educazione visiva o di arti plastiche.

3. Il Jigsaw è una tecnica utilizzata nell'apprendimento cooperativo, ideata negli anni '70. L'idea di base è che ad ogni allievo venga assegnato un compito che è essenziale al gruppo, senza il quale lo stesso non può riuscire a completare un compito o risolvere una situazione problematica.





11. Il pentagono generico

Sia ABCDE un pentagono generico.

1. Si divide il pentagono ABCDE in tre triangoli:
   A. il triangolo di vertici BCD;
   B. il triangolo di vertici DAB;
   C. il triangolo di vertici DEA.
2. Si quadra il quadrilatero ABDE formato dai triangoli B e C (Costruzione 8).

Il quadrato FGHI ha la stessa area del quadrilatero ABDE.

3. Si quadra il triangolo A (Costruzione 3).

Il quadrato HQRS ha la stessa area del triangolo A.

4. Si costruisce il triangolo rettangolo ISH di cateti IH, lato del quadrato FGHI e HS, lato del quadrato HQRS.
5. Si costruisce il quadrato ISTP sull'ipotenusa IS del triangolo ISH.

Il quadrato ISTP, per il teorema di Pitagora, ha l'area equivalente alla somma delle aree dei quadrati IFGH e HQRS. Quindi il quadrato ISTP ha la stessa area del pentagono generico ABCDE.

Figura 20
Quadratura del pentagono generico e passi della costruzione.

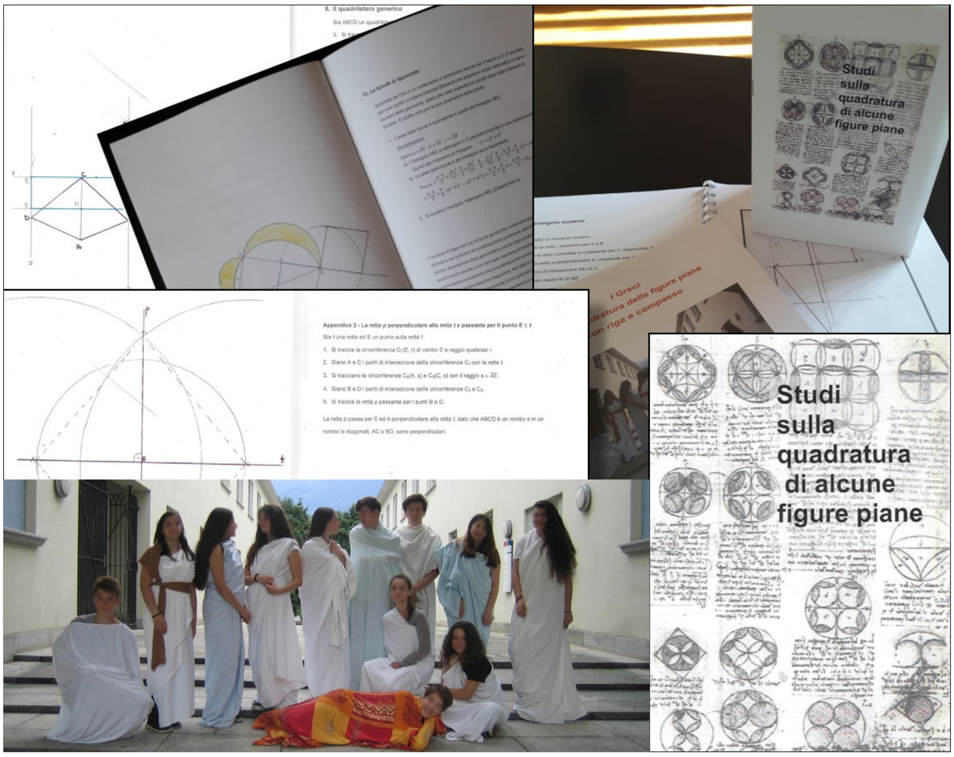


Figura 21
Immagini tratte dai fascicoli.

4 Conclusioni

Per concludere, desideriamo sottolineare brevemente due aspetti che, nella progettazione di questo percorso, sono stati per noi di grande importanza: l'utilizzo della storia della matematica in funzione dell'apprendimento e la collaborazione tra docenti.
La storia della matematica rappresenta una miniera d'oro per costruire una conoscenza della matematica a tutto tondo, in grado di motivare gli allievi attraverso i

collegamenti interdisciplinari, di accrescere il senso dell'apprendimento e di favorire l'acquisizione di risorse e processi cognitivi. Nel primo biennio di scuola media, il programma di storia tocca una moltitudine di aspetti contigui a quello di matematica: pensiamo, solo per fare alcuni esempi, al calendario delle antiche popolazioni, a trafori e rosoni delle cattedrali gotiche, all'importanza per l'Occidente dell'alto Medioevo delle conoscenze matematiche acquisite dagli Arabi. Lo stesso percorso descritto in questo articolo può essere utilizzato, se opportunamente sfrondato delle sue parti più complesse, anche per avvicinare gli allievi di prima media alla civiltà greca attraverso le costruzioni con riga e compasso e alle proprietà delle figure piane che già conoscono. Ma anche nel secondo biennio le occasioni per lavorare a stretto contatto con la storia non mancano e attività sul teorema di Pitagora o sulla probabilità possono sicuramente trovare un posto nella programmazione annuale della materia. Sulla base della nostra esperienza possiamo ipotizzare che affrontare un argomento di storia della matematica può aumentare la motivazione e la curiosità anche in quegli allievi che sostengono di avere con la matematica, per motivi diversi, un rapporto difficile; per gli allievi più motivati invece esso può rappresentare un forte stimolo a creare nuovi collegamenti tra le diverse branche del sapere. Un percorso come quello della quadratura delle figure piane offre infine anche la possibilità di una differenziazione all'interno della classe, sia nella scelta della figura da quadrare sia nel ruolo da assumere all'interno del proprio gruppo, in modo che ogni allievo, a partire dalle risorse di cui dispone, possa compiere passi avanti nell'apprendimento.
La collaborazione ha caratterizzato tutte le fasi della quadratura delle figure piane: il percorso è stato infatti preparato a quattro mani, abbiamo spesso unito le due classi per permettere il co-insegnamento e assieme abbiamo anche affrontato in itinere la preparazione di feedback per i nostri rispettivi allievi. In esperienze analoghe abbiamo inoltre lavorato a stretto contatto con i docenti di storia e realizzato i percorsi in team di più colleghi di matematica. Siamo convinte che la collaborazione tra docenti rappresenti una grande opportunità per creare un forte senso di appartenenza alla professione, per migliorare i propri punti deboli e capitalizzare quelli forti, per sperimentare nuove forme di insegnamento e verificarne l'effetto sugli studenti. In questi anni di *team teaching* (Fontana Bollini & Lepori, 2009) abbiamo potuto osservarne anche gli effetti positivi sugli allievi: le differenze tra i nostri stili di insegnamento aumentano la possibilità di stabilire una comunicazione efficace, la presenza di un secondo docente consente una migliore osservazione di quello che succede in aula e offre quindi la possibilità di effettuare interventi più efficaci e il confronto sulle competenze acquisite dagli allievi ne accresce l'affidabilità. In ultimo, siamo convinte che la collaborazione tra docenti abbia una ricaduta diretta anche sul comportamento degli allievi, stimolandoli ad affrontare i momenti di apprendimento cooperativo tra pari con maggior fiducia e disponibilità.

Bibliografia

Bunt, L., Jones, P. S., & Bedient, J.D. (1987). *Le radici storiche delle matematiche elementari.* Bologna: Zanichelli.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. I. Dalle origini al miracolo greco*. Bari: Edizioni Dedalo.

Dunham, W. (1992). *Viaggio attraverso il genio, I grandi teoremi della matematica*. Bologna: Zanichelli.

Fontana Bollini, V., & Lepori, G. (2009). *Il team teaching*. Bellinzona: CERDD. Disponibile in https://www4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/CERDD/ScuolaLab/Riforma3/Giornate/Bellinzona/2_Team_teaching.pdf (consultato il 14.10.2019).

Montagnoli, L. (2014). *Appunti di Geometria Elementare*. Cattolica: EDUCatt Università Cattolica.

Odifreddi, P. (2011). *C'è spazio per tutti. Il grande racconto della geometria*. Milano: Mondadori.

Autori/Vittoria Fontana Bollini e Giovanna Lepori
Scuola media, Bellinzona 1 – Svizzera
vittoria.fontana@edu.ti.ch, giovanna.lepori@edu.ti.ch

Razzi di classe

Classy(room) rockets

Diego Santimone
Scuola media di Losone – Svizzera

ESPERIENZA DIDATTICA

Sunto / L'esperienza presentata illustra un itinerario didattico, svolto tramite attività cooperative e differenziate, il cui fine era progettare, costruire e lanciare un razzomodello. L'attività è stata incentrata in una cornice narrativa legata allo sviluppo di sé e all'educazione alle scelte tramite la visione del film *Cielo d'ottobre* (Johnson, 1999). L'esperienza è stata rivolta ad allievi di una terza media (corso base) in maggioranza fortemente demotivata, poco incline all'apprendimento e con progettualità di vita poco sviluppata. La proposta, che si presta ad ampliamenti (inter)disciplinari e trasversali, ha suscitato motivazione e stimolato la cooperazione tra allievi, permettendo così di approfondire diversi ambiti matematici e incentivando la loro crescita personale.

Parole chiave: razzo; progetto didattico; situazione – problema; motivazione.

Abstract / The experience illustrates a didactic itinerary, done through cooperative and differentiated activities, about the project of making and launching a rocket model. The activity was centered in a narrative framework of self-development and education to choices by means of the vision of the film *October Sky* (Johnson, 1999). The project was designed for students of third-grade middle class (basic math course) strongly demotivated, low inclined to learning and with a low-developed life planning. The proposal, which lends itself to (inter)disciplinary and transversal expansions, has aroused motivation and cooperation of students, making it possible to investigate different mathematical fields and stimulate the students to their personal growth.

Keywords: rocket; project; realistic situations; motivation.

1 La classe, il contesto e i traguardi di competenza

«Vola solo chi osa farlo» (Sepúlveda, 2010, p. 126). Spesso nei colloqui personali e nei commenti alle verifiche scritte ci si trova a ripensare a questa citazione. Questo è il caso per diversi dei 14 allievi della classe di terza media (corso base) protagonisti di questo articolo, poco o per nulla motivati al conoscere e all'apprendere in matematica, fragili nella collaborazione interpersonale e con bassa capacità di progettualità per il proprio futuro. Dopo qualche mese dall'inizio dell'anno scolastico, si è provato a «farli volare davvero!», pensando a una proposta dove ciascun allievo sarebbe stato chiamato a cooperare con gli altri per realizzare un progetto accattivante. Dopo una fase di ricerca e perlustrazione, si è scelto di proporre un progetto nel quale l'obiettivo fosse riuscire a lanciare in aria un razzomodello; oltre alla riflessione sui traguardi cognitivi del progetto legati al tema, si è ipotizzato di inserire il percorso in un contesto narrativo di sviluppo di sé, di educazione alle scelte e alla cittadinanza.
Punto di partenza della riflessione è stato il primo dei traguardi di competenza per la scuola media definiti dal *Piano di studio per la scuola dell'obbligo ticinese:*

> «L'allievo applica il pensiero matematico per comprendere e risolvere con fiducia e determinazione situazioni – problema sia reali sia astratte concernenti

> tutti gli ambiti previsti per il terzo ciclo, mantenendo il controllo critico sia sui processi risolutivi sia sui risultati, esplorando e provando diverse strade risolutive e valutando in modo critico le informazioni e la loro coerenza».
>
> (DECS, 2015, p. 149)

In quest'ottica, il lavoro con gli alunni ha perseguito i seguenti traguardi: l'allievo
– si approccia con interesse all'apprendimento in ambito matematico attraverso il progetto accattivante di un razzomodello;
– mobilita strumenti e competenze matematiche per affrontare problemi situati;
– collabora e coopera positivamente con i suoi compagni;
– è stimolato alla riflessione circa la propria progettualità di vita.

2 Linee pedagogiche

La motivazione all'apprendimento è definibile come «il grado di impegno cognitivo investito per il raggiungimento di obiettivi scolastici: spesso ciò viene assunto dagli allievi più come uno stato di lavoro (un dovere) che come un tratto di personalità, un piacere» (Gentile, 1998, p. 81). Ciò rappresenta un nodo cruciale della didattica dal quale «emerge la necessità di comprendere quali scelte didattiche possono creare ambienti di apprendimento motivanti» (Gentile, 1998, p. 83). Un'azione didattica creativa e dotata di molteplici sfumature può prevenire la demotivazione degli studenti ed educare a un interesse ad apprendere. Questa prospettiva di insegnamento si rifà al concetto di *coesistenza educativa*, ovvero allo sforzo di integrare nell'insegnamento delle discipline scolastiche obiettivi, tecniche e procedure didattiche di natura motivazionale. Ciò si concretizza in alcune attenzioni pedagogiche e scelte didattiche, in particolare:
– convincere gli allievi che sono in grado di affrontare e possono riuscire nei compiti assegnati;
– favorire interazioni positive fra pari e con il docente:

> «È attraverso l'incontro, lo scambio, la relazione con gli altri che lo studente impara a valorizzare l'apprendimento in sé stesso e prova gratificazione per l'acquisizione della conoscenza e dello sviluppo delle sue capacità. Tra gli agenti motivanti all'apprendimento i compagni possono essere quelli che influiscono di più».
>
> (Gentile, 1998, p. 87);

– offrire agli allievi una conoscenza e un apprendimento significativi, possibilmente secondo un approccio per scoperta;
– finalizzare il lavoro degli allievi per la realizzazione di qualcosa di condiviso e desiderato.

In questo solco si inserisce la *pedagogia del progetto*, cioè di una pedagogia che pone al centro l'allievo rendendolo attore e co-costruttore del suo sapere nel perseguire un progetto grazie al lavoro di squadra. In particolare, è il

> «compito definito e realizzato in gruppo che implica l'adesione e alla mobilitazione di questi poiché risulta dalla volontà collettiva basata sui desideri giungendo ad un risultato concreto, realizzabile e comunicabile, presentando una utilità rispetto all'esterno del gruppo».
>
> (Licheri 2019, p. 7)

Affiancato a questo approccio, l'utilizzo di strategie e metodi di *apprendimento cooperativo*, inserite in situazione, sono un valido strumento per creare modalità di lavoro atte a promuovere la motivazione degli allievi, permettendone l'inclusione e la differenziazione. È così possibile progettare attività didattiche definendo eterogeneamente i ruoli degli allievi all'interno dei singoli gruppi – finalizzando il lavoro ad un compito per il quale ciascun allievo coopera con gli altri secondo competenze distinte – oppure formando, sempre nello stesso percorso didattico, gruppi omogenei a geometria variabile chiamati a collaborare per lo sviluppo di quelle competenze distinte, spendibili poi all'interno del gruppo eterogeneo. Il lavoro in piccoli gruppi, le strategie per la gestione del conflitto e di analisi delle modalità di decisione del gruppo sono punti di forza di tale approccio (Comoglio & Cardoso, 1996). Inoltre, un contesto di apprendimento cooperativo rende possibile la *differenziazione didattica*, perché permette di strutturare un ambiente didattico nel quale poter accogliere ciascun allievo nella sua unicità e di attivarlo per un apprendimento personalizzato e graduale.

3 Che cos'è un razzomodello

Un razzomodello è generalmente un modellino di missile propulso da un motore a razzo chimico in uso presso aeromodellisti (Stine, 2004).
Esistono svariate soluzioni costruttive industriali di razzomodelli, e quella ideale agli obiettivi di questo progetto prevede l'impiego principalmente di cartone e plastica, dimensioni contenute e motori di bassa potenza. Il tutto viene prodotto da aziende specializzate a garanzia della sicurezza degli utilizzatori. Si veda la **Figura 1**.

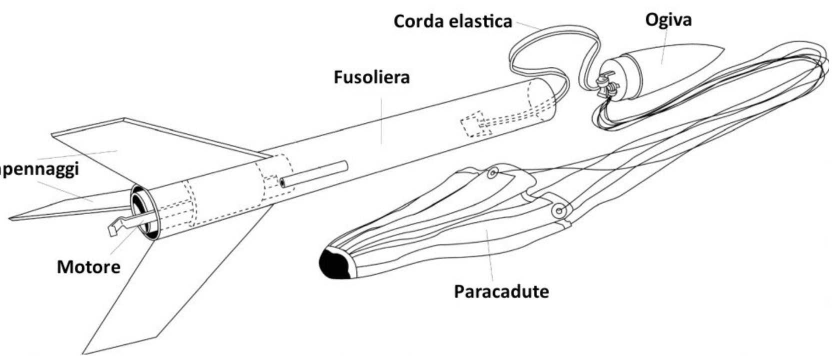


Figura 1
Razzomodello.

Avviato grazie all'accensione elettrica, il motore a razzo spinge il modello in una certa direzione grazie a una semplice rampa di lancio costituita da una bacchetta metallica. Al termine della generazione della spinta (primissima fase di volo), il motore brucia una carica ritardante durante una fase di volo libero del modello, permettendogli di raggiungere l'apogeo (il punto alla massima distanza verticale dal suolo); un'ultima carica del motore genera del gas all'interno della fusoliera del missile, permettendone il distacco dell'ogiva, il dispiegamento del paracadute in esso contenuto e un atterraggio dolce parzialmente controllato. Il generico profilo di missione di un razzomodello è mostrato nella **Figura 2**.

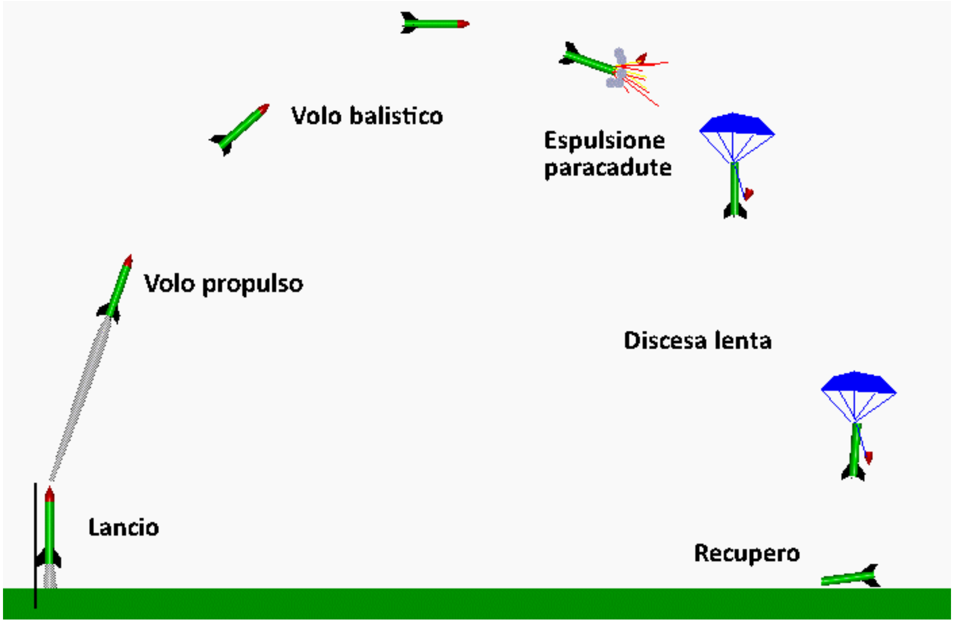


Figura 2
Profilo di missione di un razzomodello (NASA©).

In **Figura 3** sono riportate le attrezzature utilizzate per il lancio e la determinazione dell'apogeo. Una particolare pistola-puntatore permette la misura dell'angolo dall'orizzonte, mentre un mini-altimetro con accelerometro triassiale installabile sul razzomodello permette la registrazione della quota di volo e delle accelerazioni nel tempo, con la possibilità di esportare i dati acquisiti in formato elettronico.

Figura 3
Attrezzatura utilizzata: kit rampa di lancio, accenditore, pistola angolare, altimetro.

Nella **Tabella 1** è riportato il materiale necessario per la realizzazione del progetto.

Item	Costruttore	Modello	Costo (stima)
Missili (6 pezzi)	Klima	Six pack Quick & Easy	40 CHF
Motori (6 pezzi)	Klima	A6-4	10 CHF
Rampa e accenditore elettrico	Klima	Mira	30 CHF
Pistola angolare	Estes	Altitrack Altitude Finder	25 CHF
Altimetro	JollyLogic	AltimeterThree	100 CHF
Materiale vario	-	-	50 CHF

Tabella 1
Materiale utilizzato.

Seppur di massa totale inferiore ai 100 g, le alte velocità in gioco richiedono una cura particolare per l'assemblaggio, l'installazione e il lancio del modello, nonché la verifica preliminare della posizione del suo baricentro ai fini di evitare voli incontrollati o danni a cose e persone. In questo senso, l'educazione alla sicurezza si afferma come un carattere significativo di questo itinerario didattico.

4 Metodologia

In linea con il *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015), il percorso è stato progettato per essere inserito coerentemente nelle ore di matematica, prevedendo contemporaneamente di non lavorare su obiettivi esclusivi di questa disciplina bensì anche su competenze trasversali e generali; è stato inoltre progettato mantenendo un corretto equilibrio di distribuzione oraria, attraverso la quale si potessero anche preservare le esigenze peculiari della materia. La visione del film *Cielo d'ottobre* (Johnson, 1999), tratto dall'autobiografia di Hickam (1999), ha fatto da cornice narrativa all'intero percorso. Nel film – ambientato verso la fine degli anni Cinquanta – un gruppo di allievi affascinato dal lancio del primo satellite artificiale *Sputnik 1* (4 ottobre 1957) decide di costruire e lanciare dei modelli di razzo, con il sogno di diventare un giorno ingegneri missilistici.
In seguito a questo punto di partenza, l'itinerario si è svolto in tre fasi:

1) Condivisione di senso. Dopo la visione della parte iniziale del film *Cielo d'ottobre* è stata avanzata la proposta di costruire e lanciare un razzo. Questa fase è stata occasione della formazione dei gruppi, del recupero dei fondi e delle autorizzazioni necessarie.
2) Allenamento e sviluppo. Ogni gruppo ha appreso che cosa fosse un razzomodello e il funzionamento dei suoi sistemi; ha scoperto come determinarne la quota di apogeo tramite semplici misure e costruzioni geometriche; ha verificato il soddisfacimento dei requisiti normativi per il campo di volo e per la sicurezza.
3) Realizzazione. Ogni gruppo ha lanciato il proprio razzo, ne ha determinato la quota di apogeo e ha verificato l'errore percentuale commesso rispetto alla lettura dell'altimetro di bordo. Con la conclusione della proiezione del film e una breve condivisione gli allievi sono stati infine stimolati alla cura della propria progettualità di vita.

La dimensione riflessiva circa il lavoro e i risultati ottenuti ha permeato ogni fase dell'itinerario.

5 Descrizione dell'itinerario

5.1. Percorso didattico

Il percorso didattico è composto da attività molto eterogenee fra di loro per quanto riguarda tipologia e tempistiche, ma tutte essenziali per la realizzazione progressiva del progetto di lanciare un razzo da parte di ciascun team di lavoro. Questa eterogeneità ha permesso di inserire agilmente le attività all'interno della calendarizzazione delle lezioni, istituendo momenti più centrati sul progetto ed altri meno, anche in funzione della motivazione della classe riscontrata nelle altre ore di lezione.

5.2. Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*

Come già anticipato, l'intero progetto intende favorire il primo dei traguardi di competenza per la scuola media definiti dal *Piano di studio per la scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) legato alla risoluzione dei problemi.

In aggiunta al chiarimento sul traguardo di competenza mobilitato, nella **Tabella 2** è riportato sinteticamente l'inquadramento delle attività del progetto nel Piano con particolare attenzione ai nuclei tematici toccati.

Attività		Ambiti disciplinari coinvolti			
		Numeri e calcolo	Geometria	Grandezze e misure	Funzioni
Condivisione di senso	Recupero fondi				
	Richiesta autorizzazione				
Allenamento e sviluppo	Scoperta del razzo				
	Determinare l'apogeo				
	Baricentro e considerazioni geometriche				
	Requisiti del campo di volo				
	Definizione delle operazioni di lancio				
Realizzazione	Installazione e lancio				
	Analisi post-lancio				

Tabella 2
Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) delle attività secondo gli ambiti di competenza mobilitati.

Infine, nella **Tabella 3** si riportano le competenze trasversali attivate e i contesti di formazione generale coinvolti durante le attività.

		Sviluppo personale	Collaborazione	Comunicazione	Pensiero riflessivo e critico	Pensiero creativo	Apprendere ad apprendere	Tecnologia e media	Salute e benessere	Scelte e progetti personali	Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza	Contesto economico e consumi
Condivisione di senso	Film Cielo d'ottobre	■								■		
	Recupero fondi		■			■			■		■	■
	Richiesta auto-rizzazione		■	■							■	
Allenamento e sviluppo	Scoperta del razzo		■	■				■				
	Determinare l'apogeo		■	■								
	Baricentro e considerazioni geometriche											
	Requisiti del campo di volo		■	■	■	■		■			■	
	Definizione delle operazioni di lancio		■	■	■						■	
Realizzazione	Installazione e lancio		■	■				■			■	
	Analisi post-lancio		■					■		■		

Tabella 3
Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) delle attività: competenze trasversali e contesti di formazione generale.

Nella presentazione delle singole attività si descriveranno in maggior dettaglio le risorse ed i processi cognitivi attivati di volta in volta. Per ciascuna verrà definito l'obiettivo finalizzato al progetto del lancio del razzo, le tempistiche ed il materiale utilizzato, la descrizione dell'attività stessa e il suo inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*.

5.3. Condivisione di senso: recupero dei fondi

Obiettivo progettuale

Recuperare i fondi economici necessari all'acquisto del materiale.

Tempistiche e materiale

Mezza ora-lezione in classe per decidere insieme la strategia da adottare; un'ora-lezione di considerazioni matematiche; una/mezza giornata extra-scolastica per il banco del dolce.

Il materiale per il lavoro in classe consiste in schede didattiche (**Allegati 1** e **2**); l'occorrente per il banco del dolce viene recuperato direttamente dagli allievi (dolci, fazzoletti, piatti ecc.).

Descrizione dell'attività

Dopo la visione della prima parte del film *Cielo d'ottobre* (circa 15 minuti), è stato proposto agli allievi di provare a costruire e lanciare un razzo. Con l'entusiasmo di tutti ha preso avvio l'itinerario. La classe è stata subito attivata alla responsabilità del progetto con una domanda: «Ci saranno delle spese da sostenere: come recuperiamo i fondi per il nostro progetto?». Tutte le proposte avanzate liberamente dagli allievi sono state confrontate in termini di costi-benefici fino alla scelta finale condivisa di organizzare un banco del dolce presso un centro commerciale del comune di Losone in una giornata di sabato. Gli allievi si sono suddivisi compiti e materiali, redigendo una tabella di turni di servizio.

In vista dell'evento è stata proposta alla classe un'attività di matematica inerente a situazioni di riduzione all'unità di grandezze direttamente proporzionali allo scopo di preparare le torte per diverse persone a partire da una ricetta per quattro persone. Suddivisi a coppie omogenee, gli allievi hanno dovuto affrontare situazioni concernenti tre tipologie di dolce rivolte a sviluppare diversi traguardi di apprendimento:

- Torta di mandorle. Individuare strategie per la risoluzione di un problema (quantificare gli ingredienti necessari per un certo numero di persone) e sperimentarne la validità con un crescendo di complessità di richieste.
- Torta di carote. Generalizzare il procedimento scoperto con la prima torta. Calcolo degli elementi nutrizionali presenti in ciascuna fetta a partire dalle informazioni riportate sulle confezioni degli ingredienti.
- Ciambellotto. Riflettere sui rapporti fra ingredienti usati per differenti dosi. Scoprire un metodo grafico (diagramma cartesiano) per la determinazione delle quantità di ingredienti (grandezze direttamente proporzionali).

I ragazzi, divisi a coppie, hanno affrontato in sequenza le tre ricette e le situazioni ad esse riferite, favorendo così una differenziazione progressiva e permettendo a ciascuna coppia da un lato di completare velocemente i lavori che presentavano attività matematiche con cui avevano già confidenza, dall'altro di soffermarsi in quelle che richiedevano tentativi, scoperte e nuovi apprendimenti.

Per maggiori dettagli si veda il piano lezione nell'**Allegato 1** e le schede didattiche nell'**Allegato 2**.

Il banco del dolce è stato anche occasione per pubblicizzare il progetto verso i compagni e i familiari degli allievi, come si vede in **Figura 4** nella pagina seguente.

Figura 4
Banco del dolce e promozione del progetto.

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Come mostrato nella **Tabella 4**, questa attività si inserisce negli ambiti *Numeri e calcolo, Grandezze e misure* e *Funzioni*.

MODELLO DI COMPETENZA	Numeri e calcolo	Grandezze e misure	Funzioni
Sapere e riconoscere	Riconoscere frazioni equivalenti		
Eseguire e applicare	Eseguire semplici calcoli aritmetici	Convertire unità di misura	
Esplorare e provare	Individuare strategie per la risoluzione di un problema di riduzione all'unità		
Matematizzare e modellizzare	Generalizzare un procedimento tramite una formula algebrica applicabile a situazioni simili		Elaborare un metodo grafico (diagramma cartesiano) per la determinazione di grandezze proporzionali
Interpretare e riflettere sui risultati		Riflettere sui rapporti fra grandezze	
Comunicare e argomentare	Descrivere con linguaggio naturale il procedimento adottato		
Competenze trasversali	– Collaborazione – Pensiero creativo		
Contesti di formazione generali	– Salute e benessere – Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza – Contesto economico e consumi		

Tabella 4
Recupero dei fondi: inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*.

5.4. Condivisione di senso: richiesta autorizzazione

Obiettivo progettuale
Verificare la liceità ad operare con razzomodelli sul sedime scolastico.

Tempistiche e materiale
Mezza ora-lezione.

Descrizione dell'attività
Partendo dalla provocazione del docente «Ma possiamo lanciare liberamente un razzomodello oppure occorre rispettare alcune norme?» la classe ha recepito, dopo qualche resistenza, la necessità di rivolgersi a qualcuno per chiedere la possibilità di procedere al progetto. Dopo un breve confronto circa chi interrogare, la scelta è caduta sull'autorità locale: i ragazzi, divisi in gruppi, hanno scritto una proposta di lettera di richiesta di autorizzazione e ciascun contributo è stato poi utilizzato nelle sue parti più riuscite per la stesura della lettera finale. D'accordo con il docente, l'autorità locale ha inoltrato la risposta alla domanda della classe dando il via libera a patto di rispettare il codice di regolamentazione internazionale NAR (*National Association of Rocketry,* Allegato 3) per razzimodellismo, evidenziando che la responsabilità di tutto sarebbe stata del docente.

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Questa attività non attiva competenze specificatamente matematiche ma trasversali, operando in contesti di formazione generali, come mostrato nella Tabella 5.

Tabella 5
Richiesta dell'autorizzazione: inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*.

Competenze trasversali	– Comunicazione – Collaborazione
Contesti di formazione generali	– Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza

5.5. Allenamento e sviluppo: scoperta e costruzione del razzo

Obiettivo progettuale
Scoprire le parti e il funzionamento del razzomodello; creare i gruppi di lavoro; assemblare i razzomodelli per il lancio.

Tempistiche e materiale
Un'ora-lezione per la scoperta del razzomodello; un'ora-lezione per il suo assemblaggio.
Un kit di assemblaggio di un razzomodello per ogni gruppo; schede didattiche.

Descrizione dell'attività
Una presentazione da parte del docente ha avviato la prima ora-lezione facendo intuire agli allievi lo sfruttamento da parte di un motore a razzo del terzo principio della dinamica. Il profilo di missione (si veda Figura 2) è stato presentato per introdurre l'analisi delle parti principali e del funzionamento del razzomodello. Gli allievi sono stati inizialmente suddivisi in coppie e a ciascuna di esse è stata affidata una parte fisica del modello e una descrizione funzionale della stessa. Dopo una decina di minuti di analisi del materiale, ciascuna coppia è intervenuta per pochi minuti spiegando al

resto della classe la parte che aveva studiato mentre alla lavagna veniva disegnato dal docente lo schema di un razzomodello via via che le presentazioni si succedevano.
Nella seconda ora-lezione il docente ha presentato la composizione dei gruppi di lancio – da lui predefinita per garantirne l'eterogeneità – che hanno proceduto ad assemblare il proprio razzomodello a partire dal kit e dalle istruzioni fornite dal costruttore (si veda **Figura 5**). Nel tempo rimanente i gruppi hanno scelto il nome del proprio razzo e progettato una *patch* (logo, distintivo) di missione che hanno poi preparato a casa.
Le schede didattiche utilizzate in queste ore-lezione sono riportate nell'**Allegato 4**.

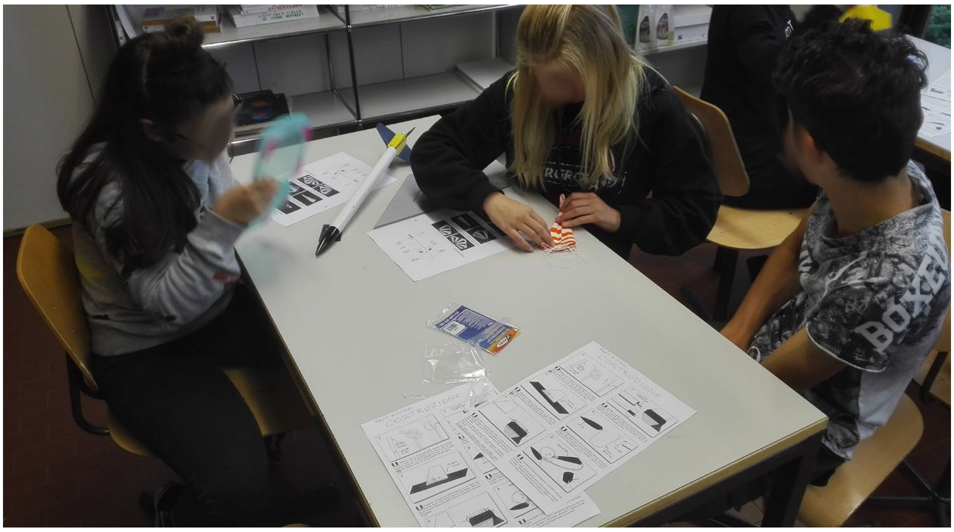


Figura 5
Allenamento e sviluppo: scoperta e costruzione del razzomodello, attività in aula.

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Questa attività non attiva competenze specificatamente matematiche ma trasversali, come evidenziato nella **Tabella 6**.

Tabella 6
Allenamento e sviluppo: scoperta e costruzione del razzomodello. Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*.

Competenze trasversali	– Comunicazione – Collaborazione
Contesti di formazione generali	– Tecnologia e media

5.6. Allenamento e sviluppo: determinazione dell'apogeo

Obiettivo progettuale
Definire una procedura matematica per la misurazione della quota di apogeo raggiunta da un razzomodello.

Tempistiche e materiale
Due ore-lezione. Schede didattiche; goniometri; carta millimetrata; righe millimetrate; pistola per la misurazione angolare.

Descrizione dell'attività
Insieme agli allievi è stata problematizzata la questione di poter calcolare l'apogeo,

cioè la massima quota raggiunta dal razzomodello durante il volo. Per la scoperta di una procedura matematica affidabile è stato scelto un approccio di apprendimento cooperativo secondo la struttura *jigsaw*[1]. La classe è stata suddivisa in tre gruppi omogenei, chiamati ad esplorare diversi strumenti e risorse matematiche:

– Un gruppo – gli allievi con più attitudine per la matematica – ha esplorato la pistola per la misurazione angolare (**Figura 6**), strumento che permette di determinare l'ampiezza angolare di un certo punto nel cielo rispetto all'orizzonte. Puntandola verso il razzomodello durante la sua ascesa è possibile misurare l'angolo definito dall'orizzonte e dal modello con l'osservatore nel suo vertice. Con uno schema geometrico e una pistola come artefatto gli allievi di questo gruppo dovevano capire quale angolo venisse misurato dalla pistola, così da esser sicuri del suo corretto utilizzo.

Figura 6
Pistola per la misurazione angolare.

– Un gruppo di competenze intermedie ha lavorato all'utilizzo della carta millimetrata e del diagramma cartesiano come strumenti per conoscere le coordinate e quindi la posizione di un punto nello spazio a partire da certe informazioni (rapporti di scala, spostamenti e pendenze).
– Il gruppo degli allievi con più difficoltà in matematica ha esplorato alcuni triangoli generici (ri)scoprendo che la somma delle ampiezze degli angoli interni è pari a 180°.

Dopo una prima fase di lavoro nei gruppi omogenei gli allievi sono stati riassegnati in terne eterogenee composte da allievi derivanti da ciascuno dei gruppi iniziali. Ai nuovi gruppi è stato posto l'obiettivo di scoprire un modo per determinare l'altitudine massima raggiunta dal razzomodello, disponendo solamente di due pistole di misura angolare, la posizione della rampa di lancio e di due punti di osservazione, riga e carta millimetrata. I gruppi hanno lavorato con interesse, presumibilmente attivati e motivati dalla situazione sfidante e dalle conoscenze/abilità che ciascun allievo aveva acquisito o consolidato nell'attività precedente: ciascuno di essi poteva fornire un contributo unico e insostituibile al gruppo di lavoro. Dopo una fase di esplorazione e

1. Il metodo del *jigsaw* in ottica di *cooperative learning* prevede che gli allievi si suddividano in gruppi omogenei di lavoro, all'interno dei quali sviluppino particolari competenze (distinte fra gruppi) spendibili in un secondo momento in altri gruppi eterogenei (composti da allievi derivati da ciascuno dei gruppi omogenei) chiamati ad affrontare una situazione complessa nella quale ciascun allievo contribuisce con l'apprendimento e le competenze ottenute nel gruppo precedente.

scoperta, tutti i gruppi (ad eccezione di uno) sono giunti alla definizione del metodo di determinazione dell'apogeo (Figura 7) che è stato condiviso e raffinato con una messa in comune finale:

– In due postazioni (α e β) – la cui distanza lineare dalla rampa di lancio è nota – due allievi misurano l'ampiezza angolare determinata dall'apogeo del razzomodello grazie a due pistole.
– Sulla carta millimetrata viene rappresentata in scala la distanza fra le due postazioni di misura e vengono riportati gli angoli le cui ampiezze sono state misurate nelle postazioni α e β rispetto al suolo.
– Prolungando e intersecando i lati dei due angoli si determina il punto di apogeo del razzomodello nel cielo, la cui altezza rispetto al suolo può essere misurata sulla carta millimetrata e rapportata in scala alla realtà.

Infine si è riflettuto sull'inevitabilità di commettere errori di misura o legati alla rappresentazione in questa procedura. Per migliorare la precisione della misurazione sul campo si è deciso inoltre di inclinare di qualche grado rispetto alla verticale la rampa di lancio, in modo tale da garantire con un certo grado di fiducia che la traiettoria di ascesa del razzo fosse interamente contenuta nel piano definito dai due angoli.

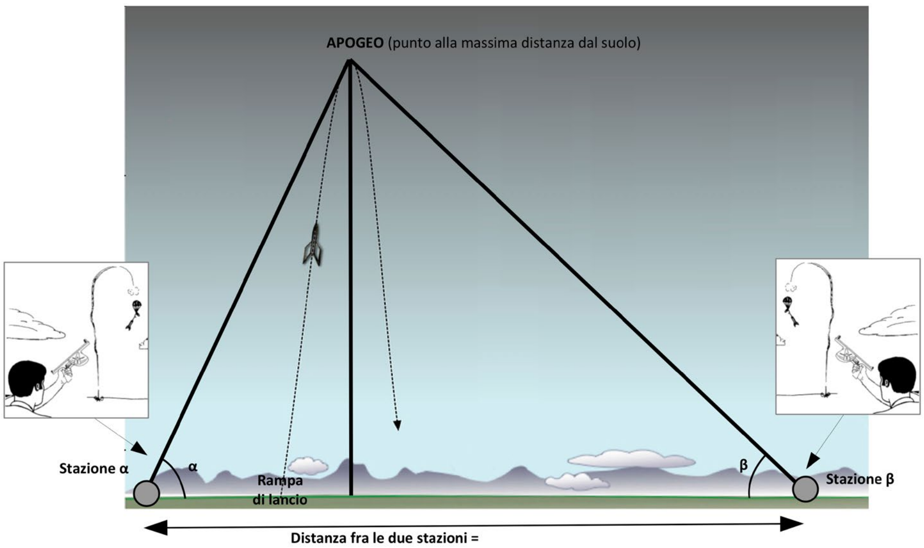


Figura 7
Schema per il calcolo dell'apogeo.

Le schede didattiche utilizzate in queste ore-lezione sono riportate nell'Allegato 5.

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Come si può facilmente evincere dalla descrizione precedente, e come mostrato in Tabella 7, questa attività si inserisce negli ambiti *Geometria* e *Grandezze e misure*.

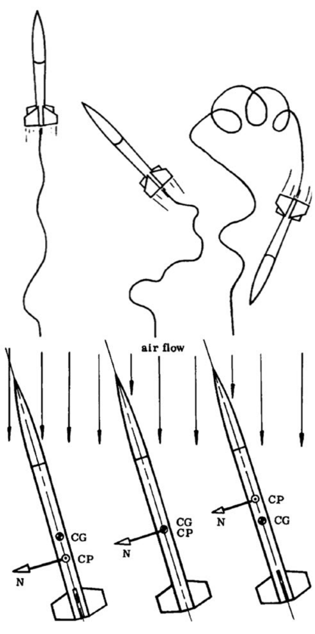
MODELLO DI COMPETENZA	Numeri e calcolo	Geometria	Grandezze e misure
Sapere e riconoscere		Comprendere che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è pari a 180°	
Eseguire e applicare	Individuare rapporti di scala, pendenze	Rappresentare in scala una certa situazione. Saper leggere e disegnare un diagramma cartesiano	
Esplorare e provare		Scoprire il funzionamento della pistola angolare	
Matematizzare e modellizzare		Modellizzare la situazione del volo del razzomodello definendone gli elementi e i dati essenziali	
Interpretare e riflettere sui risultati		Avere consapevolezza delle tipologie di errori introdotti nella procedura	
Comunicare e argomentare		Condividere le conoscenze/competenze con gli altri compagni	
Competenze trasversali	– Comunicazione – Collaborazione		

Tabella 7
Allenamento e sviluppo: determinare l'apogeo. Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo*.

5.7. Allenamento e sviluppo: baricentro e considerazioni geometriche

Obiettivo progettuale

La stabilità di volo di un razzomodello deve essere verificata prima del lancio così da garantire che – in assenza di vento – il modello mantenga la direzione stabilita dalla rampa di lancio, senza percorrere traiettorie casuali e potenzialmente pericolose per cose e persone. Per far ciò si utilizza nel modellismo una procedura molto semplice che richiede la determinazione della posizione assiale del baricentro (CG) e del centro di pressione (CP) del razzomodello: affinché il modello sia stabile occorre che il CP sia arretrato al CG rispetto all'ogiva (**Figura 8**). Il CG viene determinato sperimentalmente ricercando l'equilibrio del razzomodello completo appeso ad un filo, mentre la posizione assiale del CP viene ricercata come il baricentro della proiezione laterale (bidimensionale) del modello (**Figura 9**). Per maggiori informazioni si vedano i lavori di Barrowman (1970); Grimm (1999); Nolte (2012).



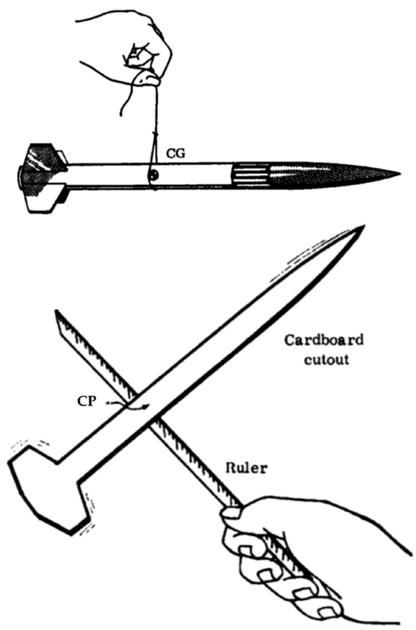


Figura 8 (a sinistra)
Stabilità di un razzomodello in funzione della posizione del baricentro (CG) e del centro di pressione (CP). Immagini tratte da Barrowman (1970).

Figura 9 (a destra)
Determinazione della posizione del baricentro (CG) e del centro di pressione (CP) in un razzomodello. Immagini tratte da Barrowman (1970).

Tempistiche e materiale
Due ore-lezione. Schede didattiche; razzomodelli; spago; cartoncino (3-4 mm).

Descrizione dell'attività
Tramite una lezione dialogata gli allievi sono stati introdotti alla determinazione del baricentro di un corpo eterogeneo a partire dal riconoscimento di simmetrie bi/tri-dimensionali e alla determinazione qualitativa dei centri di simmetria di diverse tipologie di corpi. Il concetto di equilibrio stabile, instabile e indifferente è stato poi proposto a partire dall'esperienza dell'attacco di un quadro ad una parete. Consolidato il concetto di baricentro, i ragazzi – nuovamente divisi in gruppi – hanno poi proceduto alla determinazione sperimentale del baricentro (CG) e del centro di pressione (CP) del proprio razzomodello. Si vedano le schede didattiche riportate negli **Allegati 6** e **7**.

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Anche questa attività si inserisce nell'ambito *Geometria*, come riportato nella tabella sottostante.

MODELLO DI COMPETENZA	Geometria
Sapere e riconoscere	Individuare gli assi e i centri di simmetria di figure bidimensionali
Eseguire e applicare	
Esplorare e provare	– Ipotizzare la posizione del baricentro di un corpo a partire dalle sue caratteristiche geometriche e dei materiali – Ricercare sperimentalmente il baricentro di una figura bidimensionale e di un corpo non omogeneo
Matematizzare e modellizzare	
Interpretare e riflettere sui risultati	
Comunicare e argomentare	

Tabella 8
Allenamento e sviluppo: baricentro e considerazioni geometriche. Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*.

5.8. Allenamento e sviluppo: requisiti del campo di volo

Obiettivo progettuale
Verificare il soddisfacimento dei requisiti del campo di volo previsti dal regolamento NAR.

Tempistiche e materiale
Mezz'ora-lezione. Foto aree della sede scolastica.

Descrizione dell'attività
Alla classe è stato chiesto di leggere il codice di regolamentazione NAR (**Allegato 3**) scoprendo così che il campo di volo avrebbe dovuto rispettare alcuni requisiti in termini di distanze, aree e condizioni meteorologiche. L'intenzione era di effettuare i lanci nel parco della sede scolastica, ma sarebbe stato prima necessario verificare il

soddisfacimento dei requisiti del regolamento date le caratteristiche dell'area e del posizionamento della rampa di lancio.
Il docente ha suddiviso in coppie eterogenee gli allievi e a ciascuna di esse ha fornito una ripresa aerea della sede scolastica, nella quale però era stata nascosta l'indicazione del rapporto di scala (si veda la **Figura 10**). A partire dalla sola fotografia, gli allievi dovevano proporre la stima delle dimensioni del parco e stabilire in quale posizione andasse collocata la rampa di lancio in accordo con i requisiti NAR. Per svolgere questa attività di stima le coppie hanno capito che dovevano calcolare il rapporto di scala della fotografia utilizzando delle unità di misura di lunghezza inusuali dal punto di vista della misurazione scientifica: la lunghezza di un'automobile, la pista dei 100 metri, una panchina del piazzale ecc. Le strategie adottate e i risultati ottenuti sono stati poi condivisi in una messa in comune nella quale è stato possibile riflettere sulla bontà dei risultati ottenuti a seconda delle diverse lunghezze note considerate e della deformazione prospettica dell'immagine.

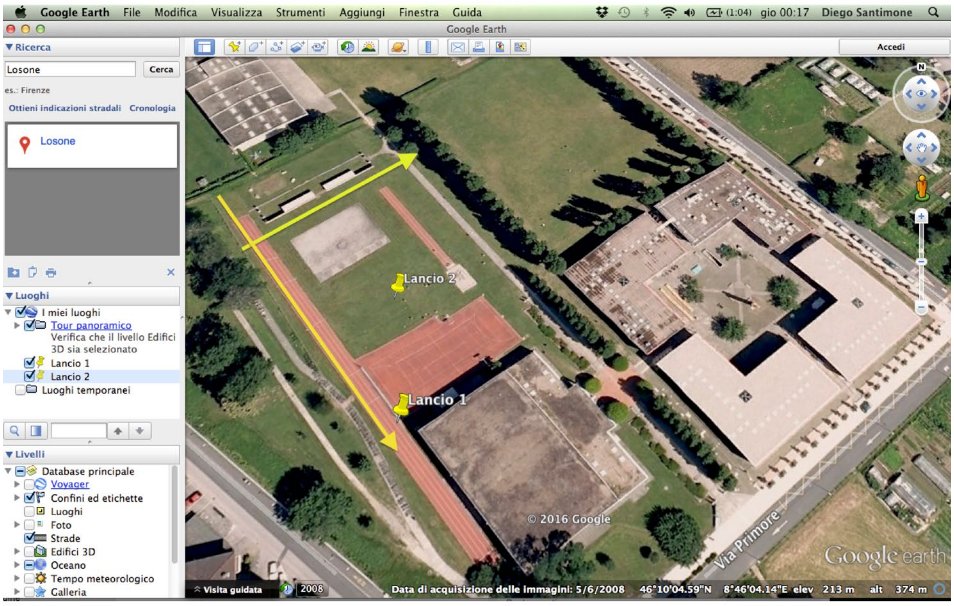


Figura 10
Ripresa area della sede scolastica (GoogleEarth©).

Figura 11
Verifica dei requisiti NAR per il campo di volo.

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Questa attività si inserisce negli ambiti *Geometria* e *Grandezze e misure* (Tabella 9).

MODELLO DI COMPETENZA	Geometria	Grandezze e misure
Sapere e riconoscere		
Eseguire e applicare		
Esplorare e provare Matematizzare e modellizzare	Stimare le dimensioni del parco della sede scolastica a partire da una sua ripresa aerea, calcolando un rapporto di scala dell'immagine in base ad alcune misure di lunghezza comunemente conosciute (automobili, pista 100 m, panchine ecc.)	
Interpretare e riflettere sui risultati	Riflettere sulla possibilità che la deformazione prospettica influisca in maniera significativa sulle misure stimate	Verificare l'accettabilità dei risultati in base alla normativa NAR
Comunicare e argomentare	Spiegare al resto della classe la strategia ideata dalla coppia per la stima delle dimensioni del parco	
Competenze trasversali	– Collaborazione – Comunicazione – Pensiero critico e creativo	
Contesti di formazione generali	– Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza – Tecnologia e media	

Tabella 9
Allenamento e sviluppo: requisiti del campo di volo. Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.*

5.9. Allenamento e sviluppo: definizione delle operazioni di lancio

Obiettivo progettuale
Definire la sequenza delle operazioni di lancio per garantire il corretto funzionamento di tutti i sistemi, la sicurezza di persone e cose e il successo della missione.

Tempistiche e materiale
Un'ora-lezione. Codice NAR; razzomodelli; rampa di lancio; starter; dispositivi di protezione individuali; materiale per il calcolo dell'apogeo.

Descrizione dell'attività
All'interno di ciascun gruppo gli allievi sono stati suddivisi secondo diversi ruoli che sarebbero stati ricoperti anche durante il lancio dei razzomodelli:

- Responsabile della sicurezza (prima e durante il lancio).
- Responsabile rampa di lancio (corretti assemblaggio e installazione del modello).
- Responsabile del motore a razzo (corretta installazione del motore e sua accensione).
- Responsabili meteo e rilevamento apogeo (verifica delle condizioni atmosferiche e misurazioni angolari).

Dopo aver preso coscienza del proprio ruolo, agli allievi è stato chiesto di stendere una check-list che descrivesse la sequenza logica di tutte le operazioni e i controlli da svolgere per il corretto lancio del razzomodello, indicando anche per ogni punto il responsabile che avrebbe dovuto svolgere/monitorare l'operazione. Per far ciò gli allievi avevano a disposizione tutti gli artefatti, i dispositivi e gli strumenti che avreb-

bero poi potuto utilizzare il giorno del lancio.
Al termine di questa prima fase le diverse proposte dei gruppi sono state condivise con una messa in comune e si è confezionata una check-list finale condivisa da tutti i team (**Allegato 8**).

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Questa attività non mobilita competenze specificatamente matematiche, ma mobilita quelle trasversali, operando inoltre in contesti di formazione generali che stimolano inoltre il pensiero logico e computazionale (**Tabella 10**).

Tabella 10
Allenamento e sviluppo: definizione delle operazioni di lancio. Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.*

Competenze trasversali	– Comunicazione – Collaborazione – Pensiero riflessivo e critico
Contesti di formazione generali	– Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza

5.10. Realizzazione: installazione e lancio

Obiettivo progettuale
Preparare il campo di volo, lanciare il razzomodello e determinarne la quota di apogeo.

Tempistiche e materiale
Due ore-lezione. Materiale per il lancio (nastro segnalatore, picchetti, rampa di lancio, razzomodelli, accenditori ecc.); per il calcolo dell'apogeo (pistole angolari, carta millimetrata, goniometri, righe, decametri, altimetro ecc.) e per la sicurezza (fischietto, bande "Remove before launch", occhiali di protezione ecc.).

Descrizione dell'attività
La prima ora-lezione è stata dedicata all'allestimento del campo di volo: gli allievi sono stati suddivisi nelle diverse tipologie di responsabili descritte nell'attività precedente e a ciascuno dei gruppi sono stati affidati compiti differenziati per la preparazione del campo di volo. In particolare:

– responsabili della sicurezza. Verifica della check-list, organizzazione delle zone di lavoro sul campo e verifica della bontà del lavoro degli altri gruppi in accordo alla check-list;
– responsabili della rampa di lancio. Installazione della rampa di lancio con la creazione di una recinzione regolare distante almeno 5 metri dalla rampa, utilizzando solo 4 asticelle e nastro bianco-rosso;
– responsabili meteo e rilevamento apogeo. Installazione e preparazione delle due stazioni di misura degli angoli, ripasso del metodo di determinazione dell'apogeo;
– responsabili motori. Addetti alle riprese fotografiche delle attività di preparazione, installazione del motore nel razzomodello e comando d'accensione al lancio.

Alcune fasi dell'attività sono mostrate nella **Figura 12**, nella **Figura 13** e nella **Figura 14**, mentre le schede operative si possono ritrovare nell'**Allegato 9**.

Figura 12
Preparazione del campo di volo.

Figura 13
Preparazione del campo di volo.

Figura 14
Foto di gruppo di classe con i razzomodelli.

Nella seconda ora-lezione si sono svolti i lanci dei razzomodelli di tutti i gruppi (**Figura 15**), la raccolta delle misurazioni effettuate e la determinazione degli apogei raggiunti nei diversi voli. L'entusiasmo degli allievi nella preparazione e lancio dei loro razzomodelli, unitamente alla percezione di stare concretizzando un lavoro preparato per mesi, ha contribuito a creare un clima di lavoro disteso, motivante e concentrato.

Figura 15
Un razzomodello pronto sulla rampa di lancio.

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Questa attività – in particolare quella dei responsabili della rampa di lancio e delle stazioni di misura – si inserisce negli ambiti *Geometria* e *Grandezze e misure*. La cultura della sicurezza promossa durante questa attività si inserisce invece nel contesto di formazione generale di *Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza*.

MODELLO DI COMPETENZA	Geometria	Grandezze e misure
Sapere e riconoscere		
Eseguire e applicare	Applicare le caratteristiche geometriche del quadrato (in particolare la relazione lato-diagonale)	Misurare lunghezze utilizzando il decametro
Esplorare e provare	Realizzare una recinzione quadrangolare regolare garantendo una distanza minima del contorno dal centro di 5 metri	
Matematizzare e modellizzare		
Interpretare e riflettere sui risultati		
Comunicare e argomentare		
Competenze trasversali	– Collaborazione – Comunicazione – Pensiero creativo	
Contesti di formazione generali	– Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza – Tecnologia e media	

Tabella 11
Realizzazione: installazione e lancio. Inquadramento nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.*

5.11. Realizzazione: analisi post-lancio

Obiettivo progettuale

Ad ogni volo, in ciascun razzomodello è stato installato un altimetro-accelerometro per modellismo (Figura 16) per registrare con una frequenza di 20 Hz le misure di quota (calcolata internamente allo strumento a partire da una quota di riferimento e misurando la pressione atmosferica. Risoluzione ± 30 cm) e di accelerazione raggiunte. I dati, scaricabili via *bluetooth* su uno *smartphone*, potevano essere visualizzati in un grafico cartesiano direttamente attraverso l'*app* fornita con l'altimetro (Figura 17) ed esportati come foglio elettronico.

Figura 16
Altimetro utilizzato durante i lanci dei razzomodelli.

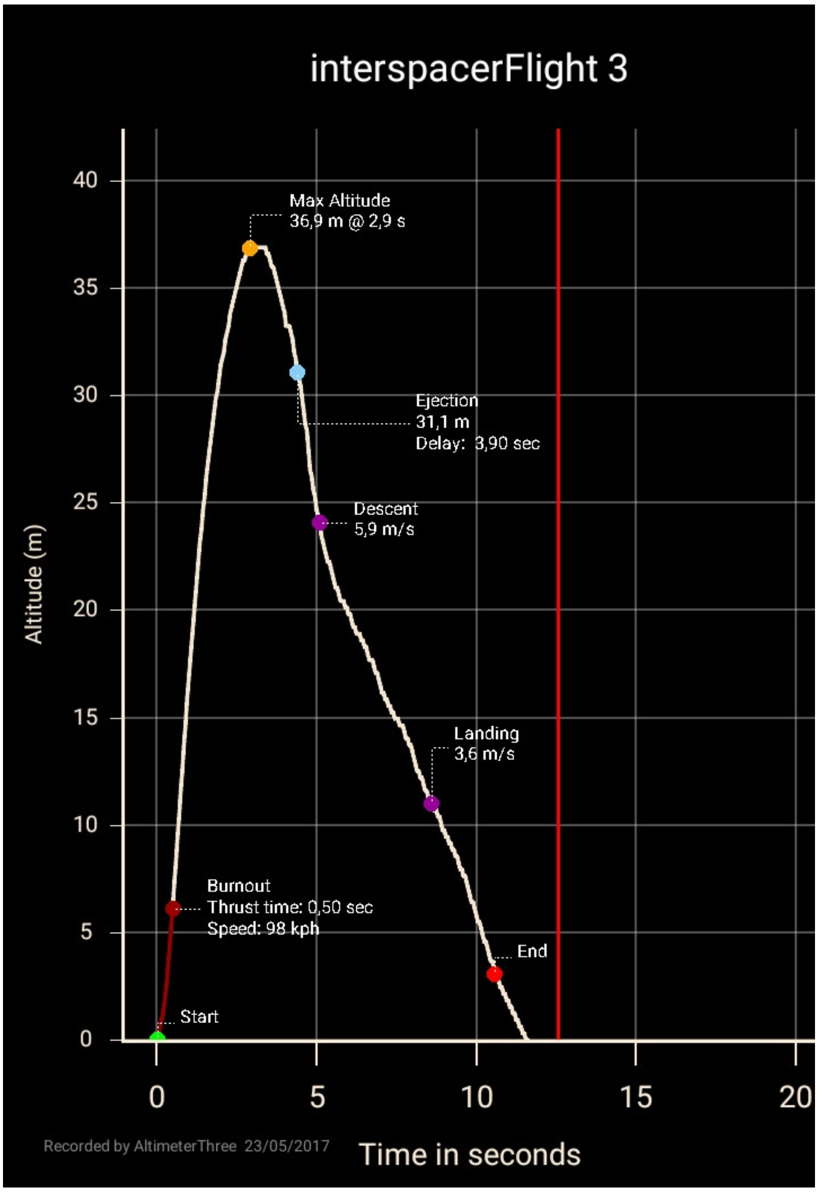


Figura 17
Screenshot dell'app di acquisizione dell'altimetro.

Gli obiettivi di questa fase sono riferiti al saper leggere i dati acquisiti dall'altimetro durante i voli, realizzare dei grafici a partire dal foglio elettronico e verificare l'errore percentuale compiuto durante la misurazione sul campo dagli allievi, utilizzando come riferimento la lettura fornita dall'altimetro.

Tempistiche e materiale
Due ore-lezione in aula di informatica. Altimetro; software *Microsoft Excel*®; schede didattiche.
Due ore-lezione per la conclusione del film *Cielo d'ottobre* e discussione.

Descrizione dell'attività
Gli allievi sono stati suddivisi in coppie/terzetti di lavoro secondo l'appartenenza ai team di lancio. In aula di informatica il docente ha ripreso gli elementi fondamentali del piano cartesiano e ha fatto svolgere agli allievi semplici esercizi di attivazione. In seguito, ogni gruppo doveva determinare l'apogeo raggiunto dal proprio razzomodello secondo il metodo grafico già noto, in modo da verificare la bontà delle misurazioni compiute il giorno del lancio.
È stata poi lanciata la sfida di confrontare le misure ottenute con quelle effettuate dall'altimetro a bordo dei razzomodelli: il team che ha determinato la quota di apogeo con le pistole e il metodo grafico con maggior precisione – in termini di errore percentuale – rispetto ai dati dell'altimetro avrebbe vinto la sfida. Si è quindi reso necessario rappresentare graficamente i dati dello strumento, e questo è avvenuto grazie a un foglio elettronico *Microsoft Excel*®; l'attività è stata svolta da ogni coppia/terzetto di lavoro usando i dati relativi al proprio razzomodello e interpretando il grafico finale.
Ai gruppi che terminavano velocemente il lavoro veniva chiesto di calcolare per ogni istante di tempo rilevato la velocità (noti la variazione di quota e di tempo) e di rappresentare graficamente i risultati per osservare l'andamento di questa grandezza durante il volo.
Si veda un esempio dei grafici ottenuti per un razzomodello nella Figura 18.

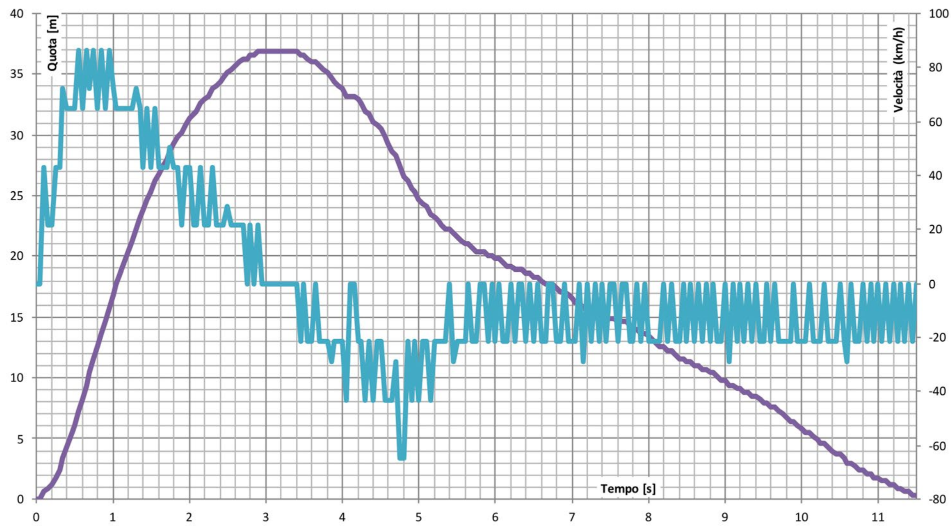


Figura 18
Grafico quota e velocità di un razzomodello generato con foglio di calcolo dai dati acquisiti con l'altimetro: altitudine (viola) e velocità (azzurro) nel tempo.

La scoperta della massima quota e della massima velocità raggiunta dal proprio razzomodello e la sfida del commettere il minor errore percentuale nel confronto fra le due misurazioni ha motivato molto l'intera classe, soprattutto confrontando i valori

trovati con misure di distanza e velocità comuni all'esperienza quotidiana degli allievi. Le schede didattiche riferite a questa attività sono disponibili nell'**Allegato 10**.
Al termine di tutto l'itinerario è stata conclusa in due ore-lezione la visione del film *Cielo d'ottobre*, lasciando uno spazio finale per risonanze, condivisioni e libero confronto sull'intero percorso svolto e sulle scelte di vita e i desideri professionali degli allievi: seppur non determinante, il percorso ha contribuito a una maggior presa di coscienza da parte degli allievi riguardo le loro scelte dopo la scuola dell'obbligo, soprattutto nella valutazione critica e non superficiale dei consigli ricevuti dagli adulti (genitori, docenti, amici, …).

Inquadramento nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese
Questa attività si inserisce negli ambiti *Numeri e calcolo, Grandezze e misure* e *Funzioni*.

MODELLO DI COMPETENZA	Numeri e calcolo	Grandezze e misure	Funzioni
Sapere e riconoscere		Definire la velocità	
Eseguire e applicare	Confrontare le percentuali fra valori numerici		Leggere, completare e utilizzare un diagramma cartesiano
Esplorare e provare			
Matematizzare e modellizzare			Sintetizzare in un diagramma cartesiano (tempo-spazio-velocità) il profilo di missione del razzomodello
Interpretare e riflettere sui risultati		Interpretare il diagramma cartesiano e confrontare i valori delle grandezze in gioco (tempo, quota, velocità) con misure prossime alla vita quotidiana degli allievi	
Comunicare e argomentare			
Competenze trasversali	– Collaborazione		
Contesti di formazione generali	– Tecnologie e media – Scelte e progetti personali		

Tabella 12
Realizzazione: analisi post-lancio. Inquadramento *nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.*

6 Conclusioni, riflessioni critiche e possibili sviluppi

Il progetto *Razzi di classe* ha permesso di perseguire in maniera soddisfacente il traguardo di competenza e quelli di apprendimento dell'allievo presentati nel primo paragrafo di questo articolo: gli allievi hanno manifestato entusiasmo e motivazione lungo l'intero itinerario, mostrando un modesto incremento dell'interesse anche in ore di lezione di matematica esterne al progetto. Le conoscenze, le abilità e le competenze matematiche mobilitate hanno visto un'applicazione reale e pratica, fortemente finalizzata a uno scopo preciso e accattivante come il lancio di un razzomodello. Circa gli aspetti di competenza più trasversali – la collaborazione e la disponibilità alla riflessione per la propria progettualità di vita – si è osservato un miglioramento parziale, soprattutto da parte di alcuni allievi, fermo restando che un itinerario di qualche ora-lezione può fornire soltanto una piccola e circoscritta occasione di attivazione e riflessione personali rispetto al quotidiano.

Il tempo dedicato al progetto in griglia oraria è risultato adeguato ed equilibrato rispetto alla programmazione annuale e ai traguardi di apprendimento per la classe terza.

La progettazione dell'intero itinerario si è fortemente appoggiata sul concetto di differenziazione, a diversi livelli:

– Dal punto di vista del docente. Poiché il progetto è stato entusiasmante fin dalla prima fase di ideazione, il docente ha potuto coinvolgere specificatamente la propria formazione, il proprio vissuto e la propria passione per la tematica, contribuendo positivamente alla progettazione di un itinerario che potesse essere accattivante per la classe.
– Dal punto di vista della disciplina. Le attività prettamente matematiche presenti nell'itinerario si sono strutturate con differenziazione progressiva e nell'ottica dell'apprendimento cooperativo (attività a coppie, a gruppi, a terzetti, *jigsaw*);
– Dal punto di vista degli allievi. La suddivisione continua di ruoli e compiti molto eterogenei fra loro in un'ottica cooperativa ha permesso di stimolare ciascun allievo secondo le proprie competenze disciplinari e trasversali, valorizzandone la presenza operativa all'interno di un contesto collaborativo di lavoro.

L'itinerario avrebbe potuto essere più valorizzato in termini di comunicazione esterna, sia all'interno della sede scolastica – al fine di raggiungere una maggior visibilità e gratificazione scolastica – sia all'interno delle famiglie – per stimolare una maggior presa di coscienza degli allievi dell'importanza e l'interesse del compito che stavano perseguendo. Oltre a ciò, la potenzialità offerta dall'efficace cornice narrativa del film *Cielo d'ottobre* è stata poco sfruttata nella riflessione personale con gli allievi.

Tutto ciò si sarebbe potuto favorire anche implementando possibili ulteriori sviluppi del progetto *Razzi di classe*, fra i quali:

– progettazione di ulteriori attività matematiche connesse al progetto (eventualmente con traguardi di apprendimento ridotti o implementati per adattare l'itinerario a classi diverse dalla terza base). A tal proposito si vedano Milligan (1999; 2000) e Nolte (2012);
– una maggiore interdisciplinarità e quindi il coinvolgimento attivo di più docenti (scienze, arti plastiche, italiano, storia, educazione alla cittadinanza, geografia);
– lo sviluppo più strutturato di un percorso di conoscenza di sé e di educazione alle scelte da svolgere in altre ore didattiche o in ora di classe, sfruttando la cornice narrativa e di senso fornita dalla visione del film *Cielo d'ottobre*.

L'auspicio è di poter revisionare e approfondire eventuali implementazioni ed espansioni del progetto *Razzi di classe*.

Il progetto non ha inciso radicalmente sulla motivazione e sul profitto degli allievi nelle ore di matematica, né tanto meno ha contribuito in maniera decisiva e centrale allo sviluppo di sé dei singoli. Ad ogni modo ha certamente contribuito disciplinarmente e trasversalmente nel suo piccolo a fare alzare agli allievi un poco lo sguardo al cielo della loro vita, fornendo un apporto che si è andato ad aggiungere all'intera esperienza scolastica e al vissuto personale.

Ma d'altronde già i latini affermavano… *per aspera ad astra!*

ESPERIENZA DIDATTICA

Bibliografia

Barrowman, J. (1970). *Stability of a model rocket in flight.* Centuri. Phoenix (Arizona): Centuri Engineering Company.

Comoglio, M., & Cardoso, M. A. (1996). *Insegnare e apprendere in gruppo. Il Cooperative Learning*. Roma: Libreria Ateneo Salesiano.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Tratto da ScuolaLab: Disponibile in http://www.pianodistudio.ch (consultato il 28.04.2019).

Gentile, M. (1998). Motivare ad apprendere. *ISRE*, *5*(2), 80-109.

Grimm, A. (1999). *Model Rocketry Study Guide*. Estes Educator. Launch Learning Fun. Centuri Corporation.

Hickam, H. (1999). *Cielo d'ottobre*. Milano: Rizzoli.

Licheri, L.M. (2019, febbraio 20). *La pedagogia del progetto. Metodo per lo sviluppo di competenze del XXI secolo e la diffusione dei valori europei*. Disponibile in http://communityeseceducation.eu/c/document_library/get_file?groupId=20182&folderId=44462&title=Output+Teachers+O1+Italian+version.pdf (consultato il 28.04.2019).

Milligan, T. V. (1999). *69 science fair projects with model rockets*. Colorado Springs (CO): Apogee Components Inc.

Milligan, T. V. (2000). *Model rocket design and construction. How to create and build unique and exciting model rockets that work!* Colorado Springs (CO): Apogee Components Inc.

Nolte, S. (2012). *Mathematics and Model Rockets. A Teacher's Guide and Curriculum for Grades 5-12*. Estes Educator. Launch Learning Fun. Estes Education.

Sepúlveda, L. (2010). *Storia di una gabbianella e del gatto che le insegnò a volare*. Milano: Salani.

Stine, H. G. (2004). *Handbook of model rocketry*. Hoboken (NJ): John Wiley & Sons Inc.

Autore/Diego Santimone
Scuola media di Losone – Svizzera
diego.santimone@edu.ti.ch

Il razzimodellismo può essere pericoloso! Alcune norme di sicurezza (non esaustive) da rispettare sempre:

1) utilizzare materiali ed equipaggiamenti certificati e prodotti da ditte di modellismo professionale;
2) verificare la bontà della fattura del razzo modello e il soddisfacimento delle posizioni di CG e CP;
3) rispettare rigorosamente il regolamento NAR;
4) rispettare le misure di sicurezza più elementari (distanze, dispositivi di protezione individuali, protezioni ecc.);
5) fare qualche prova in bianco senza gli allievi per conoscere il funzionamento ed il comportamento del razzomodello.

In caso di dubbi affidatevi a ditte di modellismo specializzate ed esperti del settore.

Non si improvvisa, mai!

Recensioni

DdM

Recensioni

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia. Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Bari: Edizioni Dedalo.

Gli autori, molto conosciuti e stimati, con questo nuovo volume continuano la loro serie *La matematica e la sua storia*, iniziata con la pubblicazione nel 2017 di *Dalle origini al miracolo greco*, seguita nel 2018 da *Dal tramonto greco al Medioevo*.
Questo terzo volume ci offre uno spaccato matematico-storico-filosofico concernente il periodo *Dal Rinascimento al XVIII secolo* e ci lascia presagire una prossima pubblicazione che potrebbe concludere il meraviglioso ciclo.
In esso si possono riconoscere chiaramente lo stile e il modo di interpretare i periodi dei volumi precedenti: un riuscitissimo amalgama di matematica, storia, filosofia e didattica, cosa che rende la lettura piacevole e interessante per molti lettori, dall'insegnante allo scienziato, dal matematico allo storico e al filosofo. Ma, conoscendo bene gli autori, oso affermare che sotto sotto hanno pensato soprattutto agli insegnanti. Perché se si vuole togliere dall'immagine scolastica della disciplina matematica quella stonata caratteristica di materia fredda, scontata, nella quale ogni studente si vede obbligato a imparare a memoria definizioni, teoremi e rigidi algoritmi, se si desidera abbracciare la matematica come disciplina culturale (cosa che le spetta), una strada da seguire è certamente indicata da questa pubblicazione. Conoscere un po' di storia, di quella autentica (nei limiti del possibile), prendere atto che molte difficoltà incontrate dagli studenti di oggi si possono ritrovare in gran parte nei lavori di personaggi dai nomi altisonanti, sapere che molte conquiste della matematica sono costate anche duri contrasti fra gli studiosi, cambia notevolmente il rapporto tra disciplina e discente; da un lato perché la matematica si rivela una costruzione realizzata in parecchi millenni, quindi non calata dall'alto, perfetta, invariabile, dall'altro perché, portando a conoscenza dello studente le difficoltà e gli errori del passato, lo si tranquillizza e lo si porta a concepire un'immagine diversa delle proprie difficoltà e degli errori. Fare matematica vuol dire anche incontrare ostacoli duri da superare, anche sbagliare, tentare percorsi diversi, fare tesoro del vissuto per non cadere negli stessi errori e per costruire una rete di relazioni fra gli apprendimenti, costruirsi una propria strategia di studio sempre suscettibile di miglioramento.
Tutto ciò è perfettamente riscontrabile nei vari capitoli di questo terzo volume.
Già all'inizio il lettore può rivivere, per esempio, la vicenda che nel secolo XIII coinvolge Tartaglia, Cardano, Ferrari e Dal Ferro a proposito della risoluzione, non ancora conosciuta, dell'equazione di terzo grado: un intreccio di sfide matematiche, di ricatti e di acuti imbrogli. Da leggere e meditare, in particolare, la traduzione, in versi difficilmente comprensibili, del metodo di risoluzione fatta da Tartaglia perché, per certe ragioni, doveva comunicarlo al professor Cardano dell'Università di Bologna, ma d'altra parte non voleva che costui se ne impossessasse facilmente.
Per uno studente, conoscere simili peripezie molto frequenti nella storia della matematica, è una bella lezione di umanità. Dai momenti di esaltazione (colpi di genio, idee brillanti) a quelli di sconforto, superabili grazie alla caparbietà, alla fatica e all'intelletto, gli studiosi hanno costruito a fatica quel grande edificio che è la matematica di oggi e che, a piccole dosi e molto parzialmente, lo studente è tenuto ad apprendere sia per motivi di utilità sia soprattutto perché costruendosi la propria matematica – ovviamente sotto lo sguardo sapiente dell'insegnante – plasma la propria mente e acquisisce capacità utili in qualunque campo dello scibile.
E che dire del rapporto tra arte e matematica nel Rinascimento? Ecco un altro tema, in generale poco conosciuto. Chi guarda una mostra d'arte con occhi matematici?

Eppure quasi sempre si può scoprire che dietro a un dipinto o a una statua o a un brano musicale o letterario si cela una struttura matematica che l'artista può aver concepito espressamente oppure anche inconsciamente. In merito, il Rinascimento costituisce un esempio importante perché proprio in quel periodo la pittura ha scoperto la prospettiva (che è matematica). Dal grande Piero della Francesca, pittore e matematico, al Brunelleschi a Leon Battista Alberti e a Leonardo da Vinci, autodidatta e genio multiforme, probabilmente il più conosciuto, per citare solo alcuni dei diversi personaggi del Rinascimento italiano.

La parte dedicata alla nascita del simbolismo moderno è un impareggiabile dono per tutti gli insegnanti, che sono chiamati a traghettare gli alunni dal campo numerico alla generalizzazione, quindi al calcolo letterale. Nella storia si è passati dall'*algebra retorica* (fin verso il XIV-XV secolo), a quella *sincopata* (tra il XV e il XVI secolo), per poi giungere all'*algebra simbolica* (Viète e Descartes, XVI secolo), praticamente quella che si insegna oggi nelle scuole; lo studente che è condotto a capire quanto sia stata grande e sofferta questa creazione troverà grande motivazione nell'apprendere, con tutti i vantaggi che ne derivano relativamente all'acquisizione di competenze.

René Descartes (italianizzato Cartesio) è anche ricordato per aver dato un contributo decisivo alla creazione della geometria analitica, della quale fanno conoscenza già gli alunni delle medie con l'apprendimento del sistema degli assi cartesiani, appunto, e che poi sviluppano nel corso degli studi superiori. Sarebbe quindi buona cosa che gli insegnanti facessero capire agli studenti come sia nata l'idea delle coordinate e quanto utili siano per lo studio e per l'applicazione anche a situazioni concrete.

Il tema dell'infinito matematico non poteva certamente mancare, viste le ricerche e gli studi che si sono fatti all'interno del NRD[1] di Bologna e infatti troviamo un bellissimo spunto che, se sfruttato in classe, può dare grande motivazione per una formazione corretta del concetto matematico di infinito: dall'infinitamente grande all'infinitamente piccolo. La lettura di queste pagine porta alla conoscenza dei grandi attori che hanno contribuito piano piano alla nascita dell'analisi matematica, cioè del calcolo differenziale e integrale. Sono pionieri della grande costruzione: Galileo, i suoi discepoli Cavalieri, Torricelli, Mengoli e altri ancora, fondatori del *metodo degli indivisibili*, molto simile al *metodo di esaustione*, ideato da Archimede, con il supporto teorico di Eudosso di Cnido, circa un millennio prima. Ma non si tratta per nulla di plagio, perché gli scritti di Archimede relativi a questo tema furono trovati solo nel 1906. Ecco un altro bello stimolo di riflessione in classe: il confronto tra il modo di procedere di Archimede e quello di Cavalieri e compagni.

In tale contesto, come ultimo atto, questo terzo volume arriva a toccare l'opera di Newton e Leibniz che, a cavallo dei secoli XVII e XVIII, diedero un contributo essenziale ai concetti di derivata e di integrale, materia che si tratta negli ultimi anni delle scuole superiori e che andrebbe presentata, almeno nelle fasi iniziali, anche da un punto di vista storico.

Nel proseguo, il racconto si concentra maggiormente sulla matematica e presenta in modo chiaro e semplice questioni che sono conosciute anche dal grande pubblico.

Alludo, per esempio al cosiddetto "ultimo teorema" di Fermat, a proposito del quale lo stesso ebbe a scrivere, a margine del proprio manoscritto, "la dimostrazione l'ho completata, ma non ci sta nel piccolo spazio che ho a disposizione". Inutile dire che i

1. Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica. Si veda ad esempio il testo: Arrigo, G., D'Amore, B. & Sbaragli, S. (2010). *Infiniti infiniti*. Trento: Erickson, ora in riedizione presso un altro editore.

matematici furono fortemente stimolati a cercare una loro dimostrazione, cosa che si è verificata soltanto nel 1995 con Andrew Wiles, cioè circa tre secoli dopo l'enunciazione di Fermat. Vista la natura della dimostrazione di Wiles che comprende concetti e metodi attuali sicuramente non conosciuti da Fermat, oggi possiamo affermare con (quasi) sicurezza che il nostro eroe aveva… bleffato. Ma anche questo fatto è importante, perché contribuisce a rendere più umana l'immagine del matematico.
Un'altra bella occasione per rendere più stimolante lo studio dalla matematica ce la offre il matematico svizzero Leonhard Euler, che ha operato nel XVIII secolo, in gran parte nelle regge di San Pietroburgo e di Berlino. Gli autori non si sono lasciati sfuggire l'occasione per mostrare i suoi lavori sui grafi, ritenuti fondanti di una nuova branca della matematica, denominata *Topologia*: attività che possono coinvolgere anche gli allievi della scuola primaria. Chi non ha mai tentato di disegnare la famosa casetta o la busta per le lettere senza alzare la matita dal foglio?
Gli ultimi capitoli si soffermano sia sull'evoluzione della geometria che si stacca dal pesante fardello euclideo sia sull'algebra che conosce una vera rivoluzione grazie anche all'opera di personaggi per nulla comodi come Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel ed Evariste Galois.
A chi si interessa di calcolatrici, calcolatori e moderni computer, gli autori dedicano un intero capitolo. La storia del calcolo strumentale ha inizio dagli abachi e dai "bastoncini" di John Napier (italianizzato Nepero), prosegue con le prime addizionatrici meccaniche, poi con le più raffinate calcolatrici meccaniche elettriche per poi sfociare nei primi "calcolatori da tavolo" e nelle prime calcolatrici elettroniche tascabili. Di lì si inizia lo strabiliante sviluppo delle teorie dell'informatica e della comunicazione. Ma questa è un'altra storia.

Gianfranco Arrigo
Società matematica della svizzera italiana (SMASI)
Lugano, Svizzera

Zan, R., & Baccaglini- Frank, A. (2017). *Avere successo in matematica. Strategie per l'inclusione e il recupero*. Torino: UTET Università.

Inserire il termine *successo* nel titolo di un libro sulle difficoltà di apprendimento potrebbe apparire come un ossimoro, soprattutto in matematica. In realtà, il termine *successo* condensa lo spirito del testo sia nella sua prospettiva teorica e filosofica nei confronti delle difficoltà in matematica sia nella realizzazione concreta di un rinnovato approccio al suo insegnamento e apprendimento.
La difficoltà e l'errore non sono considerati degli eventi negativi da evitare e, qualora si presentino, da sanzionare come tende a fare una concezione selettiva della valutazione. Rosetta Zan e Anna Baccaglini-Frank, alla luce del loro impegno e della loro approfondita esperienza di ricerca ci consegnano un punto di vista sulle difficoltà innovativo rispetto a quello che spesso si incontra nel mondo della scuola. Le difficoltà di apprendimento sono un fenomeno ricco nella sua complessità e interessante da studiare, ineliminabile nell'esperienza di apprendimento di *tutti* gli allievi; se affrontate correttamente sono delle vere e proprie reazioni vincolari che forniscono le forze necessarie ad avere successo in matematica che, oltre ad un solido bagaglio scientifico, sviluppa anche un'identità capace di autoefficacia, resilienza, metacognizione

ed emozioni positive. Un respiro ampio nei confronti delle difficoltà, come quello proposto dalle autrici, permette agli insegnanti di realizzare un'inclusione autentica per tutti gli alunni.
Il mondo della scuola si trova spesso ad affrontare le diffuse difficoltà in matematica senza disporre del bagaglio teorico per comprendere il fenomeno ed intervenire adeguatamente: accade sovente che le cause delle difficoltà non vengano individuate in modo accurato e consono alle specificità del singolo studente. Le cause più comuni che vengono ascritte alle situazioni di fallimento scolastico sono solitamente lo scarso impegno, le lacune di base, la mancanza di un metodo di studio, un atteggiamento negativo nei confronti della matematica e la mancanza di predisposizione. Alcune di queste diagnosi possono corrispondere alla situazione effettiva dell'allievo, ma sono espresse in modo vago e generale. La conseguenza è che l'intervento di recupero rischia di essere inadeguato ai bisogni specifici dell'alunno e alle reali cause delle sue difficoltà.
Il testo analizza il fenomeno dell'apprendimento matematico e delle sue difficoltà con un approccio olistico che descrive gli aspetti cognitivi, metacognitivi ed affettivi che possono ostacolare l'apprendimento della matematica. Le autrici evidenziano anche gli aspetti legati ai contenuti matematici, in senso locale e trasversale, che gli studenti non sono in grado di trattare adeguatamente. Alla luce di questa analisi, il lettore trova anche gli strumenti teorici per costruire un percorso didattico capace di includere i molteplici aspetti dell'apprendimento che concorrono al raggiungimento del successo in matematica. Trovo particolarmente interessanti le numerose schede operative a supporto delle attività d'aula che l'insegnante potrà proporre ai suoi studenti, costruite sulla base delle lenti teoriche presentate nel libro. Il testo si conclude con una limpida ed esaustiva presentazione di un prototipo di intervento, ispirato dalle riflessioni fatte nelle unità precedenti, su un nucleo fondante della matematica: il concetto di funzione. Tuttavia, il lettore potrà ispirarsi a questa unità per progettare un intervento contestualizzato nella sua realtà d'aula su un altro argomento.
Un libro che consiglio a tutti i lettori interessati all'apprendimento della matematica e alle difficoltà, in particolare ai docenti di matematica, ai docenti di sostegno e, perché no, anche ai genitori che potranno comprendere meglio le difficoltà dei propri figli e trovare strumenti per aiutarli. Lo consiglio anche ai dirigenti scolastici che troveranno spunti utili per progettare attività di recupero più efficaci a livello di Istituto.

Giorgio Santi
Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica
di Bologna, Italia

Battaini, L., Bernasconi, I., Franscella, S., & Pellandini, A. (2019). *1, 2, 3... Si gioca! Collana Praticamente*. Bellinzona: DECS-SUPSI. Disponibile a questo link (consultato il 14.11.2019).

Da sempre il gioco è considerato una delle strategie più efficaci per veicolare nei bambini conoscenze e abilità fisiche e intellettive in svariati ambiti. Di certo rappresenta una potente forma di confronto, collaborazione, comunicazione, apprendimento che consente lo sviluppo di diverse competenze disciplinari e trasversali. E fare matematica con i bambini giocando fin dall'età prescolare è di certo non solo

possibile ma profondamente auspicabile.
Ce lo mostrano le svariate attività proposte da quattro docenti di scuola dell'infanzia e scuola elementare che nella seconda uscita della collana PRATICAMENTE, progetto editoriale nato dalla collaborazione tra Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS) e Dipartimento formazione e apprendimento (DFA) della SUPSI, Canton Ticino, forniscono numerosi spunti e idee per affrontare con bambini dai 3 agli 8 anni aspetti numerici attraverso giochi stimolanti e divertenti.
Le sperimentazioni che hanno portato avanti le autrici nelle loro classi sostengono l'ipotesi che molti temi matematici, ritenuti apparentemente troppo complessi per la scuola dell'infanzia, possano essere proposti con estrema efficacia in forma ludica, multidisciplinare, con attività costruite in modo da privilegiare approcci matematici spontanei del bambino e preconoscenze non formalizzate. D'altronde l'assenza di formalismo non porta necessariamente ad una matematica più banale, anzi…
Il tema è senza dubbio ampio e articolato e le scelte condotte dalle autrici del quaderno *1, 2, 3 … Si gioca!* si concentrano su sei diversi aspetti matematici ritenuti fondamentali per un approccio al concetto di numero in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola elementare, esposti in otto capitoli organizzati in base agli argomenti. Per tutte le tematiche vengono proposti giochi tradizionali, circolanti liberamente o in commercio, inventati o magari costruiti dai bambini stessi a partire da quelli conosciuti e adattati ai vari livelli scolastici. Tutti con la caratteristica comune di essere versatili e facilmente adattabili all'evoluzione delle competenze del bambino nel livello scolastico successivo.
Diventa dunque un "gioco da ragazzi" intuire il significato di corrispondenza biunivoca, mettendosi magari nei panni di una pecorella che cerca un ciuffo d'erba, oppure esplicitare l'atto di enumerare che i bambini compiono quotidianamente, ma quando sono più piccoli in modo non consapevole. Esercitarsi poi nella conta attraverso giochi strutturati e filastrocche che ne favoriscono la memorizzazione e il passaggio al numero scritto è divertente e formativo. Attraverso l'esperienza concreta di attività e giochi motori il bambino si avvicina al conteggio in modo spontaneo, costruendo i concetti correlati in funzione della propria esperienza e affinandoli via via in modo intuitivo e strategico. Il tutto per giungere spontaneamente alle prime operazioni di scomposizione dei numeri e addizione, utilizzando materiali strutturati come dadi (di varie forme e tipologia) e carte (tradizionali o costruite). Seguono poi giochi e sfide pensate per stimolare la capacità di stima del numero e della quantità nel bambino, un'abilità che non sempre trova spazio nelle pratiche d'aula. Il quaderno si conclude con un'interessante riflessione e proposta sull'evoluzione di alcuni giochi in funzione dello sviluppo delle competenze dei bambini, in modo da renderli sempre più intriganti e coinvolgenti, favorendo l'attenzione e l'attuazione di nuove strategie man mano che diventano più complesse.
Senza dubbio le svariate tipologie di giochi descritti (collaborativo, competitivo, ibrido, motorio ecc.) che si intrecciano con l'utilizzo di diversi materiali (carte, dadi, pedine, tabelloni ecc.) ci regalano un patrimonio ricchissimo di attività da cui qualsiasi docente può attingere e portare nelle proprie classi.
Dunque, come suggeriscono le autrici «non ci rimane che augurare "buon gioco a tutti"».

Elena Franchini
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Cerasoli, A. (2019). *Le sorelle cinque dita*. Firenze: Editoriale Scienza.

Chi ha già letto qualcuno dei libri di Anna Cerasoli ne conoscerà certamente il valore, sia dal punto di vista narrativo che dal punto di vista didattico. Infatti, oltre ad essere una profonda conoscitrice della matematica, Anna Cerasoli è anche una fine divulgatrice, con all'attivo una ventina di libri grazie ai quali è riuscita ad avvicinare i più piccoli all'affascinante mondo di questa disciplina. Matematica e scrittrice per l'infanzia…com'è possibile? Senz'altro ha a che fare con il talento, direte voi. Certamente è così, ma forse c'è anche qualcos'altro. Il fatto è che Anna Cerasoli è anche insegnante, lo è stata per tanti anni, e si sa, un insegnante deve saper raccontare, creare storie accattivanti per i propri allievi, catturare l'attenzione e motivare le dolci fatiche cognitive che richiede loro. Dunque non stupisce, o meglio diventa più comprensibile, la capacità della scrittrice di creare decine di narrazioni all'interno delle quali sviluppare tanti temi matematici: i numeri e gli insiemi numerici, le figure geometriche, il pi greco, la corrispondenza biunivoca ecc.
Le protagoniste di questo ultimo libro sono le mani, o meglio, le dita. Nel racconto, accompagnato dalle illustrazioni di Martina Tonello, le dita delle sorelle Manodestra si mettono in mostra per aiutare i più piccoli a distinguere le quantità fino a 5; dal dialogo con le cugine Manosinistra nasce poi una convinzione: lavorando assieme, le due mani riescono a giocare meglio, mangiare con più gusto…insomma, divertirsi di più.
Il libro è un'occasione per introdurre il numero nel suo significato cardinale e ordinale, sia in ordine crescente che in ordine decrescente. Ma c'è di più. A corredo della storia, l'autrice propone semplici giochi per familiarizzare con la scomposizione del numero 5 in due o più addendi, e brevi ma simpatiche filastrocche in rima per iniziare a memorizzare le prime sequenze numeriche.
Insomma, un altro libro utilissimo per la didattica della matematica rivolta ai più piccolini, curato nei dettagli, e attento tanto agli aspetti matematici quanto a quelli narrativi.

Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Carimali, L. (2018). *La radice quadrata della vita*. Milano: Rizzoli.

«Ti augurerei di trovare la radice quadrata della tua vita», questo l'augurio matematico che Donatella, insegnante di matematica e fisica da ormai 40 anni, rivolge a Bianca, giovanissima supplente di italiano e latino alla prima esperienza nel suo stesso liceo. Difficile decidere chi delle due colleghe sia la protagonista di questo romanzo: in effetti, lo sono entrambe, le loro storie si intrecciano, e l'incontro tra le due donne ha tutti i tratti di un passaggio di testimone.
Donatella, ormai prossima alla pensione, ama sperimentare diverse metodologie didattiche, facendo vivere la matematica ai suoi studenti come disciplina affascinante e creativa. Bianca, il cui rapporto con la matematica è stato invece sempre molto conflittuale, riscopre grazie all'incontro con Donatella una prospettiva del tutto nuova e sorprendente su questa materia e sul suo insegnamento; tanto che deciderà

anche lei, ispirandosi alle lezioni della collega, di proporre, nelle sue ore di italiano, tecniche didattiche innovative e centrate sullo studente.

La relazione tra Donatella e Bianca nasce tra i banchi di scuola, letteralmente, quando entrambe assistono alle lezioni sulle geometrie non euclidee tenute da uno studente di Donatella. Un'intesa dapprima professionale che si tramuta presto in amicizia anche fuori dalla scuola: Bianca trova in Donatella una guida e Donatella rivede in Bianca sé stessa.

L'idea di fondo che emerge con forza dalla lettura di questo libro è la collaborazione, fatta di scambio e di confronto: dalla collaborazione tra le due protagoniste, anche se afferenti a discipline diverse, alla collaborazione che entrambe propongono ai loro studenti in aula. Un confronto di idee e di valori che, se proposto a scuola e vissuto in prima battuta dai docenti, può essere promosso anche fuori dalle mura scolastiche: a casa, in famiglia, nelle relazioni in generale. È proprio quello che cerca di fare Bianca nel suo delicato rapporto con il padre e le sue tradizioni iraniane, e nell'intesa che nasce con un suo collega; altri ingredienti che contribuiscono a colorare la trama di questo romanzo.

Un romanzo che consiglio per la sua leggerezza e semplicità: i personaggi svolgono azioni normalissime, in cui chi ha a che fare con il mondo della scuola – tra lezioni, supplenze, colleghi, conferenze, studio e concorsi – si identifica immediatamente.

Monica Panero
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera