

DdM

07

Dalle bacchette da calcolo cinesi
al metodo *Fangcheng*: un percorso
di trasposizione culturale nella
scuola secondaria di primo grado
Raffaele Casi e Chiara Pizzarelli

Didattica della Matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Il labirinto delle finanze: un gioco
sull'educazione finanziaria per le
scuole secondarie di secondo grado
*Giulia Bernardi, Elena Brambilla
e Paola Landra*

Valutazioni standardizzate di
matematica: evidenze di difficoltà
dalla scuola primaria alla scuola
secondaria di secondo grado
Federica Ferretti

Un percorso formativo alla
comprensione del testo
matematico, dai 5 ai 14 anni
*Roberto Trincherò
e Susanna Piacenza*

Fare i conti con il caso:
fra probabilità e gioco d'azzardo
Sanja Komazec

Valutare senza voto numerico: strumenti
e riflessioni di una sperimentazione
di matematica alle scuole secondarie di
primo grado
Francesco D'Intino

Prospettive teoriche per lo studio
della contaminazione tra ambienti
di insegnamento/apprendimento
fisici e virtuali
Agnese Del Zozzo e George Santi

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Direzione scientifica:

Prof. Silvia Sbaragli, responsabile Centro competenze didattica della matematica (DDM)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Comitato di redazione:

Servizio comunicazione
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno, Svizzera.
Gianfranco Arrigo (Società matematica della Svizzera italiana, Lugano, Svizzera).
Giulia Bernardi, Michele Canducci, Gemma Carotenuto, Amos Cattaneo, Elena Franchini, Corrado Guidi,
Carlo Mina, Monica Panero, Alberto Piatti e Silvia Sbaragli (Dipartimento formazione e apprendimento,
SUPSI, Locarno, Svizzera).

Comitato scientifico:

Samuele Antonini (Università di Pavia, Italia).
Gianfranco Arrigo (Società matematica della Svizzera italiana, Lugano, Svizzera).
Giorgio Bolondi (Libera Università di Bolzano, Italia).
Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia).
Emanuele Delucchi (Università di Friburgo, Svizzera).
Pietro Di Martino (Università di Pisa, Italia).
Benedetto Di Paola (Università di Palermo, Italia).
Pier Luigi Ferrari (Università del Piemonte Orientale, Italia).
Elena Franchini (Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno, Svizzera).
Athanasios Gagatsis (University of Cyprus, Nicosia, Cipro).
Juan D. Godino (Universidad de Granada, Spagna).
Colette Laborde (Université de Grenoble, Francia).
Salvador Llinares (Universidad de Alicante, Spagna).
Claire Margolinas (ACTé, Université Clermont-Auvergne, Francia).
Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena, Italia).
Monica Panero (Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno, Svizzera).
Alberto Piatti (Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno, Svizzera).
Silvia Sbaragli (Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno, Svizzera).

Grafica:

Jessica Gallarate
Servizio comunicazione
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Impaginazione:

Luca Belfiore



© 2020 by the author(s).

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
è distribuito con Licenza Creative Commons
Attribuzione 4.0 Internazionale.

Maggio 2020

[Editoriale / Editorial](#)

I

Riflessione e ricerca

[Prospettive teoriche per lo studio della contaminazione tra ambienti di insegnamento/apprendimento fisici e virtuali](#)

Agnese Del Zozzo e George Santi

09

[Valutazioni standardizzate di matematica: evidenze di difficoltà dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado](#)

Federica Ferretti

36

[Un percorso formativo alla comprensione del testo matematico, dai 5 ai 14 anni](#)

*Roberto Trincherò
e Susanna Piacenza*

50

Esperienze didattiche

[Il labirinto delle finanze: un gioco sull'educazione finanziaria per le scuole secondarie di secondo grado](#)

*Giulia Bernardi, Elena Brambilla
e Paola Landra*

76

[Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo *Fangcheng*: un percorso di trasposizione culturale nella scuola secondaria di primo grado](#)

Raffaele Casi e Chiara Pizzarelli

97

[Valutare senza voto numerico: strumenti e riflessioni di una sperimentazione di matematica alle scuole secondarie di primo grado](#)

Francesco D'Intino

123

[Fare i conti con il caso: fra probabilità e gioco d'azzardo](#)

Sanja Komazec

146

[Recensioni](#)

161

Editoriale

Questi mesi sono stati caratterizzati da una sfida davvero drammatica. Non è la prima volta che l'uomo si trova a combattere contro un virus; è la prima volta, però, che questo avviene in un mondo estremamente connesso. L'avanzamento della pandemia COVID-19 a livello globale ha avuto ripercussioni pesanti in termini di vite umane, sistemi sanitari, sistemi economici. Chiaramente, anche il mondo della scuola è stato toccato da gravi difficoltà. Alle istituzioni, agli insegnanti e agli studenti è stato chiesto di reinventarsi da un giorno all'altro, prevedendo modalità di didattica e valutazione a distanza, che hanno avuto forti ripercussioni anche all'interno delle famiglie. Ancora non sappiamo quali implicazioni avrà questo sforzo. Certo è che il mondo della scuola, e forse ognuno di noi, non sarà più come prima.

Una delle note positive, in tutto questo, è l'enorme sforzo profuso da tutti gli attori del mondo scolastico per mantenere un collegamento reciproco. Un collegamento fatto di relazione, conoscenze e approfondimenti condivisi, supporto reciproco, senso di appartenenza.

Tutto il comitato redazionale della rivista DdM non può che elogiare chiunque abbia utilizzato le proprie energie per garantire il funzionamento della scuola in tutte o gran parte delle sue funzioni. In un frangente tanto complicato, pensiamo che l'uscita del settimo numero sia un contributo e un sostegno per tutti: continuare a condividere ricerche, riflessioni ed esperienze, per formare le nuove generazioni e tornare ancora più motivati nelle aule di scuole e università.

Nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli riferiti a tutti i livelli scolastici. Il primo contributo si propone di analizzare, attraverso diverse lenti teoriche della didattica della matematica, gli effetti della presenza delle tecnologie digitali nelle dinamiche di insegnamento/apprendimento nelle aule scolastiche. L'analisi è legata alla descrizione di due episodi avvenuti con studenti italiani della scuola secondaria di secondo grado¹: uno scambio di messaggi nello Stream di Google Classroom e un estratto di chat privata su Whatsapp. Questo studio mostra anche come le tecnologie digitali abilitino nuovi e complessi ambienti di insegnamento/apprendimento, che possono essere considerati a loro volta come sistemi sociali. Il secondo contributo si occupa di valutazioni standardizzate effettuate in Italia. Viene mostrata l'analisi di due quesiti, uno somministrato in modalità cartacea agli studenti della classe quinta della scuola elementare e uno somministrato in modalità CBT-*Computer Based Testing* a studenti della classe seconda di scuola secondaria di secondo grado. L'analisi combinata dei testi e dei risultati viene effettuata attraverso dei costrutti teorici di didattica della matematica, grazie ai quali è possibile interpretare gli errori commessi dagli allievi in termini di atteggiamenti legati alla concezione della matematica e ad abitudini e ripetizioni di modalità risolutive. Nell'ultimo contributo gli autori si occupano invece di comprensione del testo matematico per una fascia d'età dai 5 ai 14 anni. L'articolo presenta un percorso formativo, composto di nove curricoli completi di 12 attività, focalizzato sulla comprensione del testo e la risoluzione di problemi. In seguito vengono analizzati i risultati della sperimentazione pilota di questo percorso condotta su circa 200 allievi appartenenti a 10 classi di scuola elementare, dalla quale emergono incrementi significativi sia sulle prove standardizzate di comprensione del testo, sia su prove più specifiche inerenti l'ambito matematico.

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro contributi. Nel primo, le autrici affrontano un argomento che ai giorni nostri sta diventando di sempre maggior interesse: l'educazione finanziaria. Viene presentato un gioco didattico, sperimentato in tre scuole secondarie di secondo grado italiane, nel quale si introducono i principali concetti di matematica finanziaria come le leggi di capitalizzazione, il rendimento degli investimenti, le condizioni dei prestiti. Il fine è quello di permettere agli studenti di avvicinarsi ai temi della matematica finanziaria con un approccio informale. Il secondo contributo riguarda un'esperienza di trasposizione culturale realizzata in una classe prima della scuola secondaria di primo grado italiana²: combinando due lenti teoriche, gli autori mostrano le potenzialità di un uso formativo di antichi strumenti e tecniche di calcolo cinesi, con l'obiettivo di ripensare e aumentare la consapevolezza degli studenti riguardo agli algoritmi di addizione e sottrazione e avviare all'utilizzo di metodi pre-algebrici fondati sul concetto di equivalenza. Il terzo contributo presenta una sperimentazione, svolta nell'arco di due anni scolastici in una scuola secondaria di primo grado italiana, nella quale si è gradualmente sostituita la valutazione in decimi con una serie di strategie e strumenti valutativi e autovalutativi in ottica formativa. L'autore mostra le scelte e le difficoltà riscontrate; analizza infine i risultati dei questionari proposti agli alunni in varie fasi della sperimentazione, al fine di guidare la riflessione per gli anni a venire. L'ultimo contributo, infine, presenta un percorso svolto in una scuola media ticinese riguardante la probabilità: vengono descritte e discusse le attività realizzate in classe, tutte volte a introdurre un primo approccio al calcolo delle probabilità, ma che hanno come orizzonte di senso quello di sensibilizzare ai rischi del gioco d'azzardo comprendendone i meccanismi.

Come al solito, siamo in debito di riconoscenza verso tutti gli autori che hanno dedicato competenze, tempo ed energie per pensare e redigere contributi di notevole qualità e ricchezza. È soprattutto in un periodo così incerto che risulta importante, per quanto possibile, tenere fissi i propri obiettivi personali e lavorativi e, nel rispetto delle norme, starci vicini.

Comitato editoriale DdM

Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

Editorial

These months have been characterized by a real dramatic challenge. It is not the first time that human beings must fight a virus; it is the first time, however, that this happens in an extremely connected world. The global progress of the COVID-19 pandemic is having serious repercussions in terms of human lives, healthcare, and economic systems. Clearly, some serious difficulties are affecting also the education system. Institutions, teachers, and students were asked to reinvent themselves overnight, to consider how to teach and evaluate with remote methods that have also repercussion within families. We do not know yet what the consequences of this effort will be. Of course, schools, and probably each one of us, will never be as before.

In this situation, one of the positive notes is the enormous effort made by all the actors in the school world to maintain a mutual connection. A connection made of relationships, shared knowledge and insights, mutual support, sense of belonging. The whole editorial board of DdM journal wants to praise anyone who used their energies to ensure the functioning of the school in all or most of its functions. In such a complicated situation, we think that the publication of the seventh issue is a contribution and support for everyone: we continue to share research, reflections, and experiences, to train the new generations and to return even more motivated in the schools and universities classrooms.

In the section *Riflessione e ricerca*, there are three articles regarding all school levels. The first contribution aims to analyse, using different theoretical lenses, the effects of digital technologies in the teaching and learning dynamics in classrooms. The analysis is based on the description of two episodes that occurred in an Italian upper secondary school¹: a message exchange using Stream in Google Classroom and an extract of a private chat on Whatsapp. This work shows also as digital technologies create new and complex learning/teaching environments, that can be considered as new social systems. The second article is about Italian standardized assessment tests. There is an analysis of two items, one administered with paper and pencil mode to students in the last year of primary school, the other administered in CBT (Computer Based Testing) mode to students of the second year of upper secondary schools. The combined analysis of texts and results is carried out through mathematical education theoretical constructs, thanks to which it is possible to interpret the mistakes made by students in terms of attitudes related to the idea of mathematics and to habits and repetitions of solving methods. In the last contribution, the authors deal with the comprehension of mathematical texts for students from 5 to 14 years old. The article presents a training course, consisting of nine curricula, each with 12 activities, focused on reading comprehension and problem-solving. The results of a pilot experimentation conducted on about 200 students belonging to 10 primary school classes are analyzed below, from which significant increases emerge both on standardized comprehension tests and mathematical tests.

In the section *Esperienze didattiche* there are four contributions. In the first one, the authors deal with a topic that is attracting more and more attention in school curricula: financial literacy. They describe an education game, tested in three Italian upper secondary schools, developed to let students discover some of the main

1. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.

ideas of financial mathematics, such as simple and compound interest, investment, loan rules. The goal is to introduce financial concepts to students with an informal approach. The second article is about a cultural transposition experience proposed in a class of sixth-graders: combining two theoretical lenses, the authors intend to demonstrate the potential of a formative use of Chinese ancient instruments and counting techniques; the aim is to rethink first, and then boost, students' awareness about addition and subtraction algorithms while also directing them toward the use of pre-algebraic methods based upon the concept and principles of equivalence. The third article describes a research, conducted in an Italian lower secondary school² over a two-year period, in which the standard assessment method, using a 1-10 grading scale, was gradually replaced with other methods and strategies to promote self and formative evaluation. The author explains the choice made and the difficulties raised during the project; finally, he analyses the questionnaires, given to students in different steps of the research, to guide the reflection for future years. To conclude, the last article presents an experience realized in a lower secondary school of Canton Ticino about the topic of probability: there is a description and an analysis of all the activities realized in class. All these activities were created to provide a first encounter between students and probability but aimed at raising awareness of the risks and mechanisms of gambling.

2

As usual, we are grateful to all authors, who dedicated their abilities, time and energies to think and write articles of high quality and versatility. It is especially in such uncertain time that is important, as much as possible, to keep in mind our personal and work goals and, following the rules, to stay as close as possible.

Comitato editoriale DdM

Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

2. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.



Riflessione e ricerca

DdM

Prospettive teoriche per lo studio della contaminazione tra ambienti di insegnamento/apprendimento fisici e virtuali

Disponibile anche
in inglese

Theoretical perspectives for the study of the contamination between physical and virtual teaching/learning environments

Agnese Del Zozzo e George Santi

Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano – Italia;
Nucleo di Ricerca Didattica della matematica, Università di Bologna – Italia

Sunto / Proponiamo un'analisi degli effetti della presenza delle tecnologie digitali sulle dinamiche di insegnamento/apprendimento nelle pratiche didattiche nelle aule scolastiche. Descriviamo due episodi - uno scambio di messaggi nello Stream di Google Classroom e un estratto di una chat privata su Whatsapp tra due compagni di classe. Analizziamo tali episodi con una lente teorica composta da il “Triangolo della didattica” (Chevallard & Joshua, 1982), e la prospettiva sociologica, proposta da D'Amore (2005), che considera la classe come società. Le tecnologie digitali abilitano nuovi e complessi ambienti di insegnamento/apprendimento il cui studio richiede una visione sistemico relazionale come quella offerta dal Triangolo. Inoltre, si mostra come tali ambienti possono essere considerati a loro volta delle società con le proprie pratiche costitutive e meta-pratiche extrafunzionali che sono in relazione con le società nelle aule scolastiche. Mostriamo come l'interazione tra queste prospettive teoriche permette di caratterizzare i processi di insegnamento/apprendimento quando ambienti fisici e virtuali si contaminano a vicenda.

Parole chiave: Triangolo di Chevallard; classe virtuale; società; tecnologie digitali; pratiche e meta-pratiche.

Abstract / We propose an analysis of the effects on the teaching/learning practices of mathematics that stem from digital technologies in school classrooms. We describe two episodes - an exchange of messages in the Stream of Google Classroom and an extract from a private Whatsapp chat between two classmates. We analyze such episodes with a theoretical lens based on the Chevallard Triangle of Didactics (Chevallard & Joshua, 1982) and the sociological perspective, proposed by D'Amore (2005), considering the classroom as a society. Digital technologies enable new complex teaching/learning environments whose study require a systemic and relational approach as the one offered by the concept of Triangle. Moreover, we show how such environments in turn can be considered societies with their constitutive practices and extra-functional meta-practices that are linked with the societies that originate in the school classrooms. We show how the interaction between these theoretical perspectives allows us to characterize teaching/learning processes when physical and virtual environments contaminate each other.

Keywords: Chevallard Triangle; virtual classroom; society; digital technologies; practices and meta-practices.

1 Premessa

Per migliorare l'efficacia della nostra comunicazione e per non rischiare fraintendimenti, riteniamo necessario esplicitare alcuni elementi preliminari.

- *Contesto*. Il nostro contesto socio-culturale di riferimento è quello italiano e, da un punto di vista istituzionale/scolastico, ci collochiamo al livello di scuola seconda-

ria di secondo grado¹. Questo significa che quando usiamo termini legati al mondo scolastico quali “classe, aula, legge” ci riferiamo al loro significato nel contesto suddetto, con la consapevolezza degli ovvi limiti di generalizzabilità.

- *Terminologia*. Per evitare che i rischi della metafora dell’oggetto denunciati da Sfard (2008) sfuggano al nostro controllo, riteniamo importante esplicitare ciò che intendiamo con l’espressione “tecnologie digitali” e caratterizzare il tipo di ambienti di insegnamento/apprendimento (I/A) cui ci riferiamo. Con l’espressione “tecnologie digitali” indicheremo qualunque combinazione realizzabile di hardware e software. Quindi, ad esempio, una persona che usa un browser su un PC, sta usando una specifica istanza di tecnologia digitale; un’aula con un PC collegato ad un proiettore con cui viene visualizzato un video è un ambiente in cui è presente una specifica istanza di tecnologia digitale.

Considereremo due diversi ambienti di I/A: fisico e virtuale.

L’ambiente di I/A fisico è circoscritto allo spazio fisico, dove uno o più individui con il ruolo di allievo e uno o più individui con il ruolo di insegnante interagiscono in una dinamica di I/A. Un esempio di tale ambiente è l’aula scolastica, luogo dove la classe, qui intesa come l’insieme degli studenti, partecipa ad una lezione dell’insegnante.

L’ambiente di I/A virtuale è limitato allo spazio virtuale e si crea quando uno o più individui con il ruolo di allievo e uno o più individui con il ruolo di insegnante interagiscono in una dinamica di I/A mediata da un’istanza di tecnologia digitale. Gli individui possono interagire ed entrare in relazione tra loro sia nel primo ambiente che nel secondo. Quando accade che gli stessi individui sono tra loro in relazione di I/A sia in un ambiente fisico che in un ambiente virtuale, emerge un nuovo contesto generato dalla relazione e dalla contaminazione dei primi due. Tuttavia, una volta chiariti tali contorni, dichiariamo che per non appesantire la lettura, talvolta ci serviremo di espressioni più brevi quali ad esempio classe fisica in riferimento al primo ambiente e classe virtuale in riferimento al secondo.

- *Distinzione e relazione tra persone fisiche e account*. Riteniamo importante chiarire che: gli individui in un ambiente fisico sono persone fisiche (PF); gli individui in un ambiente virtuale sono account (A). Inoltre, la corrispondenza tra le persone fisiche e gli account NON è necessariamente biunivoca. Infatti, possono verificarsi situazioni in cui: ad ogni persona fisica corrisponde uno ed un solo account ($\#PF = \#A$), la stessa persona fisica gestisce più di un account ($\#PF < \#A$) e lo stesso account è gestito e controllato da più persone fisiche ($\#PF > \#A$). Naturalmente, in un contesto di I/A le persone fisiche possono operare un uso consapevole e strategico degli account per effettuare particolari operazioni che abbiano rilevanza didattica. Ad esempio: è possibile attuare diversi livelli di monitoraggio sfruttando i diversi livelli di autorizzazione alle azioni degli account; un’unica persona fisica può decidere di raffinare e separare i diversi ruoli assunti durante le proprie interazioni con gli altri individui del medesimo contesto usando account diversi, ciascuno specifico per ogni ruolo; ecc.
- *Invito al dialogo*. La complessità del tema trattato nel presente articolo e la vastità della letteratura che potrebbe essere rilevante per una più approfondita descrizione sono tali da rendere parzialità e incompletezza ineliminabili. Pertanto, consci di questo, non riteniamo il presente contributo un punto di arrivo ma un

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all’ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

punto di partenza, uno stimolo che vorremmo poter arricchire con le impressioni, le riflessioni e le esperienze di chi lo leggerà. Quindi, in parallelo alla versione del contributo sulla rivista, avvieremo un canale di comunicazione con i lettori che invitiamo a comunicarci riflessioni, commenti, suggerimenti e critiche delle quali potremo tenere conto per creare un'appendice dinamica che arricchisca l'articolo originale. Tale canale è un form online creato e gestito dai due autori del presente lavoro ed è accessibile al seguente link: <https://forms.gle/Uf3Rdg6EY9JauSzq5>.

2 Introduzione

Il panorama scientifico della didattica della matematica, ad oggi, offre numerosi strumenti teorici che permettono di studiare e caratterizzare le dinamiche di insegnamento/apprendimento (I/A), le cui sfaccettature e modalità dipendono fortemente dallo specifico contesto in cui avvengono.

Le tecnologie digitali, quando introdotte in un sistema didattico, impattano su elementi portanti e basilari che spaziano dal piano strumentale a quello strategico, dal piano personale a quello sociale, dal piano pragmatico a quello affettivo.

Se si pensa alla tradizionale classe di matematica, i primi elementi a venire in mente sono l'aula scolastica in cui si svolge la lezione di matematica con l'insegnante e i suoi studenti. In Borba, Askar, Engelbrecht, Gadaniadis, Llinares e Aguilar (2016) viene messo in evidenza come la tecnologia digitale abbia completamente destrutturato questa immagine, abilitando nuove tipologie di classi e di modalità di lavoro che, a loro volta, innescano differenti dinamiche di natura socio-culturale:

«Allo stato attuale, sembra chiaro che la tecnologia digitale sta “decostruendo” la nozione di aula. [...] La tecnologia mobile, la PLN², gli oggetti per l'apprendimento digitale e altri artefatti stanno “allargando” l'aula, trasformandola a tal punto che si riesce a malapena a riconoscerla come tale. [...] In questo scenario, l'aula regolare non funge più da locus per l'educazione. Poltrone, sedie e tavoli nella casa degli studenti, i bar e gli internet café sono le nuove aule. Le classi ribaltate cambiano la nozione di ciò che è dentro e fuori della classe e cambiano i ruoli degli studenti e degli insegnanti».

(Borba et al., 2016, pp. 605-606, traduzione degli autori)

Pertanto, inquadrare e descrivere con specificità e precisione su cosa e come agisce tale impatto assume particolare importanza e la ricerca in didattica della matematica in questo ambito sta raccogliendo, a livello internazionale, gli sforzi di numerosi ricercatori.

Borba et al. (2016) delineano cinque diverse correnti di sviluppo di ricerca relative all'uso delle tecnologie digitali in didattica della matematica:

1. la prima riguarda l'uso di dispositivi mobili;
2. la seconda riguarda i MOOCs (Massive Online Open Courses) che sono corsi

2. Personal Learning Network.

- online aperti ad un numero qualunque di partecipanti ai quali non sono richiesti particolari prerequisiti;
3. la terza riguarda collezioni di materiali didattici e *learning objects* cioè «[...] qualunque entità, digitale o non digitale, che può essere usata per l'apprendimento, l'educazione o la formazione» (Risk, 2002, p. 6, traduzione degli autori);
 4. la quarta riguarda l'uso delle tecnologie per l'apprendimento collaborativo;
 5. la quinta riguarda corsi *blended*, che combinano esperienze di I/A online con quelle faccia-a-faccia, usati in ambito di formazione degli insegnanti.

Intendiamo fornire un quadro teorico per accogliere la sfida di Borba et al. (2016) ed interpretare la complessità dei nuovi spazi di I/A derivanti dall'interazione tra classi fisiche e classi virtuali. In particolare, ci focalizziamo sulle possibili caratterizzazioni che la relazione triadica insegnante-allievo-Sapere (i-a-S) può assumere e quali sono i suoi effetti sui processi di I/A. La prospettiva secondo la quale guardiamo le interazioni tra classi fisiche e virtuali è di tipo sistemico-relazionale per evidenziare come gli studenti attuano l'apprendimento e le condizioni che lo attivano o lo inibiscono. Un altro filone di analisi – di grande rilievo e complementare a quello scelto in questo studio – riguarda il ruolo che le tecnologie digitali possono assumere nel contribuire a delineare i tratti distintivi della cognizione e dell'apprendimento in matematica e i processi che li caratterizzano.

Il presente studio, che prende le mosse nell'ambito del progetto di ricerca VirMath della Libera Università di Bolzano e che può essere localizzato a cavallo tra il primo e il quarto punto dell'elenco precedente, si concentra a livello di scuola secondaria di secondo grado e si propone di analizzare un sistema didattico per l'I/A della matematica in cui ambienti fisici contaminano e sono contaminati da ambienti virtuali.

Drijvers, Ball, Barzel, Heid, Cao e Maschietto (2016) presentano un panorama delle ricerche sull'uso delle tecnologie digitali nel particolare caso dei livelli scolastici pre-universitari. Per quanto riguarda l'uso delle tecnologie per la comunicazione, gli Autori mettono in evidenza un'interessante distinzione tra la comunicazione *attraverso* la tecnologia digitale e la comunicazione *della* tecnologia digitale, nel senso della comunicazione dell'output tecnologico. La comunicazione *attraverso* la tecnologia digitale fa riferimento sia a tecnologie di visualizzazione, che permettono di esporre, proiettare o condividere idee matematiche, sia a tecnologie di condivisione e collaborazione, che permettono alle persone che le usano di scambiarsi idee e materiali.

Nel presente lavoro, ci proponiamo di analizzare due esempi di comunicazione matematica realizzata *attraverso* la tecnologia in due contesti diversi tra loro che pur nella loro specificità possono essere rappresentativi di due situazioni molto diffuse in un contesto di I/A arricchito dalle tecnologie: l'uso di una piattaforma didattica digitale e la comunicazione via chat privata tra studenti.

Nel par. 3 introdurremo alcuni strumenti teorici con i quali inquadreremo tali contesti di comunicazione e apprendimento caratterizzati e permessi dall'uso di tecnologie digitali. Nel par. 4 analizzeremo e interpreteremo i due esempi di implementazioni di contesti di apprendimento che prevedono l'uso di tecnologie digitali e mostreremo gli effetti derivanti dal loro uso sull'I/A della matematica. Il par. 5 conclude il lavoro con delle riflessioni più generali e di natura teorica.

3 Quadro teorico

Nell'obiettivo di accogliere adeguatamente la complessità del sistema didattico da noi considerato, il quadro teorico scelto si compone di due elementi:

- Considereremo dapprima modelli sistemici che permettono di inquadrare i soggetti e le relazioni che caratterizzano un contesto didattico. Il classico Triangolo della didattica di Chevallard e Joshua (1982), che generalizza le situazioni di I/A in matematica, corredato dalla nozione di Tetraedro elaborato da Albano, Faggiano e Mammana (2013) che si riferisce allo specifico caso dell'e-learning (nel seguito: Tetraedro).
- Sfruttando la prospettiva sociologica di classe intesa come società proposta da D'Amore (2005), individueremo alcune variabili di struttura del particolare contesto didattico che stiamo esaminando e che emergono come rilevanti.

3.1 Modelli sistemici delle relazioni didattiche

Chevallard e Joshua (1982) inquadrano in quello che viene chiamato il Triangolo della didattica (Figura 1) i soggetti che caratterizzano un contesto didattico: l'insegnante, l'allievo e il Sapere.

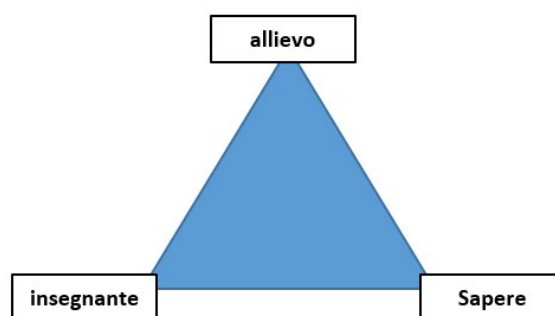
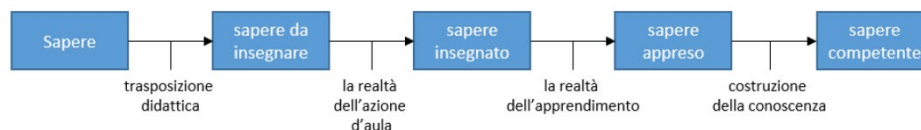


Figura 1
Triangolo della didattica
i-a-S di Chevallard.

D'Amore e Fandiño Pinilla (2002) propongono una profonda analisi del triangolo e mostrano come la sua apparente semplicità nasconda una potenza teorica incredibile della quale più avanti, nel par. 4 del presente lavoro, cercheremo di dare dimostrazione.

Gli Autori, orchestrando e articolando contributi di diversi ricercatori, presentano una lettura analitica e specifica dei singoli elementi che compongono tale modello sistemico: i vertici che fungono da poli e i lati che evidenziano le relazioni tra coppie di poli. In particolare, D'Amore e Fandiño Pinilla caratterizzano ciascun polo, pensandolo come attrattore di studi specifici: la teoria degli ostacoli, le misconcezioni, aspetti epistemologici e ontologici della matematica legati all'apprendimento, le competenze, credenze e convinzioni ecc. A ciascun lato/relazione corrispondono attività ed elementi di riferimento: la devoluzione, la trasposizione didattica, l'implicazione personale (Brousseau, 1986, 2002; D'Amore, 1999; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002). Nell'attuazione del processo didattico, dal Sapere, inteso come sapere accademico, si giunge al sapere competente dell'allievo. Tale percorso si scompone in una catena di trasformazioni, nitidamente descritta in Fandiño Pinilla (2002) che schematizziamo nella Figura 2:

Figura 2
Catena di trasformazioni
che dal Sapere portano al
sapere competente (Fandiño Pinilla, 2002, p. 29).



La prima trasformazione, la *trasposizione didattica*, è il processo gestito dalla professionalità dell'insegnante attraverso il quale si trasforma il sapere accademico in sapere da insegnare, accessibile all'alunno per la costruzione personale delle competenze matematiche (Fandiño Pinilla, 2002, 2003). Attraverso la realtà dell'azione d'aula, il sapere da insegnare si trasforma in sapere insegnato. Il sapere insegnato si rivolge ad un allievo e la realtà dell'apprendimento di quell'allievo (con le sue convinzioni, concezioni, conoscenze pregresse ecc.) trasforma il sapere insegnato in sapere appreso. Il passaggio da sapere appreso a sapere competente mette in campo una serie di ulteriori elementi relativi allo sviluppo di competenza matematica che esulano dagli scopi del nostro studio e per i quali rimandiamo a Fandiño Pinilla (2003).

L'introduzione delle tecnologie digitali nei processi di IA della matematica aumenta inevitabilmente la complessità del sistema didattico. Albano (2017) ed Albano et al. (2013), nello specifico caso dell'e-learning in matematica propongono un Tetraedro in cui i 4 vertici rappresentano i diversi elementi in gioco – la Matematica (M), lo Studente (S), il Tutor (T) e l'Autore (A) – e le 4 facce – MST, STA, MSA ed MTA – permettono di modellizzare ed analizzare le relazioni tra tali elementi. Per non appesantire il quadro teorico non faremo riferimento al Tetraedro. Ci preme, tuttavia un aspetto importante che emerge dalle riflessioni di Albano (2017) che mette in evidenza come la presenza di tecnologie digitali determini un'esplicita centralità dello studente nel processo di apprendimento, abilitando una dinamicità nei ruoli che lo studente stesso può assumere:

«Nella nostra visione sistemica, questo significa che i vertici del tetraedro non sono figure statiche, ma le consideriamo solo come posizioni, vale a dire come un elemento del sistema che può essere interpretato anche dallo Studente in alcune situazioni lungo il percorso di apprendimento. [...] A differenza dall'insegnamento classico, l'ingegneria didattica dovrebbe prendere in considerazione la possibilità per gli studenti di muoversi in altri/e vertici/posizioni del tetraedro. Questo aggiunge una dimensione di dinamicità nella quale l'apprendimento non emerge dalla fruizione di un prodotto preconfezionato, ma è l'esito di una costruzione nella quale gli studenti hanno la possibilità di compiere funzioni didattiche – supportate, guidate e supervisionate opportunamente – che influenzano la stessa organizzazione didattica».

(Albano, 2017, pp. 353-354, traduzione degli autori)

Nel presente studio faremo riferimento al Triangolo di Chevallard (nel seguito: Triangolo) la cui struttura triadica generale ci permetterà di rappresentare le diverse interazioni e relazioni che intercorrono tra le persone protagoniste dei due esempi che esamineremo nel par. 4. In tali esempi terremo conto della citata dinamicità che permette, soprattutto all'allievo di assumere posizioni diverse all'interno del modello. Infatti, il Triangolo si configura come una relazione triadica le cui variabili sono i vertici del triangolo, che di volta in volta si istanziano con l'assunzione di ruolo da parte di individui specifici e che in alcuni casi possono anche scindersi in istanziazioni diverse del ruolo generale da parte di più individui.

3.2 La classe intesa come società e l'interazione tra spazi di apprendimento fisici e spazi di apprendimento virtuali

Seguiremo la proposta di interpretazione sociologica delle dinamiche d'aula di D'Amore (2005) e di Bagni e D'Amore (2005) e, come primo passo, focalizzeremo il significato del termine chiave *società* per il quale gli Autori si rifanno alla definizione sociologica. Si parla di società quando gli individui occupano un territorio comune, interagiscono tra loro, sanno di appartenere allo stesso gruppo, hanno - o si suppone abbiano - almeno una parte di cultura in comune. In ogni società, tra gli individui che ne fanno parte, si generano due tipologie di pratiche: quelle che si sostanziano dagli scopi costitutivi di quella società e quelle che traggono origine dall'adattamento all'appartenenza alla società stessa.

Secondo gli Autori, è possibile pensare alla classe - intesa come gruppo di persone che occupano uno stesso spazio di apprendimento fisico quale, ad esempio, l'aula scolastica o la scuola - come una specifica società di individui «la cui unità sociale è dovuta alla necessità sancita per legge della effettuazione di "pratiche" definite e in grande misura condivise» (D'Amore, 2005, p. 5). In tale società, che assume significato nel contesto scolastico e quindi costituisce un'istituzione sociale, alcuni individui assumono il ruolo di studenti ed altri il ruolo di insegnanti i quali, in tale ambito, rappresentano l'istituzione stessa.

Inquadrare una classe come società (nel seguito: società-classe) permette di raffinare la visione delle pratiche che in essa si realizzano. Infatti grazie alla lente sociologica proposta da D'Amore (2005) si può distinguere tra le pratiche *funzionali* che sono quelle che definiscono a priori la società-classe, e le *meta-pratiche extrafunzionali*, che sono più contestuali e legate al voler appartenere alla società stessa. L'Autore mette in evidenza che una società-classe, ha come scopo funzionale l'IA però, non è detto che tutti gli individui che fanno parte di tale società-classe condividano gli stessi obiettivi ed abbiano le stesse prospettive. Si possono individuare le due tipologie di gruppi seguenti: quello degli individui con scopi, prospettive e pratiche *funzionali* alla specifica società di appartenenza e quello degli individui che privilegiano le *meta-pratiche extrafunzionali* come ad esempio quelle generate dalle dinamiche di contratto didattico definito da Brousseau (1986) come:

«costituito [...] dalle "abitudini specifiche del maestro attese dall'allievo" e dai "comportamenti dell'allievo attesi dal docente" e proprio la scelta del comportamento da tenere, da parte dell'alunno, diventa problematica poiché porta il soggetto ad interrogarsi su "cosa l'insegnante si aspetti che faccia"».

(Brousseau, 1986, p. 66)

Considerare un ambiente di IA in cui l'uso di tecnologie digitali abilita l'interazione tra spazi di apprendimento fisici e spazi di apprendimento virtuali, rende necessarie ulteriori riflessioni. Infatti, tali condizioni modificano il contesto impattando sulle connotazioni degli elementi strutturali attorno ai quali ruota la definizione stessa di società e le idee di classe, di aula, di pratica e di meta-pratica. È ancora possibile individuare un territorio comune occupato dagli individui che popolano questo nuovo spazio di apprendimento ma si tratta di uno spazio multicomponentiale e ibrido per via della contemporanea presenza di una componente fisica e di una componente virtuale. Inoltre, sono ancora presenti delle interazioni degli individui tra loro e degli individui con l'ambiente - così come le modalità di espletazione delle pratiche nelle quali tali individui sono implicati - ma esse avvengono sia su un piano fisico, stretta-

mente dipendente da vincoli percettivi e spazio-temporali, che su un piano virtuale nel quale l'individuo può controllare e gestire non solo gli aspetti spazio-temporali ma anche comunicazioni del tipo *molti ad uno* (many to one). Infatti, gli ambienti virtuali sono caratterizzati da una sorta di evanescenza dei confini spazio-temporali nei quali gli individui coinvolti prendono decisioni ed agiscono attraverso gli account. Da un punto di vista infrastrutturale, gli ambienti virtuali costringono (permettono) gli (agli) individui coinvolti a (di) rendere esplicito ciò che negli ambienti fisici potrebbe rimanere su un piano di inconsapevolezza o essere difficilmente praticabile.

Ad esempio, in un ambiente di I/A in cui spazi fisici e spazi virtuali interagiscono, lo spazio di apprendimento virtuale:

- può essere sfruttato per mettere in connessione individui appartenenti a spazi fisici disgiunti (per esempio classi fisiche diverse, scuole diverse), dando vita a nuove società, a loro volta specifiche e distinte dalle società di origine degli individui coinvolti, con le loro pratiche e meta-pratiche;
- può permettere ad esempio di: scindere esplicitamente l'individuo insegnante dalle azioni che la figura dell'insegnante compie in un contesto di I/A (progettare attività e situazioni, gestirle, valutarle ecc.); isolare ciascuna di tali azioni, anche eventualmente predisponendo ambienti e/o account specifici per ciascuna; decentralizzare l'esecuzione di tali azioni distribuendole tra individui diversi; ecc. In questo senso, sono di grande interesse i vertici Autore e Tutor proposti nel modello del Tetraedro i quali evocano una particolarizzazione di possibili azioni espletate dagli attori in gioco in un contesto didattico. Tali scissioni e ridistribuzioni di compiti e responsabilità, costringono a ripensare, anche in vista di eventuali modifiche, non solo ai ruoli degli individui (insegnanti e studenti) che popolano la società-classe ma anche alle loro relazioni. Le modifiche, a loro volta, condizioneranno di conseguenza sia le forme di appartenenza dell'individuo alla società (pratiche) che i tentativi di adattamento (meta-pratiche), con un possibile impatto anche su ciò di pre-esistente nelle coinvolte società-classi localizzate nelle aule fisiche.

In definitiva, uno spazio di I/A virtuale si sostanzia nella dinamicità e flessibilità del Triangolo che permette di costituire società-classi seguendo criteri di raggruppamento contestuali e modificabili (Del Zozzo, 2019). Tali caratteristiche, inevitabilmente, impattano sull'idea di classe, quella di aula così come quella di pratiche e meta-pratiche, problematizzandole.

3.3 Domande di ricerca

Il presente lavoro intende caratterizzare la contaminazione tra classe fisica e classe virtuale. In particolare, vogliamo analizzare le situazioni in cui uno spazio di I/A fisico viene contaminato da tecnologie digitali per la comunicazione con le quali si abilita un nuovo spazio di I/A. Sottolineiamo che l'implementazione di tecnologie digitali per la comunicazione in uno spazio di I/A fisico preesistente non può realizzarsi nell'immediato con un profondo ed efficace intreccio tra classe fisica e classe virtuale, ma piuttosto va guardato come una contaminazione della classe fisica da parte della classe virtuale e viceversa.

Per comprendere la natura e gli effetti di tale contaminazione sull'I/A della matematica occorre rispondere alle seguenti domande di ricerca:

- D1: Come caratterizzare il sistema che emerge dalla contaminazione della classe fisica da parte della classe virtuale?
- D2: Esistono dei tratti distintivi da monitorare per tracciare l'evoluzione dei processi di I/A nell'interazione tra la classe fisica e la classe virtuale? E se esistono, quali potrebbero essere?

Al termine del par. 4.3, dopo aver descritto ed analizzato i due esempi di implementazione, risponderemo a tali domande.

4 Due esempi di implementazione

Di seguito verranno descritti due esempi di dinamiche di I/A realizzati in spazi di apprendimento fisici che interagiscono con spazi di apprendimento virtuali. Entrambi gli episodi, sono esempi di comunicazione *attraverso* la tecnologia e *non* sono tratti da sperimentazioni specifiche con una propria progettazione e metodologia ma provengono da situazioni reali. Il primo episodio coinvolge una classe seconda di Liceo Scientifico delle Scienze Applicate e il secondo episodio due studenti di una classe quinta di Liceo Classico. Ciascun esempio – che contestualizzeremo e del quale forniremo le specifiche metodologiche e strumentali di interazione tra il piano fisico e quello virtuale, inquadrando gli individui coinvolti e specificandone ruoli, azioni e comportamenti – verrà quindi interpretato alla luce del quadro teorico proposto. In entrambi i casi, la nostra analisi è a posteriori e si propone di mettere in relazione l'ambiente fisico con quello virtuale. Si tratta di dati che consideriamo particolarmente interessanti perché il ruolo dei ricercatori si è limitato solo alla loro raccolta e all'analisi senza entrare nel merito della progettazione delle attività e la loro realizzazione nel nuovo spazio fisico-digitale. Sono dati "puliti" che mettono in luce alcuni comportamenti spontanei di insegnanti e studenti in un contesto di I/A ibridato dalla presenza di tecnologie digitali per la comunicazione. Riteniamo pertanto che i due episodi siano adatti da un lato a mostrare esempi provenienti dalle pratiche d'aula quotidiane dall'altro a mostrare le potenzialità interpretative del nostro quadro teorico. Non avendo seguito una metodologia sperimentale standard, i dati a nostra disposizione sono per certi aspetti parziali ed è su quelli che baseremo le nostre analisi.

4.1 Classe virtuale in Google Classroom

4.1.1 Descrizione

Scuola e classe: Seconda Liceo Scientifico Scienze Applicate.

Descrizione del contesto: Nell'anno scolastico 2017/2018, in cui è ambientato l'episodio descritto, la scuola ha ospitato una tirocinante laureata in matematica e specializzata nell'uso delle tecnologie per la didattica che ha effettuato un percorso di affiancamento di insegnanti e studenti nell'analisi, progettazione e implementazione delle tecnologie digitali per l'I/A. La scuola è registrata al servizio di Google della G Suite for Education³ (GSE) e la tirocinante agisce come Amministratore. *Da po-*

3. <https://support.google.com/a/answer/2856827?hl=it>.

*che settimane*⁴, alcuni docenti hanno avviato l'uso di Google Classroom⁵ (GC) come piattaforma di gestione delle classi virtuali. In questo esempio è coinvolta un'unica classe che ha iniziato ad utilizzare GC con la docente di matematica per la gestione logistica di un percorso didattico sui radicali realizzato nelle settimane precedenti. Al termine di tale percorso, la docente, su input della tirocinante, propone agli studenti di utilizzare lo Stream⁶ di GC come spazio per condividere dubbi, domande e difficoltà. La docente coinvolta insegna in questa classe già dal primo anno e l'unica tecnologia digitale da lei usata fino al momento dell'introduzione di GC era il registro elettronico per l'invio di compiti e la registrazione dei voti. Pertanto, l'introduzione della classe virtuale con GC si inserisce in un contesto didattico pre-esistente le cui specifiche (relazioni, dinamiche di contratto didattico, abitudini ecc.) sono già delineate in base al solo contesto della classe fisica.

Tecnologia digitale attraverso la quale si comunica: La componente software è GC con tutte le sue funzionalità. La componente hardware può essere il PC, il tablet o lo smartphone a seconda del dispositivo usato da chi interagisce nella piattaforma.

Persone fisiche ed account coinvolti: 26 persone fisiche di cui: 22 studenti della classe, 1 insegnante curricolare di matematica, 1 tirocinante, 2 docenti curricolari ma di altre discipline (passivi). 27 account, uno per ciascuna persona fisica più un account passivo, gestito dalla tirocinante, aggiunto in GC come studente fittizio con lo scopo di monitorare il corretto fluire delle attività in piattaforma anche dal lato studente. Al netto delle figure passive, considereremo solo 24 persone fisiche con i rispettivi 24 account. Nel seguito dell'esempio, l'etichetta S_i simboleggerà un individuo-studente della classe.

Caratterizzazione dell'interazione tra il piano fisico e quello virtuale: La corrispondenza tra individui appartenenti alla classe fisica e la classe nell'ambiente virtuale è quasi uno ad uno, con l'unica eccezione della figura della tirocinante che appartiene in modo stabile solo al secondo contesto e che, nella classe fisica è stata presente in alcune occasioni sporadiche. La tirocinante non ha potere valutativo né un ruolo legato alla valutazione. Gli account in GC sono configurati con nome e cognome completi di tutte le persone coinvolte quindi esiste anche un'esplicita corrispondenza identitaria tra gli individui dell'ambiente fisico e gli account nell'ambiente virtuale.

Classe nell'ambiente fisico	Classe nell'ambiente virtuale
1 insegnante curricolare	2 insegnanti attivi (curricolare e tirocinante)
22 studenti	22 studenti
1 tirocinante (trasversale e solo sporadicamente presente nel contesto classe fisico)	

Tabella 1
Individui che popolano la classe fisica e la classe in GC.

4. Rispetto ai giorni in cui si verifica l'episodio in esame.

5. <https://support.google.com/edu/classroom/?hl=it#topic=6020277>.

6. Si tratta di uno spazio di comunicazione visibile a tutti i componenti di quella classe in GC, siano essi insegnanti o studenti. Per approfondire: punto di vista studenti al link https://support.google.com/edu/classroom/answer/6020274?hl=it&ref_topic=9049835; punto di vista insegnanti al link <https://support.google.com/edu/classroom/answer/6020270>.

Quando: l'episodio descritto si verifica tra il 24 e il 28 novembre del 2017.

Cosa è successo:

I passaggi verranno numerati per semplificarne il riferimento nel par. 4.1.2.

1. Nella classe fisica, l'insegnante annuncia la modalità d'uso di GC.
2. Il 24 novembre, l'insegnante assegna degli esercizi sul registro elettronico assegnando in contemporanea un compito in GC con la seguente consegna: «Postare la foto di tutti gli esercizi di compito in cui avete avuto una difficoltà, nel caso non abbiate avuto alcuna difficoltà postare almeno un esercizio».

Tra il 26 e il 27 novembre:

3. S_1 accoglie l'invito dell'insegnante di utilizzare la GC per aiutarsi nello svolgimento dei compiti a casa e posta nello Stream la foto della pagina del libro di testo, indicando due esercizi fonte di difficoltà.
4. S_2 posta nello Stream la foto della pagina del proprio quaderno, con gli esercizi che ha svolto, accompagnati dal seguente messaggio di testo: «Foto esercizi per il 28/11 (non me ne viene nessuno dei tre)».
5. Altri 3 studenti seguono il comportamento di S_2 e postano nello Stream la foto della pagina del proprio quaderno con gli esercizi svolti.
6. Un altro studente, S_6 , segue il comportamento di S_1 e posta nello Stream la foto della pagina del libro di testo senza inviare i propri tentativi.
7. Interviene nello Stream S_7 e scrive un Post con il seguente messaggio di testo, accompagnato dalla foto in Figura 3: «A me sono venuti se volete potete guardarli ho scritto in matita i passaggi che ho saltato così potete capirli».

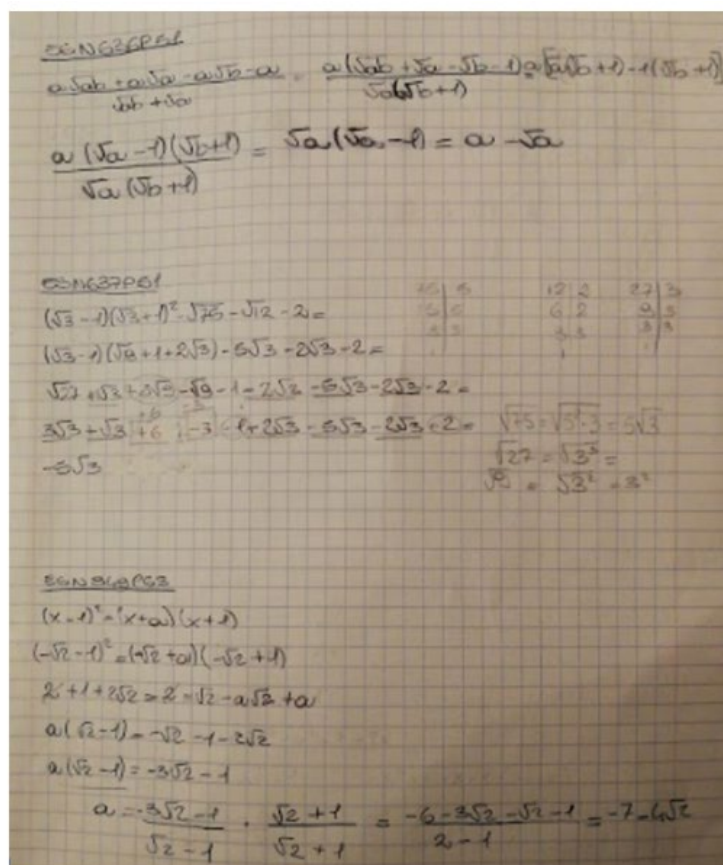


Figura 3
 Foto del proprio quaderno che S_7 allega al suo Post nello Stream.

28 novembre:

8. L'insegnante risponde ringraziando con entusiasmo gli studenti che hanno condiviso il proprio quaderno, spiegandone l'utilità per individuare le difficoltà e per incoraggiare l'aiuto reciproco. Ad S_7 , l'insegnante risponde ringraziando ed augurandosi che esercizi così dettagliati possano essere di aiuto a qualcuno. Nello Stream, non sono presenti risposte di studenti al Post di S_7 .

7

4.1.2 Interpretazione

Triangolo di Chevallard

L'interazione tra il piano fisico e il piano virtuale abilita la realizzazione di due configurazioni che possono essere messe in evidenza, o meglio portate in superficie, sfruttando il modello del Triangolo. In questo caso infatti, come schematizzato in **Figura 4** possiamo distinguere due istanze di Triangolo: una per interpretare l'episodio nel contesto nella classe fisica (T_{CF}) e una per interpretare l'episodio nel contesto nella classe virtuale in GC (T_{GC}).

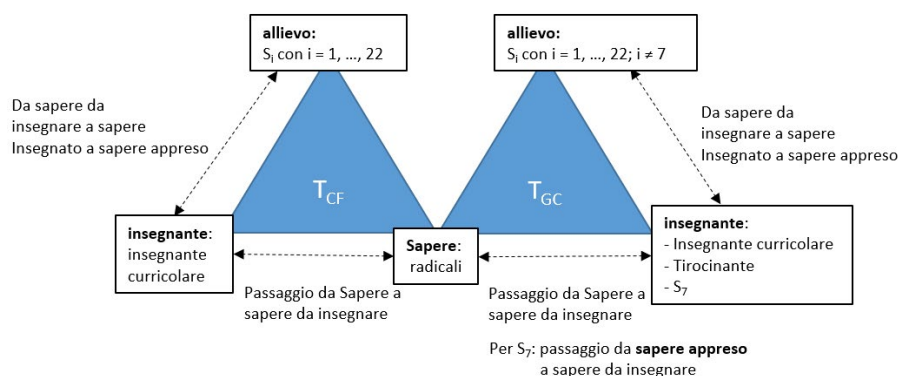


Figura 4
Modellizzazione dell'esempio 1 sia nel contesto della classe fisica che in quello della classe in GC.

Se interpretiamo la situazione considerando solo l'insegnante curricolare, e quindi in riferimento al Triangolo di sinistra della **Figura 4** possiamo riconoscere una sequenza didattica piuttosto standard. Se però consideriamo il Triangolo di destra la questione si problematizza in quanto la dinamicità della nuova situazione attivata dalla GC permette agli studenti di muoversi tra i vertici insegnante e allievo del Triangolo. S_7 raccoglie la proposta dell'insegnante fatta alla classe nello spazio fisico, la realizza nella GC assumendosi la responsabilità del proprio apprendimento e manifestando delle intenzioni didattiche nei confronti dei compagni. S_7 in T_{GC} sta assumendo il ruolo di insegnante e opera una Trasposizione didattica dal proprio sapere appreso personale in sapere da insegnare adeguato ai suoi compagni (passaggio 7: «A me sono venuti se volete potete guardarli ho scritto in matita i passaggi che ho saltato così potete capirli»).

Istanze di Triangolo come T_{GC} hanno caratteristiche peculiari sulle quali sarebbero necessari ulteriori studi. Infatti, non possiamo individuare un contratto didattico con clausole ed effetti in senso classico (D'Amore, 1999), in quanto, nell'insegnamento tra pari, il sistema di regole, comportamenti, aspettative, interpretazioni e convinzioni

7. Riteniamo utile mettere in evidenza che le funzionalità di GC, almeno fino al momento in cui è scritto il presente contributo, prevedono che quando ad inserire un Post nello Stream è uno studente non viene inviata una notifica, a differenza di quanto accade per i Post inseriti dall'insegnante (<https://support.google.com/edu/classroom/answer/6141557?co=GENIE.Platform%3DAndroid&hl=it>). Questo significa che è possibile che nessuno dei compagni si sia accorto in tempo utile del Post di S_7 .

che caratterizza la nuova configurazione i-a-S ha una natura profondamente diversa da quella nella classe nello spazio fisico in cui è presente il docente di matematica. D'altra parte, l'apprendimento di S_7 come allievo nella T_{CF} viene riattivato attraverso un processo di ri-costruzione personale del sapere in un'ottica comunicativa che sia di aiuto ai compagni che nella GC sono suoi allievi. Quindi S_7 , con il suo agire inviando il Post di **Figura 3**, mette in campo processi tipici che riguardano la relazione tra insegnante e allievo sia in riferimento all'istanza T_{GC} , dove assume la posizione di insegnante (Trasposizione didattica) che in riferimento all'istanza T_{CF} , dove assume la posizione di allievo (devoluzione, implicazione personale, costruzione di conoscenza e rottura del contratto didattico).

Interpretazione in chiave sociologica

Da un punto di vista sociologico, sembrano emergere due società-classi distinguibili ma non separabili.

La prima società-classe è la società-classe fisica in cui: gli individui coinvolti sono i 22 studenti e la loro insegnante; il territorio comune occupato è fisicamente delimitato e le interazioni avvengono in tempi stabiliti a priori; le pratiche e le meta-pratiche si sono delineate nel tempo antecedente l'introduzione di GC. La società-classe fisica ha come pratica costitutiva l'IA della matematica e in essa si sviluppano meta-pratiche alle quali partecipano sia gli allievi sia l'insegnante. Per esempio:

- Gli allievi cercano di soddisfare il bisogno di socializzazione, di consolidamento e riconoscimento della loro identità, di consenso.
- L'insegnante si preoccupa di soddisfare le richieste provenienti dalla noosfera, assolvere ai compiti burocratici, svolgere il programma, raccogliere un numero sufficiente di valutazioni; anche il docente agisce per scopi di tipo affettivo relazionale come per esempio, esercitare potere e controllo sulla classe, soddisfare le richieste della dirigenza, preoccuparsi della sicurezza e della sorveglianza, trasferire in aula, consapevolmente o inconsapevolmente, il proprio sistema di convinzioni sulla matematica, sugli studenti, sulla scuola e sulla società. Tutti questi aspetti interferiscono e/o possono confliggere con gli scopi costitutivi di questa società.

La seconda società-classe è la società-GC in cui: gli individui coinvolti sono i 22 studenti, la loro insegnante e la tirocinante; il territorio comune occupato è virtualmente delimitato dall'iscrizione alla GC creata dalla docente curricolare; le interazioni avvengono in modi e tempi personalizzati; la dinamicità del contesto e delle interazioni implica una dinamicità anche nelle pratiche e nelle meta-pratiche da cui deriva una configurazione pratiche e meta-pratiche flessibile e non stabile nel tempo. Inoltre, anche se le pratiche funzionali che definiscono la classe come società possono essere diverse, lo scopo costitutivo di questa seconda società è il medesimo della società-classe fisica: l'IA della matematica. Per quanto riguarda le pratiche e le meta-pratiche della società-GC, ricordiamo che nel contesto considerato, tale società nasce successivamente alla società-classe fisica e nella società-classe fisica, *prima dell'utilizzo di GC*, le performance degli studenti venivano esaminate dall'insegnante solo in fase di verifica e valutazione. In generale, in questo episodio possiamo distinguere quattro tipi di comportamenti che, interpretati in termini di pratiche e meta-pratiche, evidenziano l'esistenza di diverse relazioni tra la società-classe fisica e la società-GC:

1. S_7 e S_6 postano la pagina del libro segnalando il testo degli esercizi per loro fonte di difficoltà; in questo modo *localizzano la difficoltà senza esporsi* mostrando sullo Stream il proprio tentativo di risoluzione.

2. I 4 studenti da S_2 a S_5 postano nello Stream la foto del quaderno che contiene il proprio tentativo fallimentare; in questo modo *localizzano la difficoltà e mostrano il processo di risoluzione implementato a tutti i componenti della società-GC*.
3. S_7 , *in risposta ai compagni*, posta nello Stream la foto del quaderno che contiene i propri tentativi affermandone la correttezza ed esplicitando la propria intenzione didattica; così facendo non si limita ad esporre il proprio operato *a tutti i componenti della società-GC* ma *lo offre come modello* per i propri pari.
4. Gli altri 15 studenti si astengono dal partecipare allo scambio nella GC, ciascuno con la propria motivazione (nessuna difficoltà, non voglia di esporsi, impossibilità strumentale di collegarsi ad internet ecc.).

Tali comportamenti, a nostro avviso, rivelano l'esistenza di forti relazioni tra pratiche e meta-pratiche nella società-classe fisica e quelle nella società-GC. L'agire di S_1 e S_6 può essere visto come una meta-pratica nella società-GC ereditata, per estensione, da una meta-pratica nella società-classe fisica generata dal timore della valutazione e da dinamiche di contratto didattico.

L'agire degli studenti del punto 2 da un lato è assimilabile ad una pratica costitutiva della società-GC dall'altro lato però può essere considerata una meta-pratica generata dal voler soddisfare la richiesta dell'insegnante di condividere i propri dubbi e le proprie difficoltà. Gli studenti, infatti, mostrano una parziale rottura del contratto didattico ma non mostrano implicazione personale e la volontà di costruire la propria conoscenza ponendo delle domande precise, attivando una discussione o condividendo la loro strategia risolutiva.

L'agire spontaneo di S_7 , che come già evidenziato manifesta implicazione personale e responsabilità, può essere considerato come una pratica caratterizzante la società-GC, coerente con il suo obiettivo di costruire e condividere conoscenza matematica. D'altra parte, il fatto che ciò che avviene nello Stream possa essere letto anche dall'insegnante, rende possibile interpretare questo stesso comportamento di S_7 come una meta-pratica rispetto alla società-classe fisica. Infatti, S_7 espone anche agli occhi dell'insegnante-valutatore il proprio operato dichiarandone la correttezza. Non è trascurabile nell'analisi delle pratiche e meta-pratiche della società-GC il fatto che 15 studenti non abbiano interagito. Non abbiamo elementi sufficienti per configurare tale comportamento come pratica o meta-pratica, ma è un gruppo di individui della società-GC qualitativamente e numericamente rilevante.

Dal dialogo tra la società-classe fisica e la società-GC emerge uno spazio di I/A ibrido: gli individui coinvolti sono i 22 studenti, la loro insegnante e la tirocinante; ciascuno è consapevole di occupare un territorio che è comune a tutti gli individui di tale società ma i confini di tale territorio subiscono delle modifiche continue date dalla contaminazione dei due ambienti; le interazioni e i flussi comunicativi da un lato sono maggiormente controllati e frutto di processi intenzionali espliciti ma, dall'altro lato, sono più spontanei perché ogni individuo ha la possibilità e lo spazio/tempo per esprimersi (o NON esprimersi) in modo personalizzato.

Inoltre, la discretizzazione tipica degli ambienti digitali rende possibile l'individuazione e la ricostruzione dell'agire del singolo, permettendo agli individui coinvolti di prendere decisioni più mirate e consapevoli. Infine, ciò che avviene in tale ambiente di I/A ibrido ha un'inevitabile relazione con le altre due società, entra in contatto con le pratiche e le meta-pratiche ivi esistenti rivelandole, mettendole in luce, in certi casi modificandole ma, in altri casi, cristallizzandole - si veda ad esempio l'episodio 2 descritto in Del Zozzo e Santi (2019).

In conclusione, l'introduzione della GC apre scenari comunicativi e risorse semiotiche

molto diversi da quelli che caratterizzano la classe nell'aula fisica ma ci preme richiamare l'attenzione del lettore sul fatto che la qualità dell'interazione spontanea tra gli studenti in GC è, in questo esempio, scadente. Infatti, essa si riduce del tutto o quasi al caricamento di materiale su una piattaforma comune senza un vero scambio tra gli studenti. Alla luce della cornice teorica entro la quale stiamo svolgendo l'analisi, si tratta di un dato molto interessante. Occorre tenere innanzitutto presente che gli studenti hanno cominciato ad utilizzare la GC da poco tempo e non hanno maturato sufficiente esperienza per interagire efficacemente con questa tecnologia. In questa situazione, da un lato il comportamento degli studenti nella GC è indicativo di ciò che essi hanno mutuato dalla classe fisica tipicamente meta-pratiche extrafunzionali come ad esempio quelle riconducibili al contratto didattico. Dall'altro, la scelta dei materiali caricati non è neutra ma al contrario è molto eloquente. Infatti, per contrasto sono emersi i comportamenti interpretabili come pratiche funzionali e meta-pratiche extrafunzionali, che abbiamo descritto sopra, in cui ribadiamo l'interesse per il comportamento di S_7 che dinamizza la relazione triadica del Triangolo passando dal ruolo di allievo nella società-classe fisica a quello di insegnante nella società-GC. I dati a disposizione in questo esempio, anche a causa del breve intervallo temporale qui considerato, non ci danno informazioni sufficienti a delineare con precisione e profondità le dinamiche di I/A in questo spazio emergente. Tuttavia riteniamo che sia una direzione da indagare in quanto le pratiche e le meta-pratiche delle due società in gioco potrebbero non essere isomorfe ma, di certo entrano tra loro in relazione, contaminandosi.

4.2 Chat privata tra studenti su Whatsapp

In questo esempio viene descritto ed analizzato uno scambio di messaggi a tema matematico tra due compagni di classe, S_1 ed S_2 , avvenuto nella loro chat privata di Whatsapp. L'accesso a tali dati è stato possibile perché uno degli autori del presente articolo conosce personalmente, in ambito privato, uno dei due studenti protagonisti dello scambio e gliene ha fatto esplicita richiesta. In risposta a tale richiesta, i due ragazzi si sono consultati e con grande generosità hanno accolto il nostro invito, autorizzandoci a sbobinare e trascrivere le porzioni della loro chat privata in cui discutevano di matematica. Lo scambio qui riportato ed analizzato è avvenuto circa un anno e mezzo prima rispetto a quando ai ragazzi è stato chiesto il permesso per potervi accedere ed è stato realizzabile perché uno dei due studenti non aveva svuotato la memoria delle proprie chat. Nel momento in cui lo scambio è avvenuto, i due ragazzi non sapevano né immaginavano né potevano ipotizzare che qualcuno di esterno avrebbe potuto leggere/vedere/ascoltare la loro conversazione. Si tratta di un'analisi a posteriori di uno scambio comunicativo privato autenticamente avvenuto tra S_1 ed S_2 .

4.2.1 Descrizione

Scuola e classe: Ultimo anno del Liceo Classico.

Descrizione del contesto: La classe si sta preparando per l'ultima prova di verifica di matematica prima dell'esame di Stato e l'insegnante ha assegnato alcuni esercizi di ripasso. Alcuni studenti della classe affiancano il lavoro a scuola con delle lezioni pomeridiane in gruppo tenute da una stessa persona – diversa dalla loro docente

curricolare. L'episodio considerato è tratto da una chat privata su Whatsapp tra due studenti, S_1 ed S_2 , che condividono sia l'insegnante curricolare (sono compagni di classe) che l'insegnante privato.

Tecnologia digitale attraverso la quale si comunica: La componente software è Whatsapp con tutte le sue funzionalità. La componente hardware è lo Smartphone.

Persone fisiche ed account coinvolti: 4 persone fisiche: i due studenti S_1 ed S_2 , l'insegnante privato (presente implicitamente) e un'ulteriore figura adulta familiare che per S_2 è un riferimento competente in matematica (presente implicitamente), 2 account su Whatsapp di S_1 ed S_2 .

Caratterizzazione dell'interazione tra il piano fisico e quello virtuale: S_1 ed S_2 si accordano per fare tra loro una chiamata di esercitazione su Skype. Lo stesso giorno, S_1 partecipa ad una lezione con l'insegnante privato, a cui S_2 è assente.

S_1 ed S_2 si sentono tramite Whatsapp il giorno seguente per aggiornarsi sulla lezione effettuata da S_1 con l'insegnante privato.

Tabella 2
 Individui che popolano i tre ambienti fisici (la classe fisica istituzionale, quella privata e il contesto familiare) e che comunicano tramite la chat di Whatsapp.

Classe fisica istituzionale	Classe fisica privata	Contesto familiare privato	Interazione su Whatsapp
1 insegnante curricolare 19 studenti	1 insegnante privato 4 studenti della stessa classe (non sempre tutti presenti)	1 familiare adulto riferimento competente in matematica 1 studente	2 studenti

Quando: l'episodio descritto si verifica tra il 23 e il 24 maggio del 2018.

Cosa è successo:

I passaggi verranno numerati per semplificarne il riferimento nel par. 4.2.2.

1. La conversazione viene avviata da S_1 che informa S_2 che durante la lezione con l'insegnante privato ha svolto tutti gli esercizi; S_2 , che stava in quel momento svolgendo gli stessi esercizi con la figura adulta familiare che per S_2 è un riferimento competente, chiede ad S_1 : «Mi manderesti le spiegazioni??».
2. S_1 invia ad S_2 cinque foto di pagine del proprio quaderno con il lavoro svolto durante la lezione privata del giorno precedente. Tra gli esercizi svolti inviati, c'è anche il seguente (il n. 4 di p. 1484) quesito a risposta multipla:

La funzione $f(x) = -x^5 + 2x^3$

- A. Ha solo un flesso orizzontale
- B. Ha un flesso orizzontale e due obliqui
- C. Ha tre flessi orizzontali
- D. Ha tre flessi obliqui
- E. Non ha flessi

La risoluzione di tale esercizio da parte di S_1 è riportata in Figura 5:

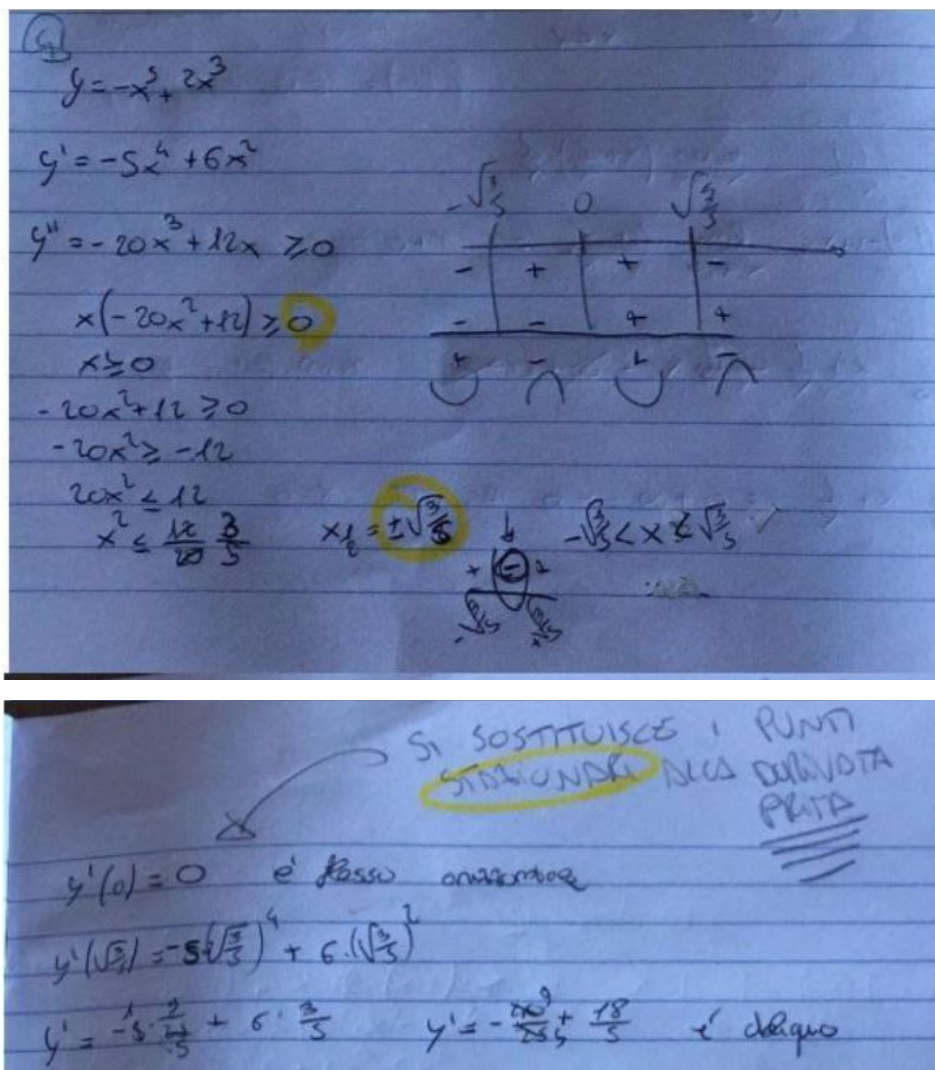


Figura 5
 Estratto delle foto inviate da S₁, che contiene la soluzione del quesito a risposta multipla sui punti di flesso di una funzione data.

3. Dopo altri scambi di messaggi che non riguardano questioni matematiche, S₂ manda il seguente messaggio audio:

«L'esercizio di pagina 1484, il numero 4, quando devi svolgere la funzione e trovare i massimi i minimi i flessi e va bè, a un certo punto tu hai fatto la tabella quella dei segni e ci hai messo solo... cioè io... come faccio a capire... mmm... cioè quali sono i mi... cioè nel senso... dimmi che hai capito».

Tale messaggio è accompagnato con l'immagine del quaderno di S₁ in cui S₂ ha cerchiato una parte (Figura 6):

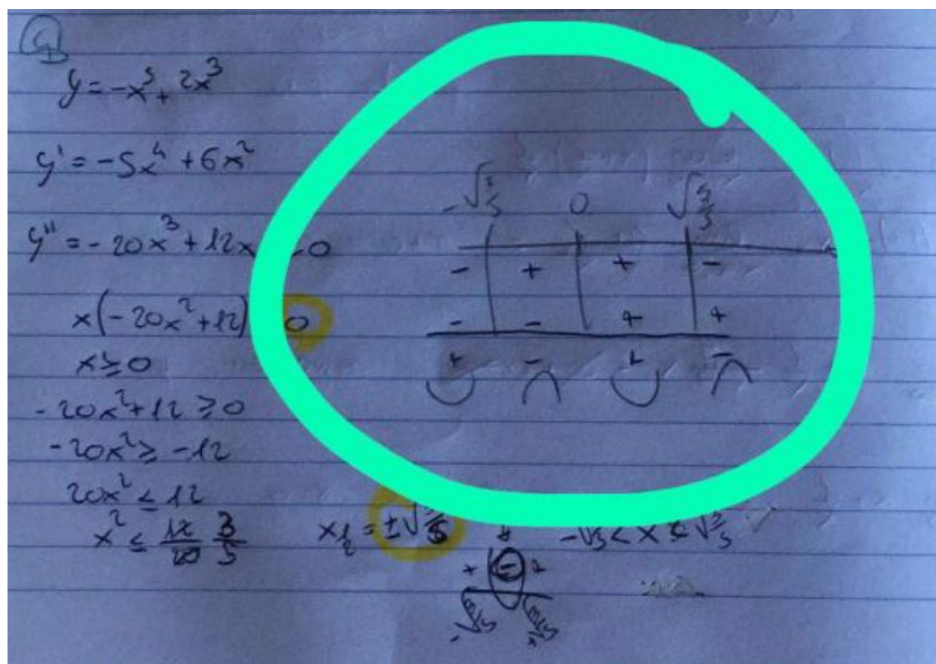


Figura 6
 Immagine che S_2 invia
 per accompagnare l'audio
 trascritto in 3.

4. S_1 risponde con il messaggio audio seguente:

«mmm no, non ho capito però ok te lo provo a spiegare, in pratica i massimi e minimi li trovi con la derivata prima. Le concavità con la derivata seconda. Siccome il 4 ti cercava i flessi cioè i flessi le concavità li trovi con la derivata seconda quindi devi fare prima la derivata prima poi fai la derivata seconda e sulla derivata seconda fai lo studio del segno. Poi quando è maggiore la concavità è verso l'alto, quando è minore la concavità è verso il basso quindi siccome cambia concavità c'è un flesso, ok? Oooh. Poi una volta fatto questo, per capire se è un flesso orizzontale o se flesso obliquo devi fare quello che t'ho scritto con la matita nella foto cioè vado a sostituire i punti stazionari, che sarebbero 0 più o meno radice di tre quinti, alla derivata prima [enfasi con tono di voce], se riporta 0 è flesso orizzontale, capito? Infatti andando a sostituire 0 nella derivata è uguale a 0 ed è flesso orizzontale. Se vado a sostituire più o meno radice di tre quinti mi ripor... non riporta 0 e quindi è... obliquo. Sia per più sia per meno. Quindi [enfasi con tono di voce] è un flesso orizzontale e due obliqui».

5. S_2 scrive «Ok perfetto» e poi, dopo 5 minuti chiede «La 6 invece?»⁸

6. S_1 invia il seguente audio:

«Siccome devi andare a trovare quale di quelle, le funzioni lì sotto.. eh.. rispetta quei punti vai per esempio a.. tr... g...[borbottio incomprensibile, sembra iniziare diverse parole senza pronunciarne interamente nessuna] il primo punto è il dominio più o meno quattro cioè x diverso da più o meno quattro [tono interrogativo] allora vai a vedere in queste cinque funzioni quale c'ha quella con

8. L'esercizio a cui si riferisce è un quesito a risposta multipla in cui bisogna decidere quale tra le cinque funzioni elencate è quella che soddisfa una serie di condizioni prestabilite.

il dominio diverso da più o meno quattro. Quindi tipo la A non può essere, la E non può essere, la C neanche. Quindi già tu da queste ehm... intanto ne escludi 3 soltanto per il dominio. Quindi il dubbio è tra la B e la D. Ehm "Interseca l'asse x nei punti A e B" [sembra leggere] allora vai a fare l'intersezione con l'asse y di B e di D per esempio e tutte e due puoi vedere, se lo fai, che tutte e due intersecano l'asse x nei punti A e B. Cioè tutti e due intersecano li. Quindi devi andare a vedere con il punto 3. "Ha come asintoto verticale le rette $x=4$ e $x=-4$ " [sembra leggere] fai il limite di x che tende a 4 e... ehm... il limite di x il limite di x che tende a 4 il limite di x che tende a -4 e anche sia la B che la D quindi vai a vedere il punto 4: "Ha come asintoto orizzontale la retta $y = 2$ " quindi fai il limite di x che tende a infinito di per esempio B de... della funzione B e vedi che è infinito fratto infinito e quindi... ehm... non è e l'asintoto orizzontale ce l'ha la D. E quindi è la D. Capito? Cioè vai per esclusione, inizi a fare i punti 1, 2, 3 e 4 alle funzioni e-e li escludi man mano che vai».

7. S_2 scrive «Ok grazie» e la conversazione si conclude.

4.2.2 Interpretazione

Triangolo di Chevallard

In questo esempio, insegnante, allievo e Sapere entrano in relazione in 4 configurazioni differenti rappresentati nella **Figura 7**. Abbiamo una prima istanza del Triangolo che interpreta il contesto della classe fisica (T_{CF} in alto a sinistra nell'immagine); poi l'analisi richiede di considerare anche:

- una seconda istanza del Triangolo che rappresenta la relazione triadica tra l'insegnante privato, il Sapere (lo studio di funzioni) e l'allievo S_1 (T_{IP} in alto a destra nell'immagine);
- una terza istanza del Triangolo individuato dai vertici Sapere (lo studio di funzioni), l'insegnante che in questa situazione è rappresentato dal familiare adulto riferimento competente per S_2 e l'allievo S_2 (T_{RC} in basso a destra nell'immagine);
- una quarta istanza del Triangolo individuato dai vertici Sapere (lo studio di funzioni), l'insegnante che in questa situazione è rappresentato da S_1 e l'allievo S_2 (T_{WH} in basso a sinistra nell'immagine); questa situazione è simile a quella creata da S_1 nell'esempio precedente con una differenza cruciale: non è presente l'insegnante curricolare ma, di fatto, S_1 si comporta come se fosse l'insegnante, S_2 come un allievo e c'è un Sapere in gioco.

Sempre in riferimento alla **Figura 7**, ci sembra importante puntualizzare che il diverso punto di partenza del Sapere della figura di insegnante in ciascun triangolo dipende dalla persona che sta in quel contesto assumendo quel ruolo. Ad esempio, nel caso di T_{RC} il familiare adulto competente è una persona di qualche anno più grande che ha già terminato la scuola superiore. Pertanto, per quanto il suo sapere appreso personale possa essere vicino a quello accademico, non può essere considerato tale.

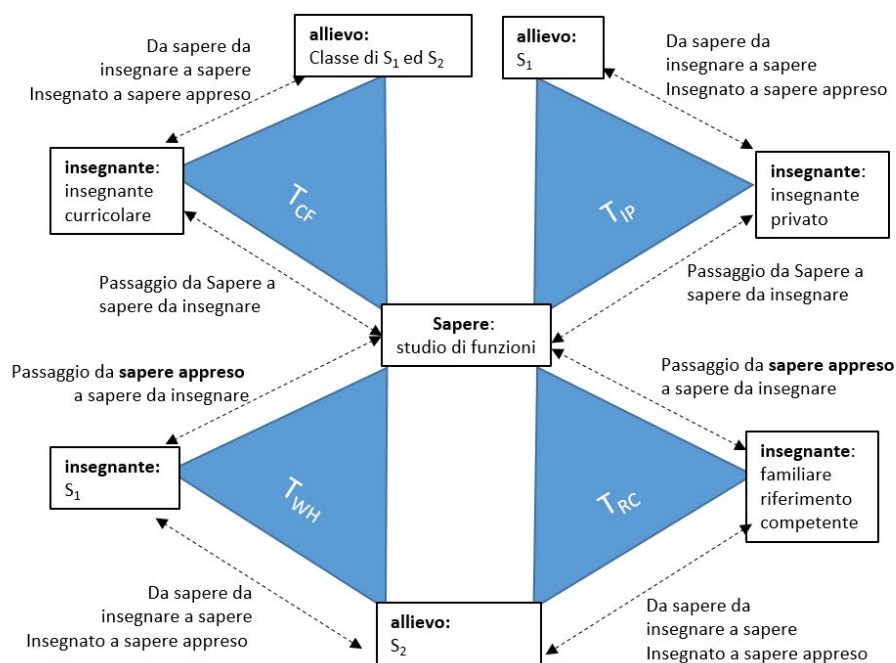


Figura 7
 Interpretazione dell'esempio 2 con diverse istanziazioni del Triangolo.

Nell'esempio che stiamo considerando, i triangoli descritti sopra non sono intrecciati come lo erano quelli dell'esempio del par. 4.1: nelle quattro istanze di triangoli il ruolo di insegnante è assunto da quattro figure differenti, di cui una è uno studente; inoltre, l'insegnante di matematica curricolare qui è presente solo nella classe fisica mentre nel caso precedente era presente anche nella GC; infine, solo alcuni studenti, S₁ e S₂, della classe fisica istituzionale sono presenti in tutte le triangolazioni di Chevallard. Analizzeremo solo il contesto di apprendimento che si configura dalle relazioni tra S₁ e S₂ nella chat di Whatsapp. L'insegnante curricolare non è presente ma, di fatto, quella che si crea è una situazione di alta rilevanza didattica. Nello scambio riportato, i due ragazzi discutono su due esercizi e possiamo organizzare il contenuto in due parti: dal passaggio 1 al passaggio 4 (compresi) la discussione riguarda il primo esercizio; dal passaggio 5 al passaggio 7 (compresi) S₁ ed S₂ parlano del secondo esercizio.

Nell'intero scambio, appare emblematica la figura di S₁: comunica la sua disponibilità ad aiutare S₂ nella risoluzione di alcuni esercizi ed attua la devoluzione degli obiettivi didattici che S₂ accetta implicandosi personalmente nell'attività matematica. Come nel caso di S₇ nell'episodio precedente, assistiamo ad una ri-costruzione del sapere appreso attivata da S₁ nell'intento di aiutare l'apprendimento di S₂, riscontrando il medesimo atteggiamento nel modificare il proprio lavoro per massimizzare la portata comunicativa del materiale condiviso (passaggio 4: «[...] devi fare quello che t'ho scritto con la matita nella foto [...]»). D'altra parte, nel triangolo T_{WH} dove S₁ assume il ruolo di insegnante, questo agire può essere interpretato come una sorta di Trasposizione didattica che non è quella classica che comincia con un Sapere sapiente e termina con il sapere competente dall'allievo, ma la sequenza inizia dal sapere appreso da S₁ nella combinazione dei triangoli T_{CF} e T_{IP}. L'intenzione didattica di S₁ raggiunge S₂ che manifesta un atteggiamento critico e la volontà di imparare. S₂, nella discussione che riguarda il primo esercizio, espone la sua difficoltà in un linguaggio - che è al di fuori dal gergo tipico degli atteggiamenti contrattuali, gergo

che D'Amore (1999) chiama "matematichese" – apparentemente incomprensibile a chi non appartiene alla relazione comunicativa tra S_1 e S_2 ma accessibile a S_1 . Vogliamo portare all'attenzione del lettore il ruolo attivo che S_2 assume nello scambio con S_1 prendendosi anche la responsabilità di intervenire sui materiali di S_1 , operazione improbabile all'interno delle forme contrattuali tipiche dei sistemi didattici che coinvolgono la presenza dell'insegnante curricolare, che potrebbe attivare aspettative e effetti noti in letteratura.

Mettiamo in evidenza come l'utilizzo delle tecnologie digitali sia essenziale nel concretizzare questa configurazione didattica e queste forme di comunicazione - la possibilità di fotografare le pagine del quaderno, intervenire semioticamente sul testo originario disponibile in forma digitale, inviare nella rete tali documenti, potrebbero sembrare operazioni scontate, ma invitiamo il lettore a immaginare come si sarebbe sviluppata la dinamica di questo episodio senza le potenzialità offerte dalle tecnologie digitali. Inoltre, da un punto di vista della ricerca, la natura di queste tecnologie digitali ha permesso di accedere ad uno scambio spontaneo tra gli allievi, altrimenti accessibile solo al prezzo di attivare le ineliminabili interferenze del contratto sperimentale (D'Amore, 1999).

Nel discutere in merito al secondo esercizio, invece, la situazione non è connotabile con gli stessi elementi di implicazione personale e volontà di costruire conoscenza da parte di S_2 . S_2 infatti si limita ad indicare un esercizio senza manifestare desiderio e volontà di capire una specifica porzione di Sapere – ricordando il comportamento di S_1 ed S_6 nel primo esempio descritto nel par. 4.1. Probabilmente, a differenza di quanto avvenuto nella prima parte della comunicazione, sono intervenuti obblighi didattici come la consegna degli esercizi, l'argomento dell'esercizio come possibile oggetto di un'interrogazione, l'ansia per l'avvicinarsi della verifica ecc. Assistiamo ad uno scivolamento da parte di S_2 verso atteggiamenti che sembrano guidati da dinamiche di contratto didattico, quasi ad indicare l'inevitabilità del contratto didattico ereditato dalla classe fisica. Tuttavia, con i dati a nostra disposizione, non possiamo spingerci oltre in questa analisi.

Interpretazione in chiave sociologica

A nostro avviso, in questo episodio è possibile distinguere due società-classi e caratterizzare l'interazione tra S_1 ed S_2 in termini di pratiche e meta-pratiche. Da un lato abbiamo la società-classe fisica nell'istituzione scuola, popolata dall'insegnante curricolare e tutti gli studenti della classe. Il territorio comune occupato è fisicamente delimitato e le interazioni avvengono in tempi stabiliti a priori. Dall'altro lato, abbiamo la società-classe privata non istituzionale, popolata dall'insegnante privato e da tutti gli studenti di quella classe che seguono le sue lezioni. Anche in questo caso, il territorio comune occupato è fisicamente delimitato e le interazioni avvengono in tempi delimitati ma concordati di volta in volta tra i membri della società. Le due società-classi, pur coinvolgendo individui diversi in territori diversi, condividono lo stesso scopo funzionale: l'I/A della matematica. In entrambe le società le pratiche e le meta-pratiche, si sono delineate nel tempo. In questo scenario, S_1 ed S_2 sono due individui che appartengono ad entrambe le società-classi ed esiste tra loro il rapporto di amicizia tra pari che, in quanto tale, è completamente centrato sugli interessi degli individui coinvolti.

Nell'esempio considerato, lo scambio comunicativo tra i due studenti sui due esercizi si realizza in uno spazio digitale intimo – che non è, di per sé, una società-classe ma

risente delle pratiche e delle meta-pratiche delle due individuate sopra – dedicato alla loro relazione di amicizia. In tale ambito privato, lo scambio di battute sul primo esercizio presenta una differenza sostanziale rispetto a quanto avviene per il secondo. Infatti, il primo scambio nasce da un dubbio preciso attorno al quale S_2 formula una domanda specifica e centrata su di sé (passaggio 3: «io come faccio a capire [...]»). Il secondo scambio invece avviene sempre su input di S_2 ma la domanda presenta dei toni diversi rispetto alla precedente (passaggio 5: «La 6 invece?») e sembra quasi sottintendere un impersonale “come si fa”.

Naturalmente da un punto di vista della relazione amicale tra S_1 ed S_2 tale differenza non esiste poiché entrambi gli scambi rientrano in un’interazione di aiuto perfettamente coerente con il rapporto di amicizia tra i due.

Tuttavia, interpretando questa interazione in termini di pratiche e meta-pratiche rispetto alla società-classe fisica cui entrambi appartengono, potremmo dire che mentre nel primo scambio, in cui S_2 si implica personalmente e manifesta l’intenzione di capire, si crea un’assonanza con le pratiche funzionali della società-classe, nel secondo emerge una sorta di dissonanza. Infatti, S_2 perde il suo ruolo attivo e sembra rimanere sullo sfondo della propria domanda: ecco che, come già osservato, si realizza uno scivolamento verso una meta-pratica generata da dinamiche di contratto didattico.

Qui, come nell’esempio precedente, le due società-classe sono a intersezione non vuota.

4.3 Risposta alle domande di ricerca

D1: Come caratterizzare il sistema che emerge dalla contaminazione della classe fisica da parte della classe virtuale?

R1: Per caratterizzare il nuovo sistema, occorre individuare le possibili istanziazioni delle variabili in i-a-S che concorrono alla realizzazione della relazione triadica rappresentata dal triangolo. Per esempio, nell’episodio del par. 4.1 abbiamo individuato 2 possibili istanziazioni del Triangolo (Figura 4). La complessità delle relazioni che intercorrono tra i protagonisti dell’episodio del par. 4.2 ha richiesto di introdurre 4 schemi triadici.

Un altro elemento da prendere in considerazione è l’individuazione e la caratterizzazione delle società-classi in gioco. In particolare, per ciascuna società-classe occorre riconoscere gli individui/account, i territori e le “regole di interazione” tra individui/account. Per esempio, nel primo episodio abbiamo individuato due società-classe:

- La classe fisica che è composta dagli studenti e dall’insegnante che agiscono in un territorio delimitato nello spazio e nel tempo secondo le regole tipiche del contesto d’aula.
- La GC che è composta da 24 individui/account, 22 studenti, l’insegnante e la tirocinante. Il territorio non ha confini spaziali e temporali definiti. Essi dipendono dalle scelte degli individui e dalle caratteristiche della tecnologia utilizzata. Le regole di interazione sono determinate da accordi tra gli individui e i vincoli dettati dalla tecnologia, software e hardware.

Nel secondo episodio abbiamo individuato due società:

- Da un lato abbiamo la *società-classe fisica* nell’istituzione scuola, popolata dall’insegnante curricolare e tutti gli studenti della classe. Il territorio comune occupato è fisicamente delimitato e le interazioni avvengono in tempi stabiliti a priori.
- Dall’altro lato, abbiamo la *società-classe privata* non istituzionale, popolata

dall'insegnante privato e da tutti gli studenti di quella classe che seguono le sue lezioni. Anche in questo caso, il territorio comune occupato è fisicamente delimitato e le interazioni avvengono in tempi delimitati ma concordati di volta in volta tra i membri della società.

Osserviamo che le società-classi dei due episodi, nonostante coinvolgano individui diversi in territori diversi, condividono lo stesso scopo funzionale: l'I/A della matematica.

D2: Esistono dei tratti distintivi da monitorare per tracciare l'evoluzione dei processi di I/A nell'interazione tra la classe fisica e la classe virtuale? E se esistono, quali potrebbero essere?

R2: Per rispondere alla seconda domanda occorre individuare fattori di tipo dinamico per seguire l'evoluzione dei processi di I/A. Tali fattori sono legati alle lenti teoriche che stiamo utilizzando per interpretare le contaminazioni reciproche tra classe fisica e classe virtuale.

Per quanto concerne il Triangolo, occorre osservare la dinamicità delle istanziazioni della relazione triadica rispetto alle variabili i-a-S. Come abbiamo indicato nel par. 3, l'introduzione di classi virtuali comporta una dinamicità nelle possibili istanziazioni del Triangolo rispetto alle variabili i-a-S. Il vertice insegnante non è di pertinenza solo del docente, ma può essere assunto da altri individui/account. In particolari configurazioni del triangolo, non tutti gli allievi di una classe appartengono al vertice allievo, ma possono distribuirsi tra il vertice allievo e il vertice insegnante e lo stesso docente si potrebbe trovare nel ruolo di allievo per quanto concerne, ad esempio, conoscenze relative all'uso delle tecnologie digitali. Il vertice sapere non è occupato esclusivamente dal Sapere accademico, ma può accogliere le diverse declinazioni del sapere previste dalle diverse fasi della trasposizione didattica.

Nel primo episodio abbiamo mostrato come nel passaggio dalla classe fisica alla GC il Triangolo evolve da una situazione in cui i vertici i-a-S sono assunti rispettivamente dalla docente di matematica, dagli alunni della classe e dal Sapere accademico a quella in cui tale configurazione viene traslata in GC e successivamente il vertice insegnante si istanzia in S_7 , quello di allievo negli altri studenti della classe che partecipano alla discussione e il Sapere è il sapere appreso da S_7 dal quale prende avvio la trasposizione didattica.

Nel secondo esempio, la complessità dell'evoluzione dei processi di I/A è rappresentata dalla Figura 7. Le variabili i-a-S della relazione triadica vengono istanziate, nella dinamicità del Triangolo:

- dal docente di matematica curriculare, dal docente delle ripetizioni, dal familiare esperto e da S_1 , per quanto riguarda il vertice insegnante;
- dagli alunni della classe, da S_1 e da S_2 , per quanto concerne il vertice allievo;
- dal Sapere accademico e dal sapere appreso, per quanto concerne il vertice Sapere da cui inizia la trasposizione didattica.

L'altro fattore di natura dinamica che occorre considerare per disegnare l'evoluzione dei processi di I/A, quando classi fisiche e classi virtuali si contaminano, è il tipo di pratiche che caratterizza le società-classi che emergono da tale contaminazione. In particolare, le pratiche funzionali, le meta-pratiche extrafunzionali e la loro reciproca interazione.

Nel primo episodio, per ottemperare all'invito dell'insegnante, avvenuto nella società-classe fisica, di postare nello Stream di GC gli esercizi per casa, si possono ravvisare le dinamiche derivanti dall'interazione tra pratiche funzionali e meta-pratiche

extrafunzionali. I primi esercizi postati nello Stream mostrano l'interferenza di meta-pratiche della società-classe fisica che vanno a interferire con le pratiche funzionali costitutive della società-GC. Infatti, i primi studenti mostrano una certa ritrosia ad esporsi mostrando ai compagni e agli insegnanti gli esercizi svolti sul proprio quaderno e si limitano a indicare quali esercizi non sono riusciti a svolgere. Una meta-pratica, mutuata dalla società-classe fisica e riconducibile al contratto didattico, interferisce con la pratica funzionale che consiste nell'apprendimento della matematica. All'interno della società-GC notiamo, tuttavia, un'evoluzione da meta-pratica a pratica funzionale innescata da S_7 , che nel contesto della classe virtuale si prende la responsabilità di assumere il ruolo di insegnante e di operare una trasposizione da sapere appreso (da S_7) a sapere da insegnare a sapere insegnato a sapere appreso. Nel territorio della società-classe fisica nella quale la relazione triadica i-a-S è più statica, S_7 probabilmente non avrebbe trovato in sé e nel gruppo il sostegno affettivo-relazionale di rompere il contratto didattico.

Nel secondo esempio osserviamo uno scivolamento da parte di S_2 da pratica funzionale a meta-pratica extrafunzionale. In effetti, se S_2 inizia l'interazione con S_1 attuando una pratica funzionale volta all'apprendimento della matematica – nel caso specifico il bisogno e il desiderio di comprendere l'esercizio sullo studio di funzioni – nell'affrontare il secondo esercizio il suo comportamento è riconducibile a meta-pratiche extrafunzionali descritte nel par. 4.2.2.

In definitiva, la possibilità di dipanare la complessità evidenziata da Borba et al. (2016) che emerge quando le tecnologie digitali incontrano gli spazi di apprendimento fisici, è da attribuire alla forza epistemologica del Triangolo e della nozione di pratica e meta-pratica introdotta da D'Amore in Didattica della Matematica. Queste due lenti teoriche, a nostro avviso, permettono di accogliere la dinamicità e la complessità sistemico-relazionale che emergono dall'interazione di classi fisiche e virtuali.

5 Conclusione

Nel presente lavoro abbiamo analizzato due esempi di dinamiche di I/A in contesti arricchiti dall'uso delle tecnologie digitali usando una lente teorica composta dai seguenti elementi:

- lo schema triadico del Triangolo, per inquadrare le particolarizzazioni e le relazioni tra gli attori, la cui dinamicità è tipica dei contesti di I/A in cui sono presenti delle tecnologie digitali (Albano, 2017);
- la prospettiva sociologica di classe intesa come società proposta da D'Amore, usata per mettere in relazione le pratiche e le meta-pratiche delle diverse società-classe in gioco.

Il primo esempio considerato è uno scambio di messaggi nello Stream di GC avvenuto in una seconda Liceo Scientifico. Il secondo esempio considerato è un estratto di una chat privata su Whatsapp tra due studenti compagni di classe che frequentano l'ultimo anno di Liceo Classico. Entrambi gli esempi, riguardano l'interazione tra spazi di I/A fisici e virtuali e sono episodi realmente avvenuti che noi abbiamo analizzato a posteriori. Abbiamo voluto proporre un approccio e una prospettiva

teorica per poter inquadrare e studiare questioni di questo tipo anche quando esse si realizzano nella complessità dei contesti reali. Lo schema triadico del Triangolo ci ha permesso di caratterizzare didatticamente le diverse interazioni tra gli individui. La visione di una classe come società ci ha permesso di approcciare ad una situazione complessa come quella in cui spazi fisici interagiscono con spazi virtuali attraverso una lente analitica che, facendo chiarezza tra territori comuni, individui/account coinvolti, interazioni e modalità di interazione e comportamenti (guardati in termini di pratiche e meta-pratiche), a nostro avviso aiuta ad operare un'analisi didattica più nitida.

I due esempi, pur essendo tra loro molto diversi, attraverso l'analisi teorica hanno rivelato alcuni punti in comune che siamo riusciti ad individuare e specificare. Il primo punto riguarda l'inevitabile contaminazione tra ciò che avviene nel contesto della classe fisica e ciò che avviene negli spazi virtuali. Tale contaminazione si è rivelata più forte nel primo esempio, in cui il piano fisico e quello virtuale hanno dato vita ad un nuovo spazio emergente che li vede quasi intrecciati, ma è comunque presente nel secondo, in cui le maglie del contratto didattico della classe fisica riescono ad infiltrarsi fin dentro lo spazio privato di due studenti. Il secondo punto, riguarda il riscontro della presenza di elementi quali devoluzione, implicazione personale, costruzione di conoscenza e rottura del contratto didattico nelle interazioni che avvengono negli spazi virtuali. Naturalmente, questo non significa che tali elementi esistano solamente in tali spazi né che li esistano sempre ma il punto, a nostro avviso, di estremo interesse è che in tali spazi si vedono, diventano osservabili e studiabili. Un terzo punto, legato al secondo e che accomuna entrambi gli esempi riportati, riguarda la difficoltà di distinguere con nitidezza le pratiche dalle meta-pratiche soprattutto nei contesti ibridi che stiamo considerando. Infatti, la fluidità e la dinamicità che caratterizzano tali contesti non solo aumentano la complessità del sistema studiato ma ne sfumano anche i confini. Con riferimento al già citato Borba et al. (2016) – che mette in evidenza come la tecnologia digitale abbia completamente destrutturato l'immagine degli ambienti di apprendimento tradizionali, abilitando nuove tipologie di classi e di modalità di lavoro che, a loro volta, innescano differenti dinamiche di natura socio-culturale – gli episodi che abbiamo analizzato mostrano come le tecnologie digitali siano state determinanti nel modificare la natura del Triangolo e della Trasposizione didattica. Tuttavia, riteniamo che la ricerca in questo ambito debba continuare approfondendo il ruolo delle tecnologie digitali nel modificare un'altra dimensione fondamentale che contraddistingue l'apprendimento della matematica: ci riferiamo al ricchissimo mondo della semiotica nelle sue declinazioni strutturali – funzionali e semiotico-culturali.

Ci sentiamo di concludere questo lavoro non tanto con delle risposte ma con alcune riflessioni di carattere generale e l'esplicitazione di un'esigenza di definire sempre meglio i problemi di ricerca in questo ambito. Le tecnologie digitali in un contesto di I/A agiscono in maniera analoga ad un prisma che rifrange la luce: scompongono soggetti, oggetti e processi didattici, spaccettando e rendendo visibili (e, quindi, analizzabili) le loro varie sottocomponenti. In questo senso, è emblematico anche il secondo esempio da noi considerato: la raccolta e l'archiviazione di dati è implicita quando si utilizzano strumenti come Whatsapp e, grazie alla preziosa disponibilità di S_1 ed S_2 , abbiamo avuto la possibilità di studiare un autentico scambio privato tra studenti senza averlo contaminato con la nostra presenza, sia essa dichiarata o nascosta. Riteniamo che tutto questo abbia, e avrà sempre di più, un impatto notevole a livello di metodologia di ricerca in didattica.

Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare S_1 ed S_2 per il loro coraggio e la loro disponibilità nel mettere a nostra disposizione il contenuto della loro chat privata.

Ringraziamo caldamente Bruno D'Amore e Miglena Asenova per le profonde osservazioni e i suggerimenti che hanno contribuito ad un sensibile miglioramento della versione iniziale dell'articolo.

Ringraziamo infine i due anonimi referee per i loro preziosi commenti che sono stati determinanti per arrivare alla forma definitiva del lavoro.

Questo articolo è uno dei risultati del progetto di ricerca VIRMATH della Libera Università di Bolzano, Facoltà di Scienze della Formazione.

Bibliografia

- Albano, G. (2017). e-Mathematics Engineering for Effective Learning. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology* (pp. 349-370). Springer International Publishing.
- Albano, G., Faggiano, E., & Mammana, M. F. (2013). A tetrahedron to model e-learning Mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 23 (Supplemento 1), 429-436, G.R.I.M. (Department of Mathematics and Computer Science, University of Palermo, Italy).
- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 1, 73-89.
- Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Aguilar, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM*, 48(5), 589-610.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. New York/Boston/Dordrecht/London/Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y., & Joshua, M. A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(1), 159-239.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 3, 325-336.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática (México DF, México)*, 14(1), 48-61.
- Del Zozzo, A. (2019). *VirMath. Classi virtuali in matematica*. Report interno dei primi risul-

tati del progetto VirMath della Facoltà di Scienze della Formazioni della Libera Università di Bolzano con la supervisione del Professor Giorgio Bolondi. Versione settembre 2019.

Del Zozzo, A., & Santi, G. (2019). Physical and virtual classroom in the learning of mathematics: analysis of two episodes (poster). In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME11, February 6 – 10, 2019*. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Drijvers, P. H. M., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey*. NY: Springer.

Fandiño Pinilla, M. I. (2002). *Curricolo e valutazione*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2003). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. In B. D'Amore, J. D. Godino, G. Arrigo, & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Competenze in matematica* (pp. 75-88). Bologna: Pitagora.

Merton, R. (1968). *Social Theory and Social Structure*. New York: Free Press.

Risk, U. (2002). Draft standard for learning object metadata. *IEEE Standard, 1484(1)*.

Sfard, A. (2008). *Psicologia del pensiero matematico*. Trento: Erickson.

Autori/Agnese Del Zozzo e George Santi

Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano – Italia;
Nucleo di Ricerca Didattica della matematica, Università di Bologna – Italia
adelzozzo@unibz.it, gesanti@unibz.it

Valutazioni standardizzate di matematica: evidenze di difficoltà dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado

Standardized assessment in Mathematics: highlights of difficulties from primary school to upper secondary school

Federica Ferretti

Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano – Italia

Sunto / Il presente contributo mostra l'analisi di due quesiti rientranti nelle valutazioni standardizzate italiane di matematica: uno somministrato in modalità cartacea agli studenti della classe quinta della scuola primaria e uno somministrato in modalità CBT-Computer Based Testing a studenti della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado. L'analisi combinata dei testi e dei risultati dei quesiti evidenzia delle lacune diffuse in termini di mancanza di padronanza contestuale, concettuale e semantica della situazione problematica proposta nei task matematici.

Parole chiave: valutazioni standardizzate; valutazione in matematica; valutazioni al computer; contratto didattico.

Abstract / The present contribution shows analysis of standardized Italian mathematics assessments tasks: a Paper&Pencil task administered to students in the fifth grade of Primary School and a task administered in CBT-Computer Based Testing mode to second year students of upper secondary school. The combined analysis of the texts and the results of the questions highlights widespread gaps in terms of lack of contextual, conceptual and semantic mastery of the problematic situation in the resolution of math-ematical tasks.

Keywords: standardized assessment; assessment in mathematics; Computer Based Testing; didactic contract.

1 Introduzione

Negli ultimi decenni sempre più ricerche hanno studiato fenomeni messi in luce dalle valutazioni standardizzate di matematica, indagandone peculiarità e caratteristiche con le lenti teoriche della didattica della matematica (De Lange, 2007; Sbaragli & Franchini, 2014; Ferretti & Bolondi, 2019). In particolare, nel contesto italiano, analisi qualitative e quantitative sui testi e sui risultati delle rilevazioni INVALSI hanno portato alcuni contributi significativi per la ricerca in didattica della matematica: non solo è stato possibile quantificare e misurare la portata di diversi fenomeni già studiati in letteratura inquadabili con costrutti condivisi a livello internazionale – come ad esempio quello di *contratto didattico* (Ferretti, Giberti & Lemmo, 2018), ma dalle varie analisi sono emerse nuove evidenze e interpretazioni legate ai fenomeni stessi. Da quest'ultimo punto di vista, si è potuto mettere in relazione conoscenze, abilità e difficoltà degli studenti emerse durante la prova con il gender gap tra maschi e femmine (Bolondi, Ferretti & Giberti, 2018; Bolondi, Cascella & Giberti, 2017); si sono anche studiati fenomeni nuovi come l'effetto "Età della Terra", che mette in evidenza come gli studenti tendenzialmente non ritengano plausibile che la risposta a un task matematico sia un dato esplicitamente presente nel testo del task, ma occorra "farci qualcosa"

per ottenere un risultato diverso dall'input iniziale (Ferretti & Bolondi, 2019).

Dall'anno scolastico 2017/18 le prove INVALSI del grado 08 (classe terza della scuola secondaria di primo grado¹), del grado 10 (classe seconda della scuola secondaria di secondo grado²) e, dall'anno scolastico 2018/19, del grado 13 (ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado) si sono svolte in modalità Computer Based Testing (CBT). Il passaggio dal cartaceo al CBT ha comportato tutta una serie di cambiamenti, sia dal punto di vista contenutistico, sia dal punto di vista tecnico (Botta & Lasorsa, 2017; Pozio & Bolondi, 2019). Tra questi cambiamenti, un aspetto significativo riguarda la correzione centralizzata dei quesiti svolti a livello censuario nazionale. Con la correzione centralizzata è possibile avere un'analisi più efficace delle risposte fornite dagli studenti di tutta Italia. Il grande cambiamento risiede nella raccolta delle risposte fornite alle domande aperte da tutti gli studenti a livello nazionale (domande aperte a risposta univoca e a risposta aperta argomentativa); in precedenza, tale raccolta veniva svolta autonomamente dall'insegnante o, nel caso di classi campione, dal somministratore INVALSI. Dal punto di vista della ricerca, la correzione centralizzata consente invece un'analisi dei processi (e non solo dei prodotti) attivati dagli studenti in sede di valutazione standardizzata. In questo articolo proporrò un'analisi in verticale dei risultati di due quesiti INVALSI somministrati agli studenti di scuola primaria³ e di scuola secondaria di secondo grado. Le analisi di entrambi i quesiti evidenziano alcune difficoltà metacognitive che risultano diffuse a livello nazionale e che erano già state messe in evidenza dalla letteratura.

Il primo quesito è stato somministrato in forma cartacea agli allievi di quinta primaria; è un quesito a risposta chiusa che ha riscontrato una bassa percentuale di risposte corrette mettendo in evidenza la presenza di una difficoltà generalizzata; essendo un quesito a risposta chiusa è possibile analizzare le percentuali di scelta anche delle opzioni sbagliate e questo permette di avere una quantificazione anche della tipologia degli errori commessi dagli studenti. Il secondo item analizzato è a risposta aperta univoca ed è stato somministrato in modalità CBT. In questo secondo caso, l'aver a disposizione tutte le risposte fornite (e non solo le loro numerosità), sia corrette sia errate, su scala nazionale, ha permesso un grado più dettagliato di indagine sugli errori. L'analisi condotta sul secondo item sembra essere esplicativa dei vantaggi derivanti dalla somministrazione delle prove al computer e, quindi, dalla correzione centralizzata; infatti, fino a quando le prove standardizzate si svolgevano unicamente in modalità cartacea, per quanto riguarda le domande a risposta aperta e a risposta aperta univoca si avevano a disposizione solo le percentuali di risposte corrette/mancanti/errate e non le risposte fornite dagli studenti.

Entrambi i quesiti analizzati hanno registrato percentuali di risposta corrette molto basse e analizzando le risposte errate (che nel primo caso corrispondono alle scelte delle opzioni errate e nel secondo caso alle risposte errate fornite) emerge che la maggior parte delle difficoltà diffuse sono riconducibili ad una mancanza di controllo semantico della situazione e a fattori che più che riconducibili a singoli contenuti, potrebbero essere legati ad atteggiamenti e convinzioni nei confronti della matematica, e più nello specifico, alla risoluzione di task matematici.

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

3. La scuola primaria in Italia equivale alla scuola elementare nel Canton Ticino.

2 La valutazione in matematica

Il tema della valutazione in matematica è sempre più al centro di forti dibattiti nazionali e internazionali all'interno della ricerca in didattica della matematica. C'è ormai un forte consenso sul fatto che valutare non significhi dare giudizi o classificare; la valutazione viene identificata piuttosto con i verbi ricercare, ottenere, organizzare e restituire informazioni (Bolondi, 2018). Si sta cioè sempre più affermando il ruolo formativo della valutazione, in un'ottica di valutazione *per* l'apprendimento e non *dell'*apprendimento (Scriven, 1967). Con il termine *formative assessment* (valutazione formativa) ci si riferisce a una valutazione che analizza e ricostruisce il percorso di insegnamento e apprendimento (Vertecchi, 1976) ed è proprio in questa direzione che vertono i più recenti studi in ambito docimologico, nei quali viene messo in luce quanto la valutazione dovrebbe premettere un monitoraggio e una regolazione costante dei percorsi didattici, in vista del raggiungimento degli obiettivi curriculari (Vannini, 2009). Da questa necessità teorica è nata l'importanza di costruire dispositivi e tecniche di *formative assessment* anche in ambito matematico, come messo in luce in diversi studi (Black & Wiliam, 1998; Ferretti & Vannini, 2017).

D'altra parte, il ruolo centrale della valutazione in matematica nelle prassi didattiche emerge anche dalle Indicazioni Nazionali curriculari per il primo ciclo e per la Scuola dell'Infanzia (MIUR, 2012)⁴, nelle quali viene messo in evidenza come il processo valutativo venga affidato a tre attori principali: gli insegnanti, le singole istituzioni scolastiche e le istituzioni ministeriali (come l'ente di ricerca INVALSI). In altre parole, i tre livelli su cui deve essere effettuata la valutazione sono: il livello *micro*, in riferimento all'apprendimento degli allievi; il livello *meso*, inteso come prassi di autovalutazione del singolo istituto; e il livello *macro*, in riferimento al controllo e al miglioramento continuo del sistema. Ovviamente questi livelli sono strettamente in relazione l'uno con l'altro e spesso anche gli attori coinvolti sono i medesimi.

Certamente, le funzioni, gli scopi e le prassi valutative sono strettamente legate a contesti storici e a fattori epistemologici, nonché ai sistemi educativi di cui sono parti integranti. Discutere di valutazione in questo momento storico non può quindi prescindere dai sistemi di valutazione di tipo macro, dunque anche dalle prove standardizzate. Tali prove rappresentano la novità più importante degli ultimi dieci anni in quanto generatrice di cambiamenti significativi nel modo in cui vengono analizzati i processi di insegnamento/apprendimento della matematica. È proprio su tali riflessioni che verterà questo articolo, in cui vengono proposte interpretazioni che ricercatori e insegnanti possono sfruttare in un'*ottica formativa*. Infatti, se da un lato uno dei principali obiettivi del Sistema Nazionale di Valutazione SNV – INVALSI consiste nell'ottenere una fotografia del sistema scolastico (fornita dall'analisi campionaria), dall'altro la somministrazione a livello censuario e le modalità di restituzione dei risultati alle singole istituzioni scolastiche permettono a dirigenti, insegnanti e studenti di poter utilizzare i singoli risultati di istituto per ottenere informazioni utili e trasformarle in elementi efficaci in termini di miglioramento nei percorsi di insegnamento/apprendimento.

4. Il primo ciclo nel sistema scolastico italiano corrisponde ai cinque anni di scuola primaria e ai tre anni di scuola secondaria di primo grado.

3 Le prove standardizzate di matematica in ottica formativa

Uno dei fattori che attribuisce valenza dal punto di vista didattico alle prove INVALSI è l'essere in linea sia con le normative ministeriali (MIUR, 2012; MIUR, 2010a; MIUR, 2010b; MIUR, 2010c)⁵ sia con i principali risultati delle ricerche nazionali e internazionali in didattica della matematica. Da un lato il Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica – così come avviene per quello delle rilevazioni internazionali IEA-TIMSS e OECD-PISA – è costruito partendo dai risultati della ricerca in didattica della matematica. Dall'altro, i quesiti vertono su conoscenze e competenze richieste dai curriculum scolastici e spesso indagano difficoltà messe in luce dalla letteratura. Inoltre, gli item sono formulati seguendo modalità validate dalla ricerca e i *question intent* delle domande sono individuati tenendo conto dei nodi che la ricerca ha messo in luce.

Come esplicitato nel Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di matematica (INVALSI, 2018), le indicazioni ministeriali per i curricula del primo e del secondo ciclo sono alla base del disegno delle rilevazioni INVALSI, sia per quanto riguarda la definizione dei contenuti irrinunciabili, sia per quanto riguarda le competenze essenziali che gli studenti devono raggiungere in matematica al termine dei vari cicli scolastici. In linea con le normative curricolari, le prove di matematica si articolano nei medesimi ambiti di contenuto delle indicazioni ministeriali (talvolta etichettati con diverse nominazioni ma individuabili chiaramente come contenuti specifici) e fanno riferimento ai Traguardi per lo sviluppo delle competenze per il primo ciclo e alle competenze esplicitamente richieste nei documenti ministeriali per il secondo ciclo. Inoltre, la continuità del processo di apprendimento ricopre un ruolo fondamentale nel processo di costruzione delle prove, e questo si manifesta nella forte continuità sia in termini di conoscenze e abilità sia in termini di competenze, le quali si articolano come integrazione o come riformulazione nel passaggio tra due gradi scolastici. È proprio in questa direzione che il gruppo di lavoro INVALSI di matematica ha individuato una serie di Traguardi per lo sviluppo delle competenze per la scuola secondaria di secondo grado (si rimanda all'allegato A del QdR, INVALSI, 2018). Il gruppo di lavoro ha anche esplicitato per il secondo ciclo una serie di descrizioni dei traguardi, in verticale con quelli del primo ciclo, a cui riferire gli obiettivi di apprendimento e che risultano coerenti con i traguardi degli Assi Culturali (MIUR, 2007). Come viene sottolineato anche dal gruppo di lavoro INVALSI, non tutte le competenze delle Indicazioni per il primo ciclo sono valutabili da una prova standardizzata su larga scala; ad esempio, questo tipo di prove non è adeguato a valutare il Traguardo per lo sviluppo delle competenze «Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica» (MIUR, 2012).

Un ulteriore aspetto da tenere in considerazione, riguardante il legame fra la ricerca in didattica della matematica e le prove standardizzate, è dato dal prendere in considerazione come l'apprendimento (e dunque la valutazione dell'apprendimento) della matematica possa essere interpretato in modo olistico come formato da diverse

5. In Italia, per il secondo ciclo di istruzione, che corrisponde alla scuola secondaria di secondo grado, vi sono le Linee Guida per gli Istituti Professionali e Tecnici e le Indicazioni Nazionali per i Licei; questi documenti ministeriali hanno impianti di scrittura molto diversi tra di loro e sono stati redatti in tempi diversi. Entrambi però (come anche le Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo) fanno riferimento agli Assi Culturali per l'Obbligo di istruzione, e contengono (le Indicazioni Nazionali in forma discorsiva e le Linee Guida in forma elencatoria) obiettivi di apprendimento che si riferiscono ai traguardi previsti dagli Assi Culturali.

componenti. Fandiño Pinilla (2008) ne identifica cinque: apprendimento concettuale; apprendimento algoritmico; apprendimento di strategie; apprendimento comunicativo; apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche. L'importanza della valutazione in tutte le direzioni che compongono l'apprendimento della matematica viene esplicitata anche nella direzione trasversale ai contenuti delle prove INVALSI, raggruppate secondo le tre dimensioni *Risolvere problemi*, *Argomentare*, *Conoscere*. Queste tre dimensioni coinvolgono sostanzialmente le cinque componenti dell'apprendimento identificate da Fandiño Pinilla.

I risultati delle prove possono essere analizzate sotto diversi punti di vista sia da ricercatori sia da docenti; in particolare, l'analisi combinata dei risultati e dei testi effettuata con lenti teoriche specifiche può fornire informazioni preziose sul sistema scolastico in generale, sia sugli apprendimenti degli studenti.

4 Prospettive teoriche di indagine

Questa ricerca si inserisce all'interno di una prospettiva sociocostruttivista in cui le funzioni cognitive si formano in relazione al contesto e sono descritte come prodotti di interazioni sociali e, quindi, strettamente connesse ad esse. Il processo di apprendimento non può essere separato dal contesto interattivo in cui si inserisce, definito sulla base di tre componenti: gli studenti, l'insegnante e il sapere (Chevallard, 1985). In quest'ottica interazionista, per indagare le cause del fenomeno emerso dalle analisi in oggetto, una buona chiave di lettura è data dal costrutto di contratto didattico nel senso di Brousseau (Brousseau, 1990; EMS-EC, 2012). Questo costrutto, ampiamente considerato come fondazionale della didattica della matematica, risulta condiviso a livello internazionale (Sarrazy, 1995), e si presta ad interpretare molteplici situazioni d'aula in cui sono coinvolti tutti e tre gli attori della situazione didattica (Brousseau, 1997). Come mostrano alcune ricerche a diffusione internazionale (si veda, a titolo di esempio, Ferretti & Bolondi, 2019), questo costrutto offre possibili chiavi di lettura e ipotesi interpretative anche a fenomeni emersi in sede di valutazione standardizzata. L'introduzione di questo costrutto è avvenuta grazie agli studi di Brousseau del 1976, nei quali si indagavano le cause del fallimento elettivo in matematica. Il contratto didattico è definito come l'insieme dei comportamenti dell'insegnante attesi dallo studente e l'insieme dei comportamenti dello studente attesi dall'insegnante (Brousseau, 1980). Per comprendere a fondo questa idea non si può prescindere dall'approccio sistemico che ha condotto la sua definizione, approccio fortemente influenzato dalla dimensione socio-cognitiva in cui si inserisce (Sarrazy, 1995). Il contratto didattico regola, manifestandosi con diverse sfaccettature e coinvolgendo i tre attori della situazione didattica coinvolti, le attività didattiche che si instaurano in aula e ha inevitabilmente delle ricadute sul processo di apprendimento degli studenti. Le norme e le clausole determinate dal contratto didattico regolano le pratiche didattiche; pur essendo spesso implicite, vengono fortemente interiorizzate, influenzando il processo di insegnamento/apprendimento. Queste influenze non sono necessariamente negative; certo è che, quando lo sono, possono avere significative ricadute in termini di insegnamento/apprendimento. Nonostante questo costrutto nasca per inquadrare fenomeni didattici emersi in ambito di scuola primaria, diversi studi hanno evidenziato la sua rilevanza anche per interpretare fe-

nomeni in livelli scolastici superiori (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010; De Vleeschouwer & Gueudet, 2011) e in situazioni di valutazione su larga scala (Ferretti et al., 2018).

Come già esplicitato, il focus dei quesiti oggetto di questo articolo riguarda la comprensione e la risoluzione di situazioni problematiche in sede di valutazione standardizzata. In questa direzione, una definizione che offre basi e categorie per possibilità interpretative è la definizione di *literacy* matematica presente nel quadro di riferimento delle valutazioni standardizzate OCSE-PISA, definita come:

«la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la Matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la Matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo».

(OECD, 2013, p. 25)

La figura seguente (Figura 1) mostra una panoramica dei principali elementi del ciclo della matematizzazione dell'attuale quadro di riferimento OECD-PISA e indica le relazioni esistenti tra essi.

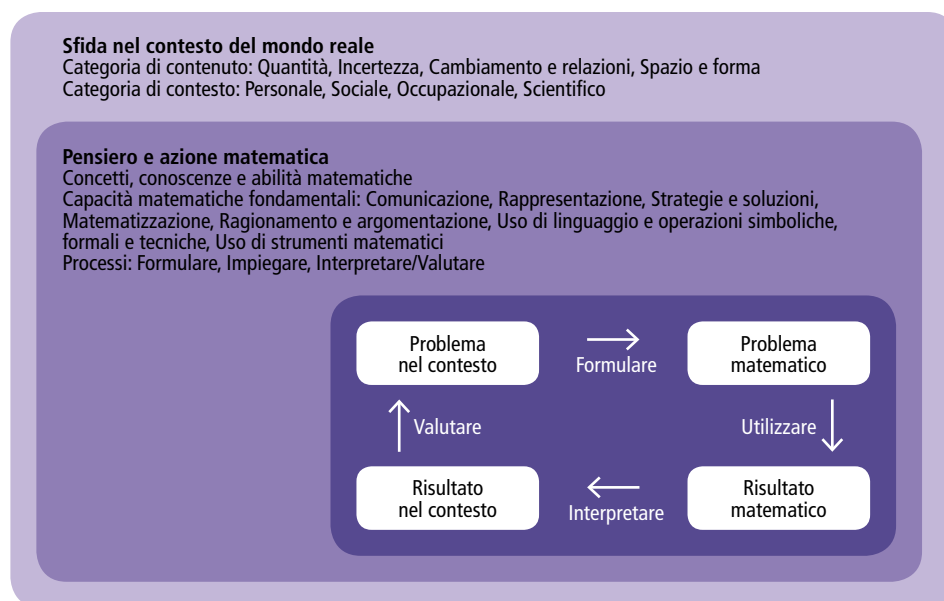


Figura 1
Il ciclo della matematizzazione (OECD, 2013, p. 26).


Il ciclo della matematizzazione comprende due processi di *matematizzazione orizzontale* che vengono definiti come il processo di *formulare* e quello di *interpretare*, e due processi di matematizzazione verticale che vengono definiti come *utilizzare* e *valutare*. Seguendo la definizione di *literacy* matematica, i primi tre verbi sopracitati si riferiscono ai processi in cui sono impegnati gli studenti durante la risoluzione di problemi. In particolare, nella fase *formulare* lo studente parte da una situazione così come si presenta nel contesto reale e la trasforma in una forma trattabile utilizzando un modello matematico (ad esempio un'equazione, una funzione, un grafico ecc.). Nella fase *utilizzare*, lo studente lavora sul modello matematico utilizzando

ragionamenti matematici, concetti e procedure, eseguendo calcoli, manipolando espressioni algebriche, equazioni o altri modelli. Nella fase *interpretare* lo studente riflette sulle soluzioni matematiche che ha trovato e interpreta i risultati nel contesto della situazione problematica. Per fare ciò deve saper valutare i processi, le soluzioni e le argomentazioni ed essere in grado di determinare se e quanto i risultati siano ragionevoli in quel contesto. Come vedremo dall'analisi seguente, il ciclo della matematizzazione fornisce una buona chiave di lettura per diversi fenomeni emersi dalle prove standardizzate (si veda ad esempio Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2017): anche in questa ricerca, i *question intent* delle domande e le risposte degli studenti si "posizionano" nelle diverse fasi del ciclo della matematizzazione e mettono in luce difficoltà specifiche in relazione ad esse.

5 Un esempio dalle prove INVALSI cartacee

La seguente domanda (Figura 2) è stata somministrata nell'anno 2016 a livello nazionale a tutti gli studenti italiani frequentanti la classe quinta della scuola primaria. Il campione è di 553'659 studenti.

D18. Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.



**In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.
Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?**

A. 6
B. 7
C. 6,2
D. 10

Figura 2
Quesito 18, Prova INVALSI
2016, Grado 05.

Nel testo del quesito viene presentato un contesto con il supporto di una rappresentazione grafica. Poiché ciascun camion trasporta 10 automobili, il numero necessario di camion per trasportare 62 automobili è 7; il quesito si ispira ai risultati di una ricerca effettuata da Schoenfeld (1987). In questa ricerca condotta negli Stati Uniti il ricercatore sottopose un problema simile a quello indagato in questa sezione e giun-

se alla conclusione che pochissimi studenti “osano” scrivere qualche cosa di diverso da quello ottenuto formalmente dall’operazione, rileggendo quindi il senso della domanda. Tale problema è stato poi ripreso in seguito da D’Amore e Martini (1997) che hanno analizzato nuovamente la situazione, somministrando la prova a diversi livelli scolastici e lasciando liberi gli studenti di scegliere se utilizzare la calcolatrice. I risultati hanno mostrato che anche con variabili didattiche diverse la situazione non cambia, anzi peggiora.

Vediamo ora cosa accade nel quesito proposto nel 2016.

Il grafico seguente (Figura 3), mostra le percentuali di risposte corrette, mancate e non valide a livello nazionale e le percentuali di scelta di ciascuna opzione di risposta.

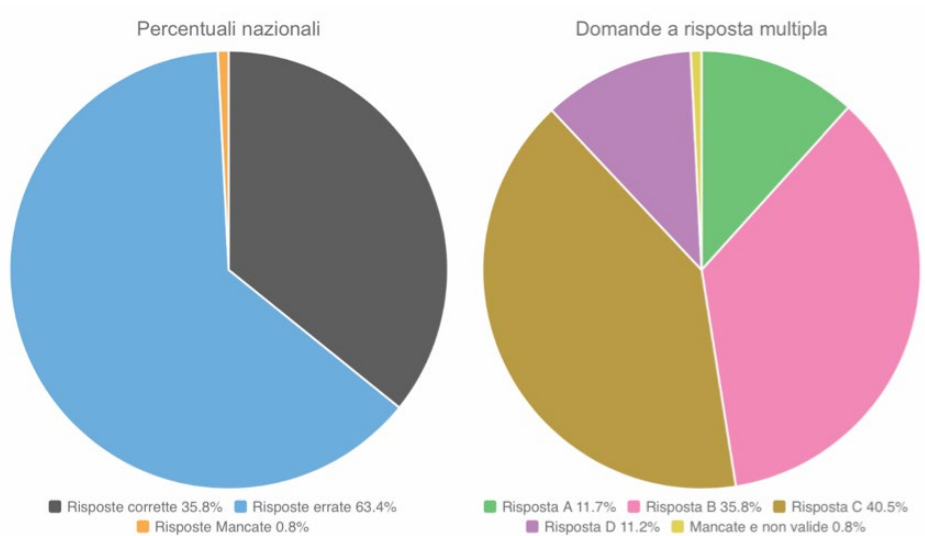


Figura 3
Percentuali nazionali in riferimento al Quesito 18, Prova INVALSI 2016, Grado 05.⁶

6

Come si evince dalle percentuali dal grafico soprastante, il 35,8% degli allievi ha fornito la risposta corretta. Le percentuali di risposte mancate e non valide sono molto basse e non raggiungono l’1%. Quasi i due terzi dei bambini che hanno sbagliato, più del 40% del totale, ha scelto l’opzione C. La risposta contenuta nell’opzione C è 6,2, cioè il numero ottenuto dalla divisione di 62 (il numero di automobili) per 10 (il numero di camion). In riferimento al ciclo della matematizzazione, questa risposta si posiziona nel lato *interpretare*; infatti, si può ipotizzare che gli studenti che scelgono la risposta 6,2 abbiano “formulato” correttamente la situazione in termini matematici e “utilizzato” correttamente i dati, eseguendo in modo corretto l’operazione matematica. La difficoltà risiede nell’interpretazione e nella validazione del dato ottenuto nel contesto della situazione proposta; come mostra la letteratura, queste fasi, proprie del processo di risoluzione dei problemi, risultano spesso assenti nei procedimenti risolutivi messi in atto dagli studenti. Tale comportamento mette in evidenza come il fenomeno messo in luce da Schoenfeld fin dal 1987 tramite un problema analogo, sia ancora presente e assai diffuso attualmente. Sembra ancora che lo studente non si senta autorizzato a scrivere qualche cosa che non appare

6. I dati sono ricavati dal sito www.gestinv.it. GESTINV è il database delle prove INVALSI che contiene tutte le domande delle prove INVALSI dal 2008; dentro al database è possibile effettuare ricerche per diversi parametri quali ambito di contenuto, parole chiave, riferimenti alle Indicazioni Nazionali, percentuali di risposte corrette, sbagliate e mancanti, parametri statistici.

nei calcoli eseguiti e non controlli semanticamente la coerenza del risultato con la domanda. La causa di questo comportamento viene riletta come una clausola di contratto didattico, chiamata *delega formale*, definita nel modo seguente:

«Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di *delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che [...] disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico».

(D'Amore, 2002, p. 6)

Come si evince dai risultati delle prove INVALSI, l'interpretazione e la validazione dei risultati ottenuti da calcoli o procedure costituisce una mancanza ancora assai generalizzata nelle risoluzioni da parte degli studenti; il contratto didattico potrebbe essere ancora una delle cause delle difficoltà da parte degli allievi di mobilitare tali processi nella risoluzione dei problemi.

Nel paragrafo seguente analizzeremo le difficoltà degli studenti al termine della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado nello svolgere task di matematica somministrati in modalità CBT.

6 Un esempio dalle prove INVALSI CBT

Il seguente quesito è stato somministrato nell'anno 2017 a livello nazionale agli studenti frequentanti la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado durante la prova INVALSI. Il testo del quesito in oggetto è rappresentato nella figura seguente (Figura 4). Il campione statistico di riferimento è di oltre 16'000 studenti.

Domanda

Anna ha speso:

- presso un'edicola un quinto del denaro con cui è uscita da casa,
- in cartoleria la metà del denaro rimanente.

Dopo i due acquisti le sono rimasti 20€.

Domanda 1/2

Qual è la quantità di denaro con cui Anna è uscita da casa?

Digita la risposta alla domanda.

Risposta: €

Figura 4
Quesito CBT, Prova
INVALSI 2017, Grado 10.

Per rispondere a questa domanda gli allievi devono utilizzare conoscenze di base (frazioni, percentuali) oppure individuare un'equazione che consenta di risolvere il problema collegando fra loro le informazioni presenti nel testo e la loro rappresentazione linguistica (in particolare interpretando la frase "la metà del denaro rimanente"). La risposta corretta è 50. La Tabella 1 riporta i risultati in riferimento al campione statistico.

Tabella 1
Numero e percentuali di risposte del campione nazionale al quesito della prova INVALSI CBT 2017, Grado 10.

Risposte corrette	6459	39,2%
Risposte errate	8639	52,4%
Risposte mancate	1391	8,4%

Come esplicitato nell'analisi condotta in Ferretti, Gambini e Tiralongo (in press), i principali errori riscontrati a livello nazionale possono essere raggruppati in due categorie, che a loro volta possono essere riconducibili a due principali strategie risolutive:

- impostare e risolvere un'equazione;
- partire dal risultato e ripercorrere all'indietro il procedimento.

Dall'analisi delle risposte emerge come alcuni studenti (poco meno di 800, circa il 5% del totale) abbiano incontrato difficoltà a impostare l'equazione, mentre altri (circa il 3%) abbiano impostato correttamente l'equazione, sbagliando poi la risoluzione. Inquadrandolo le difficoltà nel ciclo della matematizzazione dell'OECD-PISA, nel primo caso l'errore si posiziona nel lato *formulare*, in quanto l'errore rilevato si può ricondurre a una difficoltà nella formulazione in termini matematici della situazione proposta, mentre nel secondo caso l'errore si posiziona nel lato *utilizzare*, in quanto si riferisce a difficoltà correlate alla risoluzione della procedura scelta (OECD-PISA, 2013).

Analizzando nel dettaglio le percentuali di risposte errate più frequenti, osserviamo che le principali difficoltà sono riconducibili ad altri fattori. Esaminiamo nel dettaglio le tre risposte errate più frequenti.

- 2342 studenti, ossia il 14,2% sul totale (27,1% di coloro che sbagliano) rispondono 200. Questa risposta è stata la risposta errata più frequente. Possiamo ipotizzare che gli studenti siano partiti dall'unico dato numerico in loro possesso, cioè 20 euro, lo abbiano moltiplicato per 5 e poi ancora per 2 (oppure prima per 2 e poi per 5) ottenendo 200.
- 670 studenti, ossia il 4,1% sul totale (7,8% di coloro che sbagliano) rispondono 100. Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 5 (o viceversa).
- 525 studenti, ossia il 3,2% sul totale (6,1% di coloro che sbagliano) rispondono 40. Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 2 (o viceversa).

Per quanto riguarda le risposte errate, si registrano in molti casi numeri che molto probabilmente derivano da procedure e operazioni effettuate combinando i numeri presenti nel testo del quesito. Anche in questo caso, una buona chiave di lettura delle difficoltà emerse da questo item può essere il costruito di contratto didattico: lo studente pensa che per rispondere debba utilizzare (in qualche modo) esattamente i

numeri del problema, senza preoccuparsi del ruolo che questi hanno all'interno del problema. Nello specifico, l'eseguire operazioni con i numeri a disposizione all'interno della situazione matematica si riconduce al noto effetto di contratto didattico "età del capitano" con cui si designa «la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica» (D'Amore, 2007, p. 3).

Possiamo infine notare che la risposta 40 (come tutte quelle che portano a un risultato inferiore a 40) è assurda rispetto al contesto, perché 40 erano gli euro rimasti dopo la prima spesa, quindi uscendo di casa Anna ne aveva sicuramente di più. In questo caso lo studente potrebbe non essersi preoccupato di verificare la verosimiglianza del risultato; in tal caso le difficoltà rilevate si posizionano ancora una volta sul lato *interpretare* del ciclo della matematizzazione. Gli studenti si affidano completamente al risultato del calcolo che hanno eseguito; si è ancora di fronte a ciò che viene inquadrato come una delle conseguenze dell'instaurarsi della clausola di *delega formale* (D'Amore, 2008) del contratto didattico.

7 Conclusioni

Abbracciando la visione epistemologica dell'errore di Enriques (Giovannini, 1942), l'errore è parte integrante del processo di insegnamento/apprendimento e dovrebbe diventare un elemento essenziale per permettere il superamento delle difficoltà che si frappongono all'apprendimento. Per far sì che ciò accada, è fondamentale analizzare in profondità le difficoltà emerse e ricercare le cause scatenanti gli errori. Le riflessioni presentate in questo contributo, offrono delle possibili chiavi di lettura di difficoltà emerse concernenti la risoluzione di task matematici in verticale in diversi livelli scolastici a livello nazionale. Se da un lato le diverse fasi del ciclo della matematizzazione offrono categorie di analisi che permettono di "posizionare" le difficoltà rilevate sui diversi processi messi in atto nella risoluzione di una situazione proposta all'interno di un contesto, dall'altro, alcune lenti teoriche di didattica della matematica permettono di interpretare gli errori commessi in termini di atteggiamenti legati alla concezione della matematica e ad abitudini e ripetizioni di modalità risolutive.

Nello specifico, se da un lato abbiamo avuto una quantificazione e una misurazione su larga scala di fenomeni già studiati in letteratura inquadrabili con il contratto didattico, dall'altro abbiamo nuove rilevazioni. Infatti, per quanto riguarda il quesito a risposta multipla somministrato in modalità cartacea, l'informazione interessante non è data tanto dalla bassa percentuale di risposte corrette (e quindi di scelta dell'opzione B), ma dal fatto che il 40% degli studenti che hanno svolto il test, cioè più di 220 mila studenti distribuiti sul territorio nazionale, abbia scelto l'opzione C: un errore inquadrabile secondo la letteratura con il costrutto di contratto didattico (D'Amore & Martini, 1997). Riconducibili allo stesso costrutto teorico sono anche gli errori effettuati dagli studenti della scuola secondaria di secondo grado al quesito somministrato in modalità CBT. Avendo a disposizione i dati della correzione centralizzata, si sono analizzate le risposte aperte fornite dagli studenti a livello nazionale. L'analisi combinata di testi e risultati di domande delle prove INVALSI a risposta chiusa permette di indagare non solo la percentuale di risposte corrette o

sbagliate, ma anche di quantificare gli studenti che a livello nazionale scelgono o meno un'opzione sbagliata piuttosto che un'altra. Infatti, se le basse percentuali di scelta dell'opzione corretta permettono di quantificare la presenza di una difficoltà a livello nazionale, le percentuali di scelta delle opzioni errate forniscono feedback preziosi sulle tipologie dell'errore dello studente. Per quanto riguarda le prove CBT, avere a disposizione le risposte fornite dagli studenti alle domande a risposta aperta a livello nazionale fornisce una grande quantità di dati che può fornire informazioni utili in diverse direzioni. Ricerche e studi su questi dati possono essere utilizzati dai diversi stakeholder delle istituzioni scolastiche in modo efficace per migliorare i processi di insegnamento-apprendimento. Una delle fasi fondamentali della valutazione formativa in matematica è il *formative feedback* (Black & Wiliam, 1998), che, tra le altre cose, prevede di restituire un feedback anche all'insegnante, in modo tale che possa adeguare il percorso di insegnamento. Il fatto che la maggior parte delle risposte fornite dagli studenti a determinati quesiti siano affette dal contratto didattico, fornisce piste di indagini preziose; d'altra parte, l'analisi delle risposte fornite da così tanti studenti inquadra le difficoltà più diffuse nel processo di apprendimento. Il contratto didattico permea le situazioni didattiche e, quindi, anche le pratiche valutative.

Bibliografia

- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74.
- Bolondi, G. (2018). Valutare l'apprendimento della Geometria in un contesto tecnologico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 41(6), 681-690.
- Bolondi, G., Cascella, C., & Giberti, C. (2017). Highlights on gender gap from Italian standardized assessment in mathematics. In J. Novotná & H. Moravá (Eds.), *Diversity in Mathematics Education. Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '17*. Praga: Univerzita Karlova.
- Bolondi, G., Ferretti, F., & Giberti, C. (2018). Didactic contract as a key to interpreting gender differences in maths. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies*, 18, 415-435.
- Botta, E., & Lasorsa, C. (2017). La migrazione delle prove INVALSI di Matematica da PPT a CBT. Uno studio sulle prove di pre-test per la II superiore. *Italian Journal of Educational Research*, 19, 103-120.
- Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laringologie otologie rinologie*, 101(3-4), 107-131.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol. 9/3. Grenoble: La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.

- D'Amore, B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città*, 4, 56-82.
- D'Amore, B. (2007). La didattica della matematica, oggi. In I. Marazzani (A cura di), *La matematica e la sua didattica. Atti del I Convegno Nazionale* (pp. 18-24). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2008). Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices. *Mediterranean Journal of Research in Mathematics Education*, 7(1), 1-22.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarraza, B. (2010). *Didattica della matematica alcuni effetti del "contratto"*. Bologna: Archetipo Libri.
- De Lange, J. (2007). Large-Scale Assessment and Mathematics Education. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1111-1142). Charlotte: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- De Vleeschouwer, M., & Gueudet, G. (2011). Secondary-Tertiary transition and evolutions of didactic contract: the example of duality in Linear Algebra. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of CERME 7*, (pp. 1359-1368). Poland: Univ. Of Rzeszów.
- EMS-EC (Education Committee of the EMS). (2012). What are the Reciprocal Expectations between Teacher and Students? Solid Findings in Mathematics Education on Didactical Contract. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 84, 53-55.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.
- Ferretti, F., & Bolondi, G. (2019). This cannot be the result! The didactic phenomenon 'the age of the earth'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-14.
- Ferretti, F., Gambini, A., & Tiralongo, S. (in press). *Gli errori degli studenti in matematica: un'analisi delle risposte alle prove INVALSI di Grado 10*. In P. Falzetti (A cura di), "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca". Milano: FrancoAngeli.
- Ferretti, F., Giberti, C., & Lemmo, A. (2018). The Didactic Contract to Interpret Some Statistical Evidence in Mathematics Standardized Assessment Tests. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14 (7), 2895-2906. <https://doi.org/10.29333/ejmste/90988>
- Ferretti, F., & Vannini, I. (2017). Videoanalysis and Math teachers' training. First results of a pilot course on formative assessment. *Form@re - Open Journal Per La Formazione in Rete*, 17(1), 99-119.
- Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione, *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 38 – 63.
- Giovannini, A., (Enriques F.) (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, 4(22), 57-65.
- INVALSI (2018). Quadro di riferimento delle prove di INVALSI matematica. Disponibile in: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf (consultato il 13.02.2020).
- MIUR (2007). Gli assi culturali. Disponibile in: https://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/all1_dm139new.pdf (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2010a). *Indicazioni nazionali per i licei*. Rome: Author. Disponibile in: http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/decreto_indicazioni_nazionali.pdf (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2010b). Linee guida per il passaggio al nuovo orientamento. Istituti tecnici. Rome: Author. Disponibile in: http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC_GUIDA_TECNICI_.pdf (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2010c). Linee guida per il passaggio al nuovo orientamento. Istituti professionali. Rome: Author. Disponibile in: http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida/LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. Rome: Author.

OECD (2013). *PISA 2012 - Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing. *PISA 2012, Quadro di Riferimento analitico per la Matematica, la Lettura, le Scienze, il Problem Solving e la Financial Literacy*. Disponibile in: <https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf> (consultato il 13.02.2020).

Pozio, S., & Bolondi, G. (2019). Difficulties in algebraically formulating a geometric situation: data from a large-scale assessment. *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Pretoria, South Africa: PME.

Sarraza, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*, 112. 85-118. [Tr. it: La matematica e la sua didattica, 2, 1998, 132-175].

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Locarno: Dipartimento Formazione e Apprendimento. Disponibile in: https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca_educativa/2014-Valutazione_didattica_delle_prova_standardizzate_di_matematica_della_quarta.pdf (consultato il 13.02.2020).

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp. 189-215). Londra: Lawrence Erlbaum Ass.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. In R. E. Tyler, R. M. Gagnè & M. Scriven (Eds.), *Perspective of curriculum evaluation*. Chicago: AERA Monograph Series in Education.

Vannini, I. (2009). *La Qualità nella didattica*. Trento: Erickson.

Vertecchi, B. (1976). *Valutazione formativa*. Torino: Loescher.

Autrice/Federica Ferretti

Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano – Italia

federica.ferretti@unibz.it

Un percorso formativo alla comprensione del testo matematico, dai 5 ai 14 anni

Training reading comprehension skills for successfully solving mathematical word problems, from 5 to 14 years

Roberto Trincherò e Susanna Piacenza¹

Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli studi di Torino – Italia

1

Sunto / L'articolo presenta un percorso formativo (liberamente fruibile su www.edurete.org/training) focalizzato su comprensione del testo e risoluzione di problemi, volto ad aiutare gli insegnanti (non solo di matematica) a lavorare in modo sistematico sulla comprensione degli aspetti logico-matematici presenti in vari tipi di testi, inclusi quelli scientifici e quelli narrativi. Il percorso formativo offre agli insegnanti di allievi dai 5 ai 14 anni nove curricula completi di 12 attività; ogni curriculum serve a lavorare su numerosi aspetti legati alla comprensione del problema e alla ricerca della soluzione. L'articolo presenta inoltre i risultati di una sperimentazione pilota condotta su circa 200 allievi appartenenti a 10 classi della scuola primaria, che è servita per mettere a punto e calibrare il percorso. I risultati sembrano essere incoraggianti, con incrementi significativi sia sulle prove standardizzate di comprensione del testo, sia su prove più specifiche inerenti l'ambito logico-matematico.

Parole chiave: training cognitivo; comprensione del testo; problem solving; didattica della matematica; comprensione dei problemi matematici.

Abstract / The article presents a training course (freely accessible on www.edurete.org/training) focused on reading comprehension and problem solving, aimed at helping teachers (not only of mathematics) to work systematically on understanding the logical-mathematical aspects present in various types of texts, including scientific and narrative ones. The training offers to teachers (of students from 5 to 14 years old) nine complete curricula, each with 12 activities, to work on numerous aspects related to understanding mathematical problems and finding solutions. The article also presents the results of a pilot experimentation conducted on about 200 students belonging to 10 primary school classes, which served to fine-tune and calibrate the course. The results seem to be encouraging, with significant increases both on standardized comprehension tests and logical-mathematical tests.

Keywords: cognitive training; reading comprehension; problem solving; mathematics teaching; understanding word problems.

1 Introduzione

Indovinello cinese: *Su un battello ci sono 36 pecore. 10 muoiono affogate.*

Quanti anni ha il capitano?

Soluzione: *In Cina per avere la patente nautica bisogna avere 23 anni e altri cinque per poter condurre un cargo. Quindi il capitano che trasporta capre e pecore deve avere almeno 28 anni.*

<https://www.skuela.net/news/fun/indovinello-cinese-impossibile.html>

1. Il lavoro è frutto di una riflessione comune tra i due autori, ma con responsabilità divise: i paragrafi 1, 2, 3, 4 e 6 sono di Roberto Trincherò, il paragrafo 5 è di Susanna Piacenza.

Come ben illustrato dall'indovinello cinese citato in epitaffio, i problemi matematici rintracciabili sui libri di testo seguono spesso copioni non scritti che ne guidano implicitamente l'interpretazione. Il problema "dell'età del capitano" riaffiora in tempi differenti in forme differenti (Zan, 2016, pp. 10-12) e produce risposte variegata, tutte accomunate dal fatto che gli allievi usano i due numeri a disposizione combinandoli in vario modo (sommandoli, sottraendoli ecc.), ma sempre in modo del tutto legato dalla vera natura del problema, che non si risolve con un calcolo sui dati a disposizione ma con un ragionamento che coinvolge anche informazioni esterne. Il modo di *interpretare* il problema, ossia di assegnarvi significato, è importante almeno quanto il modo di risolverlo, e questo assunto è ormai consolidato nella letteratura internazionale (Auzar, 2018; Björn, Aunola & Nurmi, 2008; Boonen, de Koning, Jolles & Van der Schoot; 2016; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016; Demartini & Sbaragli, 2019; Fatmanissa, 2019; Fornara & Sbaragli, 2013, 2017; Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2017; Fuchs, Fuchs, Compton, Hamlett & Wang, 2015; Fuchs, Gilbert, Fuchs, Seethaler & Martin, 2018; Laurito, Duallo & Pecajas, 2016; MacDonald & Banes, 2017; Nicolas & Ematab, 2018; Orosco & Abdulrahim, 2018; Salihu, Aro & Räsänen, 2018; Ulu, 2017). Gli insegnanti dovrebbero quindi lavorare in modo sistematico su questo aspetto che, oltre ad essere determinante per il successo scolastico degli allievi, diventa indispensabile per favorire la trasferibilità di quanto appreso alla vita quotidiana e per sviluppare la capacità degli allievi di risolvere problemi nuovi, partendo dalla piena comprensione del problema per arrivare poi alla soluzione e alla riflessione argomentativa su come il problema è stato compreso e poi affrontato. In quest'articolo presenteremo un percorso formativo focalizzato su comprensione del testo e risoluzione di problemi, volto proprio ad aiutare gli insegnanti a lavorare in modo sistematico sulla comprensione degli aspetti matematici presenti in vari tipi di testi. Illustreremo anche i risultati di una sperimentazione pilota condotta su circa 200 allievi appartenenti a 10 classi (5 sperimentali e 5 di controllo) della scuola primaria² "G. Pacchiotti" di Torino.

2

2 L'importanza della comprensione degli aspetti matematici presenti in un testo

L'attività di risoluzione di problemi – non solo matematici – è particolarmente importante nella formazione scolastica perché direttamente legata allo sviluppo di una pluralità di processi cognitivi (si vedano ad esempio Anderson & Krathwohl, 2001). Secondo Mayer (1998), la risoluzione di problemi prevede due fasi: a) *codifica del problema*, con le sottofasi della traduzione e della comprensione; b) *ricerca della soluzione*, con le sottofasi della pianificazione e del calcolo. Ciascuna di queste fasi coinvolge numerosi processi cognitivi. Nella fase di *traduzione* questi coinvolgono una conoscenza di tipo linguistico e semantico, la quale consente di attribuire il giusto significato prima alle singole parole e poi alle singole frasi. Nella fase di *comprensione* viene coinvolta una conoscenza di tipo schematico, che consente di integrare in maniera coerente le singole informazioni acquisite nella fase precedente. Nella fase di *pianificazione* viene coinvolta una conoscenza di tipo strategico, allo scopo

2. La scuola primaria in Italia corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

di stabilire un piano di soluzione e monitorarne l'applicazione. Nella fase di *calcolo* viene coinvolta una conoscenza di tipo algoritmico, che consente di applicare procedure di calcolo opportune per giungere alla soluzione.

Lucangeli, Tressoldi e Cendron (1998) hanno invece proposto un modello basato su cinque fasi, dalle quali partiamo per impostare questo lavoro: *comprensione* (decodifica dell'informazione e assegnazione di significato a singoli termini e frasi), *rappresentazione* (costruzione di un modello mentale del problema, mettendo in relazione e integrando le informazioni a disposizione), *categorizzazione* (riconoscere la struttura profonda del problema associandolo a modelli noti, in modo da definire anche le operazioni necessarie per risolverlo), *pianificazione* (elaborare un piano d'azione e tradurlo in una sequenza di operazioni che portano alla soluzione) e *autovalutazione* (riflettere sul proprio operato per controllarne l'adeguatezza agli obiettivi).

Le difficoltà nella risoluzione dei problemi possono intervenire in ciascuno dei livelli descritti, ma la fase della comprensione è ovviamente sovraordinata alle fasi successive (Demartini & Sbaragli, 2019). Per questo, comprendere correttamente il testo di un problema è parte integrante del problema stesso. Carenze nella capacità di analizzare correttamente un testo e di assegnarvi il giusto significato portano a prendere vie errate per la pianificazione e il calcolo. Interpretazioni errate o parziali dei problemi si manifestano con difficoltà nel risolverli, sia all'interno dell'attività scolastica ordinaria, sia nelle prove standardizzate nazionali e internazionali (es. OCSE-PISA), sia nella vita quotidiana. Questo si verifica anche laddove il soggetto sia dotato di tutti gli strumenti concettuali necessari per la pianificazione e il calcolo, con l'effetto di avere soggetti che producono ottime prestazioni in problemi "pre-interpretati" (ad esempio dove è il docente o il problema stesso a spiegarli esattamente ciò che deve fare), ma pessime di fronte a problemi anche banali ma mai affrontati prima in quella forma. Questa discrasia tra ciò che si sa fare di fronte ad un problema pre-interpretato e ciò che si sa fare di fronte ad un problema da interpretare in modo autonomo può contribuire ad alimentare quel "senso di inefficacia" in matematica che caratterizza molti studenti e adulti (Zan, 2016, p. 32) e che porta con il tempo ad un senso di rifiuto verso la disciplina.

Acquisire consapevolezza del ruolo che la comprensione del problema riveste nella risoluzione del problema stesso ha diverse implicazioni. Anzitutto, problemi risolvibili con la stessa struttura algebrica ma con differenti formulazioni verbali determinano diversi livelli di difficoltà, e questo accade soprattutto nella scuola primaria (Zan, 2016, pp. 140-142).

In secondo luogo, una didattica che sceglie di non lavorare sulla comprensione può tendere ad occultare le difficoltà "addestrando" gli studenti a risolvere solo problemi standardizzati (es. struttura del problema sempre uguale, cambiano solo i numeri corrispondenti ai dati) o pre-interpretati (es. la pagina del testo che li contiene si intitola "Problemi con le sottrazioni", quindi non ci vuole un grande sforzo per capire cosa bisogna fare per risolverli...). L'abitudine ad affrontare questi problemi genera stereotipi interpretativi che si rafforzano nel tempo (es. «Il testo del problema contiene tutti e solo i dati necessari per la soluzione», «I dati hanno sempre forma numerica», «Una soluzione esiste sempre ed è unica», «Vi sono parole chiave nel problema che suggeriscono le operazioni da svolgere» ecc., si veda Zan, 2016, p. 25). L'effetto è quello di orientare gli allievi verso una lettura selettiva del testo alla ricerca di dati numerici e di parole chiave o espressioni verbali che suggeriscano come combinarli. Gli allievi non si focalizzano su una corretta *rappresentazione* della situazione descritta dal problema, che richiede uno sforzo immaginativo e la ricostruzione

di particolari a volte non pienamente definiti, ma su un'*estrapolazione arbitraria di informazioni dal contesto*. Se la forma del problema lo fa sembrare un problema risolvibile applicando un dato stereotipo, gli allievi lo rappresentano secondo quello stereotipo a prescindere dal contenuto, come accade nell'indovinello cinese.

Ancor più radicati sono gli stereotipi su tipologie testuali e separazione disciplinare (es. «Un testo narrativo è un testo di Letteratura, quindi non può essere affrontato con gli strumenti concettuali della Matematica, e la stessa cosa vale per un testo storico-argomentativo o architettonico-descrittivo»). Ad un esame approfondito è facile vedere come tutte queste separazioni siano arbitrarie. Aspetti matematici sono infatti presenti in tutti i testi: si pensi ad esempio, in una narrazione, al numero delle ripetizioni di eventi (che rimanda al concetto di distribuzione di frequenza), alla sequenza in cui si verificano (che rimanda al concetto di algoritmo), alla connessione tra eventi (che rimanda ai concetti di co-occorrenza, co-variazione e rapporto causa-effetto). *Non ha senso quindi in un testo separare la comprensione degli asserti generali dalla comprensione degli asserti strettamente matematici*. L'effetto della separazione è da un lato quello di abituare lo studente a testi "matematici" con problemi stereotipati, in cui tutte le informazioni non funzionali alla risoluzione del problema vengono espunte, e dall'altro quello di giustificare il fatto che lo studente non riconosca i più elementari concetti matematici in testi narrativi, descrittivi, argomentativi, solo perché questi testi non vengono etichettati nella mente dello studente come testi "matematici" (si veda anche Fornara & Sbaragli, 2013).

L'abitudine a risolvere problemi stereotipati rafforza nello studente l'idea che solo i problemi posti nella forma "giusta", riconoscibile, siano ben formulati. Gli altri, come quelli dell'età del capitano, vengono etichettati come problemi assurdi, "domande trabocchetto", esercizi stilistici di docenti sadici, inutili complicazioni che obbligano a congetturare, ipotizzare, ragionare, laddove basterebbe applicare un semplice algoritmo noto e predefinito per giungere alla soluzione. Eppure la realtà al di fuori della scuola è fatta di problemi del secondo tipo, non del primo. Formare gli studenti a risolvere solo problemi arbitrariamente semplificati non li prepara per l'applicazione dei concetti matematici a problemi della vita reale. Molto meglio una formazione che insiste su problemi di complessità – anche interpretativa – crescente, in modo da consentire agli allievi di sviluppare appieno le capacità relative.

A tal proposito, il Framework PISA 2018 definisce – riprendendola dal Framework 2015 – la *literacy* in Matematica come:

«La capacità di un individuo di formulare, impiegare e interpretare la matematica in una varietà di contesti. Include ragionamenti matematici e utilizzo di concetti, procedure, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere i fenomeni. Aiuta le persone a riconoscere il ruolo che la matematica svolge nel mondo e ad esprimere i giudizi e le decisioni fondati necessari ai cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi».

(OECD, 2019, p. 51)

Costruire a scuola una *literacy* in matematica negli studenti significa quindi non solo insegnare loro dei concetti matematici, ma lavorare sulla loro capacità di: a) riconoscere concetti e strutture matematiche in una varietà di contesti e situazioni; b) collegare concetti matematici astratti a fenomeni concreti; c) produrre giudizi e decisioni inerenti situazioni date che utilizzino i concetti matematici estrapolati dalla situazione stessa. Aiutare i bambini fin dalla più tenera età a cogliere gli aspetti matematici delle si-

tuazioni che gli si presentano li aiuta a vedere il mondo con occhi diversi e fornisce loro gli strumenti per uno sguardo più attento e critico sulla realtà, incrementando la loro capacità di comprendere problematiche complesse. Questo ovviamente richiede attività didattiche realizzate ad hoc, calibrate sul livello che gli studenti hanno in quel momento (non troppo semplici per evitare di annoiarli, non fuori dalla loro portata per evitare di demotivarli). In questo percorso progressivo, la continuità e la coerenza degli interventi sono elementi essenziali per sviluppare e rendere durature le strategie necessarie per un corretto processo di decodifica, assegnazione di significato e rappresentazione del problema. Gli interventi estemporanei, inseriti qua e là in un curriculum basato più su contenuti che sullo sviluppo di processi di comprensione, non sviluppano un atteggiamento metodico da parte dell'allievo e lasciano lacune che possono portare a difficoltà non immediatamente visibili ma che emergono solo anni dopo, negli ordini di scuola successivi. Il mancato sviluppo di strategie adeguate di comprensione può portare a difficoltà nell'apprendimento di tutte le discipline e incidere quindi in modo non secondario nella genesi della demotivazione verso lo studio e dell'insuccesso scolastico (Fontani, 2017).

3 Spunti dalle ricerche sulla comprensione del testo in generale

Se valgono le considerazioni esposte in premessa, la comprensione del testo matematico è un'operazione che, seppur caratterizzata da specificità proprie, presenta elementi in comune con la comprensione del testo in generale e ne è parte costituente. La comprensione della lettura in generale si può intendere come la capacità di leggere e capire il messaggio contenuto all'interno di un testo (Cardarello & Pintus, 2019; Gentile, 2017). Nella comprensione del testo letto è necessario distinguere i processi di decodifica del testo da quelli di comprensione dei significati associati ad esso (Fontani, 2017). Se i deficit nella decodifica possono far riferimento a varie forme di dislessia (Zappaterra, 2012), i deficit di comprensione si manifestano quando un lettore, pur decodificando senza problemi lettere, parole e frasi, non è in grado di riferirne il significato o contestualizzarne gli eventi su sistemi di coordinate storico/geografiche (Miller, Davis, Gilbert, Cho, Toste, Street & Cutting, 2014).

Alla base delle difficoltà di comprensione può esserci un funzionamento non ottimale dei processi cognitivi ad essa sottesi. Tali processi sono stati studiati secondo diverse prospettive (Gentile, 2017). Una prospettiva enfatizza la sequenzialità tra la percezione degli stimoli visivi, la loro trasformazione in codice fonologico, il loro riconoscimento e la successiva identificazione dei significati associati a parole e frasi (Comoglio, 1992). Un'altra prospettiva (Rumelhart, 1977, 1984) si concentra soprattutto sui processi inferenziali: il lettore procede nel testo elaborando progressivamente ipotesi sui significati dei termini/frasi incontrati nel testo (e su ciò che verrà nel seguito) e controllandole man mano che decodifica nuove parole e frasi. L'estrazione di significato permette di corroborare l'ipotesi con cui il lettore si accosta al testo, e di specificarla ulteriormente, oppure di abbandonarla o riformularla se i nuovi significati la confutano. Così facendo il lettore costruisce uno schema concettuale, del tutto assimilabile ad una "teoria" che un ricercatore potrebbe costruire raccogliendo dati su un fenomeno, che egli affina man mano che esperisce il testo. L'ipotesi di partenza viene formulata sulla base delle conoscenze pregresse e delle aspettative che

il lettore ha sul testo e queste sono ovviamente influenzate dalle informazioni contestuali con cui il testo viene presentato. Una terza prospettiva (Bransford & Franks, 1972) enfatizza il processo di lettura-comprensione come un processo di astrazione del significato: il lettore non mantiene in memoria le singole lettere, parole o frasi contenute nel testo, ma il significato essenziale che esso esprime. Procedendo nella lettura i significati vengono man mano estratti e combinati tra di loro.

Le tre prospettive descritte suggeriscono che la lettura sia un processo attivo, che avviene secondo livelli differenti. Esiste un livello di decodifica visiva dei segni contenuti in un testo (Colpo & Pazzaglia, 1994), un livello di analisi semantica (Cacciò, De Beni & Pazzaglia, 1996), un livello di costruzione attiva di significati composti – che prevede operazioni di selezione e di inferenza – (De Beni, Cornoldi, Carretti & Meneghetti, 2003), un livello di integrazione tra questi e tra questi e le conoscenze precedenti (Kintsch & Van Dijk, 1978). Il risultato è costituito da rappresentazioni mentali del contenuto di un testo che, se rese stabili da conferme che si ripetono, possono diventare veri e propri “modelli mentali” (Pearson, 2009). Su questo processo di costruzione di rappresentazioni intervengono vincoli costituiti dalle funzioni esecutive del lettore (memoria di lavoro, controllo inibitorio di risposte inefficaci, flessibilità cognitiva; Diamond, 2013), dalle sue conoscenze pregresse (Tarchi, 2015), dai suoi scopi (che guidano processo di selezione e tempi dedicati al testo), dalla struttura del testo (reticolare/gerarchica), dalle facilitazioni contestuali proposte (organizzatori anticipati). Il processo di costruzione di rappresentazioni è più efficace se svolto con strategie precise, più che in modo estemporaneo (Gentile, 2017).

A partire dagli anni ottanta, numerosi studi (si vedano ad esempio Pazzaglia, De Beni & Cristante 1994; Garner, 1987) hanno sottolineato l'importanza della dimensione del *controllo* (o dimensione *metacognitiva*) per spiegare le performance ottenute dagli allievi nella comprensione di testi di vario tipo. In particolare le ricerche hanno sottolineato una stretta associazione della carenza nella comprensione dei testi letti con la carenza di conoscenze sull'utilizzo delle strategie metacognitive (Cornoldi, Mammarella & Goldenring, 2016; Spencer, Quinn & Wagner, 2014). La dimensione metacognitiva fa riferimento ad un lettore che non usa solo processi automatici (di decodifica, selezione, inferenza, elaborazione, integrazione), ma si avvale di strategie consapevoli per affrontare i testi e per controllare la propria comprensione («lettore strategico», Gentile, 2017).

La scoperta dell'importanza della dimensione metacognitiva ha numerose implicazioni didattiche. Anzitutto, porre l'attenzione sui processi strategici significa slegare, nell'immaginario di insegnanti e studenti, la capacità di comprensione dei testi dalla capacità di comprensione in generale (e quindi dall'intelligenza stessa) e dalla padronanza della lingua (e quindi da forme di svantaggio socio-culturale) (Cardarelli & Pintus, 2019). In secondo luogo insegnare strategie metacognitive all'allievo può orientarlo efficacemente nelle operazioni di formulazione e verifica di ipotesi sul significato del testo (Whitebread, Coltman, Pasternak, Sangster Joki, Grau, Bingham, Almeqdad & Demetriou, 2008; Haller, Child & Walberg, 1988). I principi-chiave sono tre: a) tutti possono comprendere un testo a patto che padroneggino strategie opportune; b) queste strategie si possono insegnare attraverso, ad esempio, l'uso sistematico del vocabolario, la verbalizzazione dei processi di pensiero, l'individuazione dei concetti e degli asserti principali presenti in un testo (Curwen, Miller, White-Smith & Calfee, 2010; Iwai, 2016; Edmonds, Vaughn, Wexler, Reutebuch, Cable, Tackett & Schnakenberg, 2009); c) interventi non estemporanei ma continuativi nel tempo possono rendere stabile l'uso di queste strategie (Castellana & Giacomantonio, 2018). Si può dimostrare che insegnare strategie esplicite di trattamento del testo, quali fare

previsioni, pensare ad alta voce, riassumere, analizzare la struttura dei testi, schematizzare informazioni testuali, formulare domande (Gentile, 2017), o potenziarne l'utilizzo per lo studio laddove il soggetto non le padroneggi pienamente, siano modi efficaci per promuovere le capacità strategiche del lettore e quindi migliorarne le performance di fronte a casi concreti. Altre strategie efficaci derivano dall'insegnare agli allievi a fare inferenze, dato che la carenza in questo aspetto è correlata positivamente alle difficoltà di comprensione della lettura (Cain, Barnes, Bryant & Oakhill, 2001). Strategie di questo tipo fanno riferimento al collegare elementi del testo apparentemente slegati, costruire autospiegazioni e trarre conclusioni da quanto letto (McNamara, 2004, 2017; Soto, de Blume, Jacovina, McNamara, Benson & Riffo, 2019). Tutte queste conclusioni sono confermate anche dalle meta-analisi di ricerche riguardanti le strategie efficaci di apprendimento (Fiorella & Mayer, 2015), nelle quali ovviamente saper estrarre significati da testi di studio è un elemento cruciale. Porre domande al lettore inframmezzandole alla lettura del testo è, ad esempio, un modo per costringere il lettore a riflettere sulla rappresentazione mentale da egli costruita nel leggere il testo e a tornare su di esso laddove si presentino lacune o ambiguità. Far riassumere al lettore il testo appena letto svolge la stessa funzione, dato che lo obbliga ad esplicitare gli elementi che gli sono chiari, a far emergere quelli non chiari e gli dà la possibilità di avere un feedback da parte dell'insegnante. In maniera analoga operano le richieste al lettore di costruire un'immagine mentale a partire dal testo letto, di rappresentarlo con un disegno, di tradurlo in schema grafico o mappa concettuale, di costruirne spiegazioni per se stesso e per altri, di collegarlo ad azioni motorie che lo rappresentino. In sintesi, un approccio metacognitivo al testo migliora le rappresentazioni mentali che i lettori costruiscono a partire dalle informazioni presenti in esso.

Laddove l'insuccesso collegato al deficit di comprensione può portare sfiducia nelle proprie capacità e demotivazione, il successo dovuto alla progressiva padronanza di strategie metacognitive può portare gli studenti ad aumentare il proprio senso di autoefficacia (De Beni & Pazzaglia, 1998): riconoscendo l'insuccesso come imputabile non alla propria carenza di abilità specifiche ma al mancato utilizzo di strategie adeguate, lo studente sarà portato a approfondire maggior impegno nell'utilizzo di tali strategie e collegherà il proprio successo a tale impegno.

I modelli di intervento volti ad applicare nella scuola i principi suddetti sono ovviamente molteplici.

L'utilizzo di percorsi formativi più o meno strutturati per l'apprendimento delle strategie metacognitive nel trattamento delle difficoltà di comprensione testuale rappresenta una opzione ormai consolidata nel contesto nazionale ed internazionale, come viene testimoniato dagli studi di meta-analisi (Dignath & Büttner, 2008; Dignath, Büttner & Langfeldt, 2008; Hattie, Biggs & Purdie, 1996; Hattie, 2009).

Sono disponibili numerosi percorsi di intervento scolastico sulla comprensione del testo (si vedano ad esempio Calvani & Chiappetta Cajola 2019; Cardarello & Lumbelli, 2018; Lucangeli, Iannelli, Franceschini, Bommassar & Marchi, 2010; Perticone, 2009; Tigoli & Freccero, 2012; De Beni et al., 2003). Da una rassegna di questi percorsi si evince come la strategia utilizzata sia in genere quella di far leggere un testo e di far rispondere agli allievi, secondo modalità e strutture differenti di organizzazione del lavoro, a determinate domande sul contenuto. L'**Allegato 1** presenta una rassegna di domande, utili sia per il monitoraggio della comprensione quanto come ausilio ad interventi per insegnare strategie di comprensione dei testi, tratte dagli approcci presentati nei lavori suddetti. Le domande sono organizzate secondo le dimensioni *Contenuto* (a sua volta organizzata nelle sottodimensioni: *Personaggi, luoghi, tempi e fatti, Fatti e sequenze*), *Elaborazione* (a sua volta organizzata nelle sottodimensio-

ni: *Struttura sintattica, Collegamenti, Inferenze lessicali e semantiche, Gerarchia del testo, Modelli mentali*); *Metacognizione* (a sua volta organizzata nelle sottodimensioni: *Sensibilità al testo, Flessibilità, Errori e incongruenze*). Tali dimensioni sono tratte dal modello di De Beni et al. (2003) e gli indicatori presenti in tale modello sono stati ampliati e specificati sulla base della rassegna della letteratura. Come è possibile vedere, le domande illustrate sono ampiamente applicabili anche alla lettura e comprensione di testi scientifico/matematici non banali, come ad esempio quelli proposti dalle indagini internazionali OECD-PISA.

Presenteremo nel paragrafo seguente un percorso formativo volto ad implementare i principi suddetti declinandoli su aspetti legati ai problemi matematici.

4 Il percorso formativo sulla comprensione del testo e risoluzione di problemi

Presenteremo in questo paragrafo un percorso formativo denominato *Training cognitivo su comprensione del testo, logica e risoluzione di problemi* (liberamente fruibile all'indirizzo web www.edurete.org/training) che lavora su un insieme di capacità di base inerenti la comprensione di testi orali e scritti, con particolare riferimento agli aspetti matematici presenti nei testi. Scopo del percorso è quello di sviluppare negli allievi strategie di lettura (e di studio) che li portino ad estrarre informazioni e significati dai testi che leggono, trarre conclusioni fondate a partire da tali premesse e analizzare problemi per distinguere dati e incognite e individuare i saperi necessari per risolverli.

4.1. Logica del percorso formativo

Il percorso formativo prevede attività su più livelli, dai 5 ai 14 anni, ed è volto a sviluppare un ampio ventaglio di capacità (vedere *Allegato 2*) e atteggiamenti (ispirati alle disposizioni della mente definite da Costa & Kallick, 2007, vedere *Allegato 3*), consolidando nel contempo anche la conoscenza di contenuti disciplinari, in particolare matematici ma non solo. Per ciascun livello, corrispondente ad una età dell'allievo o ad un "grade" (livello scolastico) preciso di istruzione, sono previste 12 attività in classe della durata di 3 ore (ovviamente dilatabile al bisogno), da svolgere una per settimana all'interno di un anno scolastico, secondo il modello didattico indicato nel paragrafo 3.2 (e non da far svolgere in modo autonomo agli allievi o secondo modelli didattici differenti i quali, non essendo testati, non avrebbero gli stessi effetti). Nell'*Allegato 4* è riportato un esempio di attività del percorso formativo. Quasi tutte le attività sono centrate su un problema presentato in modo narrativo. Molti problemi sono stati rielaborati e "narrativizzati" a partire da problemi reperibili su siti di matematica ricreativa o da problemi comparsi in gare di matematica per studenti. Altri sono stati costruiti appositamente per l'occasione partendo anche da informazioni e materiali reperibili su Web. Alla narrazione-problema seguono sempre 10 domande/ consegne. Le domande dalla 1 alla 6 sono sempre centrate nello specifico sul testo letto, mentre quelle dalla 7 alla 10 sono generali e riguardano processi più ampi quali il saper astrarre una funzione e una "morale" dal testo letto, il distinguere tra fatti (dati oggettivi) e opinioni (dati soggettivi), l'inventare una domanda originale sul testo (che non ricalchi quelle già poste) e una risposta plausibile, il narrare la vicenda da un punto di vista differente, che obbliga l'allievo a cambiare prospettiva interpre-

tativa – mettendosi nei panni di un altro soggetto e quindi sviluppando gli aspetti cognitivi relativi all'empatia – e a produrre una "contronarrazione" che induce l'allievo ad un'elaborazione profonda e significativa delle informazioni a disposizione. Testi e domande, seppur apparentemente simili a quelli che si usano nella pratica didattica corrente, sono pensati per far esercitare, mettere in gioco e formare tutto l'insieme di processi elencati, in un percorso caratterizzato da progressività (si passa da testi e domande più facili a testi e domande via via più difficili) e continuità (le attività devono essere svolte una per settimana, lungo tutto l'arco dell'anno scolastico). Ciascuna domanda posta sul testo sollecita l'esercizio di più processi cognitivi su contenuti di apprendimento tipicamente scolastici. Tale raccordo è importante, dato che qualsiasi percorso di comprensione di testi slegato dalla programmazione didattica corrente degli insegnanti non verrebbe percepito come "organico" alle programmazioni e quindi verrebbe visto come un'attività "a parte", a cui dedicare solo ritagli di tempo. A tal proposito l'**Allegato 5** fornisce un esempio di corrispondenza tra domande del percorso formativo e Obiettivi specifici di apprendimento formulati in forma operativa (desumibili dal Curricolo di Istituto).

I docenti che lo desiderano, possono somministrare un test iniziale la settimana precedente l'inizio del percorso formativo e un test finale, analogo a quello iniziale e da svolgere la settimana successiva all'ultima sessione del percorso formativo. La comparazione tra risultati del test iniziale e risultati del test finale è utile per documentare i progressi degli studenti nelle 12 settimane del percorso.

Come accennato, il percorso formativo prevede che gli studenti affrontino una sequenza di testi di difficoltà calibrata, seguiti da domande mirate pensate per mettere alla prova ed esercitare in modo guidato le capacità degli allievi inerenti la comprensione del testo, la logica e la risoluzione di problemi. *Le attività non devono essere somministrate come se fossero schede didattiche per il lavoro autonomo degli studenti.* È necessario rispettare le seguenti condizioni: a) per poter avere effetti visibili le attività devono essere svolte *tutte* e nella sequenza indicata; b) le attività devono essere svolte nella modalità esatta indicata nella scheda-attività, *rispettando il modello didattico descritto nel seguito* e rispondendo a tutte le domande.

4.2. Protocollo operativo per la somministrazione delle singole attività del percorso formativo

Le attività didattiche di ciascuna scheda devono essere condotte secondo il modello di problem solving guidato schematizzato in **Figura 1** (vedere Trincherò, 2012, 2018). Il docente deve, prima dell'inizio dell'attività, formare coppie eterogenee di allievi in cui vi sia un allievo che ha mediamente risultati scolastici alti e uno che ha mediamente risultati scolastici bassi (il riferimento per il docente possono essere i risultati nella propria disciplina). L'allievo con risultati scolastici mediamente più bassi sarà nominato Relatore della coppia, ossia membro della coppia che dovrà esporre alla classe le soluzioni trovate ai problemi proposti dall'insegnante e il processo di ragionamento utilizzato per giungere a quelle soluzioni. L'intervento didattico parte dal Problema indicato nella Scheda-attività 1 e prosegue con i momenti di lettura del testo e formulazione delle risposte alle domande (1. *Problem solving a coppie eterogenee*), esposizione sintetica da parte del Relatore delle risposte e dei ragionamenti compiuti per ottenerle (2. *Esplicitazione delle soluzioni costruite dalle coppie*), feedback del docente su "buone idee" e "idee discutibili" (3. *Analisi delle soluzioni*), costruzione ed esposizione di "buone risposte" da parte del docente (4. *Esposizione della soluzione ottimale*), somministrazione della scheda-attività successiva la settimana

seguito (5. *Applicazione dei principi esposti alla situazione-problema successiva*).

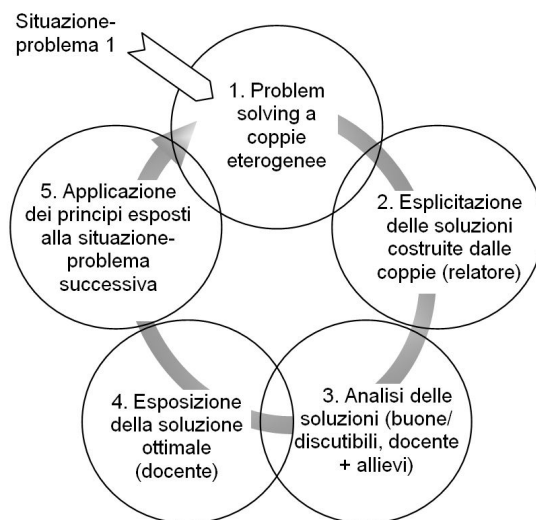


Figura 1
Applicazione in classe di ciascuna scheda-attività del percorso formativo.

I momenti sono descritti in dettaglio nella tabella seguente:

Situazione-problema 1	L'attività di partenza proposta nella scheda-attività (liberamente scaricabile da www.edurete.org/training), con testo da leggere, prima collettivamente e poi individualmente, e domande inerenti il testo letto.
1. Problem solving a coppie eterogenee	La coppia risponde per iscritto (dove possibile, ossia dalla classe terza scuola primaria in avanti) alle domande della scheda, anche in modo schematico in un tempo limitato (es. 30 minuti), deciso dall'insegnante in relazione al livello degli allievi e alla difficoltà del compito.
2. Esplicitazione delle soluzioni costruite dalle coppie	A turno i Relatori delle coppie espongono le risposte date alle domande in un tempo limitato (es. 3 minuti), illustrando i processi di ragionamento compiuti dalla coppia e giustificando le scelte da loro fatte (spiegando perché, secondo loro, la soluzione esposta è una buona soluzione). Non è necessario che parlino i Relatori di tutte le coppie, è sufficiente che: a) tutti sappiano di poter essere chiamati in causa; b) venga fatto emergere tutto il ventaglio di risposte possibili date dall'intera classe.
3. Analisi delle soluzioni	Il docente, contemporaneamente alla fase di Comunicazione, scrive alla lavagna, in una tabella a due colonne, le "buone idee" emerse e le idee "meno buone" ("idee discutibili"), spiegando anche perché le ha collocate in quella colonna.
4. Esposizione della soluzione ottimale	Il docente mette insieme tutte le "buone idee" emerse e costruisce una o più risposte "ottimali" alle domande proposte, suggerendo anche "buone idee" non emerse dalla discussione. Nel far questo svolge una "lezione frontale" a tutti gli effetti in cui illustra le risposte ottimali e fornisce suggerimenti espliciti di metodo per costruire buone risposte alle domande proposte. Nello svolgere questa lezione il docente deve prendere tutto il tempo necessario per spiegare bene come si risponde alle domande proposte e come si costruiscono buone risposte a domande analoghe su altri testi.
5. Applicazione dei principi esposti alla situazione - problema successiva	La settimana successiva, il docente propone l'attività seguente del percorso formativo e chiede alle stesse coppie (se tra i membri della coppia si è stabilita una buona intesa) o a coppie differenti (formate dalla scomposizione di quelle originarie e sempre con la logica allievo con profitto più alto-allievo con profitto più basso) di formulare risposte alle domande proposte. In tal modo inizia il ciclo successivo.

Tabella 1
Applicazione in classe di ciascuna scheda attività del percorso formativo.

L'Allegato 6 illustra il protocollo dettagliato di applicazione in classe del percorso formativo.

4.3. Discussione sul protocollo operativo delle Attività in classe

Perché è importante somministrare le attività del percorso formativo secondo il protocollo descritto e non secondo altri protocolli? Le ragioni sono molteplici, ciascuna supportata da evidenze specifiche:

- *Lavoro a coppie.* Testi e domande corrispondenti sono pensati per avere una difficoltà lievemente maggiore di quella a cui sono abituati gli allievi dell'età corrispondente. Se i testi venissero affrontati singolarmente molti allievi non riuscirebbero nel compito. Se venissero affrontati in gruppi di tre o più allievi, gli allievi meno intraprendenti potrebbero essere esclusi (o inclusi in modo solo marginale) dal processo di formulazione delle risposte alle domande. Numerosi studi (si veda ad esempio Hattie 2009, p. 226) evidenziano che i risultati migliori si ottengono con i lavori a coppie, che si dimostrano più efficaci sia rispetto ai lavori svolti dai singoli individui sia rispetto ai lavori svolti in terne o gruppi più ampi.
- *Eterogeneità delle coppie.* Per le ragioni suddette è necessario che il livello dei due membri della coppia sia differente. Membri della coppia di livello alto potrebbero entrare in competizione negativa; membri di livello basso potrebbero non essere in grado di affrontare adeguatamente i problemi. Lavorare in coppie eterogenee consente all'allievo di livello più basso di trovare nel compagno una fonte di modelli di interpretazione, di azione e di riflessione (strategia del *modellamento*, che presenta numerose evidenze di efficacia, si veda Hattie, 2009) e di *peer tutoring* (evidenze di efficacia in Hattie, 2009, 2016; Bowman-Perrott, Davis, Vannest, Williams, Greenwood & Parket, 2013).
- *Allievo di livello più basso come Relatore.* L'allievo di livello più basso collabora e viene aiutato dal compagno nel leggere i testi e nel rispondere alle domande, ma deve assumersi la responsabilità di esporre personalmente la soluzione trovata e il processo di ragionamento che la coppia ha fatto per arrivarci (dire *perché* tale risposta è corretta, elemento fondamentale per una corretta comprensione, Zan, 2016, p. 30). Questa è una forma di *autoverbalizzazione* (evidenze di efficacia in Hattie, 2009, 2016), che costituisce di per sé una strategia metacognitiva che coinvolge spiegazione, verbalizzazione e automonitoraggio (de Boer, Donker-Bergstra & Konstons, 2013; Huff & Nietfeld, 2009; Miller et al., 2014): sapendo di dover esporre, l'allievo deve chiarire a se stesso i dubbi per poter produrre una comunicazione coerente e comprensibile da altri (come avviene nel *learning by teaching*, evidenze di efficacia in Fiorella & Mayer, 2015). L'ascolto e l'osservazione, da parte dei compagni, della verbalizzazione dei processi di risoluzione può fornire loro modelli di interpretazione, azione e riflessione, che possono imitare, migliorare e generalizzare a situazioni future. L'ascolto delle esposizioni altrui può poi fornire quelle informazioni contestuali (spaziali, temporali o di contenuto disciplinare specifico) che aiutano gli allievi ad affinare le soluzioni da essi proposte.
- *Uso del dizionario.* Gli interventi volti a migliorare l'insieme di termini linguistici di cui gli allievi conoscono il significato (*vocabulary programs*, evidenze di efficacia in Hattie 2009, 2016), e il lessico da loro utilizzato nella comunicazione, sono utili sia per migliorare la loro capacità di comprensione dei testi, orali e scritti, sia la loro capacità di riferirne in modo corretto i contenuti appresi. Far utiliz-

zare sistematicamente il dizionario nelle attività del percorso formativo sviluppa la capacità (e l'abitudine) degli allievi di utilizzarlo in modo autonomo per chiarire il significato dei termini incontrati e facilitare la comprensione dei significati complessivi (si veda anche Fornara & Sbaragli, 2017).

- *Feedback del docente sulle carenze degli allievi emerse nelle esposizioni.* Nell'esposizione delle soluzioni trovate, gli allievi potrebbero far emergere carenze anche imputabili a mancata assimilazione o comprensione di concetti che avrebbero dovuto essere fissati in anni precedenti. Proprio per questo è importante che il docente abbia in questa fase di ascolto un atteggiamento "non giudicante", che consenta a tutti di far emergere il proprio punto di vista e le proprie difficoltà, senza timore di essere valutati negativamente per questo (Zan, 2016, p. 85). Portando alla luce il problema, il docente può lavorare in modo specifico sulle carenze emerse nella fase 4 (Esposizione della soluzione ottimale). Questo è un processo di feedback bidirezionale studenti → docente (il docente vede come gli studenti applicano ciò che hanno appreso e si rende conto se viene realmente padroneggiato o meno) e docente → studenti (il docente interviene per correggere eventuali mancanze e miscomprensioni), a cui le meta-analisi assegnano una considerevole efficacia (Hattie 2009, 2016; Marzano, Pickering & Pollock, 2001).
- *Esposizione dei principi di metodo da parte dell'insegnante.* Perché quanto appreso nell'attività possa diventare stabile e generalizzabile, il docente deve trarre conclusioni da quanto emerso e fissarle, presentando *procedure e regole di metodo precise, applicabili ad altri problemi della stessa tipologia*. Accanto a procedure e regole prettamente disciplinari, il docente può proporre strategie più generali di pianificazione nella lettura del testo (lettura rapida per costruirsi le prime ipotesi interpretative generali sul testo, individuazione di parole nuove e ricerca del significato, ricerca di concetti e asseriti chiave in relazione ai propri scopi ecc., si veda ad esempio Demartini & Sbaragli, 2019) e di valutazione delle proprie interpretazioni (confronto con quelle del compagno, ritorno sul testo per verificarne la congruenza ecc.). Il processo proposto ha sì una parte di lavoro autonomo (fasi 1 e 2), ma è sostanzialmente un processo di *problem solving guidato* (evidenze di efficacia in Hattie, 2009, 2016), in cui è il docente ad esporre, sulla base di quanto emerso dagli allievi e in una forma per loro comprensibile in relazione alle loro preconoscenze, una o più soluzioni ottimali.
- *Riapplicazione autonoma della soluzione e dei principi di metodo esposti dal docente all'attività successiva.* Per poter fissare i concetti esposti dal docente, gli allievi necessitano di riapplicarli ad una situazione successiva, non identica alla precedente e pensata per avere un gradino di difficoltà in più, secondo una scala di progressività, che li induca sia ad uno sforzo di riconoscimento di quanto nella nuova situazione è comune alla situazione precedente, e quindi riapplicabile in essa, sia di quanto non lo è, e quindi richiede di ipotizzare soluzioni mettendo in gioco (e quindi facendo emergere) le proprie risorse cognitive e strutture di pensiero. Questa riapplicazione guidata è del tutto assimilabile a una forma di *pratica deliberata* (*deliberate practice*, evidenze di efficacia in Hattie, 2009, 2016).
- *Costanza nello svolgere le attività definite dal percorso formativo.* Numerosi studi sottolineano l'efficacia della costanza nella già citata pratica deliberata, ma anche i benefici della *pratica distribuita* (evidenze di efficacia in Hattie, 2009, 2016), ossia diluita nel tempo, che porta a sviluppare progressivamente un *habitus* definito nel modo in cui lo studente interpreta, affronta, riflette sui problemi (indispensabile per poter sviluppare gli atteggiamenti verso il compito descritti nell'Allegato 3).

5 La ricerca sul campo

In questo paragrafo descriviamo una prima sperimentazione pilota di un sottoinsieme di attività del percorso formativo di comprensione del testo e risoluzione di problemi. Tale sperimentazione è stata utile per mettere a punto numerosi elementi inerenti l'applicabilità del percorso formativo a contesti scolastici concreti.

5.1. Il disegno di ricerca

Il disegno di ricerca è un classico pre-post con gruppo controllo. L'ipotesi di partenza è che l'applicazione del percorso formativo (in questo caso parziale, essendo una sperimentazione pilota) porti ad un miglioramento significativo delle capacità di comprensione del testo scritto e di risoluzione di problemi. I docenti che hanno applicato il percorso formativo sono stati sottoposti a momenti di formazione iniziale sull'applicazione del protocollo e seguiti da chi scrive durante il percorso di sperimentazione con momenti specifici di formazione e supervisione.

Le tre scuole primarie sono situate nel centro di Torino, accanto ai principali luoghi di interesse storico e turistico. L'utenza della scuola è variegata per ceti, provenienze, professioni e culture. La scuola si connota, in questo particolare contesto, come un elemento fondamentale di incontro e scambio fra culture. Le sedi presenti nel circolo didattico sono tre: Primaria "Federico Sclopis", Primaria "Ricardi di Netro" e Primaria "Giosuè Carducci". In una delle tre sedi vi un'elevata percentuale di alunni migranti (circa 60-70%). Il campione è costituito dagli alunni della scuola primaria appartenenti a 10 classi: 4 classi di terza, 2 di quarta e 4 di quinta. Gli allievi del gruppo sperimentale sono 107 e quelli del gruppo di controllo 102. In particolare il 73% degli allievi del campione è di origine italiana, il 27% straniera.

I gruppi sono stati scelti mediante campionamento ragionato allo scopo di costituire gruppi omogenei per quanto riguarda le variabili socio-economiche. Ad ogni classe del gruppo sperimentale è stata abbinata una classe di controllo, appartenente o alla stessa scuola o ad un'altra frequentata da un'utenza con background simile.

La sperimentazione si è svolta secondo le seguenti fasi:

- Ottobre – novembre 2018: definizione del progetto, predisposizione degli strumenti di rilevazione e presentazione agli insegnanti tramite assemblee plenarie, raccolta delle adesioni e definizione del campione sperimentale e di controllo; formazione all'applicazione del protocollo degli insegnanti partecipanti alla sperimentazione.
- Dicembre 2018 – febbraio 2019: applicazione delle prove di rilevazione su tutto il campione da parte dei ricercatori, inizio applicazione del percorso formativo nelle classi sperimentali.
- Marzo – maggio 2019: applicazione del percorso formativo sulle classi sperimentali da parte dei docenti curricolari (6 attività per ciascuna classe, ciascuna delle quali ha impegnato la classe mediamente per 3 ore), monitoraggio e supervisione in itinere, somministrazione delle prove di rilevazione finali a tutto il campione da parte dei ricercatori.
- Giugno – novembre 2019: correzione delle prove iniziali e finali e analisi dei dati.

Trattandosi di una sperimentazione pilota, le attività del percorso formativo non sono state somministrate nel loro complesso ma solo in parte. Le attività svolte sono indicate in nella **Tabella 2**:

Tabella 2
Attività del percorso
formativo somministrate
nella sperimentazione
pilota e ordine seguito
nella somministrazione.

Terza	Quarta	Quinta
PT01 - La nuvola nera PT03 - Una montagna di rifiuti giganti PT04 - La caffettiera PT05 - Sto dormendo PT06 - Il ragno Zampalunga PT07 - Una nuova casa	PT08 - Tutti in gita! PT09 - Non mi piace il mare PQ10 - Il gioco dei birilli PQ01 - Il drone PQ04 - Le bugie hanno le gambe corte PQ11 - I lavabiglie	PN06 - I piastrelloni PN03 - Cubi da costruzione PN08 - Un vecchio puzzle PN09 - Tre edifici e un cortile PN11 - Triplo biscotto PN12 - Supereroi

Ogni sessione di somministrazione ha richiesto l'organizzazione delle coppie di lavoro composte da alunni con livelli differenti di profitto e l'eventuale modifica della composizione di alcune coppie nella sessione successiva, se queste si mostravano poco funzionali. È stato necessario porre particolare attenzione alla presenza di alunni con disabilità o disturbo specifico di apprendimento. In tal caso l'abbinamento in coppia (o gruppo da tre in caso di disabilità o disturbi rilevanti) con alunni maggiormente empatici e non competitivi si è mostrata la soluzione migliore. In una sola situazione specifica il docente ha dovuto gestire atteggiamenti di scarsa considerazione del compagno e di demotivazione al lavoro da parte di un alunno normofunzionale ma con eccessivo bisogno di emergere e difficoltà nella gestione degli insuccessi, rimarcando l'importanza della cooperazione e dello sviluppo di abilità sociali per una corretta formazione del cittadino. Laddove si rendeva necessario fare modifiche alla composizione delle coppie, l'esperienza ha dimostrato che è opportuno farla a percorso formativo ben avviato, quando la classe già padroneggia la routine di lavoro. In riferimento a episodi di indisciplina, si è dimostrato efficace l'abbinamento dell'allievo indisciplinato con un compagno particolarmente dotato di autocontrollo e l'assegnazione al primo del ruolo di Relatore, sottolineandone l'importanza e favorendone così una maggiore responsabilizzazione.

La fase di Esplicitazione delle soluzioni è stata gestita con l'estrazione a sorte delle coppie, dove il Relatore illustrava, in un tempo stabilito di pochi minuti, la soluzione individuata dalla coppia e ne forniva le motivazioni sottese. Nel frattempo, l'insegnante catalogava alla lavagna gli esiti in "idee buone" o "idee discutibili" e ne sosteneva logicamente la stessa collocazione. L'insegnante cercava sempre una condivisione con la classe, richiedendo pareri e conferme sulla suddivisione fatta alla lavagna tramite alzata di mano e ascolto degli eventuali dissensi. La fase di Esplicitazione si intrecciava a quella dell'Analisi delle soluzioni. Procedendo in tal modo, si è dimostrato sufficiente ascoltare le risposte al lavoro individuate solo da alcune coppie di alunni, poiché man mano che si procedeva, numerose altre coppie condividevano quanto espresso dai compagni che avevano già relazionato; questo consentiva un notevole risparmio di tempo nello svolgimento dell'attività. Infine venivano aggiunte dal docente eventuali soluzioni differenti non ancora emerse.

Per quanto riguarda la comprensione del testo, i livelli iniziali e finali sono stati rilevati tramite le *Prove di comprensione della lettura MT - Kit per la scuola* di Cornoldi, Colpo e Carretti (2017). Le prove richiedono la lettura silente senza limiti di tempo di testi di lunghezza differente, seguita da un numero variabile di domande a scelta multipla che rilevano i principali aspetti legati alla comprensione del testo in generale descritti nell'**Allegato 1**, con a disposizione il testo letto cui ricorrere in caso di necessità.

L'abilità matematica è stata rilevata con la *Prova di competenze di base matematiche, logiche e di comprensione del testo* (Prova LM) di Trincherò. Tale prova è composta

da 24 item per la classe terza, 28 per la quarta e 33 per la quinta, a scelta multipla e aperti. La prova prevede la lettura di un testo e la messa in relazione dei contenuti esperiti con domande testuali, grafici, tabelle e mappe spaziali. Essa richiede l'attivazione coordinata di capacità molteplici quali: individuazione delle informazioni esplicite presenti nel testo utili per rispondere ad una data domanda, conteggio di elementi con date caratteristiche, inferenza a partire dalle informazioni presenti nel testo, ordinamento di informazioni in base ad un criterio, calcolo con numeri a due cifre (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione), ricostruzione mentale degli spazi descritti, lettura di grafici e tabella, corrispondenza tra termini e descrizioni, riflessione metacognitiva sul proprio modo di usare le informazioni presenti nel testo (vedere **Tabella 3**).

Le prove, iniziali e finali, sono state somministrate a tutte le classi del campione nella fascia oraria compresa tra le 9,00 e le 12,30. I test pre-intervento, precedenti l'applicazione del percorso formativo, sono stati effettuati nei mesi di gennaio e febbraio 2019, mentre i test post-intervento, seguenti l'applicazione, tra maggio e inizio giugno 2019. È necessario sottolineare che tali mesi non sono mai quelli ottimali per la somministrazione dei test post-intervento, dato che gli allievi subiscono un notevole sovraccarico di prove in un momento dell'anno in cui la loro attenzione non è sempre centrata sulle attività scolastiche. La somministrazione è avvenuta concordando i momenti più consoni con i docenti curricolari delle classi interessate, che hanno assistito senza intervenire. Nel test pre-intervento il somministratore è stato unico (chi scrive); nel test post-intervento, visti i tempi ristretti per l'imminente termine dell'anno scolastico, si è aggiunto un secondo somministratore appartenente al gruppo di ricerca. Tutte le prove sono state somministrate seguendo rigorosamente le indicazioni presenti nei protocolli delle prove stesse (rispetto nella consegna, tempi indicati e illustrazione degli eventuali esempi esplicativi raccomandati). Gli allievi, nella quasi totalità, hanno affrontato le prove con impegno e senso di responsabilità. Nella somministrazione non sono emerse problematiche particolari, tranne che nella classe quarta del gruppo sperimentale, come descritto nel seguito.

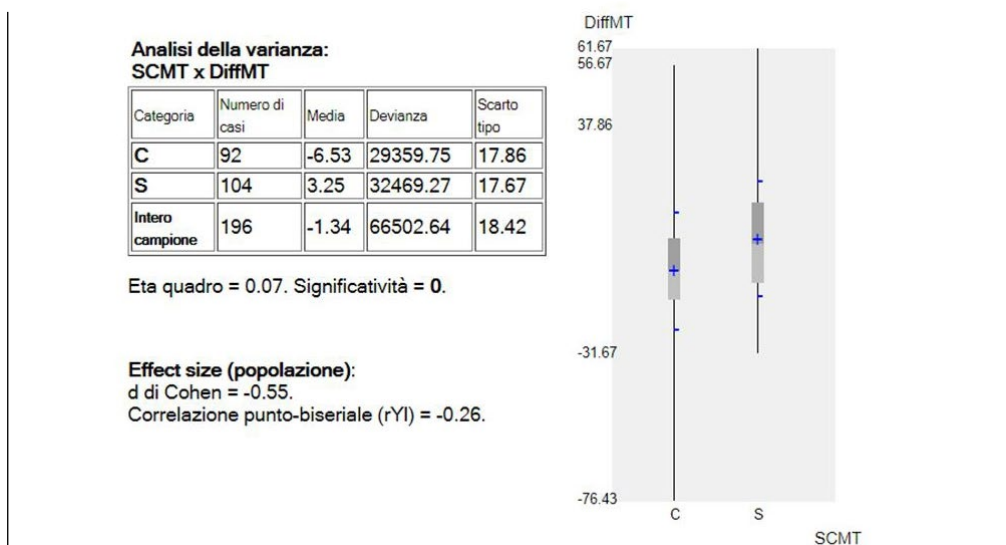
5.2. Analisi dei dati e risultati

Gli esiti dei test sono stati convertiti in percentuale, per tenere conto sia del differente numero di item tra il test iniziale e il test finale delle prove MT sia del differente numero di item, a seconda dell'anno di scolarità, nelle medesime prove MT e nella prova LM. In tal modo si è potuto anche osservare l'andamento del campione nell'insieme. I risultati ottenuti sono descritti nel seguito.

1. Per quanto riguarda la comprensione del testo, il test MT è stato somministrato a 196 casi, 104 per il gruppo sperimentale e 92 per il gruppo di controllo). Gli incrementi pre-post sono illustrati in **Figura 2**.

Gruppo	Classe Terza	Quarta	Quinta	Totale
Sperimentale	+5,73%	+21,65%	+3,32%	+3,25%
Controllo	0%	+15,22%	-9,48%	-6,53%

Figura 2
Incrementi in
Comprensione del
testo (Prove MT).



Gli esiti dell'analisi della varianza in riferimento alle differenze ottenute sulle capacità matematiche indicano un valore di significatività inferiore a 0,001 che conferma, per questa variabile, l'esistenza di una differenza statisticamente significativa tra le medie dei due gruppi. L'Effect size, calcolato con il d di Cohen, mette in evidenza una crescita particolarmente significativa (ES=0,55) degli allievi del gruppo sperimentale.

2. Per quanto riguarda l'abilità matematica, il test LM è stato somministrato su 209 casi, 107 per il gruppo sperimentale e 102 per il gruppo di controllo. Gli incrementi pre-post sono illustrati in Figura 3.

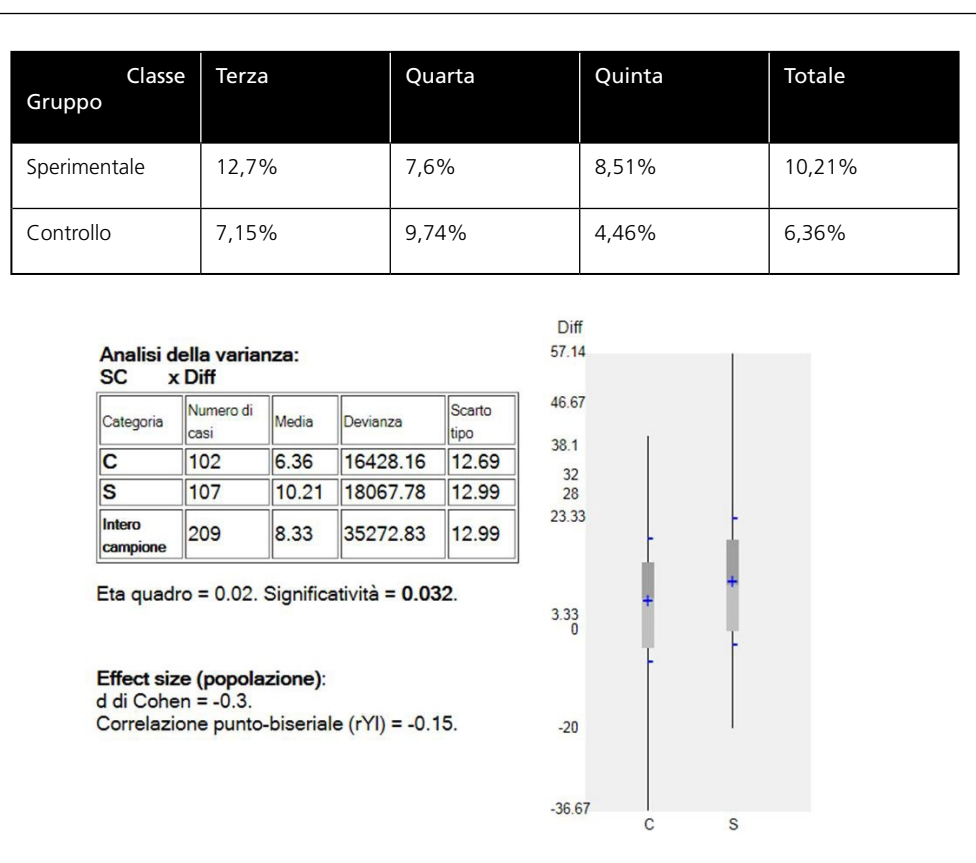


Figura 3
Incrementi in Abilità
matematica (Prova LM).

Gli esiti dell'analisi della varianza in riferimento alle differenze ottenute sulle capacità matematiche indicano un valore di significatività pari a 0,032 che conferma, anche per questa variabile, l'esistenza di una differenza statisticamente significativa tra le medie dei due gruppi. Anche qui l'Effect size, calcolato con il d di Cohen, mette in evidenza una crescita significativa ($ES = 0,3$) degli allievi del gruppo sperimentale. Escludendo dal campione la classe quarta (classe problematica per le ragioni illustrate nel seguito), la significatività della differenza tra gli incrementi sperimentale-controllo passa a 0,006 e l'Effect size si attesta al valore $ES = 0,43$.

La Tabella 3 illustra gli incrementi percentuali pre-post per le singole abilità matematiche individuate dalla prova LM per il gruppo sperimentale ("N.e." sta per "dato non elaborato nella presente analisi"; le domande corrispondenti sono domande aperte che verranno analizzate in lavori successivi). Dove è presente un trattino ("-") significa che la domanda non è stata somministrata nel test per quella classe.

N.	Abilità rilevate	Cl. 3	Cl. 4	Cl. 5
1	Classificazione e conteggio (semplice)	13	5	10
2	Classificazione e conteggio (complesso)	40	-5	15
3	Controllo coerenza delle affermazioni con il testo (semplice)	7	19	10
4	Controllo coerenza delle affermazioni con il testo (complesso)	6	-5	-5
5	Ordinamento in base ad un criterio: trovare quello corretto	-	14	15
6	Ordinamento in base ad un criterio: trovare quello sbagliato	-	-19	-10
7	Spiegazione evento sulla base del testo	-12	0	0
8	Addizioni 2 cifre	3	0	20
9	Moltiplicazioni 2 cifre	-	-19	15
10	Rappresentazione di uno spazio sulla base di una descrizione	-	0	-8
11	Divisioni una cifra a denominatore	-	-	3
12	Proporzione	-	-	3
13	Interpretazione di un grafico	-	-	-15
14	Interpretazione di una tabella	-	-	-13
15	Classificazione	15	19	18
16	Inferenza a partire dalle informazioni presenti nel testo	15	24	8
17	Spiegazione evento sulla base del testo (semplice)	32	5	8
18	Spiegazione evento sulla base del testo (complesso)	24	-24	5
19	Controllo della presenza di informazioni nel testo necessarie per rispondere ad una domanda	-10	-10	5

20	Analisi delle informazioni aggiuntive che sarebbero necessarie per rispondere ad una data domanda	7	33	15
21	Corrispondenza tra personaggio del testo e descrizione (conoscenza lessicale)	-5	5	10
22	Estrapolazione di significati impliciti	-2	-10	-5
23	Spiegazione evento sulla base del testo	6	5	8
24	Controllo dell'utilità delle informazioni presenti nel testo per rispondere ad una data domanda	11	10	23
25	Controllo dell'utilità delle informazioni presenti nel testo per rispondere ad una data domanda	3	-10	13
26	Controllo della coerenza tra vignetta e testo	94	81	95
27	Uso di aggettivi per descrivere un personaggio del testo (conoscenza lessicale)	7	38	-5
28	Localizzazione dell'informazione utile per rispondere ad una data domanda	15	29	10
29	Inferenza personale sulla base degli elementi del racconto	7	5	15
30	Individuazione incongruenza presente nel testo	N.e.	N.e.	N.e.
31	Individuazione delle informazioni non utilizzate per rispondere alle domande sul testo	-	-	13
32	Estrapolazione della morale della storia	N.e.	N.e.	N.e.
33	Ideazione di un suggerimento per migliorare il lavoro del protagonista della storia	N.e.	N.e.	N.e.

Tabella 3
Incrementi percentuali pre-post nelle singole abilità matematiche della Prova LM (gruppo sperimentale).

Gli incrementi sono ovviamente più alti per la classe terza, dato che si parte da un livello mediamente più basso nella prova (le domande erano le stesse). Trattandosi di una sperimentazione pilota e di una somministrazione parziale delle attività del protocollo, i dati sono da considerarsi decisamente incoraggianti.

È da segnalare come le due quinte sperimentali abbiano avuto punteggi molto alti nelle prove nazionali italiane Invalsi di maggio 2019, sia in italiano sia in matematica. In particolare, una delle due ha avuto i punteggi migliori di tutto l'Istituto, con uno scostamento molto alto rispetto alle classi del campione comparativo nazionale Invalsi (+6,9% in Italiano, +5,1% in Matematica). Il dato è importante perché questa classe partiva da esiti nelle prove Invalsi di seconda (2016) molto più bassi di quelli della classe di controllo.

In merito agli incrementi pre-post, è necessario sottolineare che la classe quarta del gruppo sperimentale presenta alcune particolarità che potrebbero aver inciso sugli esiti della sperimentazione. Nei primi due anni scolastici (prima e seconda) vi è stata una mancanza di continuità didattica con cambi di insegnanti. In terza, invece, vi sono state considerevoli difficoltà di gestione della classe da parte di un nuovo docente dell'area matematica e scientifica, in seguito ai comportamenti-problema manifestati da un alunno che si trovava in una condizione di forte disagio emotivo e che ha necessitato interventi di supporto da parte di altri docenti della scuola. La situazione ha inciso negativamente sul processo di apprendimento e insegnamento in

tale ambito disciplinare e sul clima di classe, caratterizzato talvolta da atteggiamenti diffidenti degli alunni rispetto alle proposte didattiche offerte. Nell'anno successivo l'ingresso di un nuovo insegnante ha dato stabilità alla situazione della classe, sono state improntate valide azioni didattiche, avviata la sperimentazione in oggetto e si sono osservati miglioramenti nell'apprendimento, tuttavia non sufficienti, nell'arco di un solo anno scolastico a colmare le lacune accumulate nell'ambito matematico. In generale, nelle riunioni periodiche di raccordo sulla sperimentazione, gli insegnanti del gruppo sperimentale hanno rilevato cambiamenti positivi sia nelle normali prove di valutazione degli apprendimenti scolastici sia nei comportamenti osservati durante le esperienze didattiche quotidiane. In particolar modo sono stati rilevati cambiamenti nelle abilità connesse alla comprensione del testo, nella disposizione a ricercare collegamenti logici tra concetti e nell'abilità argomentativa. Gli insegnanti hanno riferito un incremento nell'abilità di individuare significati impliciti nei compiti assegnati nel quotidiano, al di là dei momenti specifici di applicazione del percorso formativo. Sono state riscontrate, in più momenti dell'attività scolastica ed extra-scolastica degli allievi, trasposizioni dei processi cognitivi esercitati nel percorso formativo a situazioni analoghe ma non identiche a quelle affrontate nella sperimentazione pilota.

Durante le attività del percorso formativo, gli stessi docenti hanno evidenziato tramite l'osservazione diretta: a) la presenza generalizzata di un'elevata motivazione intrinseca allo svolgimento delle attività; b) l'emergere del senso di sfida con se stessi e (in positivo) con il compagno della coppia di lavoro; c) l'instaurarsi di rapporti positivi di collaborazione tra gli allievi della coppia. Allievi con difficoltà di apprendimento hanno manifestato durante le attività del percorso formativo livelli crescenti di autostima e di fiducia in sé stessi. Il ruolo di "Relatore" sembra aver particolarmente giovato loro perché ha permesso di sperimentarsi in una situazione nuova e di vivere momenti di "protagonismo" scarsamente sperimentati in precedenza. In particolare gli insegnanti hanno segnalato tre casi di particolare successo, con incrementi rilevanti nella prova LM (12/21, 6/21 e 6/21), accompagnati da un incremento netto e durevole di motivazione all'apprendimento, impegno, autostima, tolleranza alla frustrazione in condizioni di difficoltà.

Altri aspetti rilevanti osservati nella conduzione del percorso formativo hanno riguardato: la naturalezza con cui molti allievi si sono appropriati di concetti e abilità oggetto dell'intervento (ad esempio distinguere affermazioni oggettive da affermazioni soggettive, argomento che non era mai stato affrontato prima dagli insegnanti di classe), l'abilità acquisita dagli allievi di individuare regole generali a partire dalle esperienze svolte, la consapevolezza sulla natura interdisciplinare degli apprendimenti, l'abilità di perseverare e rimanere concentrati sull'obiettivo, la soddisfazione conseguente al lavoro intellettuale, l'abilità di differire la gratificazione non puntando a risposte immediate ma prediligendo quelle ragionate, l'autonomia raggiunta nell'utilizzo del dizionario per chiarire termini non conosciuti.

I docenti coinvolti nella sperimentazione hanno da subito accolto la proposta con interesse. Alcune apprensioni iniziali relative alla propria adeguatezza nel condurre le sessioni in modo efficace secondo il modello proposto è man mano venuta meno, così come qualche timore rispetto ad una valutazione inerente il proprio operato. Progressivamente il gruppo di ricerca si è consolidato giungendo ad un buon livello di riflessione sulla pratica e di confronto reciproco.

Le famiglie degli allievi, costantemente informate sulla sperimentazione durante le assemblee di classe, hanno accolto favorevolmente l'iniziativa, chiedendo informazioni dettagliate sul lavoro. Numerosi genitori hanno chiesto informazioni sugli esiti finali.

6 Conclusioni

Il lavoro descritto invita a porre l'attenzione su alcuni punti fermi. Anzitutto una buona formazione al *problem solving* non può che essere interdisciplinare: un lavoro sulla comprensione del testo matematico non può prescindere da un lavoro più ampio sulla comprensione del testo in generale, da svolgere con i colleghi di altre discipline, e con benefici e ricadute su tutte le discipline. In secondo luogo gli interventi proposti devono confrontarsi con le evidenze di efficacia derivanti dalla ricerca di matrice *evidence-based*: se sappiamo che vi sono strategie che hanno dimostrato essere efficaci è necessario riportare le strategie che stiamo applicando a queste, per capire sia le possibilità di successo, sia come stabilire sinergie tra ciò che viene proposto e quanto la ricerca ha dimostrato essere efficace. La terza considerazione deve riguardare un cambiamento di prospettiva sia degli insegnanti sia degli allievi: interventi estemporanei di durata limitata provocano effetti limitati; un intervento che aspiri a cambiamenti durevoli nel modo di approcciarsi ai problemi da parte degli allievi deve avere una durata che abbracci in modo continuativo tutta la durata dell'anno scolastico per più anni scolastici. La sperimentazione-pilota condotta ha dato risultati incoraggianti (che hanno consentito al gruppo di lavoro una ricalibrazione delle attività del percorso formativo) ma rappresenta solo un primo passo. Sarà interessante vedere con sperimentazioni più ampie e longitudinali, che utilizzino tutte le attività del percorso formativo, come è possibile incidere sugli atteggiamenti e sulle credenze degli allievi oltre che sulle loro conoscenze, abilità e competenze. L'obiettivo finale deve essere quello di sviluppare un *habitus* di lettura approfondita e non superficiale dei problemi con cui gli allievi si confrontano, sia in ambito scolastico sia in ambito extra-scolastico. Lettura e comprensione del problema sono importanti almeno quanto la sua soluzione (Zan, 2016, p. 36). Una buona comprensione è il prerequisito per una buona rappresentazione. Una risposta scorretta a un problema non può essere interpretata superficialmente come "carenza in ambito matematico" fino a che non sono state colmate le carenze nella comprensione in generale. Il percorso formativo punta proprio a lavorare in modo congiunto su questi due aspetti: formare la comprensione matematica mentre si forma anche la comprensione in generale, insegnando strategie generali (ad esempio l'uso *sistematico* del dizionario) esportabili anche ad altre discipline. In aggiunta l'obiettivo è quello di sviluppare negli allievi l'utilizzo di strategie metacognitive per la comprensione dei testi, che li rendano via via più autonomi nell'affrontare i problemi che la vita, non solo la scuola, pone loro. Tutto ciò non è slegato dalla costruzione di specifici atteggiamenti verso il *problem solving*, soprattutto di fronte a problemi nuovi, mai affrontati prima in quella forma. Un intervento efficace passa attraverso la costruzione di sinergie tra tutti gli attori coinvolti (dirigenti scolastici, insegnanti di tutte le discipline, allievi, genitori) e la volontà di procedere tutti nella stessa direzione, senza farsi abbagliare da soluzioni facili quanto effimere.

Ringraziamenti

Si ringrazia il Dirigente Scolastico dott. Giovanni Carlo Sinicco della D.D. Pacchiotti di Torino per aver promosso il percorso di formazione dei docenti, sostenuto con determinazione il buon svolgimento del progetto di ricerca e sperimentazione, avviando il percorso di rinnovamento della didattica nell'Istituto.

Si ringrazia la Dirigente Scolastica dell'attuale Istituto Comprensivo Pacchiotti-Via Revel, dott.ssa Silvia Marianna Bollone, per l'interesse e la disponibilità manifestati al proseguimento delle attività di formazione e sperimentazione didattica.

Si ringraziano i docenti del gruppo sperimentale, per il rilevante impegno e il lavoro didattico condotto nelle classi: Franca Corino, Nadia De Ruosi, Maria Lucia Di Maggio, Agata Fonti, Mirko Ghiani, Marco Mantelli, Alice Ruzittu.

Si ringraziano i docenti del gruppo di controllo per la disponibilità data ad effettuare le prove di rilevazione: Daniele Catania, Bruno Montaleone, Sabina Parlapiano, Rosaria Pastura, Roberto Petrini, Giuseppina Prestipino, Giovanni Rubello, Ilaria Tunno, Silvana Vergnano, Alessia Zucco.

Si ringraziano gli studenti delle classi coinvolte per l'entusiasmo profuso in tutte le fasi della sperimentazione.

Si ringrazia il dott. Davide Della Rina per la collaborazione alla rilevazione e all'elaborazione dei dati della sperimentazione pilota.

Bibliografia

- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing. A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. New York: Addison Wesley Longman.
- Auzar, M. S. (2018). The Relationships of Reading Comprehension Ability with the Ability to Understand The Questions of Mathematical Word Problems. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 8, 145-151.
- Björn, P., Aunola, K., & Nurmi, J. (2008). The association between word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28(4), 409-426.
- Boonen, A. J. H., de Koning, B. B., Jolles, J., & Van der Schoot, M. (2016). Word Problem Solving in Contemporary Math Education: A Plea for Reading Comprehension Skills Training. *Front. Psychol*, 7, 191.
- Bowman-Perrott, L., Davis, H., Vannest, K., Williams, L., Greenwood, C., & Parket, R. (2013). Academic Benefits of Peer Tutoring: A Meta-Analytic Review of Single-Case Research. *School Psychology Review*, 42(1), 39-55.
- Bransford, J. D., & Franks, J. J. (1972). The abstraction of linguistic ideas: A review. *Cognition*, 1, 211-249.
- Cacciò, L., De Beni, R., & Pazzaglia, F. (1996). *Abilità metacognitive e comprensione del testo scritto*. In R. Vianello & C. Cornoldi (A cura di), *Metacognizione, disturbi di apprendimento e handicap* (pp. 134-155). Bergamo: Edizione Junior.
- Cain, K., Barnes, M. A., Bryant, P. E., & Oakhill, J. V. (2001). Comprehension skill, inference-making ability, and the relation to knowledge. *Memory & Cognition*, 29(6), 850-859.
- Calvani, A., & Chiappetta Cajola, L. (A cura di). (2019). *Strategie efficaci per la comprensione del testo. Il Reciprocal Teaching*, Sapie Scientifica.
- Calvani, A., & Trincherò, R. (2019). *Dieci falsi miti e dieci regole per insegnare bene*. Roma: Carocci.
- Cardarello R., & Lumbelli L. (2018). *La comprensione del testo*. Milano: Giunti.

- Cardarello, R., & Pintus, A. (2019). *La comprensione del testo nella scuola italiana: un bilancio storico e critico*. In A. Calvani & L. Chiappetta Cajola (A cura di), *Strategie efficaci per la comprensione del testo. Il Reciprocal Teaching*, Sapie Scientifica.
- Castellana, G., & Giacomantonio, A. (2018). Buoni e cattivi lettori. Esiti della sperimentazione di un intervento didattico metacognitivo sulle strategie di lettura nella comprensione del testo scritto. *Italian Journal of Educational Research*, 9(21), 205–222.
- Colpo, G., & Pazzaglia, F. (1994). *Prova di comprensione della lettura*. In R. De Beni & Gruppo MT (A cura di), *Q1 prove. Prove per la compilazione del quadro 1 della scheda di valutazione* (pp. 25-35). Firenze: Organizzazioni Speciali.
- Comoglio, M. (1992). *Comprendere*. Roma: Ifrep.
- Cornoldi, C., Colpo, G., & Carretti, B. (2017). *Prove MT- Kit scuola, classi 3-4-5, Dalla valutazione degli apprendimenti di lettura e comprensione al potenziamento*, Firenze: Giunti Edu.
- Cornoldi, C., Mammarella, I. C., & Goldenring, J. (2016). *Nonverbal Learning Disabilities*. New York, NY: Guilford Press.
- Costa, A. L., & Kallick, B. (2007). *Le disposizioni della mente. Come educarle insegnando*. Roma: LAS.
- Curwen, M., Miller, R., White-Smith, K., & Calfee, R. (2010). Increasing Teachers' Metacognition Develops Students' Higher Learning during Content Area Literacy Instruction: Findings from the Read-Write Cycle Project. *Issues in Teacher Education*, 19(2), 127-151.
- De Beni, R., Cornoldi, C., Carretti, B., & Meneghetti, C. (2003). *Nuova guida alla comprensione del testo*. Trento: Erickson.
- De Beni, R., & Pazzaglia, F. (1998). *La teoria metacognitiva applicata alla comprensione della lettura: dalla riflessione sulle conoscenze all'introduzione di variabili emotivo-motivazionali*. In Albanese, O., Doudin, P., & Martin, D. (Eds.). *Metacognizione ed educazione. Processi, apprendimenti, strumenti* (pp. 161-185). Milano: FrancoAngeli.
- De Boer, H., Donker-Bergstra, A. S., & Konstons, D. D. N. M. (2012). *Effective strategies for self-regulated learning: A meta-analysis*. Gronings Instituut voor Onderzoek van Onderwijs, Rijksuniversiteit Groningen, Groningen.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Una formula per la misurazione oggettiva della difficoltà di comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti. Uso valutativo e uso didattico. *La matematica e la sua didattica*, 1-2, 59-78.
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 5, 9-43.
- Diamond, A. (2013). Executive functions. *Annual Review of Psychology*, 64, 135–168.
- Dignath, C., & Büttner, G. (2008). Components of fostering self-regulated learning among students. A meta-analysis on intervention studies at primary and secondary school level. *Metacognition and Learning*, 3, 231–264.
- Dignath, C., Büttner, G., & Langfeldt, H. (2008). How can primary school students learn self-regulated learning strategies most effectively? A meta-analysis on self-regulation training programs. *Educational Research Review*, 3, 101–129.
- Edmonds, M. S., Vaughn, S., Wexler, J., Reutebuch, C., Cable, A., Tackett, K. K., & Schnaken-

- berg, J. W. (2009). A Synthesis of Reading Interventions and Effects on Reading Comprehension Outcomes for Older Struggling Readers. *Review of educational research*, 79(1), 262–300.
- Fatmanissa, N. (2019). The linguistic challenges of Mathematics word problems: A research and literature review. *Malaysian Journal of Learning and Instruction (MJLI)*, 79-32.
- Fiorella, L., & Mayer, R. (2015). *Learning as a Generative Activity. Eight Learning Strategies that Promote Understanding*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Fontani, S. (2017). Difficoltà di comprensione testuale. Strategie metacognitive per l'intervento educativo. *Form@re*, 17(2), 89-100.
- Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula* (pp. 33-38). Bologna: Pitagora.
- Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (A cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche* (pp. 211-224). Roma: Aracne.
- Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 38-63.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Hamlett, C. L., & Wang, A. Y. (2015). Is Word-Problem Solving a Form of Text Comprehension?. *Scientific studies of reading: the official journal of the Society for the Scientific Study of Reading*, 19(3), 204–223.
- Fuchs, L. S., Gilbert, J. K., Fuchs, D., Seethaler, P. M., & Martin, B. N. (2018). Text Comprehension and Oral Language as Predictors of Word-Problem Solving: Insights into Word-Problem Solving as a Form of Text Comprehension. *Scientific studies of reading: the official journal of the Society for the Scientific Study of Reading*, 22(2), 152–166.
- Garner, R. (1987). *Metacognition and reading comprehension*. Norwood: Ablex.
- Gentile, M. (2017). Strategie di comprensione nell'apprendimento da testo scritto. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete*, 17(2), 113–129.
- Haller, E., Child, D. A., & Walberg, H. J. (1988). Can comprehension be taught? A quantitative synthesis of "metacognitive" studies. *Educational Researcher*, 17, 5–8.
- Hattie, J. (2016). *Apprendimento visibile, insegnamento efficace*. Trento: Erickson.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London-New York, NY: Routledge.
- Hattie, J., Biggs, J., & Purdie, N. (1996). Effects of learning skills interventions on student learning: a meta-analysis. *Review of Educational Research*, 66, 99–136.
- Huff, J. D., & Nietfeld, J. L. (2009). Using strategy instruction and confidence judgments to improve metacognitive monitoring. *Metacognition and Learning*, 4, 161–176.
- Iwai, Y. (2016). Promoting strategic readers: Insights of preservice teachers' understanding of metacognitive reading strategies. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, 10(1), 1-7.

- Kintsch, W., & Van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363–94.
- Laurito, P. P., Duallo, N. M., & Pecajas, E. S. (2016). Correlation of comprehension skills and mathematical ability in geometry of the students of naval school of fisheries. *International Journal of Engineering Sciences & Research Technology*, 5(8), 1-10.
- Lucangeli, D., Iannelli, M., Franceschini, E., Bommassar, G., & Marchi, S. (2010). *Prime competenze logiche*. Trento: Erickson.
- Lucangeli, D., Tressoldi P. E., & Cendron M. (1998). *SPM. Test di abilità di soluzione dei problemi matematici*. Trento: Erickson.
- Marzano, R. J., Pickering, D. J., & Pollock, J. E. (2001). *Classroom Instruction that Works: Research-based Strategies for Increasing Student Achievement*. Alexandria (Va): ASCD.
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science*, 26, 49-63.
- MacDonald, L. R., & Banes L. C. (2017). More than words: Struggling Readers' Comprehension of Word Problems. *Journal of Teacher Action Research*, 3(3), 24-39.
- McNamara, D. S. (2004). SERT: Self-explanation reading training. *Discourse Processes*, 38, 1–30.
- McNamara, D. S. (2017). Self-Explanation and Reading Strategy Training (SERT) Improves low-knowledge students' science course performance. *Discourse Processes*, 54(7), 479–492.
- Miller, A. C., Davis, N., Gilbert, J. K., Cho, S. J., Toste, J. R., Street, J., & Cutting, L. E. (2014). Novel approaches to examine passage, student, and question effects on reading comprehension. *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(1), 25-35.
- Nicolas C. A. T., & Ematab C. Y. (2018). An Integrative Approach through Reading Comprehension to Enhance Problem Solving Skills of Grade 7 Mathematics Students. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 26(3), 40–64.
- OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. Paris: Pisa, Oecd Publishing.
- Orosco, M. J., & Abdulrahim, N. A. (2018). Examining Comprehension Strategy Instruction With English Learners' Problem Solving: *Study Findings and Educator Preparation Implications*. *Teacher Education and Special Education*, 41(3), 215-228.
- Pazzaglia, F., De Beni, R., & Cristante, F. (1994). *Prova di metacompreensione. Valutazione dell'abilità strategica, della sensibilità al testo e dell'attività di controllo implicate nella comprensione della lettura: manuale con guida alla correzione*. Firenze: Giunti O. S. Organizzazioni Speciali.
- Pearson, P. D. (2009). *The roots of reading comprehension instruction*. In S. E. Israel & G. G. Duffy (Eds.), *Handbook of research on reading comprehension* (pp. 3-31). New York, NY: Routledge.
- Perticone, G. (2009). *Problemi senza problemi*. Trento: Erickson.
- Proudfoot, D. E. (2016). The Effect of a Reading Comprehension Program on Student Achievement in Mathematics. *The International Journal of Cognitive Research in Science, Engineering and Education (IJCRSEE)*, 4(1), 39-48.

- Rumelhart, D. E. (1977). *Toward an interactive model of Reading*. In S. Dornic (Ed.), *Attention and performance* (pp. 573-603). Hillsdale: Erlbaum.
- Rumelhart, D. E. (1984). Understanding understanding. In J. Flood (Ed.), *Understanding reading comprehension: cognition, language, and structure of prose* (pp. 1-20). Newark, NJ: International Reading Association.
- Salihu, L., Aro, M., & Räsänen, P. (2018). Children with learning difficulties in mathematics: Relating mathematics skills and reading comprehension. *Issues in Educational Research*, 28(4), 1024-1038.
- Soto, C., de Blume, A. P. G., Jacovina, M., McNamara, D., Benson, N., & Riffo, B. (2019). Reading comprehension and metacognition: The importance of inferential skills. *Cogent Education*, 6(1), 1–20.
- Spencer, M., Quinn, J., & Wagner, R. K. (2014). Specific reading comprehension disability: major problem, myth, or misnomer?. *Learning Disabilities Research and Practices*, 29, 3–9.
- Tarchi, C. (2015). Fostering reading comprehension of expository texts through the activation of readers' prior knowledge and inference-making skills. *International Journal of Educational Research*, 72, 80–88.
- Tigoli, M. C., & Freccero, E. (2012). *Sviluppare le abilità di comprensione e narrazione*. Trento: Erickson.
- Trincherò, R. (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Milano: FrancoAngeli.
- Trincherò, R. (2018). *Costruire e certificare competenze con il curricolo verticale nel primo ciclo*. Milano: Rizzoli Education.
- Ulu, M. (2017). The Effect of Reading Comprehension and Problem Solving Strategies on Classifying Elementary 4th Grade Students with High and Low Problem Solving Success. *Journal of Education and Training Studies*, 5(6).
- Whitebread, D., Coltman, P., Pasternak, D., Sangster Jokić, C., Grau, V., Bingham, S., Almeqdad, Q., & Demetriou, D. (2008). The development of two observational tools for assessing metacognition and self-regulated learning in young children. *Metacognition and Learning*, 4, 63-85.
- Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci Faber.
- Zanetti, M. A., & Miazza, D. (2004), *La comprensione del testo*, Roma: Carocci.
- Zappaterra, T. (2012). *La lettura non è un ostacolo. Scuola e DSA*. Pisa: Ets.

Autori/Roberto Trincherò e Susanna Piacenza

Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli studi di Torino – Italia
roberto.trincherò@unito.it, susanna.piacenza@unito.it



Esperienze didattiche

DdM

Il labirinto delle finanze: un gioco sull'educazione finanziaria per le scuole secondarie di secondo grado

The maze of finance: a financial literacy game
for upper secondary schools

Giulia Bernardi*, Elena Brambilla^o e Paola Landra*

*Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera

^oLiceo Scientifico Statale Vittorio Veneto – Milano, Italia

*Istituto Professionale di Stato L. Milani – Meda, Italia

Sunto / L'educazione finanziaria è un argomento di sempre maggior interesse al giorno d'oggi, in particolare per la formazione degli studenti delle scuole secondarie, in modo che diventino soggetti attivi e consapevoli nel prendere decisioni in ambito economico e finanziario. All'interno del progetto Edufin@Polimi è stato creato un gioco da proporre nelle scuole secondarie di secondo grado per avvicinare i ragazzi ai concetti principali di matematica finanziaria, come le leggi di capitalizzazione, il rendimento degli investimenti, le condizioni dei prestiti. In questo articolo viene descritta la fase di progettazione del gioco e si riportano i risultati delle prime sperimentazioni realizzate in tre diverse scuole.

Parole chiave: educazione finanziaria; caccia al tesoro; gamification.

Abstract / Nowadays financial literacy is one of the topics in school's curricula that is attracting more attention; a special focus is given to programs for secondary school students that should become active and informed decision makers in the economic and financial setting. Within the project Edufin@Polimi, a game was developed to let students discover some of the main ideas of financial mathematics, such as simple and compound interest, investment, loans rules. In this article we describe the design of this game and report the results of the first experimentations realized in three different upper secondary schools.

Keywords: financial literacy; treasure hunt; gamification.

1 L'educazione finanziaria a scuola

Negli ultimi anni, il tema delle conoscenze e abilità finanziarie dei cittadini è diventato un argomento rilevante all'interno del dibattito pubblico, soprattutto a fronte delle crisi economiche delle banche nel 2008 e della nascita di nuovi strumenti finanziari di sempre maggiore complessità.

A conferma della crescente importanza di questo tema, già dal 2012 l'OCSE ha inserito in alcune delle nazioni coinvolte nelle rilevazioni PISA l'ambito *financial literacy* (OECD, 2014).

L'alfabetizzazione finanziaria o *financial literacy* è definita come

«il processo per mezzo del quale i consumatori di prodotti finanziari migliorano la loro comprensione su prodotti, concetti e rischi finanziari e, attraverso l'informazione, l'istruzione e consigli oggettivi, sviluppano le capacità e la fiducia

nella propria consapevolezza dei rischi e delle opportunità finanziarie, di sapere dove chiedere aiuto, e intraprendere altre azioni efficaci per migliorare il proprio benessere economico».

(INVALSI, 2017, p. 5)

L'obiettivo dell'educazione finanziaria non è quindi solo la trasmissione dei concetti, ma anche la promozione dell'abilità di prendere decisioni consapevoli in ambito finanziario ed economico (Lusardi, 2015) per migliorare il benessere finanziario, portando benefici non solo ai singoli individui ma anche alla società, in modo che i giovani si sentano in grado di partecipare attivamente alla vita economica.

Una scarsa conoscenza dei temi legati agli aspetti economici e finanziari rende gli studenti, e quindi i futuri cittadini, soggetti poco consapevoli nel prendere decisioni in questo ambito e, dunque, più esposti ai rischi (Lusardi 2012). Alcuni studi (Lusardi, 2015; INVALSI, 2017), hanno indicato quanto siano rilevanti nei risultati dei test su questi argomenti anche fattori non cognitivi, ma dipendenti dal contesto socio-economico e familiare. Ad esempio, molte delle conoscenze finanziarie dei giovani vengono acquisite soprattutto dalle conversazioni con genitori e amici. Per questo motivo Lusardi, Mitchell e Curto (2010) sottolineano quanto sia importante inserire programmi di educazione finanziaria in tutte le scuole, per poter raggiungere anche quegli studenti che sono più svantaggiati perché non frequentano abitualmente persone adulte con conoscenze in ambito finanziario, e come sia meglio offrire programmi di educazione finanziaria durante il periodo scolastico, prima che gli individui si trovino ad essere coinvolti nell'assunzione di responsabilità di carattere finanziario, quali la sottoscrizione di prestiti, mutui e contratti di vario tipo.

Le caratteristiche dei programmi di educazione finanziaria fanno la differenza sui risultati ottenuti: Kaiser e Menkhoff (2017) notano che un effetto positivo si ha quando l'educazione finanziaria avviene in un "teachable moment", cioè quando l'insegnamento è associato a una situazione in cui si devono prendere decisioni di immediata rilevanza per il gruppo.

A livello internazionale, le iniziative da parte delle istituzioni per far fronte a questa necessità sono state diverse. Ad esempio, nel 2016 in Svizzera è stata fondata l'Associazione FinanceMission¹ da parte di due associazioni di insegnanti (LCH, Dachverband Lehrerinnen und Lehrer Schweiz e SER, Syndicat des Enseignants Romands) e dall'Unione delle Banche Cantionali Svizzere (UBCS); in Italia nel 2017 è stato fondato su decreto del Ministro dell'economia e delle finanze, di concerto con il Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca e con quello dello sviluppo economico, il Comitato per l'Educazione Finanziaria² con lo scopo di coordinare le diverse iniziative volte a promuovere l'educazione finanziaria tra la popolazione.

In questo filone di iniziative è nato anche il progetto Edufin@Polimi, coordinato dal gruppo di ricerca in Finanza Qualitativa del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano, che ha come scopo la diffusione di progetti di educazione finanziaria, con una particolare attenzione agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado³. Le proposte sviluppate all'interno di questo progetto sono varie: un sito con alcune pagine dedicate a temi specifici del mondo della finanza (<https://www.>

1

2

3

1. Il sito del progetto è <https://financemission.ch/?lang=it>.

2. Il sito del comitato è <http://www.quellocheconta.gov.it/it/chi-siamo/comitato/>.

3. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

imparalafinanza.it/), un percorso didattico per permettere ai docenti di matematica di introdurre alcuni argomenti di matematica finanziaria utilizzando modalità didattiche innovative, come la flipped classroom (Bergmann & Sams, 2012), e un gioco, sotto forma di caccia al tesoro, che consenta di introdurre questi temi facendo avvicinare gli studenti al mondo della finanza con un approccio ludico e informale. La prima caccia al tesoro a tema finanziario è stata realizzata nell'ottobre 2017, mese dedicato all'educazione finanziaria presso il Politecnico di Milano, e ha coinvolto una cinquantina di studenti dell'ultimo anno di alcuni licei classici. A partire da questa esperienza, ripetuta l'anno successivo, è stato avviato un progetto più ampio per realizzare "il labirinto delle finanze", un gioco sui temi dell'educazione finanziaria da proporre nelle scuole secondarie di secondo grado del territorio, che fosse realizzabile autonomamente dai docenti interessati, e che si potesse rivolgere a tutte le classi, di qualsiasi indirizzo scolastico.

In questo articolo descriviamo i primi mesi di questa esperienza di creazione e realizzazione del gioco "il labirinto delle finanze", in particolare la fase di progettazione che ha previsto la collaborazione tra ricercatori e insegnanti delle scuole secondarie di secondo grado e le prime sperimentazioni realizzate nella primavera del 2019 in alcune classi di tre diversi istituti.

2 Il gioco "il labirinto delle finanze"

Da un primo momento esplorativo di confronto tra ricercatori e insegnanti, è emersa in primo luogo la difficoltà da parte dei docenti nello stabilire come affrontare con i propri studenti i temi legati alla matematica finanziaria. Effettivamente si tratta di argomenti complessi, per i quali spesso il docente non possiede la preparazione specifica necessaria e che sono difficili da inserire in una programmazione annuale già densa. Per strutturare la nostra proposta abbiamo scelto di seguire l'esempio di Aprea, Schultheis e Stolle (2018), che suggerisce di sfruttare un approccio ludico, vicino al mondo della *gamification*⁴, interessante per le seguenti ragioni:

- introduce una variazione nella routine scolastica, che gli alunni vivono in particolari momenti come pesante e oppressiva;
- concentra in un lasso di tempo ben definito e contenuto le ore destinate allo sviluppo dell'argomento specifico (matematica finanziaria);
- il gioco, organizzato in piccole squadre, permette di mescolare i compagni di classe, e con essi le abilità, le competenze, le conoscenze, le preferenze, creando spazio per lasciare emergere talenti non visibili durante le ore di lezione e sensibilità e tratti umani tenuti nascosti;
- il gioco digitale promuove il divertimento, motiva e stimola un atteggiamento positivo verso la materia da apprendere.

A partire da queste considerazioni è stato realizzato un gioco a squadre, in cui gli studenti potessero avvicinarsi ai temi della matematica finanziaria. Per quanto riguarda la progettazione del gioco, si sono presi in considerazione diversi aspetti: la

4. Il termine *gamification* deriva dall'inglese *game* (gioco) e indica l'utilizzo di elementi tipici del gioco (come punti da ottenere, competizione con gli altri, regole da seguire) in contesti non ludici.

necessità di correggere velocemente le risposte inserite, la possibilità di adattare il gioco a scuole con spazi e ambienti diversi, la possibilità di coinvolgere anche docenti non di matematica per la supervisione del gioco (richiesta fatta dai docenti di matematica stessi, soprattutto nel caso di classi numerose, per poter svolgere il gioco in spazi diversi ma avere sempre un unico docente supervisore). Nel seguito di questo paragrafo spiegheremo le scelte che abbiamo compiuto entrando nel dettaglio della descrizione del gioco, delle modalità di svolgimento e degli argomenti di matematica finanziaria che sono trattati.

2.1 La struttura del gioco

Il gioco è strutturato in quattro tappe di cui una doppia, in modo che ad ogni tappa venga affrontato un argomento diverso (vedi Tabella 1). Per poter rendere il gioco replicabile facilmente in ogni scuola, indipendentemente dagli spazi a disposizione, si sono stabiliti a priori i nomi delle tappe relativi a luoghi: Aula, Banca, Casa, Negozio. Quando viene organizzato il gioco in una scuola, il docente deve associare queste tappe ai luoghi reali che ha a disposizione per lo svolgimento del gioco che assumono metaforicamente tali significati; ad esempio, la palestra può diventare la "Banca", la biblioteca il "Negozio" ecc. Per sapere quali sono gli spazi a disposizione dello svolgimento del gioco, all'inizio dell'attività ogni squadra riceve una cartina della propria scuola in cui alcuni luoghi sono indicati con i nomi che indicano le possibili tappe. Per rendere più complesso il gioco, oltre alle quattro tappe che realmente devono essere visitate dai giocatori durante la caccia al tesoro, abbiamo previsto anche l'inserimento di "tappe finte" con la funzione di distrattori (Agenzia, Edicola, Parco, Ristorante) che nel corretto svolgimento del gioco non dovrebbero essere raggiunte dalle squadre.

A ogni tappa è prevista la presenza di un docente responsabile il cui compito è di accogliere le squadre e distribuire il materiale. Ogni squadra riceve quindi, dopo essere arrivata nel luogo corretto, un documento con alcune spiegazioni che dovrebbero permettere di acquisire le conoscenze e le informazioni necessarie per rispondere alle domande della tappa. Le spiegazioni e le informazioni per rispondere alle domande sono presentate con diverse modalità: paragrafi di testi, grafici, tabelle, brevi video da guardare con il proprio smartphone. Al fondo di ogni scheda di materiali è presente un riquadro con un QR Code da cui è possibile accedere al formulario online che contiene le domande relative alla tappa e in cui i giocatori possono inserire le risposte (Figura 1).

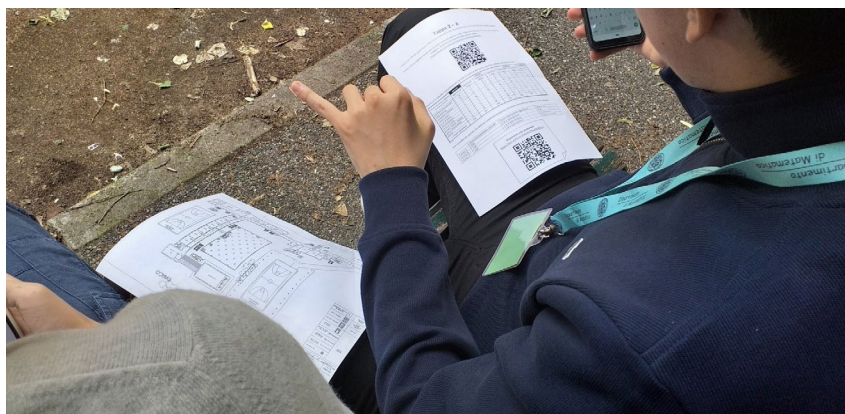


Figura 1
Un esempio di materiale ricevuto in una tappa. Sul foglio ci sono alcune spiegazioni espresse in forma testuale e tramite un video accessibile con il QR Code. Il QR Code in fondo alla pagina permette di accedere alle domande del formulario alle quali occorre rispondere.

Ogni squadra deve inserire le risposte nel formulario online, che è stato creato utilizzando Google Forms⁵. Nel nostro gioco le domande sono a risposta multipla o a risposta aperta univoca (nei casi in cui la risposta è un dato numerico); ad ogni domanda è assegnato un punto, in modo che il punteggio massimo per ogni tappa corrisponda al numero di domande. La struttura del modulo creato con Google Forms permette ai giocatori di lavorare in autonomia nell'inserimento delle risposte, di vedere in modo automatico il punteggio ottenuto al termine dell'inserimento e di verificare quali sono le risposte sbagliate.

Prima di rispondere alle domande specifiche di una tappa, ogni squadra deve inserire il suo nome, scelto all'inizio del gioco, e il numero del tentativo, per indicare quante volte la squadra ha già provato a rispondere alle domande. Nel regolamento del gioco abbiamo previsto che una squadra non possa passare alla tappa successiva finché non abbia realizzato il punteggio massimo, così da portare gli studenti a rivedere i propri errori, a ritornare sui vari concetti esposti fino ad individuare le risposte corrette. Questo sistema di correzione automatica rende gli studenti più autonomi e indipendenti nel processo di autocorrezione, oltre a permettere di avere anche docenti di diverse materie come supervisori delle tappe e a velocizzare il processo di correzione.

Una volta realizzato il punteggio massimo, il capitano della squadra lo mostra al docente responsabile della tappa che consegna un indizio per raggiungere la tappa successiva.

Visto che è il docente stesso a consegnare l'indizio successivo, esiste la possibilità di modificare la regola per cui occorre raggiungere il punteggio massimo per accedere alla tappa successiva, stabilendo invece un punteggio minore da raggiungere. Questa modifica può essere gestita facilmente dal responsabile della tappa nel momento in cui distribuisce il materiale, con il semplice avviso di quale sia il punteggio da ottenere per proseguire il gioco. I docenti possono fare questa variazione, per velocizzare il gioco in caso di rallentamenti alle tappe precedenti o per alleggerire le ultime tappe in caso di necessità, ad esempio per calo dell'attenzione o della motivazione da parte degli studenti verso le ultime fasi del gioco.

L'indizio che le squadre ricevono per poter raggiungere la tappa successiva è di natura non finanziaria: un indovinello, un anagramma o un messaggio cifrato; è stata fatta questa scelta per rendere il gioco ancora più coinvolgente e inserire anche degli elementi puramente ludici (vedi *Allegato 1*). La risposta di ogni indizio fornisce il nome della tappa successiva. Ad esempio, dopo aver completato la tappa "Casa" le squadre ricevevano questo indizio:

Questo anagramma dovrete dedurre,
per sapere dove il gioco vi vuole condurre:
(6,2,7)
AZIONATE INDEGNO

La soluzione dell'anagramma, con l'indicazione della tappa successiva, è "Andate in negozio".

5. Abbiamo scelto questo strumento perché presenta diversi vantaggi, permette infatti di creare diversi tipi di domanda (a risposta multipla, aperte, con griglie ecc.); inserire automaticamente la risposta corretta; assegnare dei punteggi rispetto alle risposte; accedere facilmente ai questionari tramite un link senza che sia necessario registrarsi; salvare automaticamente tutte le risposte in tempo reale.

2.2 Gli argomenti

La progettazione del gioco è avvenuta soprattutto a partire dal materiale presente nel MOOC⁶ "Finanza per tutti" creato dal Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano. In questo corso online, rivolto alla cittadinanza, sono affrontati diversi temi di matematica finanziaria in modo accessibile anche per un pubblico di non esperti. La prima settimana del MOOC è dedicata ai concetti di base: il conto corrente, le leggi di capitalizzazione, i tassi di interesse di azioni e obbligazioni, i costi di prestiti, finanziamenti e mutui. La seconda settimana invece riguarda in modo più specifico i rischi collegati agli investimenti, affrontando temi come la diversificazione, la psicologia delle scelte di investimento, le assicurazioni e le misure di rischio. I temi affrontati nell'ultima settimana di corso invece riguardano il risparmio, in particolare i prodotti offerti da banche e istituzioni, per cui si parla di profilatura del rischio, derivati, fondi comuni di investimento, fondi pensione.

A partire da questo materiale abbiamo deciso di selezionare i temi che potessero essere più vicini alla realtà degli studenti di scuola superiore e per cui ci fossero degli argomenti rilevanti anche dal punto di vista matematico. Nella Tabella 1 abbiamo riassunto gli argomenti presenti ad ogni tappa del gioco.

Nome della tappa	Argomento	Contenuti
#1 – Aula	Ripasso	Scrivere rappresentazioni equivalenti dei numeri in forma percentuale, frazionaria o decimale. Leggere e interpretare grafici.
#2A – Banca 1	Conto corrente	Calcolare il costo del conto corrente rispetto ad alcune offerte e alcune tipologie di utilizzo.
#2B – Banca 2	Leggi di capitalizzazione	Utilizzare le leggi di capitalizzazione semplice e composta per calcolare il montante con orizzonti temporali di uno o più anni.
#3 – Casa	Investimenti	Valutare la rischiosità di un investimento e calcolare il rendimento.
#4 – Negozio	Prestiti	Scegliere le condizioni di prestito più convenienti e confrontare prestiti con tassi di interesse su orizzonti temporali minori dell'anno.

Tabella 1
Le tappe del gioco e gli argomenti affrontati.

2.2.1 La prima tappa: "Aula"

Volendo progettare un gioco adatto a tutte le classi e a tutti gli indirizzi, abbiamo cercato di far sì che i prerequisiti matematici fossero relativi ad argomenti già affrontati durante gli anni di scuola precedenti: percentuali, lettura dei grafici, utilizzo della calcolatrice, interpretazione di formule letterali, nozioni di base di probabilità. Abbiamo deciso di inserire una prima tappa in cui le domande fossero relative a questi argomenti, in modo da permettere un ripasso generale dei concetti di base e sottolineare gli aspetti matematici da tenere più in considerazione nel resto del gio-

6. La sigla MOOC sta per Massive Open Online Course e indica un corso online gratuito accessibile a tutti. Il corso di cui si parla in questo articolo è accessibile dalla piattaforma <https://www.pok.polimi.it/>.

co. Le domande presenti in questa prima tappa (vedi **Allegato 2**) sono otto a risposta chiusa, relative appunto al calcolo delle percentuali, all'inversione di una formula e alla lettura di un grafico in cui due linee spezzate rappresentano l'andamento dei costi di due biglietti aerei nel corso di alcuni mesi.

2.2.2 La seconda tappa: "Banca"

La seconda tappa è una tappa doppia in cui vengono affrontati due argomenti diversi: i costi dei conti correnti e le leggi di capitalizzazione.

In particolare, la tappa 2A è dedicata a stabilire il costo di gestione di un conto corrente considerando le spese fisse e le spese variabili, che dipendono dal numero di operazioni effettuate. Tra il materiale a disposizione degli studenti è stato inserito un breve video in cui viene spiegato che cos'è l'indicatore sintetico di costo (ISC)⁷ di un conto corrente e viene fornito un esempio di calcolo di questo indice. Le domande (vedi **Allegato 3**) chiedono di confrontare le condizioni di tre diversi conti correnti per individuare quale sia la più vantaggiosa a seconda del profilo dell'utente, quindi del numero di operazioni effettuate. Dal punto di vista matematico si tratta di risolvere alcune equazioni e disequazioni di primo grado, dato che il costo del conto corrente include un costo fisso annuale e un costo variabile dipendente dal numero di operazioni e può quindi essere rappresentato da funzioni lineari a tratti.

Va considerato che per alcuni argomenti di matematica finanziaria sono necessarie conoscenze matematiche più avanzate, ma in questi casi abbiamo cercato di semplificare le domande per far sì che tali argomenti fossero ugualmente accessibili; scelta che è stata fatta ad esempio per quanto riguarda l'argomento delle leggi di capitalizzazione, trattate nella tappa 2B.

Le leggi di capitalizzazione permettono di calcolare il *montante* (M), cioè il valore finale, di un investimento di denaro, solitamente indicato con C e chiamato *capitale iniziale*, depositato per un periodo t di tempo a un determinato tasso di interesse i . Le due leggi di capitalizzazione presentate in questo gioco sono quella di *capitalizzazione semplice*, in cui gli interessi vengono calcolati solo sul capitale iniziale, e quella di *capitalizzazione composta*, in cui gli interessi vengono calcolati ogni volta sul montante attuale, cioè non solo sul capitale iniziale ma anche sugli interessi già maturati fino a quel periodo.

Dato un capitale iniziale C e un tasso di interesse annuale i , la formula per il calcolo del montante dopo t anni con la legge di capitalizzazione semplice è

$$M=C(1+it)$$

mentre con la legge di capitalizzazione composta è

$$M=C(1+i)^t.$$

Come si può notare, la legge di capitalizzazione semplice è una legge lineare, mentre quella di capitalizzazione composta è esponenziale, argomento che non viene trattato nel primo biennio nelle scuole secondarie di secondo grado italiane.

Per evitare che gli studenti si trovassero in difficoltà su aspetti matematici, nel filmato⁸ in cui si parla di leggi di capitalizzazione, la formula è introdotta in modo ricorsivo, calcolando il montante per il primo anno con il tasso di interesse i e poi calcolando il montante per il secondo anno applicando il tasso di interesse i al nuovo

7. Il video sull'indicatore sintetico di costo è visibile al link: <https://www.youtube.com/watch?v=X15GcvDkR0A&>

8. Il video sulle leggi di capitalizzazione è visibile al link: <https://www.youtube.com/watch?v=mf4RwxJxKQ0>

montante ecc. In questo modo non è necessario conoscere la funzione esponenziale, che anzi può essere introdotta proprio a partire da queste osservazioni, ma è sufficiente avere dimestichezza con il calcolo aritmetico di base. Le domande relative a questo argomento (vedi Allegato 4) chiedono di confrontare le due leggi di capitalizzazione calcolando il montante per un investimento iniziale di 100 €, con un tasso annuale del 4% dopo un anno e dopo tre anni.

2.2.3 La terza tappa “Casa”

L'argomento della tappa successiva riguarda gli investimenti. Il materiale a disposizione dei giocatori è una scheda (vedi Allegato 5) con alcuni grafici che rappresentano l'andamento di titoli azionari, un breve brano riguardante gli strumenti per misurare la rischiosità di un titolo e un altro paragrafo per introdurre un video⁹ sul tema dell'avversione o propensione al rischio delle persone. I due concetti fondamentali su cui è incentrata la tappa sono quelli di *rendimento* e *volatilità*.

9

Il rendimento si calcola rispetto ad un certo periodo di tempo ed è definito come il rapporto tra la variazione del prezzo del titolo tra l'inizio e la fine del periodo e il prezzo ad inizio periodo. La volatilità del titolo è la misura di quanto in media i rendimenti si allontanano dal rendimento medio, ovvero la deviazione standard dei rendimenti. Tanto più il rendimento si discosta dal suo valor medio, tanto più è elevata la volatilità e il titolo è considerato rischioso.

Il tema della valutazione del rischio di investimenti e prestiti è un tema molto complesso; abbiamo deciso comunque di mantenerlo in questa versione semplificata all'interno del gioco in quanto di grande attualità e perché coinvolge diversi aspetti rilevanti anche dal punto di vista matematico: interpretazione dei grafici, valutazioni probabilistiche e calcolo di indici statistici. Ad esempio, a partire dall'osservazione del grafico in Figura 2 viene chiesto di calcolare il rendimento di un'azione del titolo Appela tra il 2014 e il 2019 o in quale anno un'azione del titolo Samugu acquistata nel 2017 risulta redditizia. Per rispondere a queste domande gli studenti devono mobilitare diverse competenze: comprendere le spiegazioni presenti sulla scheda per estrapolare il significato di rendimento, tradurre tale concetto in linguaggio matematico, recuperare i dati numerici dal grafico ecc.

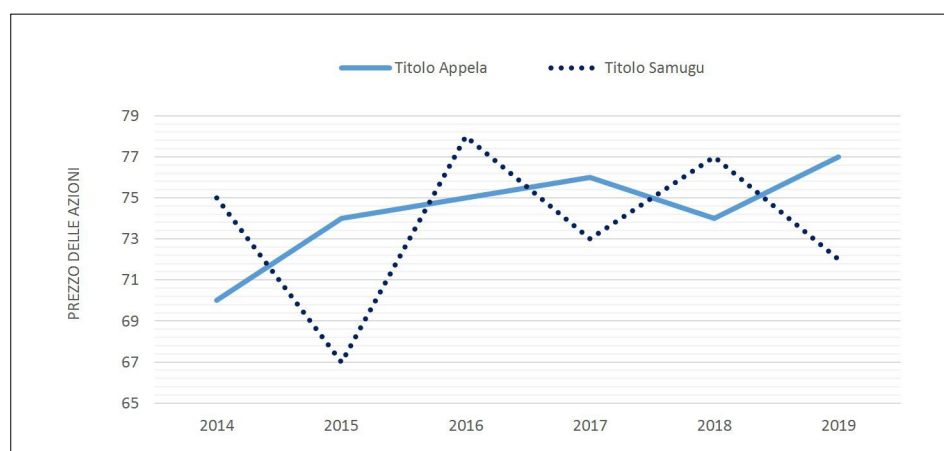


Figura 2
Uno dei grafici presenti
nelle domande della terza
tappa.

9. Il video sull'avversione al rischio è visibile al link: https://www.youtube.com/watch?v=kP4gSR_bgGo.

2.3.4 La quarta tappa: “Negozio”

L'ultima tappa del gioco è dedicata al mondo dei prestiti, in particolare a due argomenti diversi: il significato delle sigle TAN e TAEG, presenti nelle pubblicità dei finanziamenti, e il confronto tra prestiti con orizzonti temporali diversi, con un accenno al tema dell'usura. Per quanto riguarda le condizioni generali dei prestiti, il tema non può ovviamente essere esaurito in una semplice tappa di gioco, ma abbiamo scelto di inserirlo almeno per porre l'attenzione degli studenti su questa tematica e fornire degli stimoli e dei materiali per un eventuale approfondimento. Dopo aver visto delle pubblicità di alcuni prestiti e avere a disposizione un link a una pagina web di approfondimento¹⁰, i giocatori devono rispondere ad alcune domande in cui viene chiesto di esplicitare le definizioni di queste sigle, di riflettere sulle condizioni offerte dalle tre pubblicità e confrontarle tra loro (vedi **Allegato 6**). Il secondo argomento viene presentato attraverso un video¹¹, in cui c'è un esempio di applicazione della legge di capitalizzazione composta con un tasso di interesse su un orizzonte temporale diverso dall'anno. Le domande riguardano proprio il calcolo del valore del prestito nel caso in cui i tassi di interesse siano il 4,5% quadrimestrale o il 4% trimestrale.

10

11

3 La sperimentazione

In questo paragrafo raccontiamo le osservazioni emerse durante le prime sperimentazioni del gioco, svolte tra aprile e maggio 2019 in tre diverse scuole secondarie di secondo grado (un liceo scientifico, un istituto professionale e un istituto tecnico commerciale) con sei classi coinvolte in totale. In particolare, hanno partecipato in quattro momenti diversi:

- una classe seconda di un liceo scientifico (20 studenti, divisi in 7 squadre);
- due classi seconde di un istituto professionale (31 studenti, divisi in 8 squadre);
- una classe seconda di un liceo scientifico (22 studenti, divisi in 8 squadre);
- una classe terza e una classe quarta di un istituto tecnico commerciale (40 studenti, divisi in 10 squadre).

Durante ogni sperimentazione si sono dovuti modulare in modo differente gli aspetti logistici e organizzativi, a seconda della disponibilità della scuola e dei docenti coinvolti. Ad esempio, quando il gioco è stato proposto con le classi del liceo scientifico sono state formate squadre da 2 o 3 giocatori, mentre negli altri casi le squadre erano costituite da 3 o 4 studenti. Le squadre sono sempre state formate tramite un sorteggio casuale, ma durante la sperimentazione con le classi dell'istituto commerciale sono state create in modo che metà dei componenti della squadra fosse di terza e metà fosse di quarta, visto che quest'ultima classe aveva già svolto alcune lezioni di matematica finanziaria e l'obiettivo era creare squadre in cui la conoscenza degli studenti su questi argomenti fosse più omogenea possibile.

Come metodologia utilizzata per tener traccia dell'esperienza, oltre all'osservazione da parte dei ricercatori, abbiamo raccolto le risposte fornite dagli studenti alle

10. La pagina web riguardante le sigle dei prestiti è <https://www.imparalafinanza.it/TAN-e-TAEG/>.

11. Il video in cui viene mostrato un esempio di utilizzo della legge di capitalizzazione composta con un orizzonte temporale inferiore all'anno è visibile al link: <https://www.youtube.com/watch?v=99JnELnCTnw>.

domande di ogni tappa, sia quelle corrette che quelle sbagliate, il numero di tentativi effettuati, i commenti degli studenti al termine del gioco, raccolti tramite un questionario anonimo in cui è stato chiesto un aspetto positivo e uno negativo, e i commenti degli insegnanti che hanno proposto l'iniziativa alle loro classi.

3.1 Osservazioni su tempi, materiali e spazi

Per quanto riguarda i tempi di realizzazione di questa proposta, gli insegnanti avevano messo a disposizione due ore di lezione in cui includere tutto l'intervento: la fase di spiegazione iniziale, la formazione delle squadre, la fase di gioco e la premiazione finale. Non sempre questo tempo è stato sufficiente, soprattutto perché la fase di preparazione iniziale in alcuni casi è durata più del previsto e la fase di gioco vera e propria è durata tra i 90 e i 120 minuti. In alcuni casi quindi è stato necessario occupare anche il tempo dell'intervallo o parte delle ore di lezioni successive.

Il gioco è stato proposto in diversi momenti della giornata a seconda della disponibilità dei docenti: durante le prime ore, nelle ore centrali della mattinata o nelle ultime due ore. Durante due sperimentazioni, al liceo scientifico e presso l'istituto professionale, il gioco si è sovrapposto con l'orario dell'intervallo ma gli studenti sono rimasti coinvolti nelle attività, accettando di non interrompere l'attività e di recuperare la pausa alla fine del gioco. Durante la seconda sperimentazione al liceo scientifico il gioco è stato proposto nelle ultime due ore della mattinata, situazione che abbiamo trovato meno efficace delle altre, vista la preoccupazione degli studenti di dover uscire da scuola per andare a casa e quindi la fretta nel concludere l'ultima tappa.

Quando la sperimentazione ha coinvolto una sola classe, la fase di gioco è stata gestita solo dall'insegnante di matematica della classe e dal ricercatore esterno, mentre con due classi sono stati coinvolti anche altri docenti di supporto all'attività che avevano il compito di trovarsi in una tappa, distribuire il materiale, controllare le risposte e fornire l'indizio successivo. Abbiamo notato che gli studenti sono rimasti colpiti nel vedere anche altri docenti coinvolti, oltre all'insegnante di matematica, e reagivano positivamente ogni volta che incontravano un nuovo insegnante a una tappa.

Per quanto riguarda i materiali a disposizione delle squadre, ogni gruppo poteva usare i propri smartphone per guardare i video, inserire le risposte e utilizzare la calcolatrice. Nonostante prima dell'inizio del gioco avessimo ricordato di portare una penna per scrivere, pochissime squadre hanno autonomamente iniziato a prendere appunti durante la visione dei video, trascrivere le formule o segnarsi i conti da svolgere. Molte squadre hanno utilizzato carta e penna solo dopo il consiglio esplicito da parte dei docenti; l'unico caso in cui non è stato necessario questo consiglio è stata durante la seconda sperimentazione al liceo scientifico quando come gadget di partecipazione è stato fornito a tutti gli studenti un block notes e una penna. In questo caso gli studenti hanno utilizzato spontaneamente il block notes fin da subito per fare calcoli, segnare le risposte, appuntarsi le informazioni più importanti.

Infine, per quanto riguarda gli spazi scelti per ospitare le tappe del gioco, a seconda della disponibilità dell'istituto sono state fatte due scelte diverse: al liceo scientifico tutte le tappe erano nel cortile della scuola; negli altri casi, invece, le tappe erano luoghi sia interni che esterni (aule rimaste libere, biblioteca, bar, aula delle fotocopie ecc.). Ogni volta che una squadra arrivava ad una tappa doveva fermarsi per qualche minuto per guardare i video, leggere i testi e rispondere alle domande. Abbiamo notato che quando le tappe erano ospitate in luoghi più "scolastici", come ad esempio la biblioteca, l'aula di classe, la dispersione e distrazione degli studenti era minore rispetto alle

tappe situate in corridoio o all'esterno, soprattutto nell'affrontare le domande più impegnative. Se all'inizio del gioco trovarsi in cortile a fare matematica è risultato un elemento nuovo e stimolante, successivamente gli studenti sono sembrati più a loro agio nell'affrontare le tappe più difficili in luoghi dove potessero sedersi, appoggiarsi a un tavolo, avere a disposizione spazio per discutere, scrivere e confrontarsi.

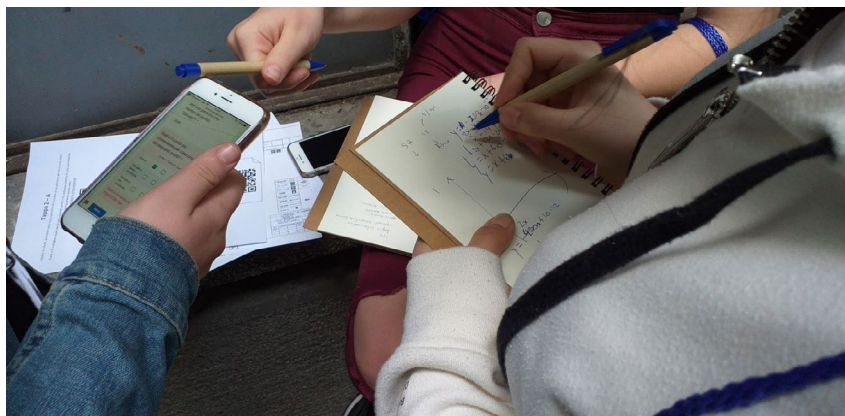


Figura 3
Alcune studentesse
mentre cercano le risposte
alla seconda tappa.

3.2 Le difficoltà riscontrate

In tutte le giornate, una delle maggiori difficoltà incontrate dagli studenti è stata di "entrare" nello spirito del gioco. Prima di iniziare il gioco gli studenti avevano ricevuto diverse indicazioni sull'attività che avrebbero realizzato; i docenti avevano anticipato quali sarebbero state le modalità del gioco, chiesto agli alunni di portare con sé gli smartphone con la possibilità di connettersi, ricordato di portare una penna e dei fogli per poter prender appunti in caso di necessità.

Gli studenti sono sembrati attivi e interessati alla proposta, ma spaesati nel momento in cui si sono trovati a confrontarsi con fogli e cellulari, apparentemente disorientati dalla situazione in cui sono stati posti, diversa dalle lezioni a cui sono abituati.

Nonostante la familiarità con gli strumenti tecnologici nella vita quotidiana, spesso i ragazzi non sembrano essere abituati a usare gli smartphone in ambito scolastico. Ad esempio, una cosa che abbiamo osservato durante il gioco è stata che solo alcune squadre sono andate oltre l'indicazione iniziale di avere almeno un cellulare per squadra e hanno iniziato a usare più smartphone con funzioni diverse (per vedere i video, per fare i calcoli, per inserire le risposte ecc.) con il risultato di perdere meno tempo e rendere il gioco più veloce. La maggior parte delle squadre ha utilizzato un solo cellulare, perdendo molto tempo nel continuo aprire nuove finestre e con delle difficoltà di collaborazione e coinvolgimento da parte di tutti i componenti del gruppo. Questo è successo anche nelle scuole in cui era a disposizione la connessione Wi-Fi dell'istituto, per cui gli studenti non dovevano necessariamente utilizzare i loro dati per la connessione. In generale, l'utilizzo del cellulare da parte degli studenti per inserire le risposte non è sembrato così naturale come ci aspettavamo, forse anche a causa dello strumento di Google Forms, poco conosciuto e mai utilizzato prima dai ragazzi. Come abbiamo già osservato, la reticenza nell'utilizzare penne e supporti cartacei, oltre a quelli elettronici, si è manifestata in quasi tutte le sperimentazioni, rendendo difficile recuperare dai video le informazioni essenziali per fornire le risposte, difficoltà derivante anche da un ascolto superficiale dei contenuti.

Nel seguito di questo paragrafo vogliamo analizzare alcune delle domande dei que-

stonari somministrati agli allievi, fornendo delle possibili interpretazioni degli errori commessi dai ragazzi. Come ci si potrebbe aspettare, le domande chiuse sono risultate mediamente più facili rispetto alle domande aperte univoche, in cui era necessario svolgere un calcolo e inserire la risposta numerica. Per questa analisi abbiamo selezionato per ognuna delle tappe alcune domande significative, dal nostro punto di vista, per i contenuti e per la tipologia di errori presenti. Abbiamo trascurato la prima tappa, "Aula", perché le domande riguardavano argomenti di matematica già noti agli studenti e non introdotti tramite questo gioco.

Per poter interpretare al meglio i numeri che forniremo ricordiamo che nei file delle risposte che abbiamo raccolto da Google Forms sono presenti tutti i tentativi di risposta inseriti dalle squadre che hanno partecipato alla sperimentazione e che ogni squadra aveva a disposizione più di un tentativo. In questi dati notiamo che alcune squadre hanno inserito più di una volta risposte identiche (vedi par. 3.2.2), non sappiamo se inconsapevolmente, per mancanza di dimestichezza con lo strumento, per problemi di connessione, convinzione nella risposta o difficoltà di coordinamento tra i membri del gruppo. Per queste ragioni preferiamo evitare di fornire dati in percentuale del numero di risposte corrette rispetto al numero di risposte inserite, essendo questo dato poco rappresentativo, ma ci concentreremo solo sulle risposte sbagliate e sulle diverse tipologie di errore, fornendo delle possibili interpretazioni. La nostra analisi vuole focalizzarsi quindi più sugli aspetti qualitativi degli errori presenti piuttosto che su quelli quantitativi.

3.2.1 Il calcolo dell'ISC

Iniziamo la nostra analisi dalla tappa 2A (vedi Allegato 3) relativa ai costi di gestione dei conti correnti e in particolare dalle due domande aperte che riportiamo inserendo tra parentesi anche la risposta corretta:

1. Qual è l'ISC del conto A per una persona che rientra nel profilo "Giovani"? [10 €]
2. Qual è l'ISC del conto C per una persona che rientra nel profilo "Giovani"? [20 €]

Per rispondere è necessario far riferimento ai dati presenti sulla scheda consegnata in questa tappa. In particolare all'informazione che al profilo giovani corrispondono 164 operazioni annue e ai costi delle due offerte (riportate nella Tabella 2).

	Operazioni gratuite annue	Costo operazioni aggiuntive	Canone fisso
Conto A	200	2 € a operazione	10 € annuale
Conto B	130	1 € a operazione	1 € a bimestre
Conto C	150	1 € a operazione	1,50 € a trimestre

Tabella 2
La tabella presente nella tappa "Banca" per confrontare le condizioni dei conti correnti.

Nel video segnalato nel materiale di questa tappa viene spiegato che cosa sia l'ISC e mostrato un esempio per il suo calcolo, proprio nel caso di una persona che rientra nel profilo "Giovani" per un conto corrente in cui ci sono 1 € di spese fisse mensili, 50 operazioni gratuite all'anno e il costo 0,50 € per ogni operazione aggiuntiva (Figura 4).

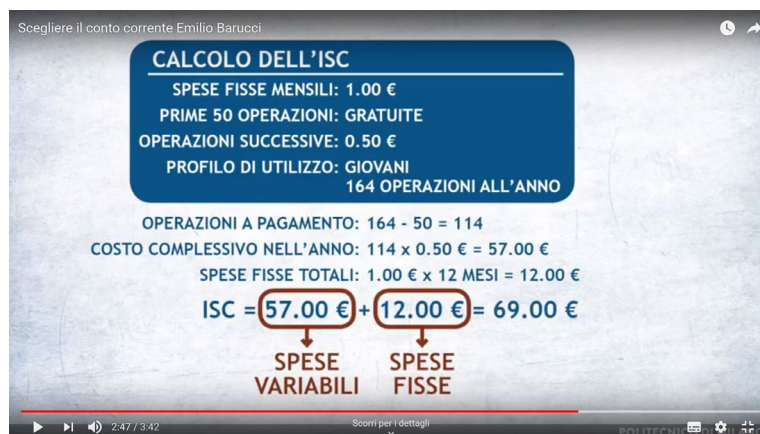


Figura 4
Un fermoimmagine del video della tappa 2A in cui viene mostrato come calcolare l'ISC.

Nel caso del conto A il numero di operazioni gratuite offerte supera il numero di operazioni effettuate, quindi l'ISC del conto corrente corrisponde solo al costo del canone fisso annuale, quindi a 10 €. Per rispondere alla seconda domanda, relativa al conto C, occorre sommare al canone fisso annuale, cioè a 6 €, le spese variabili (cioè le 14 operazioni a pagamento al costo di 1 € l'una), per cui l'ISC è 20 €. Notiamo che la prima domanda appare essere molto più semplice della seconda, visto che per rispondere non è necessario nessun calcolo ma solo riportare il valore delle spese fisse, già contenuto nella Tabella 2.

I tentativi di risposta sbagliati, cioè che contengono almeno un errore in una delle due risposte, che abbiamo registrato sono 32, attribuiti a 18 squadre diverse, e sono raccolti nel dettaglio nell'Allegato 7. In particolare, 16 tentativi di risposta contengono un errore solo nella prima domanda e 7 nella seconda domanda, mentre 9 tentativi contengono errori in entrambe le risposte (Tabella 3).

Totale di risposte con almeno un errore nelle due domande della tappa 2A	32
Risposte con errori solo nella domanda 1	16
Risposte con errori solo nella domanda 2	7
Risposte con errori ad entrambe le domande	9

Tabella 3
I dati sugli errori commessi nelle due domande aperte della tappa 2A.

Le nove risposte con errori a entrambe le domande sono state fornite da sette squadre nel loro primo tentativo (due squadre hanno commesso due errori anche al secondo tentativo), possiamo supporre che questi ragazzi abbiano prevalentemente avuto delle difficoltà nel capire cosa sia l'ISC o come lo si possa calcolare. Di questi sette, un gruppo ha addirittura inserito delle risposte non numeriche ("Movimenti allo sportello" e "Carte di credito"), mentre un altro gruppo ha inserito due valori negativi (-60 e -16). Visto che l'ISC rappresenta il costo di gestione di un conto corrente, indicare un valore negativo significherebbe che per coprire i costi di un conto corrente non è il cliente a pagare la banca per il servizio offerto, ma viceversa. Due squadre hanno risposto alla prima domanda inserendo il valore 82, che si può ottenere dal calcolo

$$(200-164) \cdot 2 + 10$$

Questa risposta può essere quindi ottenuta se al canone fisso (10 €) vengono aggiunte come spesa variabile 36 operazioni (ottenute dalla differenza tra le operazioni gratuite, 200, e le operazioni stimate, 164) al costo di 2 € ciascuna. Ipotizziamo che questo errore possa essere dovuto al tentativo di applicare la formula presente nel video indipendentemente dal fatto che nel caso del conto A il numero di operazioni gratuite sia maggiore rispetto a quello delle operazioni effettuate dal profilo giovani. Per fornire la risposta corretta è necessario interpretare il significato della formula presentata nel video (Figura 4) e capire che nel caso in cui il numero di operazioni effettuate sia minore del numero di operazioni gratuite, non sono presenti spese variabili e l'ISC coincide con il canone fisso annuale.

Le difficoltà maggiori riscontrate per il caso del conto A rispetto a quelle riscontrate per il conto C (Tabella 3) fanno ipotizzare che l'interpretazione della formula e la comprensione del suo significato, andando oltre alla sola applicazione con numeri diversi dell'esempio presente nel video, siano tra i punti deboli nella preparazione degli studenti che potrebbero essersi concentrati di più nell'imparare automatismi e procedure standard piuttosto che nella comprensione approfondita dei quesiti.

3.2.2 Le leggi di capitalizzazione

La tappa successiva, ovvero la tappa 2B, è incentrata sulle leggi di capitalizzazione (vedi Allegato 4) in particolare sono presenti quattro richieste, ovvero calcolare il montante per un investimento di 100 € al 4% per

1. un anno in regime di capitalizzazione composta; [104 €]
2. tre anni in regime di capitalizzazione composta; [112,49 €]
3. un anno in regime di capitalizzazione semplice; [104 €]
4. tre anni in regime di capitalizzazione semplice. [112 €]

Per rispondere alle domande è sufficiente inserire i numeri forniti dal testo nelle due formule delle leggi di capitalizzazione (vedi par 2.2.2), presentate agli studenti attraverso il video e la scheda consegnati in questa tappa. L'obiettivo di queste domande è mostrare che i due regimi di capitalizzazione sono equivalenti quando l'intervallo di tempo è annuale, mentre il regime di capitalizzazione composta è più vantaggioso per periodi di tempo maggiori all'anno.

I tentativi sbagliati inseriti in questa tappa sono 38, commessi da 20 squadre su 33 (vedi Allegato 7); questo significa che 13 squadre hanno inserito correttamente tutte le risposte al primo tentativo.

Le domande che sono risultate più difficili (come riportato sinteticamente in Tabella 4) sono le domande 2 e 4, quelle relative all'intervallo temporale di 3 anni, ma diversi errori sono stati commessi anche per la domanda 3, la cui risposta è relativamente semplice visto che si tratta solo di calcolare l'interesse del 4% e sommarlo al capitale iniziale.

Totale di risposte con almeno un errore nelle domande della tappa 3	38
Risposte con errori nella domanda 1	8
Risposte con errori nella domanda 2	25
Risposte con errori nella domanda 3	18
Risposte con errori nella domanda 4	26

Tabella 4
I dati sugli errori commessi
nella tappa 2B.

Tra gli errori più frequenti (vedi Allegato 7) c'è quello di riportare la stessa risposta della domanda 2 alla domanda 4: visto che dopo un anno il valore del montante è lo stesso per i due regimi di capitalizzazione, immaginiamo che gli studenti abbiano generalizzato questa regola portando lo stesso valore anche per l'intervallo temporale di tre anni. Questo errore è stato commesso in "entrambe le direzioni": per cinque volte gli studenti hanno risposto 112 a entrambe le domande, mentre in altri otto casi hanno risposto 112,49.

Tra le altre risposte scorrette inserite, per alcuni casi possiamo immaginare quale sia stata l'origine dell'errore commesso, ad esempio alcune risposte contengono solo l'interesse maturato (come 12 al posto di 112,4 invece di 104), mentre in altre è stato aggiunto due volte il capitale iniziale (ad esempio ottenendo 204 al posto di 104). Alcune risposte presentano degli errori di approssimazione del risultato: le regole fornite all'inizio richiedevano di approssimare i numeri alla seconda cifra decimale, in un paio di casi alla domanda 2 gli studenti hanno risposto con 112,48 o con 112,50 (la risposta corretta è 112,49).

In altri casi, sono presenti altri valori numerici di cui risulta difficile l'interpretazione, ma che mostrano uno scarso controllo sulla verifica della plausibilità del risultato. Ad esempio, alla terza domanda (capitalizzazione semplice dopo 1 anno) ben quattro squadre, in due giornate diverse, hanno risposto 500 €, immaginando che un tasso di interesse del 4% per un anno faccia quintuplicare il valore investito. Come nelle risposte fornite per la tappa precedente il processo di controllo sul risultato ottenuto prima di inserirlo e la sua interpretazione a un contesto reale risultano essere dei punti deboli per molti allievi.

Infine, è utile sottolineare come in alcuni casi si sia verificato il fenomeno a cui abbiamo già accennato, per cui alcune squadre hanno inserito più volte le stesse risposte anche dopo aver trovato le risposte corrette e ripetendo gli stessi inserimenti. Ad esempio, per la squadra SPQR (Tabella 5) sono registrati quattro tentativi: uno con le risposte corrette alle 10:13, un tentativo successivo in cui nell'ultima risposta è presente un errore (alle 10:14) e infine due tentativi a distanza di tre minuti con le risposte nuovamente corrette.

Informazioni cronologiche	Punti	Nome della squadra	Numero del tentativo	Domanda 1	Domanda 2	Domanda 3	Domanda 4
4/15/2019 10:13:33	4 / 4	SPQR	1	104	112,49	104	112
4/15/2019 10:14:25	3 / 4	SPQR	1	104	112,49	104	112,49
4/15/2019 10:15:37	4 / 4	SPQR	1	104	112,49	104	112
4/15/2019 10:18:20	4 / 4	SPQR	2	104	112,49	104	112

Tabella 5
Un esempio delle risposte inserite a pochi minuti di distanza dalla stessa squadra, in grassetto l'unica risposta sbagliata. Il numero del tentativo è stato indicato dagli studenti stessi.

3.3.3 Il confronto tra titoli azionari

Per quanto riguarda la tappa successiva "Casa" (vedi Allegato 5), le domande sono tutte a risposta chiusa. In particolare, in questa analisi ci concentriamo sulle prime tre domande che riteniamo più significative in quanto erano chieste delle osservazioni a

partire da un grafico (Figura 2). Le domande poste sono le seguenti:

1. Considerando il grafico dei titoli Appela e Samugu, com'è stato il rendimento dell'azione Samugu comprata nel 2014 e rivenduta nel 2019?
 - a. Positivo
 - b. Negativo (risposta corretta)
 - c. Uguale a zero
 - d. Non ci sono dati sufficienti per rispondere
2. Considerando il grafico dei titoli Appela e Samugu, qual è stato il rendimento di un'azione Appela che è stata comprata nel 2014 e rivenduta nel 2019?
 - a. 10% (risposta corretta)
 - b. 5%
 - c. 7%
 - d. Nessuno di questi
 - e. Non ci sono dati sufficienti per rispondere
3. Un'azione del titolo Samugu è stata acquistata nel 2017. In quale anno si avrebbe guadagnato rivendendola?
 - a. Nel 2016
 - b. Nel 2018 (risposta corretta)
 - c. Nel 2019
 - d. Nessuno di questi
 - e. Non ci sono dati sufficienti per rispondere

In queste tre domande ci sono stati 60 tentativi di risposta con almeno un errore, di cui però solo tre in cui tutte le domande risultano sbagliate, nella **Tabella 6** sono riportati i dettagli sulle frequenze di errore nelle tre domande.

Totale di risposte con almeno un errore nelle tre domande	60	Risposte con tutte e tre le domande sbagliate	3
Risposte con errore nella domanda 1	10	Risposte con errori solo nella domanda 1 e 2	3
Risposte con errore nella domanda 2	45	Risposte con errori solo nella domanda 1 e 3	1
Risposte con errore nella domanda 3	28	Risposte con errori solo nella domanda 2 e 3	13

Tabella 6
I dati sugli errori commessi nelle prime tre domande della tappa 3.

La maggior parte degli errori commessi si concentrano sulla seconda domanda, in particolare le alternative scorrette (le opzioni b, c, d, e) sono state scelte quasi con la stessa frequenza dagli studenti (Figura 5).

Per rispondere correttamente alla seconda domanda era necessario utilizzare la definizione di rendimento, presente sulla scheda consegnata nella postazione (vedi Allegato 5) e ricavare dal grafico (Figura 2) il prezzo dell'azione nel 2014 (70 €), che corrisponde al prezzo di acquisto, e nel 2017, (77 €), che corrisponde al prezzo di vendita. Per ottenere il rendimento la differenza tra il prezzo di vendita e il prezzo di

acquisto deve essere divisa per il prezzo di acquisto, la risposta corretta era quindi 10% ottenuta da

$$\frac{77-70}{70} = \frac{7}{70} = 0,1$$

La risposta sbagliata più selezionata è stata il 7%. Tra i ragionamenti che possono aver portato a questa risposta possiamo ipotizzare che questi studenti si siano fermati dopo aver calcolato la differenza tra il prezzo di vendita e di acquisto dell'azione o abbiano avuto delle difficoltà nel trasformare 7/70 in percentuale.

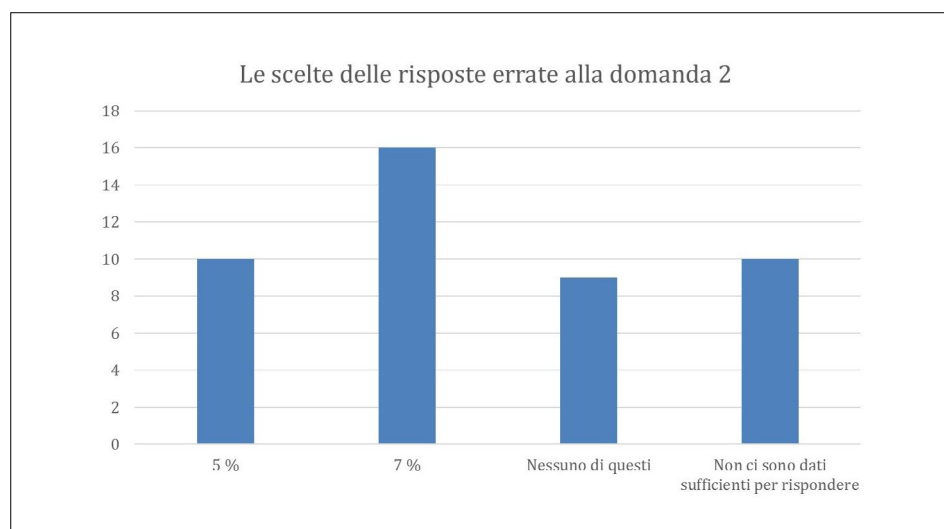


Figura 5
In questo grafico sono riportate le frequenze con cui le risposte sbagliate alla domanda 2 della tappa 3 sono state scelte.

Al di là di quali siano stati gli errori commessi, risulta interessante sottolineare che la domanda 2 che è risultata la più difficile era in effetti quella in cui le richieste erano più complesse: non erano necessari solo la lettura del grafico e una valutazione qualitativa (come nelle domande 1 e 3), ma serviva entrare nello specifico della definizione di rendimento, cogliere le informazioni numeriche dal grafico, svolgere correttamente il conto e trasformare il risultato in un valore in percentuale.

3.3.4 Tassi di interesse con orizzonti temporali diversi

Per quanto riguarda l'ultima tappa, vogliamo concentrarci sulle domande conclusive (vedi Allegato 6): due domande aperte in cui viene richiesta l'applicazione della legge di capitalizzazione composta in situazioni in cui il tasso di interesse non è annuale. Le due domande poste sono le seguenti:

1. Chiedi un prestito di 1000 €, con restituzione ad un anno. Andrea ti può fornire il denaro che ti serve al 4,5% quadrimestrale, quanto dovrai restituirgli? [1141,17 €]
2. Chiedi un prestito di 1000 €, con restituzione ad un anno. Maria ti può fornire il denaro che ti serve al 4% trimestrale, quanto dovrai restituirgli? [1169,86 €]

Queste due domande sono risultate le più difficili di tutto il gioco, forse perché oltre a riguardare un concetto non banale, erano presentate proprio al termine del gioco quando, in tutte le sperimentazioni, abbiamo osservato che tra i ragazzi la stanchezza si è fatta sentire maggiormente e il livello di concentrazione è calato.

Dal punto di vista matematico, per poter rispondere correttamente a queste domande, è necessario innanzitutto individuare quante volte in un anno verrà applicato il tasso di interesse e utilizzare la capitalizzazione composta per applicare l'interesse non solo al capitale iniziale ma al capitale più l'interesse già sviluppato. Questo significa che la risposta alla prima domanda è data dal risultato di $1000(1+0,045)^3$; mentre per la seconda domanda è necessario calcolare $1000(1+0,04)^4$. Il video mostrato in questa tappa utilizza un esempio molto simile: un tasso di interesse semestrale del 6% applicato su un capitale iniziale di 100 €. Inoltre, il video si conclude con una spiegazione in cui la formula necessaria per rispondere a queste due domande viene mostrata esplicitamente e commentata (Figura 6).



Figura 6
Un fermo immagine del video presente nell'ultima tappa del gioco.

Le risposte sbagliate a queste due domande corrispondono a 62 tentativi registrati (vedi Allegato 7), di cui la maggior parte presenta un errore o un mancato inserimento in entrambe le risposte (Tabella 7).

Totale tentativi non corretti	62
Risposte con errore solo domanda 1	4
Risposte con errore solo domanda 2	6
Risposte con errore entrambe le domande	31
Risposte vuote a entrambe le domande	21

Tabella 7
I dati sui tentativi sbagliati nelle due risposte aperte presenti nella tappa 4.

La difficoltà di queste due domande potrebbe nascondersi nei diversi passaggi necessari ad ottenere la risposta corretta: individuare la formula della capitalizzazione composta (rivedendola nel video o ricordandola dalla prima tappa), sostituire i numeri con gli opportuni intervalli temporali (in particolare riconoscendo che in un anno sono presenti 3 quadrimestri e 4 trimestri) e infine assicurarsi di inserire correttamente i numeri nella calcolatrice per ottenere il risultato.

Oltre a errori simili a quelli già commentati nel caso della tappa 2B, come utilizzare la capitalizzazione semplice e non quella composta o scrivere solo il valore dell'interesse maturato (vedi par 3.2.2), sono presenti alcune risposte non corrette che sembrano

essere errori di distrazione (ad esempio risposte in cui è scritto 141,17 al posto di 1141,17 o 1196,86 al posto di 1169,86) oltre a risposte di difficile interpretazione e scarsa plausibilità, come numeri minori della cifra presa in prestito (ad esempio 865 e 840). Per 21 tentativi entrambe le risposte sono state lasciate vuote, alcuni di questi tentativi probabilmente corrispondono alle squadre che hanno rinunciato a completare il gioco, perché il tempo a disposizione era terminato o perché si sono interrotte dopo aver visto che alcune squadre avevano concluso e i vincitori erano già stati individuati; mentre altri tentativi vuoti potrebbero essere ricondotti sempre alle difficoltà tecniche cui abbiamo già accennato in precedenza.

3.3 I commenti di studenti e insegnanti

Al termine della sperimentazione agli studenti è stato chiesto di indicare in modo anonimo un aspetto positivo e uno negativo dell'esperienza vissuta. Questi riscontri cartacei sono stati raccolti dalle docenti di classe. Gli insegnanti, invece, nei giorni successivi al gioco hanno avuto l'occasione di confrontarsi tra di loro e con il ricercatore esterno per riflettere sui punti di forza e di criticità della proposta.

Per quanto riguarda il feedback ricevuto dagli studenti, tra i punti positivi segnalati ci sono stati il coinvolgimento dato dall'aspetto competitivo; la collaborazione creata tra i membri della squadra per trovare le risposte; l'originalità dei temi trattati e della modalità con cui sono stati presentati; l'impostazione del gioco, in particolare il dover utilizzare il cellulare per guardare i video da cui ricavare le informazioni necessarie per rispondere correttamente alle domande. Tra gli aspetti negativi segnalati ci sono state le difficoltà di alcune tappe; i problemi tecnici riscontrati da alcune squadre con le connessioni dei cellulari; la richiesta di avere più tempo a disposizione per completare il gioco.

Alcuni studenti hanno trovato positivo che le risposte da fornire fossero "calcoli e ragionamenti" e che non fossero necessarie particolari conoscenze su questi temi per affrontare il gioco, visto che tutte le informazioni erano presenti nei video e nei testi forniti all'interno del gioco; mentre altri studenti hanno segnalato questa stessa caratteristica come un punto debole, segnalando delle domande troppo difficili rispetto alla loro preparazione e suggerendo di fare un'introduzione sui temi della matematica finanziaria prima di proporre il gioco. La differenza dei feedback ricevuti rispecchia ovviamente la differenza degli studenti presenti in ogni classe e soprattutto l'eterogeneità delle squadre che si sono formate con il sorteggio casuale. Nella fase di riprogettazione seguita a queste sperimentazioni abbiamo comunque preso la decisione di semplificare il gioco, mantenendo gli stessi contenuti ma diminuendo il numero di domande presentate in ciascuna tappa, in modo che gli studenti potessero focalizzarsi sui concetti principali.

Il riscontro dell'esperienza è stato positivo anche da parte degli insegnanti di matematica coinvolti, in particolare per le due docenti di matematica autrici di questo lavoro che si sono occupate sia della progettazione sia della supervisione del gioco nelle loro classi.

La caccia al tesoro finanziaria è stata una esperienza didattica che ha fatto emergere interesse e coinvolgimento degli alunni per contenuti matematico-finanziari che solitamente non vengono mostrati, in particolare nelle classi del liceo scientifico, percorso scolastico dove non è previsto l'insegnamento di materie economiche e della matematica finanziaria neanche negli anni successivi al biennio. Anche per queste

ragioni, nel liceo scientifico l'attività è stata ripresa nei giorni successivi per integrarla nella valutazione degli studenti. Agli allievi è stato chiesto di prepararsi riguardando i link delle pagine web già utilizzate durante la gara e a ciascun gruppo è stato chiesto di focalizzarsi su due argomenti a scelta (in modo da rivedere tutti gli argomenti). In questo modo, la discussione aperta dall'insegnante ha sempre trovato interlocutori preparati, mostrando un approccio ancora competitivo nel mostrare la conoscenza acquisita. Le competenze dimostrate in termini di conoscenze, organizzazione dell'esposizione, capacità di creare legami fra gli argomenti e con gli argomenti curricolari, il linguaggio utilizzato, sono stati poi valutati dal docente.

I docenti hanno anche notato che la creazione delle squadre tramite il sorteggio ha rotto le usuali solidarietà e complicità che esistono in classe, favorendone di nuove. Il comportamento generale dei gruppi è stato in parte quello atteso: qualche gruppo con studenti più competenti in matematica ha risolto rapidamente i primi quesiti, per poi talvolta bloccarsi sull'indovinello relativo all'indizio, che richiedeva più intuizione che conoscenze e abilità di tipo scientifico. In alcuni casi, alunni solitamente più deboli in matematica hanno mostrato destrezza e confidenza con calcoli di percentuali e interessi, esprimendo una predisposizione a gestire questioni relative al denaro e vicine alla realtà. L'esperienza si è dimostrata utile dal punto di vista degli insegnanti per conoscere meglio i propri alunni, scoprire talenti non convenzionali che possono essere incoraggiati maggiormente durante il percorso curricolare e che possono contribuire alla valutazione finale.

4 Conclusioni

L'obiettivo di questa parte del progetto Edufin@Polimi era quella di realizzare un'attività che permettesse agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado di avvicinarsi ai temi della matematica finanziaria con un approccio informale. Si è scelto di realizzare un gioco sotto forma di caccia al tesoro che comprendesse l'utilizzo di strumenti digitali, il movimento in diversi spazi della scuola e la collaborazione con i propri compagni di classe. Queste scelte sono state fatte per poter rendere i ragazzi attivi nel processo di apprendimento e per indirizzarli verso una maggiore autonomia nella scoperta, acquisizione e approfondimento di nuovi temi. Pensiamo che "il labirinto delle finanze" possa essere una valida soluzione per i docenti interessati a fornire qualche spunto in più ai loro alunni introducendo delle modalità didattiche diverse rispetto a quelle a cui i ragazzi sono solitamente abituati.

Partendo dai consigli dei docenti di far sì che i concetti visti e appresi nel gioco fossero ripercorsi in una fase di consolidamento, abbiamo aggiunto al gioco delle proposte per riprendere gli argomenti in classe: un test a risposta multipla e una serie di problemi, sugli stessi temi presentati nel gioco. Il test è stato pensato come occasione di verifica dei contenuti visti durante l'attività; i problemi sono invece problemi aperti, con più soluzioni possibili che possono essere lo spunto per far nascere una discussione in classe e approfondire i concetti presentati più velocemente nel gioco¹². La creazione di questo materiale è nata soprattutto dal confronto con gli

12

12. Questo materiale è ancora in fase di revisione e sperimentazione, per cui abbiamo deciso di non allegarlo a questo articolo. I docenti interessati possono però richiederlo a edufin@polimi.it.

insegnanti coinvolti in queste sperimentazioni che hanno sentito l'esigenza di avere materiale per proseguire l'attività nelle lezioni successive, cercando però anche di mantenere l'obiettivo di incuriosire i ragazzi su questi temi e utilizzare delle metodologie didattiche diverse da quelle tradizionali.

Bibliografia

- Aprea, C., Schultheis, J., & Stolle, K. (2018). Instructional integration of digital learning games in financial literacy education. In T. A. Lucey & K. S. Cooter (Eds.), *Financial literacy for children and youth* (pp. 69-88). New York, Bern, Berlin: Lang.
- Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your Classroom: Reach every Student in every Class every Day*. New York: Intl Society for Technology.
- INVALSI (2017). *OCSE PISA 2015: I risultati degli studenti italiani in Financial Literacy*. Disponibile in https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2015/doc/2017/Rapporto_FL_PISA2015_24052017.pdf (consultato il 18.03.2020).
- Kaiser, T., & Menkhoff, L. (2017). *Does financial education impact financial literacy and financial behavior, and if so, when?*. The World Bank.
- Lusardi, A. (2012). *Numeracy, financial literacy, and financial decision-making* (Working paper number 17821). National Bureau of Economic Research.
- Lusardi, A. (2015). Financial literacy skills for the 21st century: Evidence from PISA. *Journal of consumer affairs*, 49(3), 639-659.
- Lusardi, A., Mitchell, O. S., & Curto, V. (2010). Financial literacy among the young. *Journal of consumer affairs*, 44(2), 358-380.
- OECD (2014). *PISA 2012 Results: Students and Money (Volume VI): Financial Literacy Skills for the 21st Century*. Parigi: PISA, OECD Publishing.

Autori/Giulia Bernardi*, Elena Brambilla° e Paola Landra*

*Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera

°Liceo Scientifico Statale Vittorio Veneto – Milano, Italia

*Istituto Professionale di Stato L. Milani – Meda, Italia

giulia.bernardi@supsi.ch, elena.brambilla@polimi.it, paola.landra@uniupo.it

Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo *Fangcheng*: un percorso di trasposizione culturale nella scuola secondaria di primo grado

From Chinese counting rods to *Fangcheng* method:
an experience of cultural transposition in lower
secondary school

Raffaele Casi* e Chiara Pizzarelli°

*Istituto Comprensivo Andezeno – Andezeno (TO), Italia

°Istituto Comprensivo Torino II E. Morelli – Torino, Italia

Sunto / Abbiamo proposto ad una classe prima di scuola secondaria di primo grado un percorso di scoperta di problemi della tradizione matematica cinese, riconducibili a sistemi di equazioni e risolubili mediante le antiche bacchette da calcolo e il metodo del *Fangcheng*. La metodologia proposta è la didattica laboratoriale, con l'uso di artefatti, quali bacchette e bilance, e di supporti audio-video. Sotto la lente teorica dell'analisi semiotica degli artefatti (Rabardel, 1999; Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005) e della trasposizione culturale (Bartolini Bussi, Sun & Ramploud, 2013; Mellone & Ramploud, 2015) si intendono mostrare le potenzialità di un uso formativo di antichi strumenti e tecniche di calcolo, provenienti da un contesto culturale, storico e geografico differente. L'obiettivo è ripensare e aumentare la consapevolezza degli studenti sugli algoritmi di addizione e sottrazione e avviare all'utilizzo di metodi pre-algebrici fondati sul concetto di uguaglianza e sui principi di equivalenza.

Parole chiave: trasposizione culturale; storia della matematica cinese; artefatti; Early Algebra; *Fangcheng*.

Abstract / We proposed, to a class of sixth-graders, a path of discovery of Chinese mathematical tradition and its typical problems, akin to system of equations, to be solved with counting rods and the ancient method *Fangcheng*. The proposed methodology is laboratory didactics, using artifacts such as rods and scales as well as audio-video supports. According to the theory of the semiotic analysis of artifacts (Rabardel, 1999; Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005) and the theory of cultural transposition (Bartolini Bussi, Sun & Ramploud, 2013; Mellone & Ramploud, 2015), we intend to demonstrate the potential of a formative use of ancient instruments and counting techniques, ailing from a different cultural, historical and geographical context. The aim is to rethink first, and then boost, students' awareness about addition and subtraction algorithms while also directing them toward the use of pre-algebraic methods based upon the concept and principles of equivalence.

Keywords: cultural transposition; history of Chinese mathematics; artifacts; Early Algebra; *Fangcheng*.

1 Introduzione

Il nostro lavoro intende riprendere e fornire nuovi spunti ad alcune ricerche incentrate sull'utilizzo del metodo cinese del *Fangcheng* per risolvere sistemi di equazioni. In particolare, abbiamo tratto ispirazione dal lavoro di Costa, Alves e Guerra (2015), che hanno proposto a uno studente portoghese di 10 anni di risolvere in autonomia un problema con tale metodo, usando le cifre indo-arabiche; e dalla ricerca di Bagni (2006; 2009), che ha svolto un'analisi semiotica dell'artefatto che le bacchette cinesi offrono e ha sperimentato con esse l'applicazione della procedura del *Fangcheng* in

una classe di scuola secondaria di primo grado¹. Il nostro intento è di avvicinarci a quest'ultima ricerca, ampliando la prospettiva alla metafora concettuale della bilancia e analizzando la sperimentazione secondo la lente della trasposizione culturale. La scelta dell'argomento sul quale lavorare è inusuale per una classe prima: le Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012) non prevedono espressamente come obiettivo di apprendimento la risoluzione di problemi lineari mediante l'utilizzo di sistemi di equazioni di primo grado, che è invece previsto come obiettivo specifico nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado². Tuttavia, l'attività che proponiamo agli studenti ha un duplice intento: da un lato quello di rivedere le operazioni di addizione e sottrazione di numeri interi – che sono state ampiamente studiate alla scuola primaria³ – con un'ottica più matura, maggiormente legata a un utilizzo di tali operazioni in campo algebrico; dall'altro quello di stimolare gli studenti a comprendere come alcuni strumenti matematici (tra cui equazioni e sistemi di equazioni) siano funzionali alla risoluzione di problemi.

È invece cruciale, secondo le Indicazioni nazionali (MIUR 2012, p. 60), il ruolo del laboratorio, inteso come «momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi [...], discute e argomenta le proprie scelte, negozia e costruisce significati, portando a conclusioni [...] e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive». Intendiamo, dunque, utilizzare tale approccio, partendo da problemi concreti, tratti dalla storia della matematica cinese e del suo insegnamento, e facendo uso di artefatti. L'obiettivo finale è di radicare un senso per i classici metodi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari, che talvolta sono appresi meccanicamente in livelli scolari superiori.

Il percorso qui proposto consiste *in primis* nella scoperta da parte degli studenti di simboli numerici usati nell'antica Cina, tramite l'analisi di una pagina di un antico libro di testo di matematica cinese, il "Prezioso specchio dei quattro elementi" (1303), in cui è rappresentato il cosiddetto "triangolo di Tartaglia-Pascal". Una volta introdotto il sistema di numerazione e gli algoritmi dell'addizione e della sottrazione, osservati tramite video e poi replicati fisicamente con le bacchette e tavole da calcolo, ci siamo concentrati sul capitolo VIII del trattato "I Nove Capitoli sui procedimenti matematici" (I sec. a.C. – I sec. d.C.). Esso, infatti, offre un'ampia varietà di problemi, riconducibili a sistemi di equazioni di primo grado a due o più incognite, risolubili tramite il metodo cinese del *Fangcheng*. Per comprendere tale antico metodo, sono state previste attività che, partendo dall'esempio fisico della doppia bilancia, hanno gradualmente portato all'astrazione e pre-formalizzazione algebrica del metodo.

2 Contesto storico: la matematica nell'antica Cina

Prima di affrontare le fasi del percorso, riteniamo utile fornire alcune indicazioni sul sistema di numerazione dell'antica Cina, che faceva uso delle bacchette e tavole da calcolo, e sul metodo del *Fangcheng*.

1. La scuola secondaria di primo grado italiana corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

2. Il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado italiana corrisponde alla quarta media e al primo anno di scuola media superiore o di scuola professionale nel Canton Ticino.

3. La scuola primaria italiana corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

2.1 Numeri e scrittura nell'antica Cina

Dalla dinastia Han (206 a.C. – 220 d.C.) fino alla dinastia Yuan (XIII secolo) in Cina le principali tecniche di calcolo si basavano sull'uso di bacchette da calcolo: bastoncini di bambù o avorio di circa 2,5 mm di diametro e 15 cm di lunghezza, facilmente manovrabili per eseguire operazioni aritmetiche. Le bacchette, disposte su tavole, talvolta quadrettate, hanno rappresentato per secoli il principale strumento di calcolo pratico. Il loro uso cessò gradualmente nella dinastia dei Ming (1368-1644), quando furono soppiantate dal *suanpan*, l'abaco cinese.

La scrittura dei numerali, ossia i segni che rappresentano quantità – risalenti al I millennio a.C. – era piuttosto intuitiva, facendo probabilmente riferimento alle dita della mano: i numeri 1, 2, 3, 4 e 5 si rappresentavano affiancando rispettivamente 1, 2, 3, 4 e 5 bacchette verticali; i numeri da 6 a 9 si rappresentavano con un'asta in orizzontale a indicare cinque unità e sotto di essa tante aste verticali quante occorre aggiungere per completare il numero. Per la rappresentazione delle decine si utilizzavano simboli analoghi, ma con le bacchette disposte in orizzontale (Figura 1).



















								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
								
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Figura 1
Rappresentazione dei numeri nelle disposizioni *Tsung* (sopra) e *Heng* (sotto) nell'antica Cina.

Per gli ordini di grandezza successivi si continuava ad alternare la disposizione verticale (*Tsung*), valida quindi per unità, centinaia, decine di migliaia ecc., con quella orizzontale (*Heng*), per decine, migliaia, centinaia di migliaia ecc. Il sistema era decimale posizionale: le bacchette erano affiancate mantenendo nella colonna di destra quelle rappresentanti le unità, seguite a sinistra dai successivi ordini numerici (Figura 2).

Almeno fino all'VIII secolo d.C. non sono noti simboli per lo zero, che si rappresentava sulla tavola lasciando la cella vuota o – nel testo scritto – uno spazio; successivamente fu introdotto un piccolo cerchio, derivato dalla diffusione del sistema posizionale indiano.







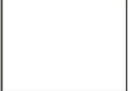








194					
1094					
1940					

Figura 2
Esempi di rappresentazione di numeri con le bacchette sulla tavola da calcolo (a sinistra) e nel testo scritto (a destra).

Si tratta di un sistema di scrittura *operatorio*, ossia la forma di rappresentazione del numero conserva l'effettiva somma dei simboli che lo compongono; e avente un carattere di *immanenza* più esplicito rispetto alle scritture moderne (Bagni, 2009), ovvero il simbolo fornisce un'immagine concreta del numero che rappresenta (Martzloff, 2006). I numerali (così come gli ideogrammi per le parole) rappresentano concretamente il valore (e il significato) del numero (e della parola). Il numero 3 è indicato con tre linee verticali (così come, ad esempio, la parola cavallo è una stilizzazione del disegno di un cavallo). Diversamente accade per la notazione occidentale che si è strutturata nei secoli seguendo processi di astrazione (il simbolo 3 non ha nessun legame con il valore numerico che rappresenta).

Eseguire un'addizione fra due numeri consiste nel rappresentare gli addendi su due righe della tavola da calcolo, separate da una riga vuota, nella quale vengono successivamente fatte slittare le bacchette degli addendi senza cambiare colonna. Dopo aver opportunamente aggiustato i bastoncini con la corretta rappresentazione del numero ed eventuali riporti, si legge la somma (Figura 3).

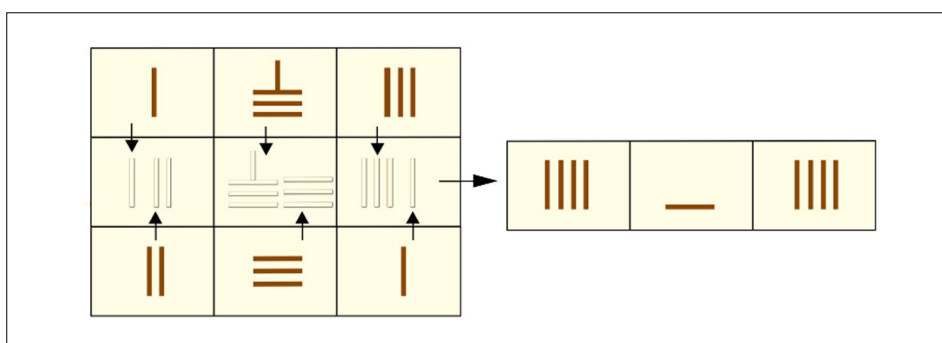


Figura 3
Algoritmo cinese dell'addizione. Nell'esempio:
 $183+231=414$.

Per quanto riguarda invece l'algoritmo della sottrazione, si procedeva nel seguente modo: si disponeva il minuendo nella riga in alto della tavola e successivamente si rappresentava il sottraendo nella riga sottostante, attingendo dalle bacchette del minuendo, scegliendo dalla cella delle unità per rappresentare le unità, dalle decine per le decine e così via. In questo modo nella prima riga si poteva leggere il risultato della sottrazione. Nel caso in cui non fosse presente una quantità sufficiente di bacchette nell'ordine di grandezza corrispondente, si rendeva necessario un prestito, ossia una trasformazione dall'ordine di grandezza più elevato, eliminando ad esempio una decina per far comparire dieci unità (Figura 4).

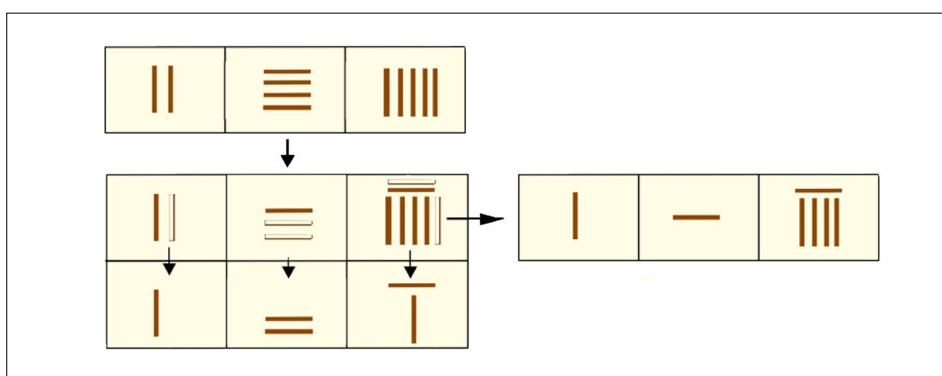
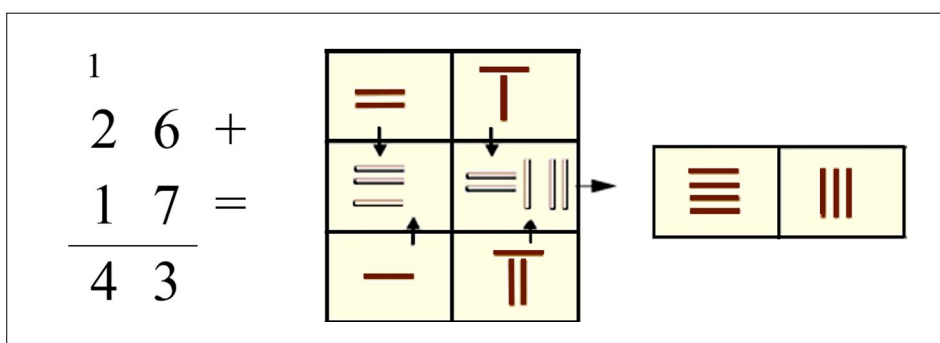


Figura 4
Algoritmo cinese della sottrazione. Nell'esempio:
 $245-126=119$.

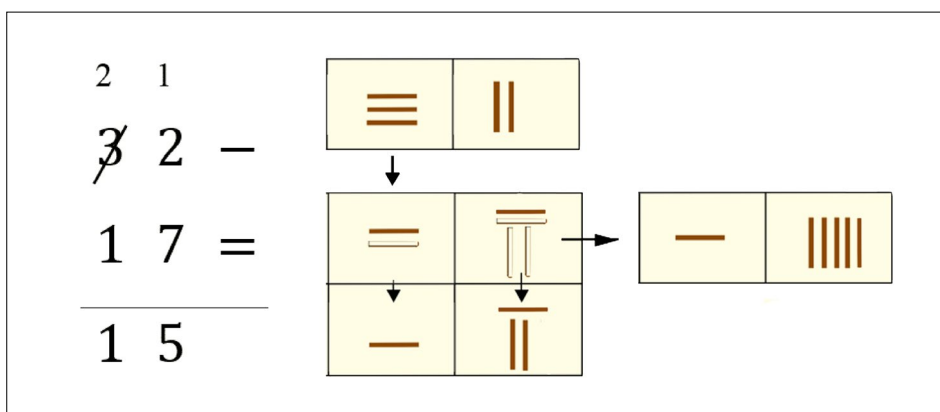
Dal confronto tra gli algoritmi di addizione e sottrazione con le bacchette e quelli attuali, possiamo osservare come le procedure di riporto e prestito con le bacchette esplicitino in modo più evidente le quantità da spostare negli ordini di grandezza superiore e inferiore. Nello specifico, nel caso dell'addizione la numerosità delle bacchette permette di vedere a colpo d'occhio se una certa quantità è superiore a 10, e quindi è da riportare. Ad esempio, volendo sommare 26 e 17 con l'algoritmo odierno dell'addizione procediamo così: $6+7=13$, scrivo 3 riporto 1 (Figura 5). In tale procedura non è evidente che quell'uno riportato sia in realtà un 10. Le bacchette cinesi invece ci mostrano la presenza di una grandezza superiore a 9 e ci obbligano a riportare (fisicamente) due volte cinque – cioè proprio un dieci – nell'ordine di grandezza superiore.

Figura 5
In questa immagine si può osservare la differenza tra l'algoritmo dell'addizione odierno e quello dell'antica Cina.



Un discorso analogo vale per la sottrazione, dove si nota come la tecnica cinese si riveli particolarmente efficiente in caso di differenze senza prestito (ad esempio nella sottrazione $27-20$ occorre togliere le due bacchette orizzontali delle due decine), mentre negli altri casi comporta un ragionamento sui "valori che formano il prestito". Ad esempio, per effettuare la sottrazione $32-17$ con l'algoritmo odierno ragioneremmo così: «poiché $2-7$ non si può fare, mi faccio prestare un 1 dal 3, che diventa 2, e il 2 diventa 12; quindi $12-7=5$, $2-1=1$ » (Figura 6). Anche in questo caso non è evidente che l'1 sia un 10, che va sommato al 2. Con le bacchette da calcolo, invece, è necessario spostare una decina dalla seconda colonna, e trasformarla in $5+5$ nella prima. Quindi si procede prendendo le bacchette dalla prima riga e spostandole nella seconda. Infine, si effettua un aggiustamento sul cinque, che va espresso correttamente con cinque bacchette verticali.

Figura 6
In questa immagine si può osservare la differenza tra l'algoritmo della sottrazione odierno e quello dell'antica Cina.



L'algoritmo dell'addizione, insieme ad altre tecniche aritmetiche, geometriche ed algebriche, è descritto nel più antico testo matematico cinese ad oggi noto "I Nove Capitoli sui procedimenti matematici" (Jiuzhang suanshu, I sec. a.C. – I sec. d.C.), anonimo. Oggetto di numerosi successivi commentari, il manuale ebbe un'influenza sulla matematica cinese paragonabile a quella degli Elementi di Euclide in Occidente. Il testo contiene 246 problemi pratici, suddivisi a seconda degli algoritmi risolutivi (Chemla & Shuchun, 2004).

Un altro importante trattato cinese è il "Prezioso specchio dei quattro elementi" (Siyuan Yujian o Ssu Yuan Yu Chien, 1303),⁴ di Zhu Shijie, che rappresenta il «punto più alto raggiunto dall'algebra cinese» (D'Amore & Sbaragli, 2018, p. 138). Per la nostra sperimentazione ci siamo valse di un'immagine selezionata da tale trattato, che rappresenta quello che noi chiamiamo il triangolo di Tartaglia-Pascal. Senza far menzione della paternità, Zhu Shijie descrive la sua "Tavola dell'antico metodo per elevare all'ottava potenza". La procedura per la costruzione della tavola dei coefficienti binomiali era stata descritta in precedenza già da Jia Xian (1050 circa), ma è probabile che l'idea di fondo del triangolo fosse antecedente (Martzloff, 2006). Siamo dunque di fronte ad un concetto matematico cui noi siamo soliti attribuire la nascita all'interno della nostra cultura occidentale, ma che è stato sviluppato in maniera indipendente in un altro contesto, in un'altra area geografica e probabilmente anche in un'epoca precedente. Ciò rende il triangolo dei coefficienti binomiali cinese un importante strumento per ripensare a quel carattere di unicità della storia della matematica, cui i nostri studenti – e non solo – sono abituati.

4

2.2 Il metodo del *Fangcheng*

L'antica procedura per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari, detta *Fangcheng*⁵ è descritta ne "I Nove Capitoli sui procedimenti matematici". Assimilabile all'odierno metodo di eliminazione gaussiana per sistemi di equazioni, essa si basa su un'impostazione matriciale, in cui ogni colonna contiene i coefficienti numerici di una stessa incognita e l'ultima colonna i termini noti.

5

Il lettore potrà chiedersi: per quale motivo dover introdurre in una scuola secondaria di primo grado notazioni che appartengono a gradi scolastici ben superiori? Le ragioni sono da ritrovare nel carattere posizionale della storia dell'algebra cinese. Essa si concentrava su un'impostazione matriciale per via delle tavole da calcolo che i matematici, e non solo, utilizzavano anche per i più semplici algoritmi aritmetici; ma non si fondava sul concetto di determinante, sviluppatosi in Oriente solo nel 1683 (Bagni, 2006). Ciò rende l'artefatto particolarmente intuitivo e basato su un approccio aritmetico elementare. Inoltre, l'utilizzo della tavola da calcolo quadrettata per la risoluzione di sistemi di equazioni rende superfluo l'uso di un simbolismo algebrico per le incognite: determinate posizioni nella tavola corrispondono, infatti, a particolari tipi di grandezze. Nella nostra attività abbiamo considerato il seguente problema, ripreso da una sperimentazione in cui Bagni utilizza la procedura *Fangcheng* di "eliminazione per moltiplicazione reciproca".

4. I quattro elementi (cielo, terra, uomo e materia) sono le quattro incognite di un'equazione.

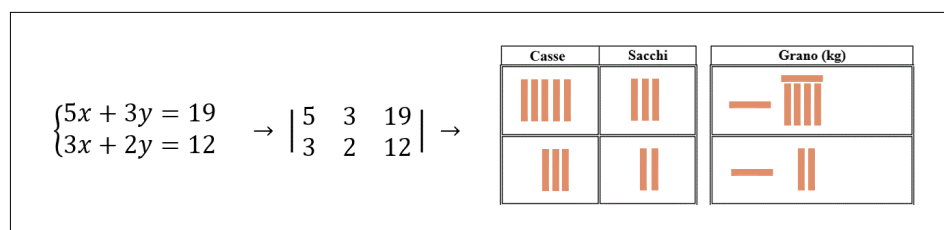
5. La parola *Fangcheng*, derivante da *fang*, "mettere fianco a fianco", e *cheng*, "misura, norma delle cose", può essere tradotta con "cercare le norme delle cose assemblandole fianco a fianco". L'espressione rimanda all'insieme di relazioni quantitative tra cose che sono affiancate, e alla procedura che porta a valutare le norme delle misure di ciascuna cosa. Per approfondimenti cfr. Di Paola e Spagnolo (2009, pp. 113-115).

Cinque casse uguali di grano aggiunte a tre sacchi uguali di grano pesano 19 kg.
 Tre casse uguali di grano aggiunte a due sacchi uguali di grano pesano 12 kg.
 Quanti kg pesa una cassa di grano e un sacco di grano?

Il testo è liberamente tratto da un problema del capitolo VIII de "I Nove Capitoli sui procedimenti matematici". Abbiamo scelto di riprendere tale esempio perché a livello operativo non comporta particolari difficoltà nel calcolo con le bacchette e agevola la comprensione della procedura. Tuttavia, abbiamo preferito adottare la cosiddetta "nuova procedura *Fangcheng*", che si fonda su sottrazioni ripetute, perché, come si vedrà nelle sezioni successive, risulta efficace nell'utilizzo della metafora concettuale delle bilance a due piatti.

Il problema in notazione moderna si riconduce ad un sistema di equazioni. Per applicare il *Fangcheng* si posizionano i coefficienti ed i termini noti in due righe della tabella da calcolo. In realtà, nei trattati cinesi si posizionano lungo colonne, ma scegliamo di modificare l'orientamento per rendere più semplice il collegamento con i sistemi di equazioni che gli studenti studieranno in anni successivi (Figura 7).

Figura 7
 Rappresentazione del sistema di equazioni lineari che risolve il problema, mediante notazione odierna con sistemi e matrice dei coefficienti (a sinistra), e mediante la tavola da calcolo dell'antica Cina (a destra), leggermente modificata per i nostri scopi didattici (etichette in alto e separazione di coefficienti e termini noti).

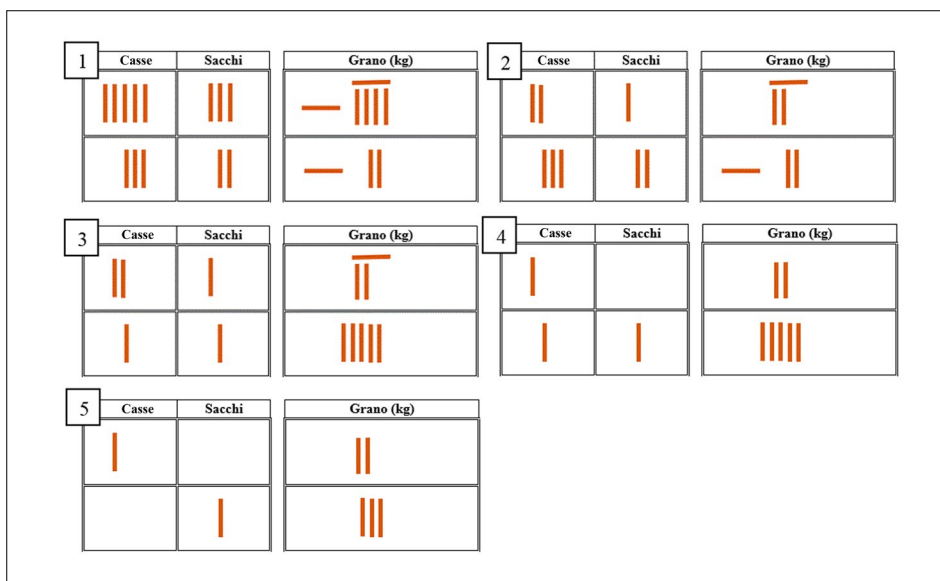


Il metodo del *Fangcheng* consiste nel modificare le righe della tabella in modo tale che la matrice dei coefficienti sia diagonale, ossia abbia solamente i valori della diagonale principale non nulli. In questo modo, da relazioni quantitative tra due incognite, se ne ottiene il valore numerico. Per modificare le righe, il *Fangcheng* prevede di adottare due regole:

1. si possono moltiplicare o dividere per uno stesso numero non nullo tutti i termini di una riga;
2. si possono sostituire i termini di una riga con quelli ottenuti dall'addizione o sottrazione dei corrispondenti termini di altre righe.

Nella sperimentazione abbiamo scelto di avviare gli studenti al metodo con esercizi che richiedessero solamente l'applicazione della regola 2. Per agevolare il lettore, illustriamo qui di seguito i principali passaggi della risoluzione del sistema mediante la "nuova procedura *Fangcheng*" (Figura 8).

Figura 8
Risoluzione del sistema di equazioni lineari con il metodo di eliminazione per sottrazioni ripetute (nuova procedura del *Fangcheng*): nel passaggio 2 si sottraggono i termini della seconda riga dalla prima e si inseriscono le differenze nella prima riga; nel passaggio 3 si sottraggono i termini della prima riga dalla seconda e si inseriscono le differenze nella seconda riga. Si procede analogamente fino ad annullare il coefficiente di un'incognita per ciascuna riga.



3 Quadro teorico

In questa sezione illustriamo le lenti teoriche che hanno guidato la progettazione metodologica del nostro percorso didattico.

3.1 La trasposizione culturale e la storia delle matematiche

In una scuola multietnica e alla continua ricerca di strumenti inclusivi, l'approccio interculturale si può rivelare assai produttivo didatticamente. Per la progettazione di tale attività ci siamo, pertanto, valse del quadro teorico della *trasposizione culturale* (Bartolini Bussi, Sun & Ramploud, 2013; Mellone & Ramploud, 2015). Il costruito definisce una condizione di decentramento dalla pratica didattica del proprio contesto culturale, passando attraverso il contatto con pratiche didattiche di altri contesti culturali (Mellone, Ramploud, Di Paola & Martignone, 2019). Riteniamo che la nostra sperimentazione possa inserirsi in tale interessante quadro teorico, in quanto la nostra idea è quella di ripensare alle intenzionalità educative di testi didattici della storia della matematica cinese, con l'obiettivo di cercare nuove chiavi interpretative per la pratica didattica nel nostro contesto culturale. In particolare, osserveremo come sarà possibile generare possibilità di ragionamento differenti dalle usuali quando affronteremo con gli studenti un particolare sistema di rappresentazione dei numerali in uso nell'antica Cina, gli algoritmi dell'addizione e della sottrazione, e il metodo del *Fangcheng* per risolvere problemi.

Notiamo che uno degli aspetti della matematica cinese che rende più agevole il dialogo traspositivo tra le didattiche delle matematiche delle due culture è – come anticipato nel par. 2.1 – il carattere *operativo* e *immanente* della notazione numerica delle bacchette da calcolo usata nell'antica Cina. Tale aspetto, come vedremo nella sperimentazione, può rendere più intuitiva l'applicazione di alcune procedure aritmetiche e algebriche, aiutando a comprenderne più in profondità il funzionamento. Dall'altro lato, l'esecuzione di procedure su una tavola da calcolo non permette di

tenere memoria dei passaggi effettuati; ciò rende gli algoritmi odierni più agevoli dal punto di vista del controllo operatorio.

In linea dunque con il quadro teorico della trasposizione culturale, con tale percorso si intende promuovere non solamente un avvicinamento, ma una vera e propria interazione tra diverse culture, al fine di valorizzarne le differenze e potenzialità. Come afferma Bachtin (2000), infatti:

«Una certa immedesimazione nella cultura altrui [...] è un momento necessario del processo della sua comprensione; ma se la comprensione si esaurisse in questo solo momento, essa sarebbe una semplice duplicazione e non porterebbe in sé nulla di nuovo e di arricchente. La comprensione creativa non rinuncia a sé, al proprio posto nel tempo, alla propria cultura e non dimentica nulla».

(Bachtin, 2000, p. 347).

Il nostro approccio teorico alla trasposizione culturale mira a ricercare nuove pratiche didattiche in un contesto culturale diverso dal nostro non solo geograficamente, ma anche storicamente. Per questo motivo non possiamo prescindere dal considerare gli studi, ad oggi ben noti, sulle potenzialità dell'introduzione della Storia delle matematiche nell'insegnamento (Furinghetti & Radford, 2002; Radford, Boero & Vasco, 2000; Radford, 2003). L'accento posto sul duplice aspetto della storia e della geografia porta a riflettere sul fatto che non esista *un'unica* storia della matematica, ossia quella occidentale, come ben sottolinea Bagni (2006).

3.2 Artefatti come strumenti di mediazione semiotica

L'applicazione delle bacchette da calcolo richiede un'ulteriore precisazione sul quadro teorico di cui ci siamo avvalsi, rientrando nell'ampia ricerca sulle funzioni di mediazione semiotica degli artefatti. Come afferma Vygotskij,

«i bambini risolvono i problemi pratici con l'aiuto del linguaggio non meno che con quello degli occhi e delle mani. Questa unità di percezione, linguaggio e azione, che in definitiva produce l'interiorizzazione del campo visivo, costituisce il tema centrale di una qualsiasi analisi dell'origine delle forme di comportamento».

(Vygotskij, 1987, p. 26)

Nella sperimentazione oggetto di studio, facendo riferimento all'approccio strumentale di Rabardel (1999) e al quadro teorico proposto da Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri (2005), le bacchette da calcolo, la pagina di un testo antico e le bilance si configurano come *artefatti primari* da manipolare. Le modalità per variare le tavole da calcolo e i video su tablet possono invece essere interpretati come *artefatti secondari*. La rappresentazione algebrica dei sistemi di equazioni è invece un *artefatto terziario*. Tali artefatti presentano un *potenziale semiotico*: il loro utilizzo può infatti produrre segni specifici e contribuire alla costruzione di significati matematici; diventano cioè strumenti di mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). In particolare, nella nostra sperimentazione l'esplicita iconicità dei numerali cinesi e la presenza concreta delle bacchette ci consentono di evidenziare l'importanza dell'esperienza sensomotoria nella formazione di idee matematiche (Lakoff & Núñez, 2000; Arzarello & Robutti, 2009). Relativamente all'obiettivo didattico dell'acquisizione di maggior consapevolezza del

prestito e del riporto negli algoritmi dell'addizione e della sottrazione, diventa cruciale instaurare una relazione tra gli artefatti (le bacchette, il testo antico e i video) e il compito (scoprire il funzionamento del sistema di numerazione cinese), espressa tramite segni (perlopiù parole, disegni e gesti deittici). Attraverso la discussione tra gruppi e della classe si intende far evolvere il significato dei segni, fino a ricondursi ai segni matematici già conosciuti e ricontestualizzati nella cultura di appartenenza, segni che in questo modo possono essere rielaborati, messi in discussione e, infine, compresi a livello concettuale.

In maniera analoga l'obiettivo didattico di avviare a metodi pre-algebrici nella risoluzione di sistemi di equazioni si fonda sull'utilizzo combinato delle bilance a due piatti, tavola da calcolo e bacchette. Anche in questo caso risulta importante il ruolo dei segni situati (disegni e gesti deittici) per avvicinarsi ai segni matematici (formalizzazione odierna di un sistema di equazioni). Il *Fangcheng* è la procedura che gli studenti devono *oggettualizzare*, al fine di scoprirne, tramite gli artefatti, il funzionamento (con i video) e il senso fisico (con le bilance a due piatti), in modo da renderla un "oggetto autonomo" da applicare ad altri problemi analoghi.

Nel *ciclo didattico* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) da noi seguito gli studenti sono stati coinvolti in diverse attività che richiedevano l'uso di artefatti. L'iniziale interpretazione di un diagramma con segni scritti, rappresentante il triangolo di Tartaglia-Pascal con numerazione cinese, è seguita dall'utilizzo dell'artefatto, ossia le bacchette, per prendere confidenza con la rappresentazione dei numeri. Agli studenti è chiesto di produrre ipotesi sulla possibile rappresentazione dei numeri nell'antica Cina. Alla fase dell'attività con l'artefatto, è seguita la produzione di un testo a gruppi. Termina il ciclo la *discussione matematica* (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995), collettiva, orchestrata dall'insegnante, parte essenziale del processo di insegnamento-apprendimento. Il ciclo didattico è poi ripreso per le attività successive: la richiesta di osservare un video che mostra gli algoritmi dell'addizione e della sottrazione adottati nell'antica Cina è seguita da una produzione a gruppi del resoconto di quanto osservato. L'obiettivo di tale ciclo è quello di concentrarsi sui processi semiotici di produzione ed elaborazione di segni legati alle attività con gli artefatti. Anche la terza fase della sperimentazione – ossia la scoperta del *Fangcheng* attraverso il video con le bilance – ha rispettato il ciclo didattico da noi impostato. Per tale fase abbiamo infatti richiesto di osservare il video e di interagire con esso, quindi di descrivere dettagliatamente tutti i processi logici della procedura, anche avvalendosi dell'utilizzo delle bacchette. Qui gli artefatti che entrano in gioco sono due: le bacchette da calcolo, come già nelle fasi precedenti, e le due bilance a piatti, il cui schema di utilizzo è in parte noto agli studenti e in parte viene presentato nel video messo a disposizione. La scelta di utilizzare la metafora concettuale della bilancia per questa fase della sperimentazione deriva dal lavoro di Giacomini e Navarra (2003) sull'*Early algebra*, che propongono l'utilizzo delle bilance per lavorare sul concetto di uguaglianza all'interno del quadro teorico previsto per il progetto ArAl (Malara & Navarra, 2003). La nostra sperimentazione, inoltre, si vale dei risultati dello studio di Mihajlović e Milikić (2019), che hanno evidenziato il ruolo del *Fangcheng* nello sviluppo di competenze pre-algebriche. Infine, sottolineiamo che l'idea di collegare questa tipologia di problemi alle bilance è presente anche ne "I Nove Capitoli sulle procedure matematiche" in uno dei problemi dell'VIII capitolo.⁶

6

6. «Problema 8.9: Supponiamo che 5 passeri e 6 rondini si riuniscano su di una bilancia e che l'insieme dei passeri sia più pesante dell'insieme delle rondini. Se un passero ed una rondine cambiano il loro posto, l'ago della bilancia è in orizzontale. Se si mettono assieme passeri e rondini, il peso è di 1 Jin. Si chiede quanto pesano rispettivamente un passero ed una rondine» (Di Paola & Spagnolo, 2009, pp. 150-152).

4 Metodologia

La sperimentazione è stata proposta nella prima parte dell'anno scolastico 2019/2020 nella classe I B della scuola secondaria di primo grado "G. Berruto" di Baldissero Torinese, facente parte dell'I. C. Andezeno.

La classe, formata da 20 allievi, ha lavorato in aula, con due insegnanti-ricercatori (di cui uno titolare della classe), in gruppi eterogenei di 3-4 alunni. Nella sperimentazione si è scelto di alternare le attività di gruppo a discussioni matematiche orchestrate dall'insegnante. Le sessioni di lavoro sono state 10, di circa 1-2 ore ciascuna, per un totale di 15 ore, nell'arco di 4 settimane; documentate tramite video, foto e raccolta dei materiali e protocolli prodotti.

Abbiamo scelto di utilizzare una modalità laboratoriale per raccordare la prima parte della programmazione didattica, dedicata all'approfondimento e al ripasso delle operazioni aritmetiche, a una seconda parte, centrata sull'utilizzo dei problemi.

5 Descrizione dell'itinerario didattico

Il percorso da noi proposto è suddiviso nelle seguenti fasi: dapprima l'approccio ai numerali dell'antica Cina mediante le bacchette, in seguito l'utilizzo delle bacchette per eseguire addizioni e sottrazioni, infine la risoluzione di problemi con la tecnica del *Fangcheng*, introdotta con l'utilizzo della metafora concettuale delle bilance. Al termine di questo itinerario è stata proposta un'attività di verifica degli apprendimenti e un questionario di valutazione del percorso svolto.

La Tabella 1 riassume il percorso didattico progettato e attuato, indicando gli obiettivi di ciascuna fase, le risorse e i tempi utilizzati. Per rendere più fruibile la lettura di questo articolo, abbiamo ritenuto di descrivere le attività senza riportare le schede di lavoro utilizzate, che sono disponibili in allegato.

Attività	Obiettivo	Risorse	Durata
1. I numerali nell'antica Cina	Scoprire un sistema di rappresentazione dei numeri nell'antica Cina.	Allegato 1 con il triangolo dei coefficienti binomiali tratto dal "Prezioso Specchio dei Quattro Elementi".	3 ore
2. Le operazioni con bacchette e tavola da calcolo	Padroneggiare gli algoritmi di addizione e sottrazione con le bacchette cinesi e la tavola da calcolo.	Allegati 2 e 3. Bacchette e tavole da calcolo. Video che mostra l'applicazione degli algoritmi, proiettato su LIM.	4 ore
3. La procedura del <i>Fangcheng</i>	Scoprire l'antico metodo cinese per la soluzione di sistemi di equazioni lineari, comprenderne il funzionamento e saperlo applicare adottando le opportune strategie.	Allegati 4, 5, 6 e 7 con problemi liberamente tratti dal cap. VIII de "I Nove Capitoli sui procedimenti matematici" Bacchette e tavole da calcolo. Video che mostra il metodo per sottrazioni ripetute, disponibile su tablet per ogni gruppo.	6 ore
4. Verifica e questionario	Verificare gli apprendimenti e il grado di interesse.	Allegati 8 e 9. Bacchette e tavole da calcolo.	2 ore

Tabella 1
Descrizione delle attività.

5.1 I numerali nell'antica Cina

La prima attività si configura come un gioco-sfida per gli studenti: viene chiesto loro di cercare oggetti matematici nella pagina di un antico libro cinese, il "Prezioso Specchio dei Quattro Elementi", contenente il triangolo dei coefficienti binomiali (Figura 9). Nello specifico la richiesta è di argomentare in forma scritta tutte le considerazioni fatte dal gruppo (Allegato 1).

L'obiettivo di questa attività e della successiva, ossia la scoperta del sistema di numerazione cinese e degli algoritmi di calcolo, è un prerequisito per affrontare la procedura del *Fangcheng*. All'apparenza il compito richiesto si presenta molto alto rispetto alle conoscenze degli studenti, ma la semplicità nascosta nelle relazioni che legano i numeri del triangolo di Tartaglia-Pascal può consentire di superare le difficoltà linguistiche. La richiesta di scoprire un "misterioso" antico testo cinese rende particolarmente stimolante l'attività per una classe di ragazze e ragazzi di 11 anni, certamente più interessante di una lezione frontale introduttiva sul sistema di numerazione cinese.

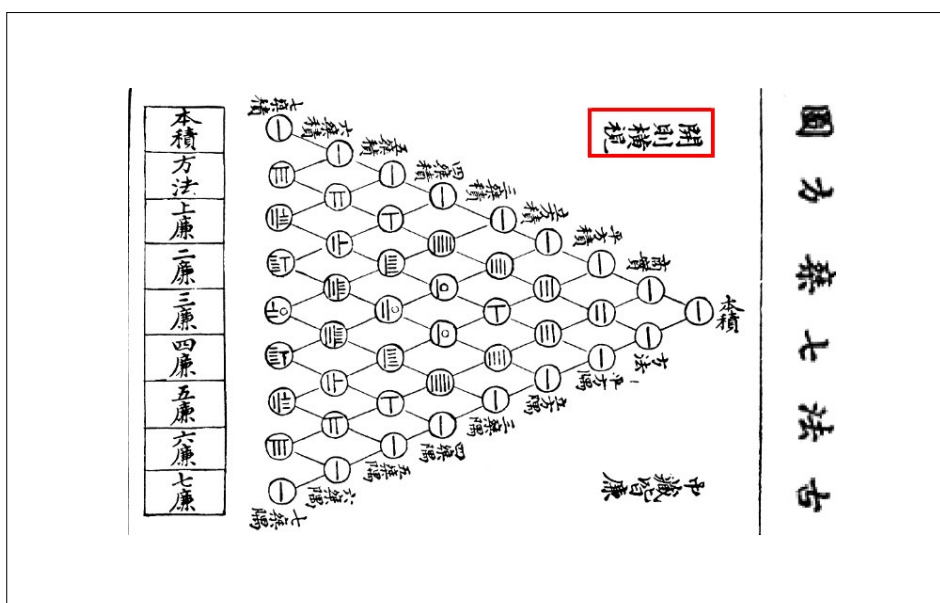


Figura 9
In questa immagine è riportato il triangolo dei coefficienti fino all'ottava potenza, tratto dal "Prezioso Specchio dei Quattro Elementi", orientato in accordo con il testo evidenziato nel riquadro in rosso, che si può tradurre con "apri in orizzontale".

L'immagine originale del triangolo dei coefficienti si presenta con il triangolo orientato con il vertice in alto e la base – che rappresenta i coefficienti per l'ottava potenza – in basso, in modo analogo a come siamo soliti vedere le rappresentazioni del triangolo di Tartaglia-Pascal. Tuttavia, nel "Prezioso Specchio dei Quattro Elementi" il triangolo era orientato con una rotazione di un quarto di giro verso destra, come indica la scritta evidenziata in Figura 9, che si può tradurre con "apri in orizzontale". Di conseguenza, i segni all'interno dei cerchi risultano anch'essi ruotati rispetto alla notazione introdotta nel par. 2.1 e utilizzata nei "Nove capitoli per i procedimenti matematici".

Al fine di ovviare a questo inconveniente e allo stesso tempo mantenere una struttura del triangolo dei coefficienti che gli studenti potranno riconoscere quando studieranno il triangolo di Tartaglia-Pascal, abbiamo scelto di operare una modifica dell'orientamento dei segni all'interno dei cerchi, come si può vedere nell'immagine di Figura 10.

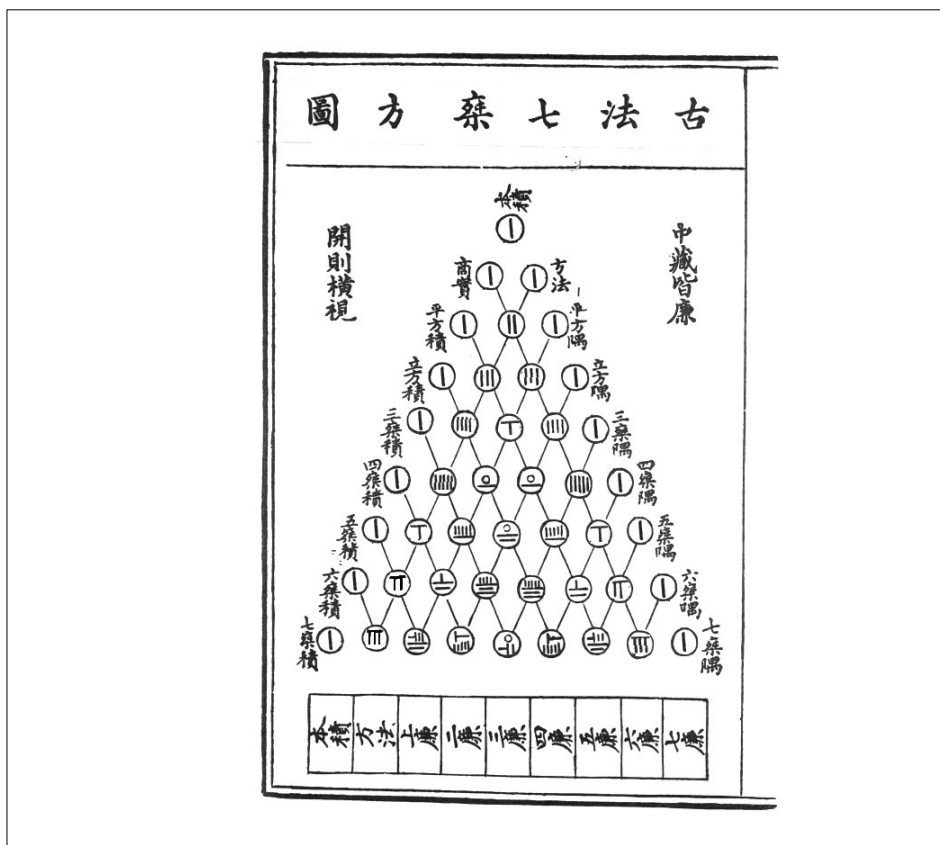


Figura 10
L'immagine riporta il triangolo dei coefficienti fino all'ottava potenza modificato per l'attività didattica proposta.

La scelta di sacrificare in parte l'autenticità dell'antico documento è quindi dettata dal mantenere la coerenza sia con lo schema del triangolo di Tartaglia-Pascal, nel quale i numeri presenti in una riga sono dati dalla somma dei numeri adiacenti nella riga soprastante, sia con il sistema di numerazione cinese basato sugli orientamenti *Tsung* e *Heng* (cfr. par. 2.1). Si è scelto inoltre di cancellare i segmenti che uniscono i cerchi posti ai lati del triangolo e contenenti il simbolo 1, al fine di rendere più evidente la costruzione dei numerali come somma dei due simboli della riga soprastante.

Dopo l'attività d'indagine sul triangolo è seguita una fase di discussione matematica nella quale i gruppi hanno spiegato cosa hanno scoperto, e l'insegnante ha utilizzato i loro risultati per costruire una tavola di equivalenza tra la notazione cinese antica e quella dei giorni nostri.

Per completezza – e per soddisfare la curiosità degli studenti – al termine della sessione l'insegnante ha illustrato alla classe la traduzione delle parole scritte in cinese intorno al triangolo. Quest'ultima è stata realizzata dagli studenti di nazionalità cinese che frequentano la classe III B della scuola secondaria di primo grado "E. Morelli", facente parte dell'I. C. Torino II di Torino.

5.2 Le operazioni con bacchette e tavola da calcolo

In questa fase abbiamo proposto l'apprendimento degli algoritmi di addizione e sottrazione, tramite la visione di due video sulla LIM, che mostrano alcune operazioni eseguite con le bacchette e la tavola da calcolo. Tali video sono stati da noi realizzati, senza commenti, fingendo che il protagonista fosse un insegnante cinese non in

grado di parlare la nostra lingua.⁷ L'obiettivo è di stimolare la curiosità e consentire di far scoprire in autonomia come funzionano gli algoritmi, soffermandosi in particolare sulle procedure di riporto e di prestito. L'espedito del video ha consentito a noi insegnanti di fingere di non conoscere la procedura e di apprendere insieme agli studenti; un elemento che ci ha permesso di non uscire dalla modalità laboratoriale. Ad ogni gruppo è stato fornito un set di 50 bacchette di legno (stick da ghiacciolo) e una tavola da calcolo, realizzata disegnando una griglia 4x3 su un foglio di carta bianco di formato A2, affinché potessero provare sia a replicare le operazioni del video, sia ad eseguirne di diverse.

Le operazioni mostrate nei video consentono di introdurre gradualmente elementi di difficoltà crescente. Dapprima sono presentate addizioni senza riporto (122+232; 217+132), successivamente addizioni con aggiustamenti nello stesso ordine di grandezza (234+52) e infine addizioni con riporto all'ordine di grandezza successivo (437+154; 179+248; 647+353). Una volta compresa la procedura ed esercitatisi sull'addizione con le bacchette, gli studenti sono passati alle sottrazioni, anch'esse presentate in modo graduale (197-31; 245-126).

Compreso il funzionamento della procedura con gli artefatti, abbiamo chiesto agli studenti di argomentare in forma scritta le proprie congetture sull'algoritmo (Allegati 2 e 3). A partire da tali argomentazioni è stata condotta una discussione collettiva, da cui è stato possibile verificare che tutti gli studenti avessero compreso il corretto funzionamento degli algoritmi. In particolare, abbiamo rivolto maggiori attenzioni agli esempi di operazioni che presentavano riporti o prestiti.

5.3 La procedura del *Fangcheng*

Dopo le prime due fasi che introducono gli studenti al sistema di numerazione e di calcolo dell'antica Cina, siamo giunti al cuore della nostra sperimentazione. Anche qui abbiamo seguito l'approccio laboratoriale, partendo da un problema concreto. Abbiamo fornito agli studenti il testo del problema sulle casse e i sacchi di grano (par. 2.2) e abbiamo chiesto loro di provare a risolverlo liberamente, scegliendo il metodo a loro avviso più adeguato (Allegato 4). L'obiettivo è di consentire agli studenti di prendere confidenza con il problema e non tanto – in questa fase – di trovare un metodo di risoluzione generale.

L'Allegato 5 introduce il *Fangcheng* come un possibile metodo di risoluzione del problema, utilizzato da un contadino di nome Cheng Fang, che aveva letto "I Nove Capitoli sui procedimenti matematici". Gli studenti sono invitati a scoprirne il funzionamento attraverso un video, da noi registrato a velocità accelerata, che mostra come si applica la procedura del *Fangcheng*.⁸ Al posto di fornire le due regole su cui si fonda il metodo in maniera procedurale, abbiamo scelto di utilizzare la metafora concettuale delle due bilance a piatti. Infatti, come nella bilancia l'intento è di far sparire da uno dei due piatti un tipo di merce, togliendo quantità equivalenti per rispettare le leggi di equilibrio della bilancia, così nella procedura del *Fangcheng* la strategia è quella di sottrarre numeri (fisicamente, attraverso le bacchette) al fine di eliminare un'incognita, rispettando i principi di equivalenza delle equazioni.

Gli studenti hanno avuto a disposizione un tablet per ogni gruppo, con il quale han-

7. Video con esempi di addizione: bit.ly/addizioni. Video con esempi di sottrazione: bit.ly/sottrazioni.

8. Video sul *Fangcheng*: bit.ly/fangcheng.

no potuto visionare il video utilizzando gli strumenti di navigazione (interrompere, spostarsi avanti e indietro, rallentare...). La richiesta fatta agli studenti è di completare opportunamente la tabella che riportiamo in **Figura 11**, che mette in relazione il concetto di equilibrio della bilancia con la tavola da calcolo da noi proposta per applicare il *Fangcheng*.

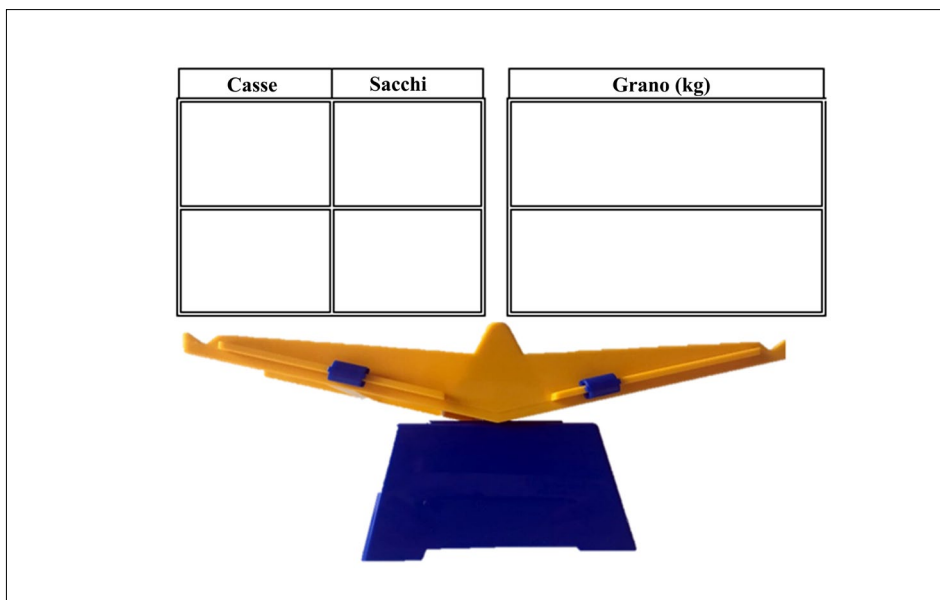


Figura 11
In quest'immagine sono associate le due rappresentazioni del sistema di equazioni: l'equilibrio fisico della bilancia e l'uguaglianza con la tavola da calcolo.

Nell'**Allegato 6** abbiamo chiesto agli studenti di provare a ripetere le operazioni eseguite nel video, senza far uso delle bilance, ma utilizzando la notazione cinese con le bacchette e la tavola da calcolo. L'obiettivo è di abbandonare progressivamente l'utilizzo delle bilance in equilibrio per passare alle equazioni rappresentate con i numerali cinesi.

Quando la procedura base è stata compresa nella sua applicazione sull'esempio dato, abbiamo fornito agli studenti una batteria di problemi (**Allegato 7**), liberamente tratti dall'VIII capitolo del trattato "I Nove Capitoli sui procedimenti matematici". Nello specifico, abbiamo scelto di lasciare invariati i nomi degli oggetti utilizzati nei problemi, e di modificare opportunamente i numeri, in modo che si potesse applicare la "nuova procedura del *Fangcheng*" per sottrazioni ripetute.

Ad ogni fase di questa attività sul *Fangcheng* è seguita la discussione matematica con l'intera classe, orchestrata dall'insegnante.

5.4 Verifica e questionario

Al termine della sperimentazione, abbiamo proposto agli studenti una verifica scritta (**Allegato 8**) e un questionario di gradimento delle attività (**Allegato 9**), al fine di testare il grado di apprendimento della procedura e la percezione che ogni studente aveva del proprio coinvolgimento nell'apprendimento. Gli studenti hanno lavorato individualmente.

Nella verifica abbiamo proposto un problema diverso da quelli incontrati precedentemente e abbiamo chiesto di risolverlo utilizzando il *Fangcheng*, indicando nelle griglie fornite i calcoli effettuati con le bacchette. Pur avendo a disposizione una

quantità sufficiente di bacchette e tavole da calcolo, non le abbiamo volutamente consegnate agli studenti nella fase iniziale, per non indurre la necessità di utilizzarle. Un piccolo gruppo (5 studenti su 20) ha risolto il problema utilizzando la procedura su carta del *Fangcheng*; gli altri studenti – probabilmente per sentirsi più sicuri nell'esecuzione della procedura – hanno richiesto agli insegnanti la possibilità di utilizzare fisicamente le bacchette e le tavole da calcolo (Figura 12), giungendo alla soluzione entro i tempi stabiliti (1 ora).

Terminato il tempo assegnato per la verifica, abbiamo chiesto loro di compilare un questionario contenente alcune domande di carattere generale sull'attività proposta.

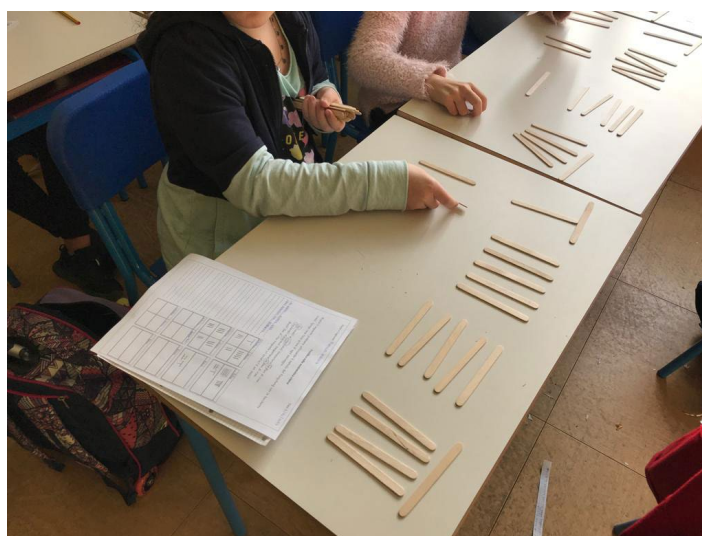


Figura 12

In questa immagine si osserva una fase dello svolgimento della verifica, in cui le studentesse utilizzano l'artefatto delle bacchette per risolvere il problema.

6 Analisi dei protocolli degli studenti

Presentiamo in questa sezione l'analisi dei risultati e dei feedback della classe, durante e al termine del percorso didattico.

6.1 I simboli numerici cinesi e le procedure di calcolo

Nella prima attività gli studenti sono riusciti a interpretare l'immagine del triangolo dei coefficienti binomiali nonostante le difficoltà linguistiche. Le relazioni tra i simboli numerici sono state riconosciute con ragionamenti differenti. In tutti i gruppi è stato subito associato il simbolo ai numeri da 1 a 5. In seguito con diverse strategie sono stati decodificati i numeri 6, 7 e 8, con considerazioni legate, ad esempio, alle "diagonali" del triangolo (Figura 13a), all'analogia con i numerali romani («per decifrare i numeri abbiamo fatto finta, che fossero simili ai numeri romani»; «però è sbagliato, perché se fossero numeri romani il 4 si dovrebbe scrivere IV») e all'orientamento che differenzia le unità (in verticale) dalle decine (in orizzontale).

Fondamentale per la completa traduzione del triangolo è stata la scoperta della relazione additiva tra numeri di righe successive («forse questo qui è un sei, perché noi non abbiamo ancora visto il 6 con questi... perché 3 più 3 è 6»), a cui sono giunti tutti i gruppi dopo varie riflessioni.

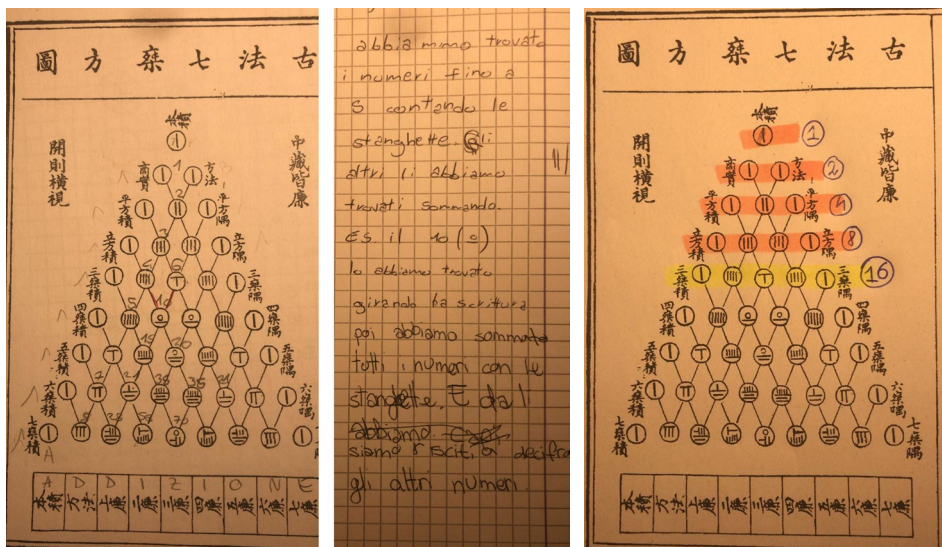


Figura 13a-13b
In queste immagini si osservano diverse strategie per scoprire la notazione cinese: a) l'uso della diagonale, abbinato alla relazione tra simbolo e quantità; b) il confronto tra somme di ogni riga pari alle potenze successive del 2.

A tal proposito sono interessanti le espressioni e i gesti deitici (Figura 14) che accompagnano le argomentazioni dei ragazzi in questa fase di scoperta (E.: «noi abbiamo calcolato così: questo più questo fa questo. Questa è la nostra logica! E anche qua dice: unisci questi due e fa questo»).

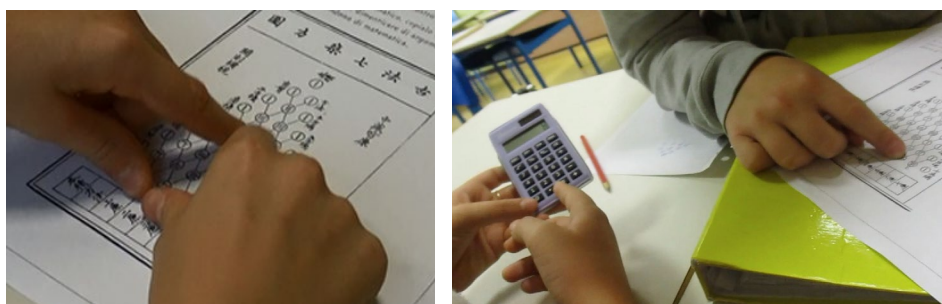


Figura 14
In queste immagini si osserva come gli studenti scoprono la relazione additiva, mostrandola con gesti deitici e verificandola anche con l'utilizzo della calcolatrice.

Si noti che, se le strategie precedenti aiutavano a produrre congetture, l'utilizzo della relazione additiva sembra confermarle definitivamente, come dimostrano le argomentazioni finali dei gruppi:

- M.: «Fino a 5 ci sono le stanghette, poi da 6 ci sono i numeri strani... [...] Ma tu hai capito?».
- D.: «Guarda un attimo, se tu sommi questo, allora il 2, allora 3 più 3 fa 6, sei più 4 fa 10, 10 più 10 fa 20, 20 più, questo dovrebbe essere un 15, 35...».

Alcuni gruppi hanno cercato di ampliare la propria conoscenza dei numerali cinesi, andando oltre quelli riportati nell'immagine, arrivando a comprenderne così il meccanismo di costruzione:

- F.: «Questo qua è 7, più 1, 8... non c'è il 9!».
- C.: «Ferma! Un attimo: e se mettiamo 4 stanghette? Non l'abbiamo ancora fatto. Se metti 4 stanghette... perché nell'8 ce ne sono 3, nel 7 ce ne sono 2... quindi il 9 è una linea con 4 stanghette. Ho scoperto il 9!».

Si apprezza il ragionamento induttivo utilizzato dagli studenti, segno di una comprensione della natura operatoria del sistema cinese.

Per la decodificazione del 10 è stata importante la presenza del cerchietto sopra la stanghetta orizzontale, come si evince da alcuni dialoghi:

- C.: «Questo qua è un 10, perché uno zero [indicando la stanghetta orizzontale e poi il cerchietto]».
- Tutti: «È vero!».
- N.: «Quindi se questo qua è un 6, più 4 fa 10. [...] E questo secondo me è un 20 perché due stanghette e lo zero, sono due decine...».
- C.: «più zero...!».

Si tratta di una notazione adottata solamente nella scrittura di alcuni testi, come il "Prezioso Specchio dei Quattro Elementi", e mai con le tavole da calcolo, nelle quali – come anticipato nel par. 2.1 – si lasciava una casella vuota. Abbiamo scelto di mantenere in questa prima fase la rappresentazione dello 0 perché il lavoro è stato condotto su un testo scritto e per velocizzare le fasi preliminari. Successivamente, spostando l'attenzione sulla tavola da calcolo, non è stato necessario utilizzare tale simbolo. Agli studenti è stato chiaro il motivo di questa scelta, che è stata giustificata dai professori sia dal punto di vista storico, sia da quello operativo.

Di particolare interesse sono state le considerazioni di un gruppo che ha decodificato la notazione cinese, lavorando sul confronto tra le somme di ogni riga e scoprendo che si trattava delle potenze di 2 fino a 256 (L.: «Nelle prime quattro righe basta sommare i bastoncini e sono 1, 2, 4, 8; allora abbiamo pensato che la quinta riga era 16. Allora quel simbolo a forma di T deve essere un 6! Perché $1+4+T+4+1$ fa 16. E così anche le altre righe sotto»). Ciò dipende dal fatto che il triangolo rappresenta i coefficienti binomiali del quadrato di un binomio $(a+b)^n$, che indica le potenze di 2 quando $a=b=1$ (Figura 13b).

Nella seconda attività la visione dei video sull'addizione e sulla sottrazione ha velocizzato la comprensione delle procedure di calcolo, che tuttavia solo all'apparenza sono sembrate semplici agli studenti. Come prevedevamo, sono infatti emerse alcune problematiche nei casi in cui compariva il prestito o il riporto. Durante la sperimentazione ci siamo resi conto che l'iconicità delle bacchette ha aiutato ad affrontare tali ostacoli e a comprenderne meglio il funzionamento odierno a livello concettuale. Troviamo conferma di questo nella seguente significativa frase estratta dal questionario finale: «Con questi numeri cinesi ho fatto più fatica a fare le addizioni, quindi le ho imparate meglio». Riteniamo che tale frase possa essere letta sotto la lente della trasposizione culturale e ci permetta di concludere che l'utilizzo delle bacchette ha effettivamente contribuito a ripensare e aumentare la consapevolezza sugli algoritmi aritmetici della propria cultura, attraverso l'incontro con la cultura cinese antica.

6.2 La procedura del *Fangcheng*

Nell'attività introduttiva al *Fangcheng* (Allegato 4), in cui occorreva risolvere in autonomia il problema, in tutti i gruppi gli studenti hanno operato in maniera empirica, cercando di trovare la soluzione per tentativi. Nella maggior parte dei casi l'uso di un disegno con l'esatta quantità di casse e sacchi ha aiutato a comprendere il testo e, quindi, a trovare velocemente la soluzione. In alcuni gruppi abbiamo potuto osservare un primo tentativo di confrontare le due equazioni con la sottrazione termine

a termine – regola alla base del metodo per sottrazioni successive del *Fangcheng* – senza tuttavia riuscire a spiegare le ragioni che li hanno spinti ad effettuare tale passaggio (Figura 15).

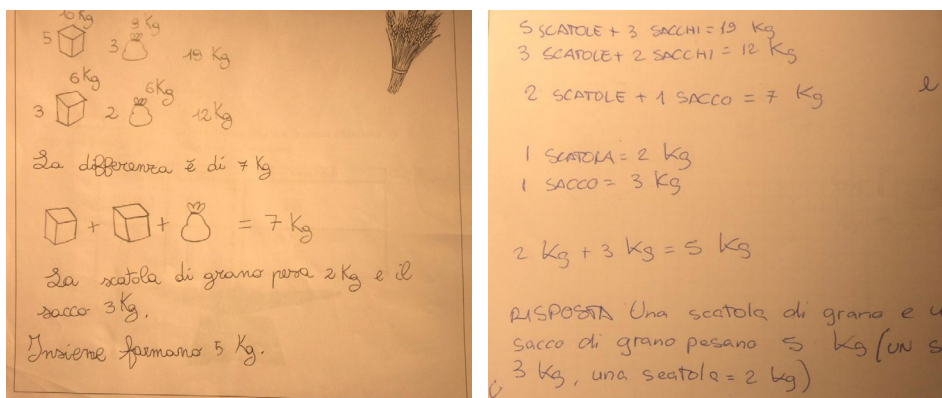


Figura 15
In questi protocolli si possono notare due tentativi di risoluzione del problema con l'intuizione del principio base del metodo del *Fangcheng* per sottrazioni ripetute, realizzati con un linguaggio pre-formale ad astrazione crescente.

La seconda fase dell'attività, quella in cui è stato mostrato il video in cui si applicava il *Fangcheng* con le bilance, ha comportato alcune difficoltà iniziali, emerse grazie al confronto con i compagni e con gli insegnanti. Tra le cause non legate al problema matematico in sé possiamo annoverare la velocità del video, per la quale si è adottata la soluzione di rallentare la riproduzione con gli strumenti messi a disposizione dall'app YouTube. Inoltre, i chilogrammi erano rappresentati da monetine ed era impossibile distinguere a colpo d'occhio la numerosità degli oggetti contenuti nelle bilance.⁹ I gruppi che, nella fase precedente, avevano ragionato empiricamente per trovare la soluzione del problema hanno inizialmente faticato a comprendere il nesso tra la quantità di casse, sacchi e chilogrammi tolti da una bilancia e il numero presente nell'altra bilancia. Per questo motivo è stato necessario soffermarsi molto su questa fase, facendo lavorare i ragazzi in modo combinato usando video su tablet, bacchette e tavola da calcolo cartacea (Figura 16). Spendere ulteriore tempo per sciogliere questo nodo si è rivelato utile, infatti tutti i gruppi hanno infine compreso la relazione tra le varie quantità presenti nelle bilance e la soluzione finale del problema.

9

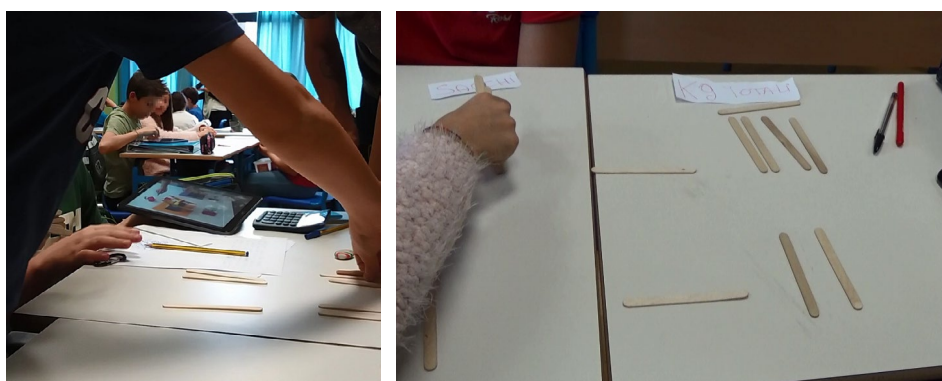


Figura 16
In queste immagini si osserva come gli studenti utilizzino contemporaneamente diversi artefatti: bacchette, tavola da calcolo simulata dalle etichette delle incognite e i tablet.

9. Nonostante una ripresa dall'alto avrebbe aiutato a contare velocemente il contenuto di ogni piatto delle bilance, abbiamo preferito realizzare il video in un piano leggermente rialzato rispetto a quello delle bilance, per mostrarne l'equilibrio.

La discussione matematica ha contribuito a chiarire i dubbi sulla procedura, che alcuni gruppi ancora avevano dopo aver visionato il video. Questa è stata condotta facendo argomentare i passaggi agli studenti, utilizzando la lavagna di ardesia e delle bacchette con adesivi magnetici (Figura 17). In questa fase è stata importante l'enfasi posta dal professore sul legame tra ogni passaggio della procedura e l'equilibrio delle bilance. Queste ultime, infatti, aiutano a controllare la correttezza della procedura, ma essendo una metafora – dalla quale a un certo punto è necessario uscire – non ci si può aspettare una tale verifica ogniqualvolta si operi con la tavola da calcolo. Una delle difficoltà degli studenti è proprio riuscire a mantenere il controllo sull'equilibrio della bilancia anche quando essa non è fisicamente presente. Nella discussione matematica i gruppi generalmente comprendono e sanno argomentare la necessità di ridurre per sottrazioni successive di termini corrispondenti, ma spesso dimenticano di togliere il corrispettivo peso nella colonna dei chilogrammi; l'intervento del professore risulta quindi fondamentale. Proponiamo qui un estratto di discussione (Ins. sta per Insegnante):

- M.: «Dobbiamo togliere 3 casse e 2 sacchi da sopra, perché sotto ci sono 3 casse e 2 sacchi».
- Ins.: «Ma non basta!».
- E.: «Dobbiamo togliere da 19 i 12 chili».
- Ins.: «E perché siamo certi che togliendo da qua [indicando 5] questo [3] e da qua [3] questo [2] e da qua [19] questo [12], rimane in equilibrio?».
- E.: «Perché sotto ci sono 3 casse e 2 sacchi e togliendo... e la logica del contadino fa che ogni volta bisogna togliere quelli lì [indicando la seconda riga] da quelli sopra e poi quelli sopra a quelli lì».
- Ins.: «Ma perché funziona?».
- U.: «Perché sai che quelli della seconda bilancia sono uguali. Praticamente sappiamo che le casse e i sacchi pesano 12 chili, quindi se facciamo quello, cioè se facciamo 5 meno 3 e 3 meno 2, sappiamo che è giusto perché anche dall'altra... perché sono lo stesso! Sono 12 chili comunque».
- Ins.: «Avete capito? Che cosa stiamo togliendo di qua? Di qua [indicando 19] stiamo togliendo 12 chili. Che forma hanno i 12 chili che togliamo anche di qua [indicando la prima riga] per tenere in equilibrio la bilancia?».
- E.: «Casse e sacchi».
- Ins.: «E chi mi dice che 3 casse e 2 sacchi pesano 12 chili?».
- E.: «Lo dice la bilancia di sotto!».



Figura 17

In questa immagine, tratta dalla discussione collettiva, gli studenti indicano la seconda equazione, in riferimento alla domanda del professore che chiede di spiegare per quale motivo si tolgono dalla prima equazione 3 casse, 2 sacchi e 12 chili.

Nella progettazione dell'attività avevamo previsto una fase in cui gli studenti potessero utilizzare fisicamente le bilance, nel caso non avessero compreso la procedura, ma ciò non è stato necessario.

Nell'attività di risoluzione della batteria di problemi (**Allegato 7**), gli studenti hanno verificato la loro comprensione del metodo. Abbiamo lasciato loro la libertà di utilizzare o meno le bacchette e di adottare la scrittura che preferivano sul foglio (non abbiamo fornito tavole da calcolo cartacee). Diversi gruppi in autonomia hanno lavorato direttamente su quest'ultimo: alcuni hanno disegnato una tavola per ciascun passaggio, altri hanno riportato solo la riga risultante dalla sottrazione. Un gruppo ha invece riportato il disegno dei bastoncini su un'unica griglia e barrando quelli via via eliminati, come se stessero lavorando fisicamente con le bacchette; procedura quest'ultima che necessita di un grande controllo della notazione utilizzata. Si sottolinea a tal proposito uno dei limiti dell'antico algoritmo cinese eseguito con tavole e bacchette, ossia l'impossibilità di memorizzarne i passaggi e quindi di ripercorrerlo all'indietro per verificare i calcoli. Per questo motivo abbiamo scelto di fornire diverse copie della tavola da calcolo, in modo da simulare l'esecuzione con l'artefatto e contemporaneamente avvicinare gli studenti a una prima forma di rappresentazione scritta della risoluzione di un sistema di equazioni.

Si noti che, in alcuni casi, una volta trovata la soluzione con il metodo del *Fangcheng*, gli studenti verificano il risultato del sistema con le equazioni fornite dal problema; ciò è probabilmente dovuto all'attività empirica precedente e pensiamo possa essere funzionale alla futura comprensione del ruolo dei coefficienti e delle incognite, che essi affronteranno quando incontreranno le equazioni.

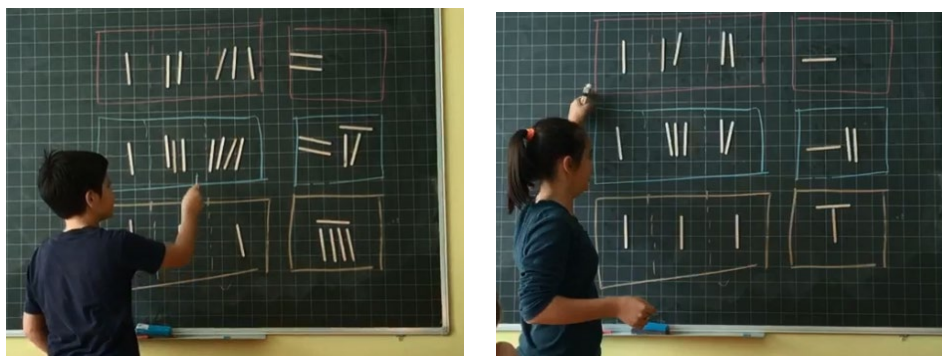
Nella discussione matematica finale alcuni studenti hanno risolto uno degli esercizi dell'**Allegato 7** in autonomia, giustificando i passaggi con l'uso di considerazioni che fanno riferimento alla bilancia. Si consideri ad esempio il seguente problema (n° 5 nell'**Allegato 7**):

- Una pecora, due cani e tre galline valgono 20 sapechi.
- Una pecora, tre cani e quattro galline valgono 27 sapechi.
- Una pecora, un cane e una gallina valgono 9 sapechi.
- Quanti sapechi vale una pecora? E un cane? E una gallina?

Nel presentare alla lavagna la risoluzione del problema (**Figura 18**), utilizzando le bacchette magnetiche, U. spiega che per risolvere il problema «bisogna sottrarre dalla bilancia con più peso quella meno pesante. Per esempio, la più grande è quella in centro, poi c'è quella in alto e questa in basso è la meno pesante». Alla richiesta del professore di spiegare da cosa potesse dedurre che quella al centro è più pesante, U. risponde: «sia da qua [indicando le bacchette del piatto a sinistra rappresentanti 1, 3 e 4], sia da qua [indicando 27]». Il professore allora ribatte: «Puoi spiegare meglio perché posso togliere il contenuto dei due piatti della bilancia dai due piatti dell'altra?», U.: «perché se stanno su una bilancia che è in equilibrio, vuol dire che hanno lo stesso peso». Quest'ultima affermazione di U. ci suggerisce che lui abbia compreso e interiorizzato il procedimento, riuscendo a mantenere il controllo sia dal punto di vista procedurale, sia da quello concettuale.

Figura 18
In questa immagine U. sta spiegando la risoluzione del problema 5.

Figura 19
In questa immagine M. sta spiegando la risoluzione del problema 4.



Sottolineiamo, inoltre, che le considerazioni sul peso della bilancia dalla quale partire per eseguire la sottrazione non sono banali, poiché prevedono la comprensione dei termini della sottrazione (minuendo e sottraendo), che spesso gli studenti tendono a invertire; come dimostra il dialogo tra M. e l'Insegnante a proposito della spiegazione di uno dei problemi (n° 4 dell'Allegato 7, Figura 19):

- M.: «Dobbiamo partire dalla bilancia blu [seconda equazione] e la sottraiamo a quella rossa».
- Ins.: «Quindi da quella rossa sottraiamo la blu?».
- M.: «No, sottraiamo quella rossa da quella blu».
- Ins.: «E perché possiamo togliere dalla blu e non dalla rossa?».
- M.: «Perché la blu contiene più cose, cioè è pesante!».
- Ins.: «Ok. Quindi dalla bilancia più pesante cosa togliamo?».
- M.: «Tolgo due soldati, due guerrieri e un ufficiale da questo piatto della bilancia e 10 dall'altro piatto, quindi resta 2».
- Ins.: «E perché?».
- M.: «Perché due soldati, due guerrieri e un ufficiale sono 10 [indicando i termini della prima equazione]».

Riteniamo che, nonostante non sia sempre esplicitata nella spiegazione dei passaggi, la metafora della bilancia sia risultata efficace nella comprensione dei principi alla base del *Fangcheng*. L'intervento dell'insegnante per aiutare gli studenti a spostarsi dal piano algebrico dell'uguaglianza a quello fisico della bilancia in equilibrio è servito per verificare che l'automatismo operativo fosse a livello concettuale e non procedurale.

Notiamo, infine, che nella risoluzione di alcuni problemi dell'Allegato 7 e del problema della Verifica, l'applicazione della procedura del *Fangcheng* conduceva ad un sistema nel quale un'equazione aveva un coefficiente non unitario. Per la risoluzione di tale equazione era dunque richiesto di operare una divisione tra il termine noto e il coefficiente dell'incognita. Tutti gli studenti sono stati in grado di applicare questa procedura, che non era stata presentata nelle attività didattiche, riflettendo sul senso del problema, come possiamo osservare dal protocollo estratto da una verifica, che riportiamo in Figura 20.

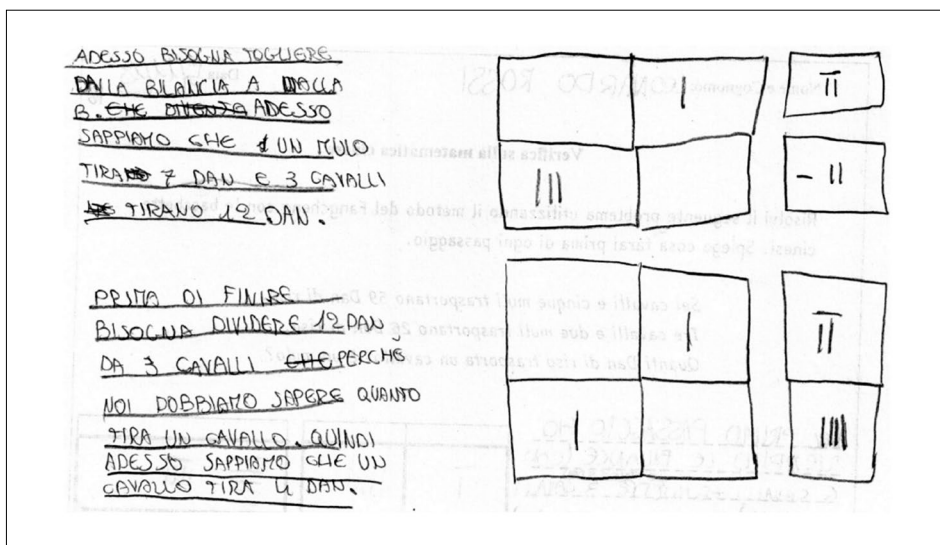


Figura 20
In questo protocollo, che riporta i passaggi finali della verifica, si osserva la giustificazione della procedura di divisione da attuare al termine della procedura del *Fangcheng*.

7 Conclusioni

Riteniamo che la nostra sperimentazione abbia condotto a buoni risultati nella classe. In termini di apprendimento si evidenzia che 18 studenti su 20 hanno saputo applicare autonomamente la procedura del *Fangcheng*, risolvendo correttamente il problema proposto nella verifica, di questi – come anticipato nel par. 5.4 – 5 non hanno avuto bisogno di utilizzare l’artefatto delle bacchette e della tavola da calcolo. I due studenti che non hanno portato a termine il compito assegnato in autonomia sono riusciti a risolvere il problema con l’aiuto dell’insegnante. Per quanto concerne, invece, l’atteggiamento nei confronti della matematica, ci possiamo basare sui questionari di gradimento che mostrano un buon coinvolgimento da parte degli studenti; come si evince dalle parole più ricorrenti con cui gli studenti hanno descritto le attività: divertirsi, capire, collaborare, interessante, scoprire.

Gli studenti hanno apprezzato particolarmente l’analisi e la scoperta di un testo storico e di un’antica procedura che i cinesi realmente utilizzavano. Questo ci fornisce un riscontro su quanto la trasposizione culturale sia stata utile per il raggiungimento dei nostri obiettivi: da un lato stimolare l’interesse degli studenti, dall’altro aiutarli a comprendere più in profondità alcuni argomenti fondamentali della matematica, quali le operazioni aritmetiche e i problemi risolvibili con sistemi di equazioni lineari. Nello specifico, relativamente alle operazioni con le bacchette, rileviamo che in generale negli studenti persiste la difficoltà legata al prestito e al riporto nella sottrazione e addizione. Essi sembrano, su tali procedure, preferire riferirsi agli algoritmi appresi con il sistema di numerazione indo-arabico. Tuttavia, dove non c’è il problema del prestito o del riporto, gli studenti scelgono di utilizzare le cifre cinesi, che, grazie alla loro natura operatoria, sono di gran lunga più efficienti. Il nostro intento era proprio questo, e non già di sostituire il loro usuale sistema di numerazione, ma di aiutarli a comprenderne meglio il funzionamento. Riteniamo che tra i fattori che hanno inciso sul raggiungimento di questo obiettivo vi sia la componente iconica e indicale dell’artefatto. Per quanto riguarda il metodo del *Fangcheng* concordiamo con i risultati di Bagni, che nella sua sperimentazione ha riscontrato come gli allievi non apprendano

mnemonicamente la “regola”, ma agiscono strategicamente facendosi aiutare dalla presenza fisica delle bacchette. Ciò risulta ancor più evidente nella nostra sperimentazione che prevedeva esclusivamente il metodo per sottrazioni ripetute e l’uso delle bilance: la procedura di risoluzione seguita dagli allievi è stata validata per ogni passaggio da ragionamenti che facevano riferimento alle leggi fisiche delle bilance. Tale metafora concettuale aiuta a dare un senso alla procedura fondante del metodo, garantendo l’apprendimento di una strategia di risoluzione a livello concettuale e non solo procedurale. Gli artefatti (video su tablet e bilance) hanno contribuito a far comprendere e dare un senso alla procedura del *Fangcheng*, che è stata oggettualizzata e traslata sulla tavola da calcolo. Quest’ultima è a sua volta l’artefatto, inteso come strumento di mediazione semiotica, che ha aiutato gli studenti ad avvicinarsi ad una prima formalizzazione pre-algebrica dei sistemi di equazioni.

Come anticipato, la procedura delle sottrazioni ripetute è applicabile solamente in alcune tipologie di problemi; mentre la procedura del *Fangcheng* cosiddetta di «eliminazione per moltiplicazione reciproca» (Di Paola & Spagnolo, 2009) offre un campo di applicazione più ampio. Per questo motivo potrebbe essere interessante proseguire questa ricerca, applicando la metafora concettuale delle bilance anche all’approccio moltiplicativo. In prospettiva futura sarebbe altrettanto importante – come sottolineato dallo stesso Bagni (2009) – approfondire il passaggio dall’esperienza pre-algebrica a quella algebrica con la notazione moderna.

Per il lavoro in classe, questa attività apre interessanti prospettive. Le basi concettuali gettate tramite l’utilizzo degli artefatti potranno essere opportunamente richiamate nel momento dello studio delle equazioni di primo grado e dei principi di equivalenza delle stesse. In tale momento si potrebbe approfondire il ruolo dell’attività qui presentata, degli artefatti utilizzati e dei segni prodotti nel passaggio dall’esperienza pre-algebrica a quella algebrica con la notazione moderna. Inoltre, la comprensione concettuale degli algoritmi di calcolo e dell’uguaglianza nei sistemi di equazioni può essere ulteriormente consolidata tramite attività di *peer education* tra classi parallele, nelle quali studenti, ormai esperti di storia della matematica cinese, possono insegnare quanto appreso ai compagni. Spingendosi oltre, si può ipotizzare di svolgere un’analogia attività di *peer education* sia verso i bambini di Scuola Primaria relativamente alle procedure di calcolo, sia verso studenti del primo biennio delle Scuole Secondarie di secondo grado per quanto riguarda i sistemi di equazioni. Questi ultimi, infatti, sarebbero in grado di effettuare un collegamento tra le tecniche di risoluzione dei sistemi apprese in classe e i concetti presentati dagli studenti della scuola secondaria di primo grado.

In definitiva, pensiamo che questa sia una di quelle esperienze significative, di cui si fa menzione nei traguardi per lo sviluppo delle competenze delle *Indicazioni Nazionali* (MIUR, 2012), che contribuisce a rafforzare «un atteggiamento positivo rispetto alla matematica» e a far capire come «gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà». Inoltre, aiuta a chiarire come la matematica sia uno strumento di pensiero, costruito, con diverse modalità, attraverso i secoli e nelle varie parti del mondo.

Bibliografia

Arzarello, F., & Robutti, O. (2009). Embodiment e multimedialità, nell’apprendimento della matematica, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32 (3), 243- 268.

- Bachtin, M. (2000). *L'autore e l'eroe. Teoria letteraria e scienze umane*. Torino: Einaudi.
- Bagni, G. T. (2006). Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni. In L. Giacardi, M. Mosca & O. Robutti (A cura di), *Associazione Subalpina Mathesis. Conferenze e seminari 2005-2006* (pp. 53-62). Torino: Kim Williams Books.
- Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (second edition). New York, London: Routledge.
- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic Mediation in The Primary School: Dürer's Glass. In H. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education* (Festschrift for Michael Otte) (pp. 77-90). New York, USA: Springer.
- Bartolini Bussi, M.G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Modena: CDE.
- Bartolini Bussi, M. G., Sun, X., & Ramploud, A. (2013). A dialogue between cultures about task design for primary school. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 551-560). Oxford: U.K.
- Chemla, K., & Shuchun, G. (2004). *Les neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris: Dunod.
- Costa, C., Alves, J. M., & Guerra, M. (2015). Ancestral Chinese method for solving linear systems of equations seen by a ten-years-old Portuguese child. In E. Barbin, U. T. Jankvist, & T. H. Kjeldsen (Eds.), *History and epistemology in mathematics education, The Proceedings of the Seventh European Summer University ESU7* (pp. 169-182). Copenhagen: Aarhus University, Danish School of Education.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia. II. Dal tramonto greco al medioevo*. Bari: Dedalo.
- Di Paola, B., & Spagnolo, F. (2009). I sistemi indeterminati nei "Nove Capitoli" di Liu Hui. Il ruolo del "contesto" per determinare l'"algoritmo fondamentale" come strumento argomentativo. *Quaderni di ricerca in didattica della matematica*, 19, 101-171.
- Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631-654). Hillsdale: Erlbaum.
- Giacomin, A., & Navarra, G. (2003). *Unità 6. Dalla bilancia a piatti all'equazione*. Progetto ArAl, 6. Bologna: Pitagora.
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Malara, N. A., & Navarra, G. (2003). *Quadro teorico di riferimento e glossario*. Bologna: Pitagora.
- Martzloff, J. C. (2006). *A History of Chinese Mathematics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

- Mellone, M., & Ramploud, A. (2015). Additive structure: An educational experience of cultural transposition. In X. Sun, B. Kaur & N. Novotná (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 23* (pp. 567-574). China, Macau: University of Macau.
- Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM*, 51(1), 199-212.
- Mihajlović, A., & Milikić, M. (2019). *Fangcheng* method as a tool for developing pre-algebra concepts in primary grade student. In S. Lawrence, A. Mihajlović & O. Đokić (Eds.), *Proceedings of the Training Conference History of Mathematics in Mathematics Education*, Faculty of Education, University of Kragujevac, Jagodina.
- MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Firenze: Le Monnier.
- Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques* (pp. 203-213). Caen: ARDM.
- Radford, L. (2003), On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger & V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas.
- Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 162-167). The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.
- Vygotskij, L. S. (1987). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri.

Autori/Raffaele Casi* e Chiara Pizzarelli°

*Istituto Comprensivo Andezeno – Andezeno (TO), Italia

°Istituto Comprensivo Torino II E. Morelli – Torino, Italia

raffaele.casi@istruzione.it, chiara.pizzarelli@unito.it

Valutare senza voto numerico: strumenti e riflessioni di una sperimentazione di matematica alle scuole secondarie di primo grado

Assessment without numerical grades: tools for and reflection on an alternative method in mathematics for lower secondary school

Francesco D'Intino

Istituto Comprensivo Dante Alighieri – Rimini, Italia

Sunto / Il contributo presenta i passi di una sperimentazione, condotta nell'arco di due anni in una scuola secondaria di primo grado della provincia di Rimini, nella quale si è scelto di fare a meno del voto numerico in decimi. Dopo aver focalizzato i principali aspetti legati al tema della valutazione, vengono presentati alcuni dispositivi valutativi adottati nel primo anno di sperimentazione al fine di potenziare una visione formativa della valutazione; attraverso una raccolta dati intermedia, si argomentano i motivi dei cambiamenti apportati per il secondo anno di sperimentazione. Viene poi presentata un'analisi qualitativa dell'esperienza, effettuata sulla base di un questionario di inizio e fine anno proposto agli studenti. Vengono infine proposte alcune conclusioni in termini di percezioni degli studenti e dell'insegnante, al fine di guidare la riflessione per gli anni a venire.

Parole chiave: valutazione in decimi; valutazione formativa; scuola secondaria di primo grado.

Abstract / This article traces the steps taken to design and evaluate an innovative assessment method which does not use a 1-10 grading scale. The research was conducted in a lower secondary school in Rimini over a two-year period. First, the main components of assessment are outlined, followed by a description of some assessment tools used during the first year of research, aimed at enhancing the formative function of assessment. It is then explained how data that was collected during the first year led to some modifications of the strategies adopted in the second year. A quantitative analysis is then carried out on the basis of two questionnaires completed by the students, one at the beginning and one at the end of the school year. Finally, conclusions are drawn about student and teacher perception, in order to inform a reflection for the coming years.

Keywords: 1-10 grading scale; formative assessment; lower secondary school.

1 Il problema della valutazione

Pur essendo uno dei fattori chiave del processo di insegnamento/apprendimento, il tema della valutazione è spesso oggetto di confusione. A questo riguardo, è utile proporre una classificazione dei vari tipi di valutazione che esistono:

1. «Valutazione predittiva (orientativa): ha lo scopo di prevedere le caratteristiche del percorso formativo più adatto a un soggetto (ad esempio i test di orientamento).
2. Valutazione diagnostica: si colloca nella fase iniziale del processo formativo e ha lo scopo di analizzare le caratteristiche in ingresso di un allievo in relazione al percorso che dovrà compiere.
3. Valutazione formativa: ha lo scopo di fornire un feedback all'allievo e all'insegnante.

4. Valutazione sommativa: si colloca alla fase conclusiva di un percorso formativo (modulo didattico, anno scolastico ecc.) e ha lo scopo di verificare i risultati conseguiti dall'allievo.
5. Valutazione certificativa: ha lo scopo di attestare socialmente i risultati da parte del soggetto in funzione delle sue scelte successive o dell'inserimento nel mondo del lavoro».

(Castoldi, 2012, pp. 163-164)

Come emerge da queste definizioni c'è una varietà molto vasta di significati; in questo contributo ci si soffermerà soprattutto sulla valutazione formativa e sommativa. La scelta di concentrare l'attenzione su questi due tipi di valutazione è motivata da due fattori: in primo luogo, le due modalità valutative sono le più frequenti nella quotidianità della didattica; in secondo luogo, spesso vi è il rischio di confonderle tra loro attraverso l'utilizzo di un unico strumento valutativo, il voto numerico. A tal proposito, scrive Capperucci (2011):

«Mentre in passato l'attenzione era rivolta principalmente a temi connessi con il "prodotto" dell'evento formativo, oggi l'implementazione delle pratiche valutative risponde all'esigenza di misurare l'efficacia e l'impatto esterno delle singole azioni formative, e per questo è necessario sottoporre il sistema formativo a indagini relative sia agli aspetti processuali che ai risultati prodotti».

(Capperucci, 2011, p. 149)

Nonostante le due valutazioni abbiano significati e strumenti operativi diversi fra loro, l'utilizzo pressoché esclusivo, nella pratica didattica italiana, di una valutazione di tipo sommativo rischia di oscurare la valenza di molte pratiche di valutazione formativa. Eppure sono anni ormai che la letteratura pedagogica e didattica di riferimento sostiene che «la valutazione dovrebbe servire innanzitutto a migliorare l'apprendimento» (Dozio, 2011, p. 10), identificando nelle pratiche di valutazione formativa alcuni elementi chiave per favorirlo. D'altro canto, una valutazione sommativa che utilizza il voto numerico come risposta alla prova dello studente può rendere difficoltosa una lettura utile di ciò che è stato verificato e creare molte problematiche. Di seguito, se ne elencano alcune.

- *Eccessiva semplificazione*: il risultato della prova è riassunto da un unico voto; studenti diversi con lo stesso voto possono evidenziare difficoltà totalmente differenti l'uno dall'altro; è il risultato di una prestazione senza accennare al processo che ha portato a essa.
- *Manca di progressione*: il voto numerico nasconde la progressione degli apprendimenti perché nelle varie prove svolte durante l'anno vengono valutati apprendimenti diversi.
- *Deresponsabilizzazione*: l'eccessiva semplificazione del voto può indurre nello studente l'idea di non poter agire in modo attivo sul risultato perciò non si sente stimolato a migliorare.
- *Falsa scientificità*: il voto numerico può dare l'idea di oggettività e univocità ma in realtà non esprimendo una misura fisica porta con sé una componente soggettiva.
- *Priorità della performance*: lo studente si concentra soltanto sul risultato finale, lo studio è impostato unicamente sull'esito (numerico) della prova.
- *Ansia da prestazione*: l'importanza della prestazione può causare difficoltà emotive che non consentono all'alunno di dare il meglio di sé.

- *Personalizzazione del giudizio*: non esistendo una descrizione approfondita della performance, il voto può essere vissuto come un giudizio sulla persona.
- *Condizionamento negativo della comunicazione*: studenti e genitori si focalizzano sui voti senza considerare altri aspetti.
- *Distorsione del ruolo dell'errore*: l'errore viene vissuto e visto come qualcosa da evitare perché causa un abbassamento del voto; lo studente tende a nascondere le difficoltà all'insegnante.
- *Comportamenti scorretti*: se il fine è il voto, tutto può diventare lecito durante la prova, anche le scorrettezze.
- *Competizione insana*: il momento della consegna dei risultati può essere vissuto come una gara a chi ottiene il voto più alto.
- *Penalizzazione ingiusta*: spesso il voto numerico va a incidere in particolare sugli studenti di ambiente socioculturale svantaggiato.

In aggiunta a ciò, Castoldi (2012), approfondisce la riflessione sulla valutazione compilando un elenco di luoghi comuni su di essa dei quali evidenzia gli aspetti non veritieri. Ad esempio, un'immagine falsata dell'oggettività della valutazione, che non tiene conto di quanto il processo valutativo si fondi su una specifica e soggettiva rappresentazione della realtà da parte del valutatore. Oppure la diffusa idea secondo la quale la valutazione serve a sanzionare, senza tener conto degli aspetti formativi. O ancora:

«La valutazione in voti è più chiara: più che di chiarezza è più corretto parlare di maggiore familiarità con il giudizio in voti (immediata lettura, facile comparazione, si riescono a trattare più valutazioni insieme attraverso la media). La scala dei nostri giudizi è però ordinale quindi, indicando una posizione nella graduatoria, perdono il senso sia la differenza tra i giudizi che la media. [...] Il giudizio come media dei voti: è un'operazione tecnicamente scorretta e professionalmente pericolosa; un presupposto logico imprescindibile dall'utilizzo della media è di avere elementi equivalenti, cosa che invece non si verifica né in una stessa materia (le verifiche possono avere gradi di difficoltà diversi oppure riguardare obiettivi differenti) né in più materie (non si può ritenere equivalente il giudizio in matematica e quello in inglese o quello nel comportamento). Sul piano professionale la media dei giudizi invece risulta pericolosa perché confonde il momento di rilevazione e quello di giudizio, quest'ultimo infatti si deve basare su un apprezzamento complessivo e globale dei dati e delle informazioni raccolti nel primo momento».

(Castoldi, 2012, p. 141)

Anche Bottero (2014) si concentra sulla definizione del termine valutazione, il cui significato è «formulare un giudizio sulla qualità di un'azione formativa» (Bottero, 2014, p. 3), e coinvolge il concetto di apprezzamento dei dati raccolti in una prova. L'insegnante non ha strumenti per misurare l'esito di una prova se non quello di avanzare un'interpretazione di ciò che è stato svolto dagli studenti e che, in quanto tale, non può considerarsi oggettiva ma porta con sé una chiave di lettura estremamente soggettiva.

Ma se la valutazione non può essere completamente oggettiva, non rimane altro obiettivo che «essere equi, credibili e di saper chiarire le scelte che hanno portato alla formulazione di un certo giudizio» (Dozio, 2011, p. 29). Detto in altri termini, il compito dell'insegnante riguardo alla valutazione è di confrontare ciò che è osservabile

in ogni prova con quanto si era aspettato di rilevare; valutare significherà per il docente esprimere il grado di soddisfazione circa l'apprendimento dello studente alla fine di un percorso. Per rendere operativo questo tipo di obiettivo, Castoldi (2012, p. 147) propone un ciclo di elementi che riassumono il processo di valutazione:

1. Individuazione dell'oggetto: bisogna avere chiaro cosa si vuole valutare; si può fare riferimento alla dimensione cognitiva, che riguarda conoscenze e abilità, oppure anche a quella extra-cognitiva, che include aspetti emotivi, sociali e metacognitivi.
2. Definizione dei criteri: la domanda guida si formula in base a cosa si vuole valutare; è ciò che lega il momento progettuale a quello valutativo. Oltre ai criteri si possono stabilire le rispettive incidenze durante la valutazione. Si deve definire anche la modalità di attribuzione del giudizio all'allievo che può fare riferimento a una prestazione ritenuta ottimale, dipendere dal confronto tra la prestazione del singolo e del gruppo oppure apprezzare il progresso manifestato dall'allievo rispetto al suo livello iniziale.
3. Espressione del giudizio: l'insegnante deve scegliere quale tipo di codice usare per l'espressione del giudizio; può indicare la presenza o assenza di una certa condizione (nominale), può servirsi di un certo numero di livelli (ordinale) oppure può quantificare la prestazione facendo riferimento a un'unità di misura (metrico).
4. Regolazione dell'insegnamento: la valutazione riguarda non solo l'allievo ma anche l'insegnante che riceve interessanti feedback dalle prove dei suoi studenti che lo aiuteranno a riconoscere l'efficacia di quanto svolto in classe.
5. Comunicazione del giudizio: è necessario prevedere una modalità di comunicazione che si adatti ai vari utenti destinatari che possono essere gli studenti stessi, i loro genitori oppure altri docenti.
6. Ruoli dei soggetti: è importante stabilire con chiarezza chi valuta, lavorando su una dimensione orientata sulla collegialità; anche lo studente ha un suo ruolo nella valutazione infatti se ne deve servire affinché lo aiuti nell'apprendimento.
7. Requisiti di qualità: la valutazione deve essere attendibile, trasparente, utile e condivisa.

Quanto appena enunciato orienta il discorso su una valutazione di tipo criteriale, in cui devono essere chiari, sin dall'inizio e a tutti i soggetti coinvolti, gli obiettivi da raggiungere in un certo periodo di tempo. Anche i criteri valutativi devono essere stabiliti con giusto anticipo affinché possano guidare la didattica e orientare gli studenti durante l'apprendimento. Oltre a una programmazione attenta e ragionata, ai docenti viene richiesta anche una chiarezza nell'informazione, che viene influenzata dai destinatari; l'insegnante infatti sarà costretto a modificare la modalità di comunicazione a seconda che stia parlando con i colleghi, gli studenti o i genitori.

Ad esempio, in un colloquio con i genitori sarebbe inefficace mostrare esclusivamente i voti numerici ottenuti dallo studente senza prima aver fornito elementi descrittivi che siano illustrativi del lavoro svolto fino a quel momento. Uno scambio informativo completo, articolato, argomentato e adeguato alle situazioni potrebbe invece favorire una comprensione profonda della situazione e aiutare tutte le parti coinvolte a migliorare il proprio apporto, ciascuno secondo le sue finalità.

1.1 Valutazione e apprendimento

Secondo Dozio (2011), la valutazione:

«[...] dovrebbe servire innanzitutto a migliorare l'apprendimento; è questo il vero scopo dell'osservazione del lavoro dell'allievo e del nostro valutare la situazione dell'allievo in relazione agli obiettivi da raggiungere. Osservare e valutare per dare indicazioni all'allievo sul prossimo lavoro di apprendimento da affrontare».

(Dozio, 2011, p. 10)

In particolare la valutazione formativa accompagna lo studente durante l'acquisizione delle competenze e lo aiuta a esaminare le proprie strategie e a migliorarle per raggiungere il successo formativo; proprio in questo senso si rivela una valutazione *per* l'apprendimento, differenziandosi da quella sommativa che invece è una valutazione *dell'* apprendimento.

Per fare in modo che ogni studente abbia la possibilità di riflettere sul proprio operato, sfruttando la valutazione per migliorare il proprio apprendimento, è dunque necessario che questa si trasformi in uno strumento a disposizione degli studenti. D'altro canto, questa trasformazione sarà utile anche all'insegnante, che se ne potrà servire per:

- comprendere più dettagliatamente le difficoltà disciplinari degli studenti;
- trarre indicazioni utili a sostenere al meglio i propri studenti e per guidare la progettazione didattica;
- riflettere sulla disciplina e sulle proprie convinzioni didattiche col fine di regolare l'insegnamento;
- rendere sempre più chiaro a se stesso e agli studenti le caratteristiche del proprio metodo valutativo.

Di cosa necessita la valutazione per diventare una valutazione *per* l'apprendimento? Un punto importante è quello riguardante i criteri di valutazione: una loro descrizione approfondita permette di ottenere una base solida sulla quale è possibile instaurare un dialogo chiaro tra chi valuta e chi apprende. La co-costruzione in termini di obiettivi di questi criteri insieme agli studenti, poi, permette all'insegnante di suscitare l'attenzione dello studente con indicazioni formative specifiche riguardanti le difficoltà evidenziate; da ciò può nascere un confronto proficuo che avrà come punto di partenza l'autovalutazione dell'allievo riguardo alla propria prova e il confronto con la valutazione ottenuta, obbligandolo a rivedere quanto ha prodotto. I benefici di questa pratica potrebbero essere dunque molteplici:

- spostare l'oggetto dell'attenzione dello studente, affinché la valutazione della prova non venga avvertita come un giudizio alla persona ma come indicatore di un livello di apprendimento;
- rendere la valutazione facilmente comprensibile e profondamente descrittiva in ogni suo aspetto, evitando fenomeni di appiattimento e non significatività della valutazione;
- contrastare il disinteresse e la paura dell'errore, veicolando invece l'idea che le negatività emerse da una prova devono essere accettate, conosciute e sfruttate per migliorare l'apprendimento.

Una valutazione chiara nei criteri, che frammenta l'oggetto di apprendimento in obiettivi più piccoli, può inoltre aiutare gli studenti ad acquisire un maggiore senso di autoefficacia e una minore passività, stimolando la loro motivazione ad apprendere. È chiaro che intendere la valutazione in questo modo richiede anche un ruolo più attivo da parte degli studenti, che svilupperanno un maggiore controllo sul proprio

processo di apprendimento e attiveranno quelle risorse metacognitive che consentono l'autoriflessione e l'autovalutazione.

Questo cambio di prospettiva indirizza lo studente verso una riflessione profonda e potrebbe permettergli di essere più attento a ciò che vive a scuola, sia in termini predittivi, cioè nella fase di studio prima della prova, che riflessivi, cioè dopo la prova nella rilettura degli errori e nel dialogo con il docente.

La maggiore partecipazione attiva dello studente, le strategie autovalutative e l'auto-regolazione, intesa come farsi carico dei propri processi cognitivi e motivazionali per raggiungere un obiettivo, sono tutte caratteristiche metacognitive irrinunciabili per una scuola che miri alla crescita formativa dei suoi studenti.

Se è vero che la scuola «non ha più lo scopo di identificare una élite sociale destinata a proseguire gli studi, ma di formare nel miglior modo possibile un numero massimo di allievi» (Dozio, 2011, p. 5) allora questo obiettivo è una sfida per la scuola dell'obbligo, nella quale può giocare un ruolo importante la valutazione intesa come processo complesso nel quale intervengono vari attori, strumenti, conoscenze e competenze inerenti al processo di insegnamento/apprendimento.

2 Il contesto della sperimentazione

La sperimentazione descritta in questo contributo ha avuto luogo in tre classi, una prima, una seconda e una terza, della scuola secondaria di primo grado¹ dell'istituto comprensivo Dante Alighieri di Rimini.

L'accoglienza a livello di contesto e la qualità delle relazioni fra colleghi promuovevano un clima adatto alla sperimentazione.

Dopo un colloquio con la dirigente, a settembre 2017, è iniziata una fase di documentazione di sperimentazioni analoghe a quella che si intendeva progettare. La conversazione con la dirigente ha sollecitato la riflessione circa l'impatto che la proposta di cambiamento nella valutazione avrebbe creato. Pensando alla sperimentazione, le principali problematiche che interessavano il contesto riguardavano in primo luogo la comunicazione ai genitori degli studenti: non comunicare la valutazione in decimi avrebbe potuto essere una complicazione nel caso di una non promozione alla fine dell'anno; la famiglia infatti avrebbe potuto sostenere di non essere stata in grado, attraverso i giudizi scritti dell'insegnante, di capire la situazione gravemente insufficiente del figlio. Anche i genitori, inoltre, sono solitamente abituati al voto e quindi sarebbe stato necessario descrivere dettagliatamente le scelte didattiche nelle riunioni di inizio anno. L'ultima incertezza riguardava la mancanza di affinità con il metodo valutativo degli altri colleghi del consiglio di classe; una diversità tale avrebbe potuto avere conseguenze sia tra i colleghi che con gli studenti e le rispettive famiglie.

2.1 Prime esplorazioni

L'anno scolastico 2017/2018 è stato l'occasione da un lato per sperimentare alcune strategie e strumenti al fine di poter proporre un progetto basato su dati, dall'altro

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

per documentarsi su alcuni modelli valutativi già attivati in differenti contesti² al fine di integrarli con altre scelte che mirano alla riflessione personale di ogni studente sul proprio operato.

La proposta per l'anno 2017/2018 è stata di attivare alcuni dispositivi di autovalutazione, integrati ad altri dispositivi di valutazione utilizzati dal docente. In aggiunta a queste due categorie, è stato proposto agli studenti un questionario di fine anno il cui scopo era indagare il corretto utilizzo dei dispositivi di autovalutazione attivati e le percezioni circa il nuovo metodo di valutazione.

2.1.1 Dispositivi di autovalutazione per gli studenti

Commento a caldo.

Al termine di ogni verifica scritta, gli studenti scrivono un commento riguardo alla prova appena sostenuta; non è un compito strutturato e può riguardare il loro grado di soddisfazione circa la prova appena svolta, se pensano che il docente li abbia preparati in modo sufficiente, se la prova era troppo lunga, se si sentivano pronti o se ritenevano di aver studiato in modo adeguato. Questo commento scritto di getto, appena terminata la verifica, ha la funzione di sollecitare un breve momento riflessivo per fissare le prime impressioni, favorendo il ricordo vivo di quanto vissuto durante la prova; permette appunto di fare memoria e di avere indicazioni su tanti aspetti anche molto diversi tra loro: stato emotivo dell'alunno, opinioni sulla matematica, opinioni su se stessi e su come lavorano, opinioni sulle loro attese, opinioni sull'operato dell'insegnante, opinioni sulla verifica.

Riflessione finale.

All'indomani della correzione della verifica, lo studente scrive sul proprio quaderno un breve testo che tenga conto delle aspettative antecedenti alla verifica, degli errori commessi nella prova e anche della correzione fatta insieme in classe; è una sorta di relazione finale che deve soppesare le aspettative e le considerazioni presenti nel commento a caldo, per poi confrontarle con il giudizio e i commenti ricevuti dall'insegnante (si veda il par. 2.1.2). Grazie a questo strumento, ogni studente è nella condizione di riflettere sulla propria prova in due diversi momenti temporali, ognuno dei quali contraddistinto da un numero crescente di informazioni; l'obiettivo è di aiutarli a leggere ciò che è successo con un grado sempre maggiore di profondità,

2. Ad esempio, il modello della Scuola del gratuito, progetto della Comunità Papa Giovanni XXIII, in cui la sperimentazione del prof. Ciani (2008, 2013) prevede la responsabilizzazione dei ragazzi nelle scelte didattiche e di comportamento in classe; riguardo alla valutazione invece il voto numerico è accompagnato da una lettera rivolta allo studente nella quale vengono analizzate le positività emerse dalla prova. Allo studente spetta la decisione di conoscere o meno il voto in decimi ottenuto. Per maggiori informazioni, è possibile consultare il link: <https://scuoladelgratuito.wordpress.com/about/>.

In una scuola primaria di Novara, Davide Tamagnini (2019) ha sostituito il voto numerico con una tabella in cui vengono elencate le diverse abilità, conoscenze, competenze e per ciascuna viene associato un colore (verde, giallo o rosso) a seconda che esse siano raggiunte, in lavorazione o presentino delle evidenti difficoltà. Per maggiori informazioni sul Movimento di Cooperazione Educativa, è possibile consultare il link: <http://www.mce-fimem.it/>.

Nella scuola primaria "Collodi" di Pisa è stato eliminato il voto numerico a favore di strumenti di carattere narrativo, adatti a definire i reali punti di forza e di debolezza di ciascun alunno in modo da indicare loro dei precisi percorsi di crescita e di miglioramento a seconda delle specifiche necessità. Per maggiori informazioni, consultare il link: http://moodle.mce-fimem.it/pluginfile.php/4611/mod_resource/content/3/Valutazione%20Senza%20Voto%20Gabriele%20Recchia.pdf.

Un'altra esperienza è la Classe senza voto (Bacchi & Romagnoli, 2019), sperimentata presso il liceo Monti di Cesena, in cui nella valutazione formativa viene sostituito il voto numerico con una valutazione per competenze, espresse su tre livelli di acquisizione.

abituandoli col tempo a prevedere con più precisione quello che potrebbe essere l'esito di una prova.

File "*Le mie prove*".

Per ogni verifica scritta lo studente dovrà ricopiare su un file di testo il commento a caldo, il giudizio e i consigli del docente e la riflessione finale; il tutto deve essere condiviso su Google Drive, affinché il docente possa leggere le produzioni e avere informazioni aggiuntive sul percorso personale dello studente dal punto di vista metacognitivo. Questa memoria storica può favorire una conoscenza più approfondita dell'evoluzione dell'apprendimento e dei processi di controllo attivati dai singoli studenti.

2.1.2 Dispositivi di valutazione del docente

Giudizio in positivo.

È scritto dal docente e viene consegnato allo studente al momento della restituzione della verifica; ha il compito di analizzare, alla luce delle Indicazioni Nazionali italiane (MIUR, 2012), solamente gli obiettivi di apprendimento che sono stati raggiunti, valorizzando tutto ciò che lo studente ha mostrato di aver appreso. In questo modo si indebolisce la povertà descrittiva del voto numerico, rendendo più chiaro l'esito della prova scritta; inoltre questo strumento ha il pregio di focalizzare l'attenzione solamente sui contenuti della materia, disincentivando dunque una visione del voto come giudizio sulla persona (alcuni esempi di giudizi in positivo possono essere letti in *Allegato 1*).

Consigli.

Sono scritti dal docente allo scopo di accompagnare il giudizio in positivo evidenziando alcune difficoltà di tipo disciplinare e focalizzando l'attenzione sugli aspetti su cui poter migliorare; l'intento è di favorire un processo di riorganizzazione della propria conoscenza, individuabile ad esempio attraverso maggiori livelli di partecipazione e attenzione nei confronti della correzione della prova proposta alla lavagna dall'insegnante; questo strumento favorisce inoltre la possibilità di concentrarsi sugli errori commessi e sugli aspetti da migliorare; la redazione dei consigli, poi, è strumento di approfondimento dettagliato anche per l'insegnante, che può ad esempio riassumere in una tabella statistica facilmente consultabile quegli argomenti che hanno creato maggiori difficoltà durante la prova (alcuni esempi di consigli possono essere letti in *Allegato 1*).

Voto numerico differito.

Il voto numerico viene specificato agli studenti qualche giorno dopo la correzione della prova. Questo strumento disincentiva un confronto competitivo non sano e il desiderio a volte ossessivo di conoscere il proprio voto e quello dei compagni. Inoltre, lo studente è incentivato a mettere in relazione l'andamento della prova a livello di giudizio scritto con il voto numerico ricevuto, giustificando una tale valutazione con le numerose informazioni aggiuntive che ha ottenuto dallo studio approfondito della verifica e delle difficoltà emerse.

2.2 Problematiche emerse in corso d'anno

Dopo aver comunicato e discusso insieme agli studenti riguardo al metodo di valutazione che si voleva implementare, sono stati utilizzati gli strumenti ipotizzati per un semestre intero. Con il passare dei mesi, sono emerse alcune problematiche:

- *Giudizio in positivo.* La sua scrittura richiede un onere di tempo eccessivo in quanto, per ogni argomento, è necessario trovare l'aggettivo giusto per descriverne la qualità dell'apprendimento raggiunta dallo studente; inoltre si è rivelato

- poco comprensibile per alcuni studenti, soprattutto quelli in difficoltà con la materia, che non riuscivano sempre a capire cosa avessero svolto in modo corretto.
- *Voto numerico differito*. Nel momento di riconsegna della prova, una buona parte di studenti si concentrava sul calcolo di punti fatti e punti totali, che segnalavo a fianco di ogni esercizio della verifica, e questo li distraeva totalmente dalla lettura del giudizio e dei consigli dell'insegnante. L'attesa del voto, inoltre, causava domande frequenti da parte di alcuni studenti nelle lezioni successive: ciò è indicativo di quanto lo ritenessero importante.
 - *File "Le mie prove"*. Non veniva compilato da tutti; inoltre, molti di quelli che lo facevano scrivevano in maniera piuttosto superficiale frasi troppo generiche e vaghe che non forniscono alcun tipo di informazione rilevante. Purtroppo pochi commenti a caldo e poche riflessioni finali apparivano significative e frutto di un serio impegno nella compilazione. Infine, dal punto di vista del docente, il controllo di questo compito si è rivelato piuttosto impegnativo e oneroso.

Proprio a causa delle difficoltà emerse, nella seconda parte dell'anno scolastico si sono apportate alcune modifiche agli strumenti ipotizzati, affinché gli studenti riuscissero a servirsene per gli scopi previsti. Si è deciso di fare a meno dei giudizi in positivo, sostituendoli con una struttura più schematica che risultasse di più facile compilazione e più fruibile. Se ne presentano di seguito le componenti.

Obiettivi di apprendimento e livelli.

La struttura di questo dispositivo è ispirata agli obiettivi di apprendimento presenti nelle Indicazioni Nazionali. Nelle ultime due verifiche dell'anno 2017/18, dopo gli esercizi e i problemi da svolgere, è stato inserito un elenco puntato con la lista degli obiettivi valutati all'interno della prova (in *Allegato 2* si trova il dispositivo di valutazione declinato per le classi prima e seconda). Ad ognuno di questi obiettivi è stato associato un numero da 1 a 4, indicatore del livello raggiunto dallo studente nella prova; seguendo l'elenco puntato degli obiettivi, poi, è stato possibile numerare i consigli in modo puntuale e specifico, cosicché ogni studente potesse comprendere senza equivoci a quale obiettivo faceva riferimento ogni consiglio.

Lo scopo di questo dispositivo è di rendere più leggibile la valutazione e incentivare una maggiore consapevolezza negli studenti circa gli obiettivi verificati in ogni prova e il livello raggiunto per ognuno di essi, con relativi consigli. Questa modalità include anche il vantaggio di facilitare gli studenti nella riflessione e interiorizzazione degli obiettivi di apprendimento specifici della disciplina.

2.3 Risultati del questionario di fine anno

Il questionario finale era composto da due domande:

1. Quante volte hai completato il file "Le mie prove" su Google Drive, scrivendo il commento a caldo e la riflessione finale? [Sempre – Quasi sempre – Quasi mai – Mai]
2. Pensi che una delle due modalità (giudizio in positivo oppure obiettivi di apprendimento e livelli) ti abbia aiutato nello studio della matematica? [Sì – No] Motiva la risposta in modo approfondito.

La prima domanda, a risposta chiusa, intendeva raccogliere dati riguardo all'utilizzo da parte degli studenti dei dispositivi di autovalutazione attivati durante l'anno. La seconda domanda era composta da due parti: una prima parte, a risposta chiusa, il cui intento era raccogliere un giudizio sintetico riguardo al nuovo metodo di valutazione utilizzato; una seconda parte, a risposta aperta, di motivazione del giudizio appena espresso.

Al questionario di fine anno hanno partecipato 55 studenti su 63, circa l'87% del totale. In **Figura 1** vengono riportati i risultati globali riferiti alla prima domanda.

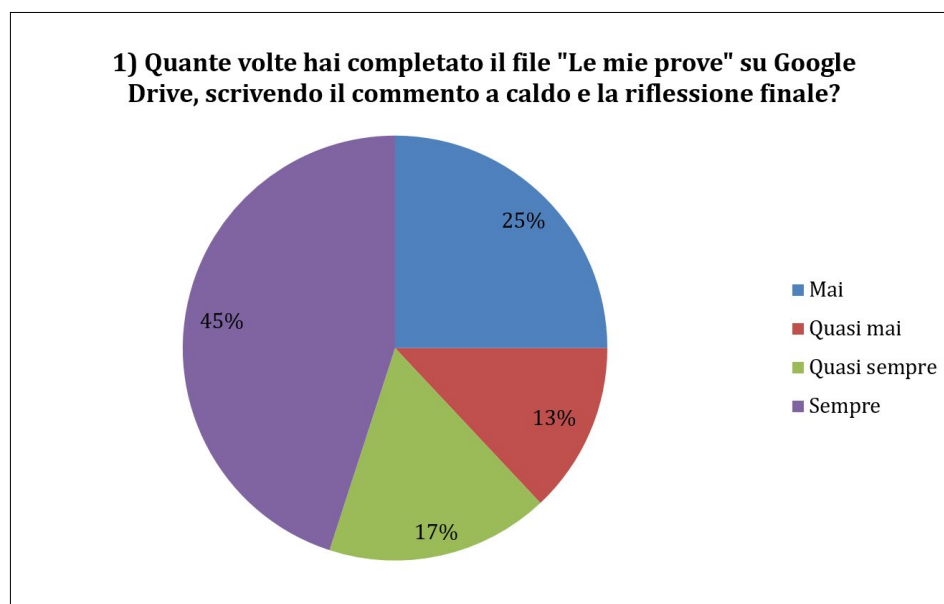


Figura 1
Percentuale di risposte degli studenti alla prima domanda del questionario di fine anno.

Poco più della metà degli studenti afferma di aver completato il file di verifica sempre o quasi sempre. Se si considera che lo strumento aveva lo scopo di stimolare l'autovalutazione e facilitare un lavoro metacognitivo sul proprio apprendimento, questo risultato non è soddisfacente. Tuttavia è comprensibile che, senza un controllo serio e costante da parte dell'insegnante, gli studenti abbiano prestato meno attenzione a questo obbligo che esula dai compiti solitamente richiesti a scuola.

Alla seconda domanda, con la quale si intendeva comprendere se gli alunni avessero considerato positivamente l'introduzione dei nuovi metodi valutativi, l'82% degli studenti ha risposto in modo affermativo; il 18% ha invece dichiarato che il nuovo metodo valutativo non li ha aiutati nello studio della matematica. Le motivazioni per entrambe le categorie di risposta sono rappresentate in **Tabella 1**.

Pensi che una delle due modalità (giudizio in positivo oppure obiettivi di apprendimento e livelli) ti abbia aiutato nello studio della matematica? Motiva la risposta in modo approfondito.			
Motivazioni "SÌ"		Motivazioni "NO"	
Maggiore comprensione degli obiettivi raggiunti e degli aspetti da migliorare	54%	Inutilità del nuovo metodo valutativo rispetto al precedente	5%
Maggiore comprensione degli errori	20%	Inefficacia dei consigli	5%
Maggiore comprensione degli obiettivi dello studio della matematica	8%	Non so	8%
	82%		18%

Tabella 1
Motivazioni relative alla risposta affermativa e negativa alla seconda domanda del questionario.

Dalla tabella si nota come la maggioranza degli studenti abbia tratto giovamento dalla sperimentazione di una delle due modalità valutative. Una buona parte degli

studenti che ha risposto affermativamente sostiene che il metodo di valutazione li abbia aiutati a capire in quali obiettivi di apprendimento dovevano migliorare («Leggendo il commento capivo cosa dovevo migliorare e cosa so già fare bene», «Sono state entrambe molto di aiuto perché almeno sono riuscita a capire gli obiettivi che ho raggiunto di più e quelli di meno»), oppure a comprendere il ruolo dell'errore come opportunità («Quello con i livelli perché un livello mi aiuta a darmi un'autovalutazione e questo metodo mette più in evidenza quello che non va»), o ancora ad acquisire maggiore consapevolezza degli apprendimenti coinvolti nelle prove («Penso sia più costruttiva perché se sono chiari gli obiettivi per l'alunno è più semplice capire quali sono le aspettative e riesce a focalizzarsi di più sugli argomenti che il prof ritiene più importanti»).

In netta minoranza sono le risposte negative, nelle quali gli studenti sostengono di non aver tratto alcun vantaggio nello studio della matematica con il nuovo metodo valutativo. Alcuni di loro evidenziano come le informazioni siano tutte disponibili direttamente guardando la prova («Già dalla verifica vedo cosa migliorare»), altri ammettono di faticare nel tenere in considerazione i consigli forniti dal docente («Perché i consigli me li scordavo sempre»).

3 Scelte per il secondo anno di sperimentazione

Dall'analisi dei dati e dell'esperienza fatta durante l'anno scolastico 2017/2018, sono scaturite alcune riflessioni:

- in generale, l'utilizzo dei diversi dispositivi di valutazione e autovalutazione ha il pregio di essere più completo a livello descrittivo, aiutando gli studenti a capire come possono migliorare e il docente ad avere un quadro dettagliato per ciascuno studente;
- è necessario rendere più fruibile la griglia degli obiettivi utilizzata in fase di valutazione: gli studenti tendono a perdersi tra i numerosi obiettivi previsti dalle Indicazioni Nazionali e a non riuscire a fare memoria del proprio percorso di apprendimento; l'insegnante si trova costretto a rinumerare ogni volta i livelli raggiunti da ogni allievo distinguendoli per i relativi obiettivi;
- la lettura di dati numerici che indicano i livelli per ciascun obiettivo è molto più fruibile rispetto al giudizio e permette all'insegnante di avere un quadro abbastanza chiaro sul quale costruire e programmare la didattica delle lezioni successive alla verifica;
- diversi studenti avvertono ancora la necessità di confrontarsi con un voto numerico unico, grazie al quale potersi posizionare in modo sintetico rispetto al proprio andamento scolastico in matematica.

A partire da queste considerazioni, nella progettazione estiva l'attenzione si è concentrata sulla costruzione di una griglia valutativa di matematica che potesse essere condivisa con gli studenti e che diventasse per loro un mezzo efficace per riflettere sul proprio apprendimento e per avere allo stesso tempo indicazioni sintetiche riguardo agli esiti delle valutazioni.

Per questo si è deciso di utilizzare, in modo più preciso e puntuale rispetto a quanto fatto in precedenza, gli obiettivi di matematica previsti nelle Indicazioni Nazionali e di strutturare la griglia in modo che potesse valere per tutti gli anni scolastici e

con la quale gli studenti, con il passare del tempo, potessero prendere sempre più confidenza³. Per fare questo si sono ripresi e numerati gli obiettivi di apprendimento di matematica, in modo da mostrare di volta in volta solo quelli presenti nelle varie prove di verifica. Per ognuno di questi, in linea con quanto fatto nell'ultima parte dell'anno precedente, si sarebbe fornito agli studenti il livello raggiunto in ogni prova; anche i consigli sarebbero stati numerati in riferimento agli obiettivi di apprendimento corrispondenti.

Questo lavoro di riadattamento degli obiettivi di apprendimento si è inserito in un ragionamento più ampio, nel quale si è ipotizzato il peso da dare a quattro diversi criteri di valutazione:

1. Obiettivi di apprendimento disciplinari (peso nella valutazione finale: 70%): gli obiettivi indicati nelle Indicazioni Nazionali sono stati rielaborati e alcuni sono stati riscritti in maniera semplificata affinché la loro comprensione risultasse facile per tutti gli studenti; si è mantenuta la suddivisione nei quattro nuclei proposta nel documento (Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni) (Allegato 3).
2. Comunicazione (peso nella valutazione finale: 10%): non essendo presente in modo esplicito in nessuno dei 42 obiettivi previsti dalle Indicazioni Nazionali, si è scelto di valutare questo aspetto, considerando due indicatori: utilizzo del lessico specifico e capacità di organizzazione del discorso matematico.
3. Partecipazione (peso nella valutazione finale: 10%): con questo criterio si vuole valutare la costanza degli studenti nella compilazione del file condiviso "Le mie prove", nell'esecuzione dei compiti assegnati e nell'attenzione ad avere sempre il materiale richiesto per il lavoro in classe.
4. Relazione (peso nella valutazione finale: 10%): questo criterio invece comprende il comportamento che gli studenti tengono durante le lezioni, se sono collaborativi con i propri compagni e se rispettano l'insegnante e le regole di convivenza necessarie per lavorare insieme.

L'insieme di questi quattro criteri ha composto lo schema valutativo da applicare durante l'anno 2018/2019 (Allegato 4). Tutti gli obiettivi delle Indicazioni Nazionali sono stati numerati e inclusi nel primo criterio, in modo da essere facilmente riconoscibili in tutte e tre le classi. Al momento di una verifica scritta o di una prova orale, allo studente viene restituito un livello (da 1 a 4) per ogni obiettivo verificato. Il secondo criterio può essere valutato in alcuni momenti specifici, sia attraverso prove scritte nelle quali si richiede di formulare spiegazioni di procedure matematiche generali, sia attraverso prove orali. Gli ultimi due criteri di valutazione sono oggetto di misurazione in modo discontinuo durante l'anno scolastico.

La suddivisione del primo criterio in obiettivi può aiutare gli studenti a capire cosa

3. Si è considerata la possibilità di fare riferimento ai traguardi per lo sviluppo delle competenze, sempre contenuti nelle Indicazioni Nazionali. Questi ultimi però presentano una caratteristica che si adatta poco a una valutazione ripetuta nel tempo in cui i contenuti cambiano e si ampliano man mano che si procede: i traguardi per lo sviluppo delle competenze sono infatti molto ampi e descrivono attese di apprendimento previste al termine della scuola secondaria di primo grado. La loro interpretazione può essere più complessa per gli studenti e impedisce loro di mettere a fuoco con precisione le difficoltà riscontrate nei vari aspetti matematici. Alcuni di essi inoltre rendono difficile una loro valutazione immediata, ad esempio: «L'alunno sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta» (MIUR, 2012, p. 63). Altri necessitano di un periodo lungo per poterne apprezzare i cambiamenti, ad esempio: «L'alunno ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà» (MIUR, 2012, p. 63).

viene valutato in ogni prova e a fare memoria degli obiettivi che causano loro più difficoltà, così da poter riorganizzare lo studio e riflettere su di esso per migliorare nelle prove successive.

Per determinare il voto numerico al termine di ogni quadrimestre, come previsto dalla normativa scolastica, si è operato in questo modo:

- media tra le medie dei livelli raggiunti per ogni obiettivo;
- media tra le medie dei livelli ottenuti in lessico e in organizzazione del discorso;
- media dei livelli ottenuti nella partecipazione;
- media dei livelli ottenuti nella relazione.

Da queste quattro medie ottenute si procede effettuando una nuova media pesata, tenendo conto delle percentuali dichiarate nella griglia di valutazione (70% obiettivi di apprendimento e 10% per i restanti criteri, cioè comunicazione, partecipazione e relazione); si va poi a confrontare il valore ottenuto con degli intervalli numerici decisi a priori (si veda l'Allegato 4, in fondo alla griglia di valutazione); a ogni intervallo viene associato il voto numerico corrispondente in decimi.

Si è deciso, infine, di definire il voto finale considerando tutti i livelli raggiunti durante l'anno scolastico; questa modalità fa sì che il voto conclusivo rappresenti tutto il percorso annuale, premiando chi si è impegnato e tenendo conto di chi è stato scostante. Fare una media tra molti dati inoltre ha il pregio di ammorbidire eventuali prestazioni eccezionali, positive o negative, che in tal modo pesano meno nella scelta del voto.

Ad inizio anno il metodo di valutazione deve essere spiegato in tutte le classi e deve essere consegnata una griglia cartacea che raccolga tutti i criteri, compresi tutti gli obiettivi di apprendimento, gli indicatori per ogni criterio e gli intervalli per assegnare il voto numerico alla fine di ogni quadrimestre. Tale griglia dovrà essere incollata sul quaderno e consultata con costanza da ogni studente.

Al fine di abituare gradualmente gli studenti e le famiglie all'assenza del voto numerico, si è anche scelto di esplicitare, per ogni valutazione scritta e orale, l'esito in termini di sufficienza o insufficienza. In questo modo gli studenti e i genitori hanno la possibilità di avere, in aggiunta a indicazioni analitiche e dettagliate, anche un'indicazione sintetica e globale del risultato di ciascuna prova.

L'insieme dei dispositivi di valutazione e autovalutazione da adottare durante l'anno sono dunque risultati i seguenti:

- commento a caldo;
- riflessione finale;
- file condiviso "Le mie prove";
- obiettivi e livelli; consigli;
- esito (sufficiente/insufficiente).

3.1 Questionari (a.s. 2018/19)

Al fine di ricevere informazioni utili riguardo alla percezione degli studenti riguardo ai metodi di valutazione implementati, si è scelto di far compilare loro un questionario sia a inizio che a fine anno (Allegato 5 e Allegato 6). Il questionario di inizio anno consta di 13 affermazioni per le quali ogni studente deve indicare il livello di accordo o disaccordo sulla base di una scala *Likert* da 1 (per niente d'accordo) a 4 (completamente d'accordo). Le 13 affermazioni indagano le idee che gli studenti hanno riguardo al metodo di valutazione incentrato sul voto numerico e sono organizzate in 4 categorie:

- voto numerico (affermazioni 1, 2) - il loro parere sul voto numerico;
- feedback (affermazioni 3, 4, 5, 6, 7) - quali informazioni ottengono dal metodo di valutazione;
- come migliorarsi (affermazioni 8, 9, 10) - in che modo sono supportati dal metodo di valutazione durante l'apprendimento;
- emotività (affermazioni 11, 12, 13) - il loro stato d'animo nel rapporto con la valutazione.

Il questionario di fine anno comprende, come quello di inizio anno, 13 affermazioni incentrate sulle categorie sopracitate, alcune delle quali riguardano il metodo di valutazione basato su obiettivi, livelli e consigli. Nel questionario finale sono state aggiunte anche due domande, rielaborate a partire da quelle proposte l'anno precedente.

La prima domanda, a risposta chiusa, intende raccogliere dati riguardo all'utilizzo da parte degli studenti dei dispositivi di autovalutazione attivati durante l'anno. La seconda domanda è composta da due parti: una prima parte, a risposta chiusa, il cui intento è raccogliere un giudizio sintetico riguardo al nuovo metodo di valutazione utilizzato; una seconda parte, a risposta aperta, di motivazione del giudizio appena espresso.

Entrambi i questionari somministrati vengono compilati in forma anonima.

4 Il secondo anno di sperimentazione (a.s. 2018/19)

Durante l'anno scolastico, si sono realizzate, in media, 6 prove scritte e 4 prove orali per ogni studente di ogni classe. Nelle prove orali, si è scelto di consegnare un foglio con alcuni esercizi da svolgere in autonomia sul quale venivano dichiarati tutti gli obiettivi di apprendimento dell'oggetto di valutazione. Per quanto riguarda le verifiche scritte invece si è preferito dichiarare gli obiettivi con almeno una settimana di anticipo rispetto al giorno della prova, così da fornire agli studenti la possibilità di prepararsi più a fondo essendo consapevoli di quali fossero gli argomenti oggetto della prova scritta. Al momento della restituzione, sia nella prova scritta che in quella orale, ogni studente ha ricevuto un foglietto con i livelli raggiunti e i consigli dell'insegnante relativi a ogni obiettivo richiesto.

Il momento della restituzione era molto atteso: molti studenti aspettavano con ansia di ricevere il fogliettino con i livelli raggiunti e, tornati al posto, lo studiavano con attenzione e concentrazione senza badare troppo a quello dei compagni. Il confronto dei livelli presi in ogni obiettivo è molto più complicato da fare rispetto al voto numerico unico e infatti questa tendenza a vedere la valutazione degli altri si è ridotta già dalle prime prove.

Nel primo quadrimestre, per non sovraccaricare il lavoro degli studenti, non è stato chiesto loro di compilare il file dell'autovalutazione presente su Google Drive per fare in modo che si abituassero a ragionare con il nuovo metodo di valutazione. Solamente nel secondo quadrimestre è stata richiesta la compilazione del file "Le mie prove".

È stato creato un foglio di calcolo per raccogliere e numerare tutti i livelli degli alunni, suddivisi per obiettivo; in questo modo si è riusciti ad automatizzare il calcolo delle medie necessario per la decisione del voto finale, basta inserire i livelli raggiunti da

ogni studente di volta in volta in ciascuna prova (in **Allegato 7** viene proposto l'esempio del risultato di questo processo).

Oltre all'inserimento dei livelli, anche la scrittura dei consigli è avvenuta al computer (esempi di livelli disponibili in **Allegato 8**).

In corso d'anno, infatti, è emerso che alcune vecchie prove scritte erano piuttosto sbilanciate: a volte c'era un'abbondanza di esercizi focalizzati solo su obiettivi per lo più di aritmetica e algebra, a discapito di geometria, mentre per altri la quantità di esercizi dedicati era piuttosto carente. È stata cambiata per questo motivo la modalità di stesura delle prove, prestando più attenzione agli obiettivi coinvolti e al loro equilibrio nelle richieste così da ridurre gli esercizi ripetitivi incentrati solamente su un obiettivo; inoltre, per facilitare la correzione delle prove scritte, si è deciso di inserire per ciascun esercizio non più di 4-5 obiettivi di apprendimento.

In corso d'opera è stata anche apportata una modifica alla modalità della prova orale. Prestando attenzione all'elenco degli obiettivi di apprendimento e ai livelli raggiunti dagli studenti, si riusciva a impostare l'interrogazione in modo più completo, senza il rischio di dimenticare di verificare alcune conoscenze e abilità.

Anche la correzione delle prove è cambiata: per decidere quale livello assegnare a ogni obiettivo, infatti, durante la correzione è stato necessario concentrarsi su ognuno di essi, presente solitamente in modo trasversale in più esercizi.

Questo metodo di valutazione ha modificato infine anche l'andamento del colloquio tra docente e genitori: generalmente si avevano a disposizione molte più informazioni circa lo stato dell'apprendimento dello studente, potendo descrivere in modo maggiormente approfondito la sua situazione, fornendo consigli ad hoc affinché ci potesse essere un miglioramento.

4.1 Alcuni dati emersi dai questionari

Al questionario di inizio anno hanno partecipato 56 studenti su 61, mentre a quello di fine anno sono stati 59.

Di seguito vengono presentate le tabelle con le risposte alle 13 domande a risposta multipla e i quesiti aperti con le motivazioni degli studenti organizzate per tematiche dalle quali si può fare un confronto tra la raccolta dati di inizio anno e quella di fine anno (**Table 2, 3, 4 e 5**)

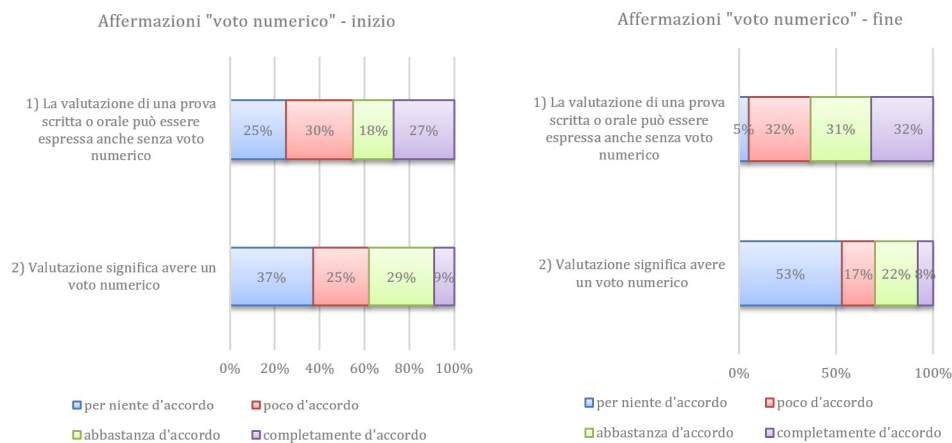


Tabella 2
Affermazioni del questionario riguardanti il "voto numerico".

Attraverso le prime due affermazioni volevo capire se i miei studenti associassero alla parola "valutazione" soltanto il voto numerico o se riuscissero a intenderla in maniera meno riduttiva.

Nell'affermazione 1) si nota che a fine anno circa il 20% degli studenti ha ampliato l'accezione della valutazione, non riducendola all'unica modalità più utilizzata, il voto numerico, ma accettando come strumento valutativo anche quello proposto nella sperimentazione.

Anche l'affermazione 2) conferma questo cambiamento, seppur in maniera meno evidente: gli studenti che non sono per niente d'accordo nel considerarsi valutati solo in presenza del voto numerico passano dal 37% al 53%; si evidenzia un calo, di poco inferiore al 10%, anche tra gli studenti che erano abbastanza d'accordo con l'affermazione, mentre quelli completamente d'accordo sono rimasti invariati.

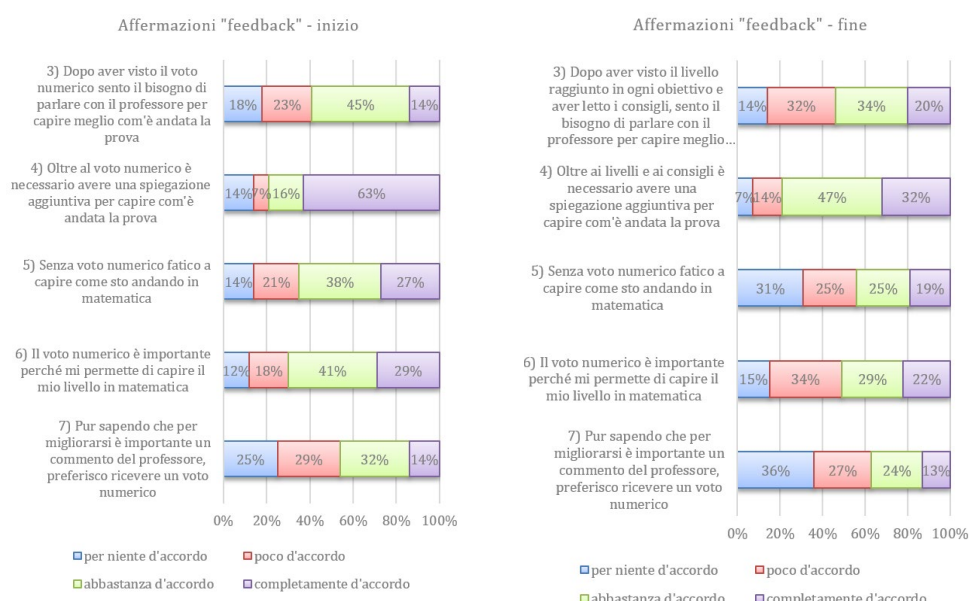


Tabella 3
Affermazioni del questionario riguardanti il "feedback".

L'intento di queste cinque affermazioni era di comprendere se il nuovo metodo valutativo fosse stato utilizzato come strumento per comprendere l'andamento di una prova ed essere più consapevoli di ciò che si è appreso e ciò che invece necessita di un ulteriore impegno di studio.

Le affermazioni 3), 6) e 7) evidenziano un certo equilibrio nei questionari somministrati a inizio e a fine anno mentre nella 4) c'è uno spostamento significativo degli studenti che ritengono necessario avere una spiegazione aggiuntiva per capire il livello raggiunto: quelli completamente d'accordo si riducono dal 63% al 32%, allo stesso modo si dimezzano anche quelli che si sono dichiarati per niente d'accordo, passando dal 14% al 7%.

Anche nell'affermazione 5) ci sono importanti differenze tra le risposte di inizio e fine anno: gli studenti che sostenevano che il voto numerico fosse indispensabile per capire il loro livello in matematica sono diminuiti dal 65% al 44%, a favore di quelli che ritengono il voto numerico del tutto inefficace per comprendere l'andamento di una prova che aumentano del 17%.

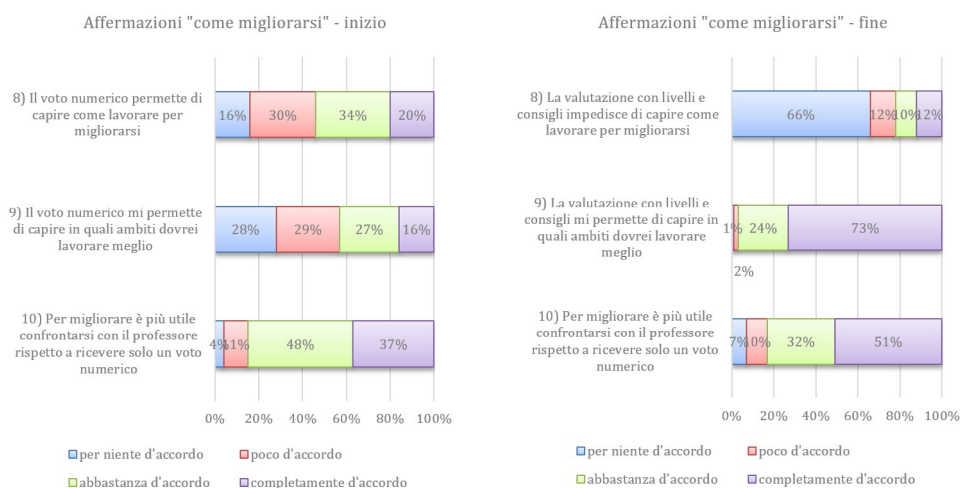


Tabella 4
Affermazioni riguardanti il "come migliorarsi".

Le tre affermazioni "come migliorarsi" volevano analizzare l'incidenza della valutazione nel sostegno allo studio degli studenti, cioè se effettivamente questo metodo valutativo fornisce indicazioni più chiare su ciò che ognuno deve migliorare. Se l'affermazione 10) non rileva particolari differenze, accade il contrario nella 8) e nella 9). In queste ultime il cambiamento è netto infatti nella 8) a inizio anno gli studenti che ritenevano il voto numerico utile per migliorare erano il 54% mentre a fine anno quelli che pensano lo stesso della valutazione a livelli aumentano fino al 78%. L'affermazione 9) evidenzia dati ancora più netti, infatti se a inizio anno era il 43% degli studenti a pensare che il voto numerico aiutasse a capire in quali ambiti lavorare per migliorarsi, a fine anno gli studenti che ritengono fondamentale la valutazione a livelli per lo stesso scopo sono quasi la totalità (97%).

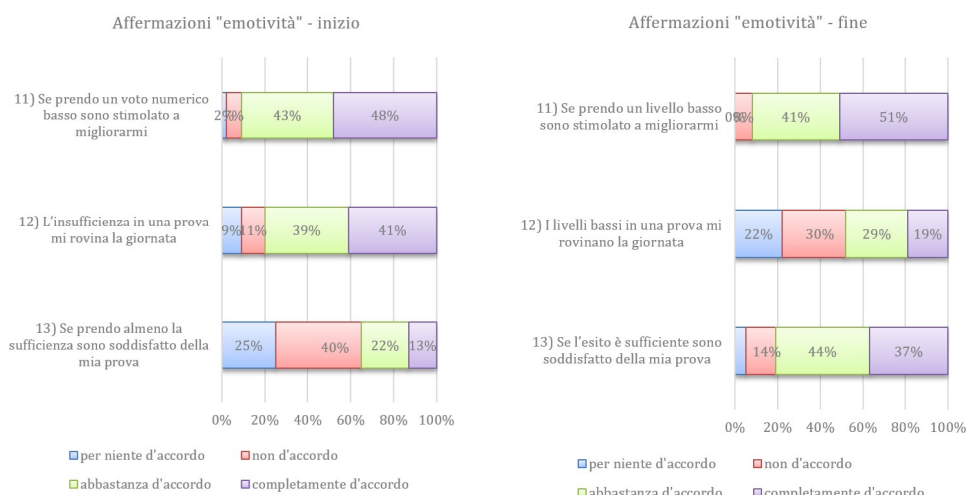


Tabella 5
Affermazioni riguardanti "emotività".

Le ultime tre affermazioni riguardano il coinvolgimento emotivo degli studenti rispetto ai vari metodi valutativi. Come si vede dall'affermazione 11), i risultati negativi, sia con il voto numerico che con i livelli, non sembrano intaccare la voglia di rivalsa degli studenti. Nell'affermazione 12) si nota come una prova non svolta bene abbia un minore impatto negativo a livello emotivo quando espressa con una valutazione a livelli (48%) rispetto al voto numerico (80%). Anche l'affermazione 13), riguardante la soddisfazione personale di una prova eseguita in modo positivo, mostra una per-

centuale maggiore di studenti gratificati nel caso dei livelli, 81%, contro il 35% della valutazione con voto numerico.

La seconda parte del questionario di fine anno comprendeva le due domande:

1. Quante volte hai completato il file "Le mie prove" su Google Drive (scrivendo il commento a caldo e la riflessione finale)?
2. Pensi che la modalità di valutazione con obiettivi, livelli e consigli ti abbia aiutato nello studio della matematica? Motiva la risposta in modo approfondito.

Di seguito viene presentata una breve analisi delle risposte.

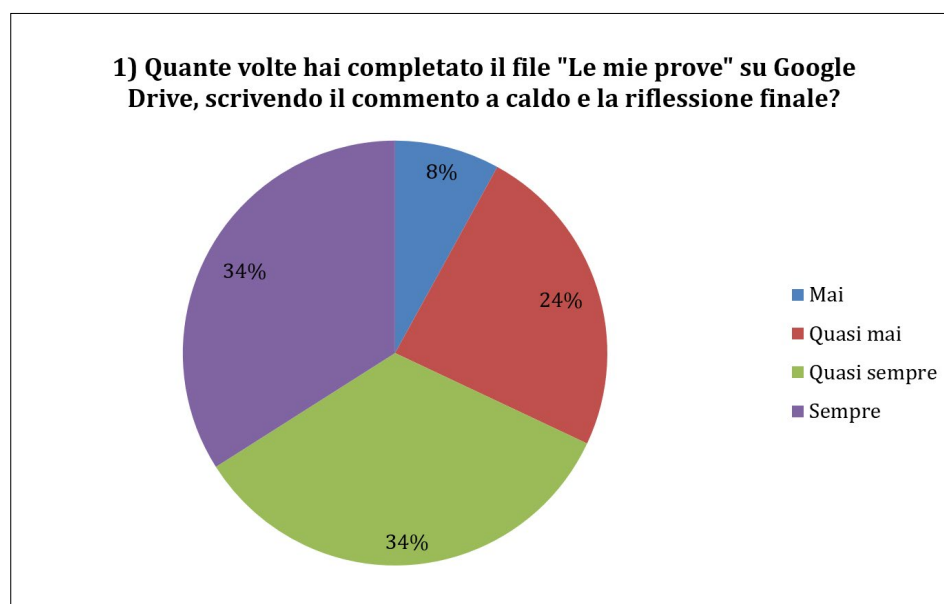


Figura 2
Percentuale di risposte degli studenti alla prima domanda del questionario di fine anno.

Come si nota dal grafico (Figura 2) c'è una maggioranza di studenti che ha compilato in maniera frequente il file dell'autovalutazione, 68%, tuttavia rispetto all'anno precedente le differenze sono abbastanza contenute infatti per la stessa categoria la percentuale era del 62%, cioè leggermente inferiore. Non avendo ancora trovato un modo veloce e sistematico per verificarne l'effettiva compilazione, non è stato possibile apprezzare un cambiamento più evidente tra i due anni scolastici.

Pensi che la modalità di valutazione con obiettivi, livelli e consigli ti abbia aiutato nello studio della matematica? Motiva la risposta in modo approfondito.

SÌ		NO	
Maggiore possibilità di capire in quali ambiti lavorare di più	37%	Difficoltà nella comprensione della valutazione	10%
Migliore descrizione della situazione dell'apprendimento	28%		
Maggiore concentrazione sugli errori commessi e sulla correzione della prova	16%	Metodo non sfruttato appieno	5%
Miglioramento dal punto di vista emotivo	4%		
	85%		15%

Tabella 6
Motivazioni relative alla risposta affermativa e negativa.

Le risposte ricevute in questa domanda evidenziano che la gran parte degli studenti abbia percepito come utile il metodo valutativo proposto; infatti l'85% degli studenti ha trovato giovamento nella valutazione con obiettivi, livelli e consigli; solo una piccola parte, circa il 15%, sostiene di non essere stata aiutata dalla scelta. La maggioranza delle risposte positive (37%) riguarda la possibilità di capire in quali ambiti della materia è necessario lavorare di più:

«Con i livelli riesco a capire meglio i miei errori e dove devo migliorare; questo metodo di valutazione lo approvo perché ti fa capire meglio gli errori mentre nel voto numerico non capisci benissimo i tuoi errori, soprattutto nelle interrogazioni»;

«Se sbaglio qualcosa con il voto numerico non saprei bene come ripassare, invece con i livelli sapendo più o meno come ripassare la volta dopo non ho fatto lo stesso errore»;

«Se ad esempio prendo un determinato voto in una verifica in cui ci sono più argomenti, non so in quali specifici argomenti devo migliorare e in quali va bene così, mentre con i vari livelli e consigli so su cosa devo soffermarmi»;

«Se nel livello 32 ho preso 1, vado a vedere sul foglio e quello che c'è scritto me lo ristudio. Così quando nella prova successiva c'è il livello 32 sono ben preparato e se vado bene il professore mi potrebbe anche alzare il livello»;

«Mi ha aiutata a capire dove dovevo migliorarmi e dove dovevo studiare di più ma anche le cose che non dovevo ripassare perché già le sapevo».

Una buona parte di studenti favorevoli al nuovo metodo (28%) lo ritiene più completo perché descrive meglio la situazione del loro apprendimento:

«Con il voto numerico è difficile capire in cosa bisogna migliorare e dove si è bravi, perché è un voto per tutta la prova, invece con i livelli è possibile capire dove si è più forti e dove invece c'è da lavorare per ottenere livelli più alti nell'obiettivo in cui si è più deboli»;

«Mi ha permesso di capire gli argomenti in cui dovevo migliorare e adesso in vista dell'esame mi permetterà di capire quali argomenti che dovrò andare a riguardare meglio».

Un altro aspetto che emerge nel 16% delle motivazioni è che l'assenza del voto numerico fa sì che gli studenti non vengano più distratti da questo e che si concentrino sugli errori commessi e sulla correzione della prova:

«Dopo aver ricevuto la verifica con il foglietto degli obiettivi, certe volte quando vado a casa cerco di fare qualche esercizio simile a quello che c'è nella verifica e guardando le correzioni fatte sul quaderno ci riesco. Credo di essere migliorata molto rispetto all'inizio dell'anno grazie a questo metodo»;

«Il voto numerico mi faceva un po' guardare solamente il numero scritto in rosso anziché la prova, invece con questo metodo ho imparato e cercato di migliorare i miei punti deboli»;

«Quando vedo i miei livelli dopo una verifica riesco a capire e a risolvere subito il mio problema; poi non essendoci il voto numerico sto molto più attenta alle correzioni del professore».

Anche a livello emotivo ci sono studenti (4%) che evidenziano dei miglioramenti:

«Non mi sono scoraggiata o gasata vedendo i voti, ho solo controllato i livelli in cui non avevo preso tre o quattro e mi sono concentrata su quelli»;
«Se la prova non va molto bene non mi demoralizzo come accade con il voto numerico».

In qualche sporadica occasione, alcuni studenti hanno espresso il loro rammarico per l'assenza del voto numerico, nonostante fossero soddisfatti del metodo valutativo con obiettivi e livelli:

«La modalità con livelli e consigli mi ha aiutato a capire quali argomenti dovevo approfondire e rivedere, anche se non mi sarebbe dispiaciuto ricevere anche un voto numerico, anche solo come soddisfazione personale».

Le risposte negative sono decisamente meno e nella maggior parte (10%) le motivazioni riguardano la difficoltà nella comprensione del metodo di valutazione, soprattutto per quanto riguarda i livelli raggiunti negli obiettivi i quali, secondo gli studenti, non riescono a risultare chiari nella descrizione dell'andamento della prova:

«Sono parecchio utili i consigli perché capisco dove devo migliorare ma non molto i livelli perché non so se sono andato bene o male»;
«Il metodo dei livelli l'ho trovato un po' complicato da capire»;
«I consigli sì, ma i livelli no perché non mi hanno dato proprio un'idea del mio andamento in matematica»;
«Mi sono sentito molto in difficoltà con lo studio, non capivo su che cosa andavo male e cosa andavo bene»;
«A me non mi ha aiutato perché non capisco che voto numerico ho»;

mentre in minima parte (5%) alcuni studenti ammettono di non aver sfruttato appieno il metodo valutativo proposto, soprattutto perché si accontentavano di controllare esclusivamente l'esito della prova:

«Secondo me poteva aiutare molto sono io che non ho sfruttato come si deve l'occasione perché mi concentravo sempre sull'esito sufficiente o insufficiente altrimenti notando di più i miei sbagli nei livelli e nei consigli sarei potuto andare meglio capendo i miei errori»;
«In realtà io non ho fatto tanto caso ai livelli»;
«Sinceramente penso che se avessi sfruttato questa cosa dei livelli e dei consigli sarei riuscita ad andare meglio in matematica e mi avrebbe aiutato, l'errore è stato mio che non facevo niente per migliorare».

5 Alcune riflessioni e conclusioni

In questo contributo si è voluto presentare un'esperienza didattica, vissuta nell'arco di due anni scolastici, nella quale si sono sperimentati dispositivi valutativi incentrati

in un'ottica principalmente formativa. Al termine di questi anni, è possibile effettuare alcune riflessioni e trarre alcune conclusioni, in termini di percezione degli allievi e dell'insegnante.

La motivazione per ideare e sperimentare un nuovo modello valutativo risiedeva principalmente nel fatto che molti studenti non si curavano della correzione delle verifiche perché erano più focalizzati nel fare confronti tra il loro voto e quello dei compagni. Da questo punto di vista, il metodo valutativo implementato ha avuto un certo effetto: la maggior parte degli allievi si concentra sui risultati ottenuti in termini di livelli di obiettivi. La correzione delle prove scritte è seguita con più attenzione; ogni studente sa che deve concentrarsi sugli esercizi in cui ha fatto errori e copiarli sul suo quaderno, consapevole degli obiettivi in cui ha ottenuto i livelli più bassi.

La griglia valutativa con gli indicatori, i consigli personalizzati per obiettivo e il rimando continuo agli aspetti importanti della materia hanno permesso agli studenti di avere una maggiore confidenza e conoscenza dei contenuti matematici in gioco. Anche per quanto riguarda la consapevolezza riguardo ai propri processi di apprendimento, i dispositivi pensati per l'autovalutazione hanno promosso un approccio metacognitivo che, per il momento, presenta ancora qualche problematica: la compilazione del file "Le mie prove" è ancora carente per la metà degli studenti; ciò può essere dovuto al fatto che non c'è un costante controllo da parte del docente, oppure alla poca abilità o familiarità con gli strumenti informatici o ancora alla percezione che sia poco utile. In futuro si potrebbe proporre l'acquisto di un quaderno specifico da destinare alla valutazione in matematica; su di esso dovranno essere raccolti i livelli raggiunti in ogni prova, i consigli ricevuti dall'insegnante e le riflessioni personali in ottica autovalutativa; per un controllo maggiore si potrebbe richiederne la consegna a ogni interrogazione e valutarne la compilazione nella prova orale, assegnando un livello alla partecipazione.

Al fine di promuovere sempre di più un atteggiamento positivo degli studenti verso l'attenzione ai contenuti e agli obiettivi su cui è necessario lavorare, si ipotizza nei prossimi anni di togliere dalla valutazione l'esito sintetico della prova (sufficiente/insufficiente).

Questo metodo valutativo ha provocato visibili cambiamenti anche nella didattica, sia per quanto riguarda la progettazione sia per il controllo dell'apprendimento degli studenti. È emersa in corso d'opera una riflessione più profonda e consapevole rispetto a quali obiettivi verificare in ogni prova e anche su come equilibrarli nei vari esercizi scelti: in sostanza, aumenta la consapevolezza del docente di ciò che richiede agli studenti.

Questa progettazione più accurata richiede ovviamente un dispendio maggiore in termini di energie e di tempo. La correzione delle verifiche è infatti cambiata: dovendosi concentrare sui singoli obiettivi, la correzione passa da un esercizio all'altro focalizzando l'attenzione in modo trasversale su un obiettivo alla volta; anche la stesura dei consigli personalizzati deve essere curata perché è da questi che ogni studente troverà le indicazioni per migliorare il proprio apprendimento. La significativa mole di livelli assegnati per ogni obiettivo ha il pregio di indirizzare e guidare le scelte didattiche dell'insegnante, infatti da una breve analisi statistica si possono notare quali sono gli argomenti che hanno causato le maggiori difficoltà oppure quelli che sono stati appresi meglio. Di conseguenza, è possibile riprogettare la didattica prestando attenzione a queste informazioni. La gestione di tutti questi dati è possibile solamente se si possiede una discreta dimestichezza con i fogli di calcolo e l'automatizzazione di alcuni meccanismi di calcolo delle medie dei vari livelli; anche

questo è un parametro da considerare se si vuole sperimentare questo metodo.

La scelta e la condivisione con gli studenti dei criteri di valutazione compiuta a inizio anno aiutano il docente a rimanere coerente con le scelte valutative stabilite durante il percorso scolastico e portano maggiore serenità: i dubbi nella decisione del voto da mettere a fine anno sono estremamente ridimensionati, perché la quantità di dati raccolti e la chiarezza nella modalità valutativa hanno fatto sì che non fosse necessario un ulteriore intervento sul voto finale né tantomeno una riflessione su come premiare l'impegno di qualche studente: tutto ciò era ben descritto dai criteri adottati e dalle informazioni raccolte durante l'anno.

La scelta di focalizzarsi sugli obiettivi ha lasciato un po' a margine i traguardi per lo sviluppo delle competenze; la valutazione per obiettivi richiede una tipologia di prove di verifica molto diversa da quella adatta alle competenze che è basata sui compiti di realtà. Nei prossimi anni si potrebbero sperimentare strategie valutative che includano anche i traguardi di competenze.

Una materia che probabilmente si presta maggiormente all'utilizzo dei traguardi per lo sviluppo delle competenze nella valutazione sono le scienze: in futuro sarebbe interessante predisporre una griglia valutativa anche per questa disciplina.

Un ultimo aspetto da approfondire ulteriormente nei prossimi anni è quello del coinvolgimento dei genitori degli studenti: si potrebbe ad esempio somministrare un questionario alle famiglie per indagare le loro convinzioni in materia valutativa e per conoscere il loro punto di vista riguardo al metodo sperimentato. Sarebbe interessante inoltre capire se la maggiore capacità descrittiva rispetto al voto numerico è apprezzata in quanto portatrice di maggiori informazioni oppure è causa di disagio e incomprensione.

L'idea è dunque quella di continuare a ideare, progettare e sollecitare tutti gli attori coinvolti nella valutazione, cercando di vivere e far vivere una scuola nella quale l'errore è visto come un'occasione di crescita e di comprensione perché, come afferma Sir John Enoch Powell, «L'unico vero errore è quello dal quale non impariamo nulla».

Ringraziamenti

Grazie a Michele Canducci, amico prima ancora che collega, senza il quale questo lavoro non avrebbe mai visto la luce.

Grazie a mia moglie Federica per il continuo sostegno, l'infinita pazienza e il prezioso confronto.

Bibliografia

Bacchi, S., & Romagnoli, S. (2019). *La classe senza voto*. Torino: Loescher.

Bottero, E. (2014). La valutazione esterna degli apprendimenti scolastici. Il caso delle prove INVALSI, *Pedagogia più didattica*, 1, 97–105.

Capperucci, D. (2011). La valutazione autentica nella scuola delle competenze e del successo formativo. In D. Capperucci (A cura di), *La valutazione degli apprendimenti in ambito scolastico. Promuovere il successo formativo a partire dalla valutazione* (pp. 63-100). Milano: Franco Angeli.

Castoldi, M. (2012). *Valutare a scuola*. Roma: Carocci.

Ciani, F. M. (2008). *A scuola senza profitto*. Legnago: Sempre Comunicazione.

Ciani, F. M. (2013). *Scuola del gratuito*. Legnago: Sempre Comunicazione.

Dozio, E. (2011). *La valutazione degli allievi e la comunicazione ai genitori*. Disponibile in <https://docplayer.it/6359549-La-valutazione-degli-allievi-e-la-comunicazione-ai-genitori.html> (consultato il 24.01.2020).

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*, Numero Speciale. Le Monnier.

Tamagnini, D. (2019). *Continuerò a sognarvi grandi*. Milano: Longanesi.

Autore/Francesco D'Intino

Istituto Comprensivo Dante Alighieri – Rimini, Italia

dintino.francesco@icalighieri.it

Fare i conti con il caso: fra probabilità e gioco d'azzardo

Dealing with chance: between probability and gambling

Sanja Komazec

Scuola media di Breganzona – Svizzera

Sunto / La probabilità è un ambito di competenza matematica introdotto alla scuola media in modo esplicito per la prima volta con il Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015). Si tratta di un ambito ritenuto spesso ostico a priori e denso di luoghi comuni. Data la recente introduzione nelle indicazioni scolastiche, si è voluta testare e promuovere una prima esperienza di percorso in quattro sezioni di seconda media. In particolare, si è voluto sviluppare un primo approccio al calcolo delle probabilità, sfruttando da un lato le competenze matematiche legate all'applicazione delle frazioni, dall'altro lato la naturale curiosità verso il gioco d'azzardo. In questo percorso, le attività svolte hanno avuto per scopo la sensibilizzazione verso i rischi del gioco e, soprattutto, una migliore comprensione e consapevolezza dei meccanismi che vi si celano.

Parole chiave: probabilità; gioco d'azzardo; competenze trasversali.

Abstract / Probability is a competence area which has been explicitly introduced for the first time in lower secondary school with the Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015). This area is often considered difficult and dense with stereotypes. Given the recent introduction into the curriculum, a first experience was tested and promoted in four 7th-grade classes. In particular, a first approach to calculating probabilities was developed, taking advantage of two facts: on the one hand, the mathematical skills related to the application of fractions; on the other hand, the spontaneous curiosity towards the theme of gambling. In this path, the activities aimed at raising awareness of the risks and mechanism of gambling.

Keywords: probability; gambling; transversal competences.

La vita è come un gioco a carte: la mano che ti viene servita rappresenta il determinismo, il modo in cui giochi è il libero arbitrio.

Jawaharlal Nehru (primo ministro indiano, erede di Gandhi)

1 Introduzione

Prima di essere un progetto, il percorso sperimentato è stato una piccola e semplice intuizione nata due anni fa durante un contatto avuto con L'Ideatorio¹, il laboratorio delle idee e della divulgazione scientifica dell'USI. Quel giorno è nato il desiderio di dare vita a un percorso capace di svelare cose magnifiche nascoste dai numeri, in particolare nell'ambito della probabilità, e di raccontare tutto ciò che sta intorno

1. Per maggiori informazioni, si veda <https://www.ideatorio.usi.ch>.

al gioco d'azzardo. L'obiettivo è stato quello di illuminare gli aspetti divertenti di un argomento considerato ostile, denso di convinzioni spesso infondate e basate sull'intuito, senza tradirne l'essenza e il rigore matematico. Nell'addentrarsi nella matematica del gioco d'azzardo, in questo percorso iniziale di scoperta, si svela un mondo per molti tratti inesplorato e affascinante. Partire dunque da ciò che gli allievi hanno in mente (conoscenze, convinzioni, luoghi comuni, esperienze, pregiudizi) è stata la chiave con cui stimolare la curiosità ed espandere il punto di vista che non è solo matematico ma si allarga scoprendo alcuni meccanismi con i quali l'essere umano prende decisioni.

2 L'articolazione del percorso

Il percorso svolto si è articolato in tre fasi:

1. *Vincere o perdere?* Giochi proposti da L'Ideatorio.
2. Proposte didattiche attivate in classe.
3. Concorso a premi.

Per creare un terreno comune sui concetti di base sono state proposte delle attività giocose e interattive, spesso a piccoli gruppi, con l'obiettivo di esplorare in modo attivo e intuitivo i temi di probabilità (con riferimento alla loro descrizione matematica), della percezione del rischio, del gioco d'azzardo e delle trappole cognitive ad esso legate. L'approccio di tutto il percorso è stato laboratoriale: si è iniziato con una serie di attività (Tabella 1) proposte da L'Ideatorio, avviando così un percorso di riflessione e analisi critica nelle situazioni di incertezza e promuovendo una efficace valutazione rispetto alla probabilità che si verifichi o meno un evento (i giochi sono stati proposti nell'aula di matematica utilizzando in parte il materiale didattico della mostra *Diamo i numeri*).²

L'aspetto ludico-matematico è stato l'argomento di trattazione della fase iniziale *Vincere o perdere?*, condotta da L'Ideatorio durante due ore scolastiche, in cui sono stati proposti i più diffusi giochi di società (la roulette, il gratta e vinci, la tombola). Successivamente è stato proposto in classe un approccio contemporaneamente teorico e pratico, suddiviso in cinque proposte didattiche, con l'obiettivo di richiamare e ampliare le attività giocose sperimentate in classe nella prima fase del progetto e per familiarizzare gradualmente con il concetto di probabilità. In *Numeri e probabilità* (Allegato 1) si esplorano gli elementi di base che consentono di trattare un evento aleatorio e la sua rappresentazione (il lancio di due dadi). *Eventi e probabilità* (Allegato 2) è incentrato sul calcolo delle probabilità a partire da eventi aleatori, impossibili e certi (con urne, carte, monete). *Praticamente impossibile* (Allegato 3) esplora alcune idee e conseguenze relative all'uso della matematica per comprendere le dinamiche degli eventi casuali. In *Lancio di monete* (Allegato 4) vengono svelati alcuni meccanismi psicologici su cui si basano alcuni giochi d'azzardo, in particolare il gioco del lotto (la memoria del gioco e la quasi vincita). Il compito di realtà, intitolato *Il dilemma di*

2. Per alcune informazioni sulla mostra, si visiti il sito <http://www.diamoinumeri.ch/>.

Monty Hall (Allegato 5), richiede di cimentarsi nella risoluzione del problema *Capra o Auto?*, argomentando le strategie e le competenze acquisite in tutta l'area laboratoriale. Il famoso paradosso è diventato in seguito un gioco da preparare e condurre con alcune classi della scuola elementare di Breganzona.

Il percorso si è concluso con una presentazione del Gruppo Azzardo Ticino, incentrata sulla prevenzione, sulla sensibilizzazione e sulla cura del disturbo da gioco d'azzardo, e con un concorso a premi, realizzato in classe a piccoli gruppi, con lo scopo di creare uno slogan matematico pubblicitario contro il gioco d'azzardo eccessivo.

In linea con le relazioni individuate nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese tra l'area matematica e i contesti di Formazione generale (DECS, 2015, p. 165), il progetto ha voluto in particolare sensibilizzare gli allievi ai rischi del gioco d'azzardo, accompagnandoli in una presa di coscienza degli stratagemmi messi in atto dall'industria del gioco, senza tuttavia demonizzare il gioco stesso, ma promuovendo il gioco responsabile.

Nell'ambito delle competenze trasversali (DECS, 2015, p. 37) sono state sviluppate le seguenti dimensioni della competenza coinvolta:

- Identificare con chiarezza i propri bisogni e i problemi da affrontare;
- Analizzare le informazioni e i dati a disposizione;
- Mettere in collegamento i dati informativi in modo articolato;
- Utilizzare le connessioni nell'esprimere un giudizio in merito;
- Rivedere i propri comportamenti in funzione di un'analisi critica;
- Riconoscere il valore dei diversi punti di vista sul tema affrontato.

Di seguito (Tabella 1) vengono elencati i giochi preliminari ideati e proposti a gruppo da L'Ideatorio nella prima fase del progetto.

Attività	Obiettivo	Descrizione
Pesca dal sacchetto con dadi colorati	Chiarire i termini: certo/impossibile/probabile	Una breve attività introduttiva da fare tutti insieme, per creare un terreno comune sui concetti base.
Scommesse	1. Distinguere fra giochi equi e non equi 2. Applicare la descrizione della probabilità tramite frazioni	4 giochi da fare in gruppetti (testa o croce/dadi a 6 facce/dadi a 20 facce/carte da gioco) Il gioco è guidato da una semplice domanda (esempio del dado da 6): <i>"Lanciamo una sola volta il dado e scommettiamo 1 franco sull'uscita del 5, quanto dovrebbe essere il premio della vincita per decidere che vale la pena di giocare?"</i> La risposta deve essere decisa dal gruppo.
Monete quiz	Introdurre l'elemento soggettivo: come percepiamo il caso?	Alcune sequenze di monete fra cui scegliere (ognuno per sé): dalle risposte collettive emergono scelte che sembrano seguire una "estetica del caso".
Sballa!	1. Giocare con la percezione intuitiva delle probabilità 2. Accennare alle regole di composizione delle probabilità (eventi indipendenti) 3. Riflettere sul concetto di probabilità	Come in una specie di Blackjack, si mettono in sequenza delle carte, ma speciali, con eventi curiosi a cui va associata intuitivamente una probabilità. Alcuni eventi sono imponderabili (venire colpiti due volte da un fulmine), altri sono a portata di calcolo (trovare Federer al telefono facendo un numero a caso di Basilea). Quando si rivelano le probabilità di ogni evento, si discute la stima fatta.

Roulette social	1. Spostare l'attenzione dalla "fortuna" del giocatore singolo alla "sfortuna" di tutti gli altri 2. Introdurre la formula della convenienza	Versione particolare a gruppi: ogni gruppo ha un budget e l'obiettivo è che almeno qualcuno del gruppo rimanga in gioco dopo una decina di giocate.
Giochi non a caso	1. Contare gli esiti e calcolare la probabilità in un caso semplice 2. Lavorare con l'albero delle possibilità per decidere	Giochi semplici da fare tutti insieme per innescare la riflessione: il gioco dei cavallini dalla mostra <i>Diamo i Numeri!</i> (Figure 1 e 2) e la pesca dal sacchetto con pedine bianche e nere.
Lotterie	Rilevare alcuni meccanismi psicologici su cui si basano molti giochi d'azzardo: la memoria del gioco e la percezione della quasi vincita ³	Giochi semplici da fare tutti insieme per innescare la riflessione: Pentolotto (Figura 3) e Gratta e vinci <i>special</i> che elimina la percezione della <i>quasi vincita</i> .

Tabella 1
Giochi preliminari proposti da L'Ideatorio.



Figura 1
La prima fase laboratoriale condotta da L'Ideatorio (il gioco con i cavallini).



Figura 2
Il gioco dei cavallini (con il lancio di due dadi).

3. *Quasi vincita*: si traspono un gratta e vinci in simboli invece che in numeri, per eliminare la percezione di avere "quasi vinto". Se si fanno giocare più studenti, alcuni con il gratta e vinci normale e altri con quello speciale, si può mettere in luce la differenza di percezione nei due casi e poi verificare l'equivalenza dei due sistemi.

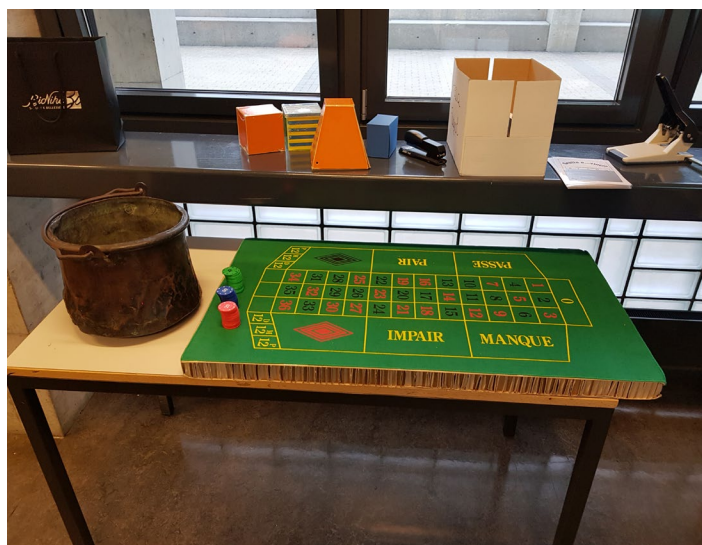


Figura 3
Il pentolotto e la roulette.

Di seguito vengono invece riportate alcune riflessioni e implicazioni didattiche interessanti riscontrate durante il percorso. Esse riguardano tre delle cinque proposte didattiche: *Praticamente impossibile*, *Eventi e probabilità*, *Il dilemma di Monty Hall*. A supporto delle riflessioni che seguiranno si consiglia di prendere in considerazione il materiale didattico in allegato, ispirato e tratto in gran parte dal libro *Fate il nostro gioco*⁴ (Canova & Rizzuto, 2016).

4

3 Eventi e probabilità: inventare e proporre i giochi (spesa, vincita, incasso: occhio al bilancio)

Che cosa vuol dire vincere, e quando è possibile dire di aver effettivamente vinto qualcosa? Alcuni inganni del gioco d'azzardo cominciano proprio dal significato piuttosto ambiguo delle parole che si utilizzano. Si è ritenuto dunque importante consolidare delle competenze legate alla padronanza del linguaggio naturale e specifico utilizzato per descrivere la formula della convenienza. Infatti, esiste una sorta di chiave magica con cui è possibile capire se una scommessa è conveniente, equa o sconveniente. La formula della convenienza si calcola sommando tra loro i prodotti tra ogni bilancio possibile e la rispettiva probabilità. Ad esempio, supponiamo di giocare un franco sull'uscita del nero alla roulette. I bilanci possibili sono due: si vince un franco; si perde un franco. Considerando che la roulette è formata da 18 numeri neri, 18 numeri rossi e 1 numero neutro (lo zero), la probabilità di vincere un franco è $\frac{18}{37}$, mentre la probabilità di perdere un franco è $\frac{19}{37}$. Dunque la formula della convenienza diventa la seguente:

$$\frac{18}{37} \cdot (1fr) + \frac{19}{37} \cdot (-1fr) = -\frac{1}{37} fr$$

4. Il progetto *Fate il nostro gioco* nasce nel 2009 e si fonda su un ampio studio della matematica e della psicologia del gioco d'azzardo, ideato da Taxi 1729, una società di divulgazione scientifica torinese (<https://www.fateilnostrogioco.it>).

Dato il segno meno ottenuto nel risultato, si conclude che sin dalla prima giocata imbocchiamo una strada che, sul lungo periodo, ci porterebbe alla perdita.

Come per gli altri ambiti trattati nel progetto, si è deciso di seguire un approccio che partisse da situazioni reali e familiari con lo scopo di analizzarle, affrontarle e modellarle in termini probabilistici. Non si è trattato di affrontare questo argomento da un punto di vista tecnico-assiomatico (la moltiplicazione delle frazioni era stata soltanto intuita e non ancora formalizzata), quanto piuttosto di far vivere l'esperienza di ragionamento probabilistico che consente di affrontare con consapevolezza la complessità del gioco d'azzardo.

Trascinati dall'entusiasmo e dalla curiosità nel diventare i protagonisti attivi e creativi nel progetto, gli allievi hanno proposto di inventare, nei piccoli gruppi, giochi d'azzardo creativi e coinvolgenti, per proporli successivamente al gruppo classe. Il compito del gruppo classe è stato quello di decidere se valeva la pena di giocare o meno. Questa fase di lavoro è stata quella più amata, più fantasiosa e più stimolante per gli allievi. Particolarmente apprezzata è stata la creatività e la flessibilità nell'inventare un gioco originale e divertente (da proporre poi ai compagni di classe), ma anche la possibilità di poter utilizzare del materiale insolito (matite colorate, caramelle, monete, carte, gomme ecc.), inventare per analogia, tentare soluzioni nuove, gestire la comunicazione e l'argomentazione delle proprie scelte. Quasi tutti i giochi erano basati sul comune mazzo di carte e il "prezzo d'entrata" (chiamato in questo modo dagli allievi), per poter partecipare al gioco, è stato spesso pagato con le caramelle o le gomme da masticare.

Quasi nessun gioco è stato rifiutato dalla classe: nella maggioranza dei giochi proposti valeva la pena di giocare, secondo gli allievi (c'era un equilibrio soddisfacente tra il prezzo d'entrata e l'importo che si poteva vincere). Si è cercato di stimolare la discussione e di tener conto della diversità di idee emerse nella formulazione dei giochi ma anche di valorizzare le intuizioni degli allievi e avvicinarle gradualmente alla successiva formalizzazione dei contenuti (il calcolo delle probabilità). Ad esempio, un allievo ha proposto in classe il seguente gioco con tre possibilità di partecipazione:

Per giocare ci devi dare 5 caramelle o di più. Poi hai 3 possibilità di gioco:

1. *Se peschi una carta con i quadri, ti moltiplichiamo il numero di caramelle che ci hai dato per 4.*
2. *Se peschi una carta con una figura ti moltiplichiamo il numero di caramelle che ci hai dato per 10.*
3. *Se peschi una carta specifica come per esempio il 9 di fiori ti moltiplichiamo il numero di caramelle che ci hai dato per 50.*

Nell'inventare e proporre i giochi in classe, gli allievi hanno disegnato, scritto, letto, discusso, confrontato le strategie e le scelte: il lavoro svolto, originale e non preconfezionato, ha rafforzato l'idea della necessità di distaccarsi dalle prassi consolidate basate sulla ripetizione di esercizi e consolidare invece una didattica che parta dalle sfide giocose e induca al ragionamento.

4 Praticamente impossibile

Il 22 agosto del 2009, comprando una schedina già compilata da 2 euro, una persona con un nome e un cognome sconosciuti ha vinto più di 147 milioni di euro. La cosa è sconvolgente, pensando che la probabilità di fare 6 al SuperEnalotto è 1 su 622'614'630. È una probabilità indubbiamente troppo bassa, anche se quando si tratta di numeri così grandi in realtà facciamo un po' fatica a dare una dimensione alle cose⁵. La domanda stimolo posta in classe è stata: se vi avessimo detto che la probabilità è di 1 su 1'200'000 o su 1'500'000'000 avrebbe fatto molta differenza? La sensazione, nei due casi, è diversa oppure in entrambi i casi vincere è qualcosa di molto improbabile? La discussione in classe ha evidenziato delle percezioni falsate, un po' perché è difficile stabilire la grandezza dei numeri in gioco, un po' perché anche gli allievi sono naturalmente influenzati dalle speranze, dalle esperienze o dalla amplificazione mediatica.

5

Per poter portare in superficie alcuni dei meccanismi legati ai fattori che influenzano la percezione della probabilità, è stato proposto un piccolo test in classe: mettere in ordine 10 eventi molto diversi tra di loro, partendo da quello che si ritiene più probabile a quello che si ritiene meno probabile (Allegato 3). Quest'attività prende in parte l'ispirazione all'attività laboratoriale Sballa! condotta da L'Ideatorio. In seguito alla domanda *Credete sia più facile che un asteroide cada sulla terra o che proprio voi riusciate a fare 6 al SuperEnalotto?*, si è potuto capire qualcosa in più su come funziona davvero quella cosa che abitualmente chiamiamo fortuna. Vincere al SuperEnalotto è possibile in teoria, ma con una probabilità così bassa che rientra in quegli eventi definiti come *praticamente impossibili*. E qui il cervello va in confusione: la probabilità che un asteroide cada sulla terra è di circa 140 volte più alta rispetto alla probabilità di vincere al SuperEnalotto. Sembra del tutto irrazionale crederci, soprattutto perché la vincita al gioco è un evento tanto attraente e perché, in fondo, a qualcuno è già capitato.

Tuttavia, ci sono degli esempi lampanti di eventi che dovremmo ritenere irrealizzabili, ma che sono accaduti e che rappresentano la manifestazione empirica che l'improbabilità esiste e vive in mezzo a noi. Si può ad esempio raccontare la storia di Roy Sullivan, che in sette diverse occasioni è stato colpito da un fulmine; oppure la disavventura di Ann Elizabeth Hodges, a cui è letteralmente piombato un meteorite in casa. Per la lettura di queste storie⁶, condivise in classe durante le ore di matematica e di italiano, si rimanda al libro *Fate il nostro gioco* (Canova & Rizzuto, 2016).

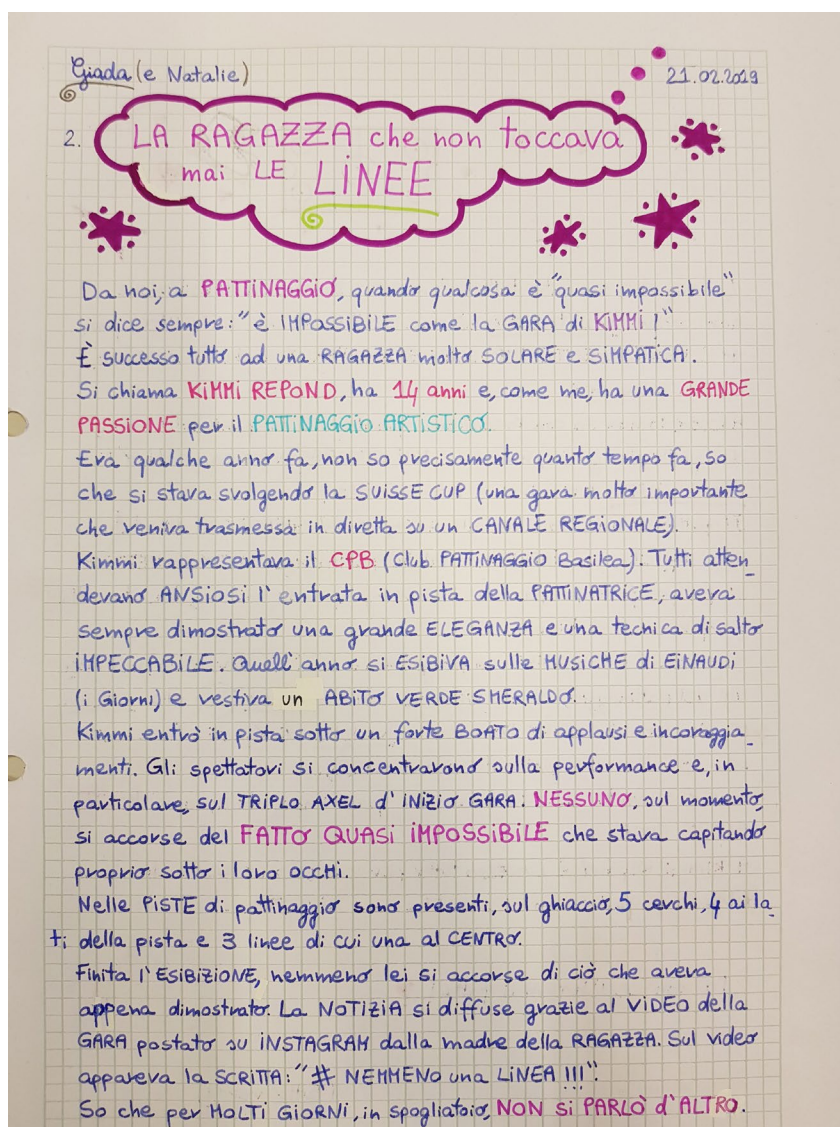
6

Ragionando proprio sulla soglia fra *possibile* e *praticamente impossibile*, gli allievi hanno accolto con grande stupore la notizia del 18 agosto 1913: al casinò di Montecarlo una roulette ha registrato 26 neri di seguito (l'evento che ha una probabilità di 1 su 140 milioni di accadere). A formalizzare questo concetto è la cosiddetta legge dei grandi numeri: detto in modo semplice, qualunque cosa non sia impossibile, per quanto improbabile sia, prima o poi capita se si fa un numero sufficiente di tentativi. A questo punto la sfida è stata quella di trovare una via, ovvia ma sempre profonda, per far realizzare in classe un evento praticamente impossibile e avvicinare gli allievi al significato della legge menzionata. È bastato un piccolo esperimento: prendere

5. Un articolo divulgativo sul tema è disponibile al link <http://www.parmateneo.it?p=39782>.

6. Alcune storie disponibili nel libro: *Una buca impossibile*; Randy Johnson, il lanciatore assassino; Elizabeth e il meteorite; Volo 367 Stoccolma-Belgrado; I colpi di fulmine di Roy Sullivan.

una moneta, lanciarla per 40 volte e annotare su un foglio la sequenza di teste e di croci (Allegato 4). Ognuno degli allievi ha realizzato l'esperimento e ha annotato la propria sequenza su un foglio. Quanta meraviglia in classe nello scoprire che ogni sequenza ottenuta è un evento praticamente impossibile (con una probabilità di uno su mille miliardi di accadere), migliaia di volte più improbabile di 26 neri di fila alla roulette. E per rinforzare l'idea di una probabilità molto bassa, ancora una volta è stato utile confrontare tale probabilità con il lasso di tempo necessario a ottenere nuovamente una delle sequenze registrate: se lanciassimo la moneta 24 ore su 24, una sequenza fissata ricapiterebbe mediamente una sola volta nei prossimi 200'000 anni! L'obiettivo, in questa fase del progetto, è stato quello di «sviluppare un'abitudine mentale a prendere in considerazione situazioni di incertezza che esigono la valutazione della probabilità di un evento e il confronto fra probabilità, per dare senso ad affermazioni del tipo "...è più/meno probabile di..."» (DECS, 2015, p. 163). L'attività è terminata con la scrittura da parte degli allievi di alcune storie praticamente impossibili, durante le ore di italiano. Viene riportata di seguito (Figura 4) la storia di un'allieva, una storia vera ma praticamente impossibile di una ragazza sul ghiaccio che non toccava le linee.



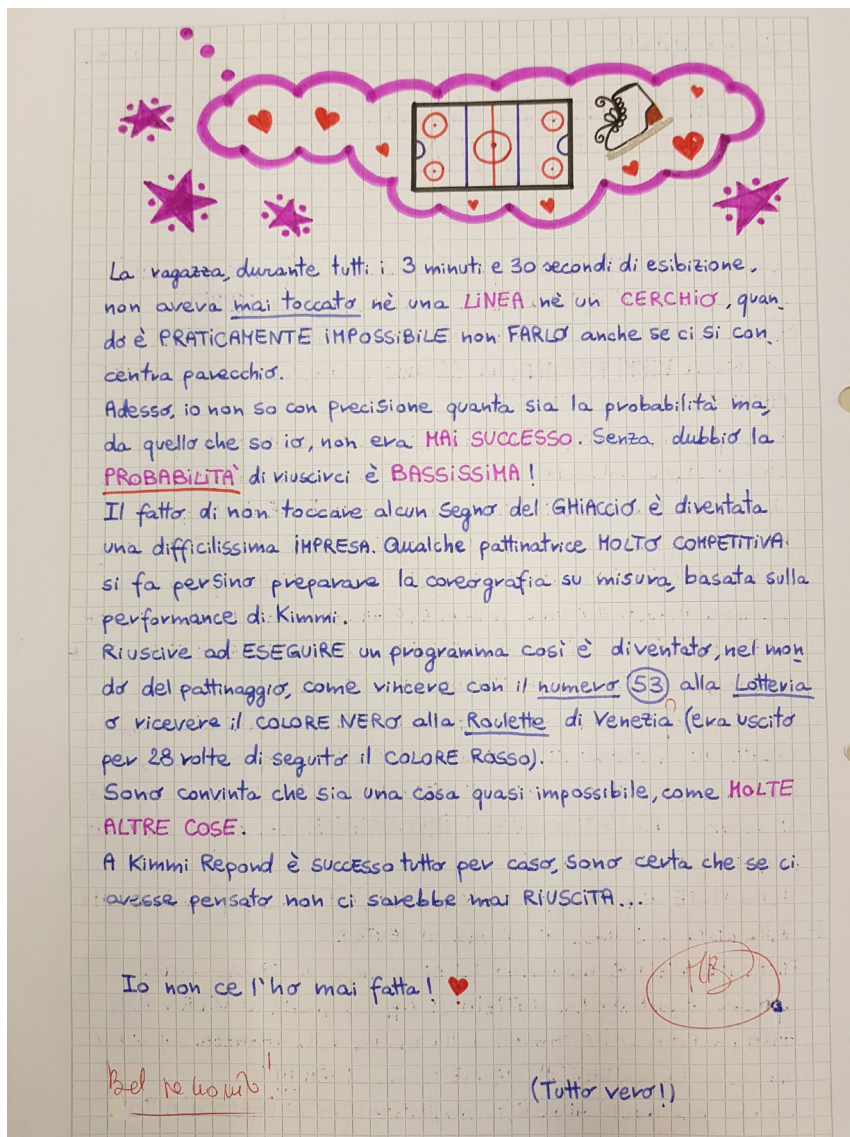


Figura 4
La storia racconta
l'esibizione sul ghiaccio
di una ragazza ticinese.

5 Capra o auto: una scelta difficile (il dilemma di Monty Hall)

Non sempre ciò che è ovvio e banale in realtà lo è. Il compito di realtà, a conclusione del percorso sulla probabilità, consisteva nel provare a risolvere, per tentativi, prima individualmente poi in piccoli gruppi, il celebre problema di Monty Hall (Allegato 5), da alcuni chiamato anche paradosso di Monty Hall, anche se il problema non genera contraddizioni logiche. Supponiamo di partecipare a un gioco a premi in cui si può scegliere fra tre porte: dietro una di queste c'è un'automobile; dietro le altre, delle capre. Viene scelta una porta e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa nasconde ciascuna porta, ne apre un'altra, rivelando una capra. Quindi domanda al concorrente: «Vorresti cambiare la tua scelta?».

Dopo vari tentativi, annotando ogni volta su una scheda (Figura 5) la scelta compiuta (mantenere o cambiare la porta scelta inizialmente), gli allievi dovevano decidere quale delle due scelte fosse quella più conveniente. Le risposte più immediate sono

state prevedibili: «Mantengo la porta iniziale; se dovessi perdere cambiando la mia scelta iniziale, mi pentirei per tutta la vita. E poi, la prima scelta è quella più intuitiva, e forse quella più giusta». Grazie alla scatola dimostrativa (Figura 5) costruita da un allievo, l'attività ha acquisito un carattere ancora più creativo e attivo e ha permesso di rimettere in gioco le competenze matematiche e le capacità logico-intuitive, con una mentalità aperta e flessibile. È stato chiesto di ipotizzare diverse soluzioni, provarle concretamente e argomentarle, orientandosi consapevolmente in una situazione di incertezza (Gentili & Egidi, 2016).

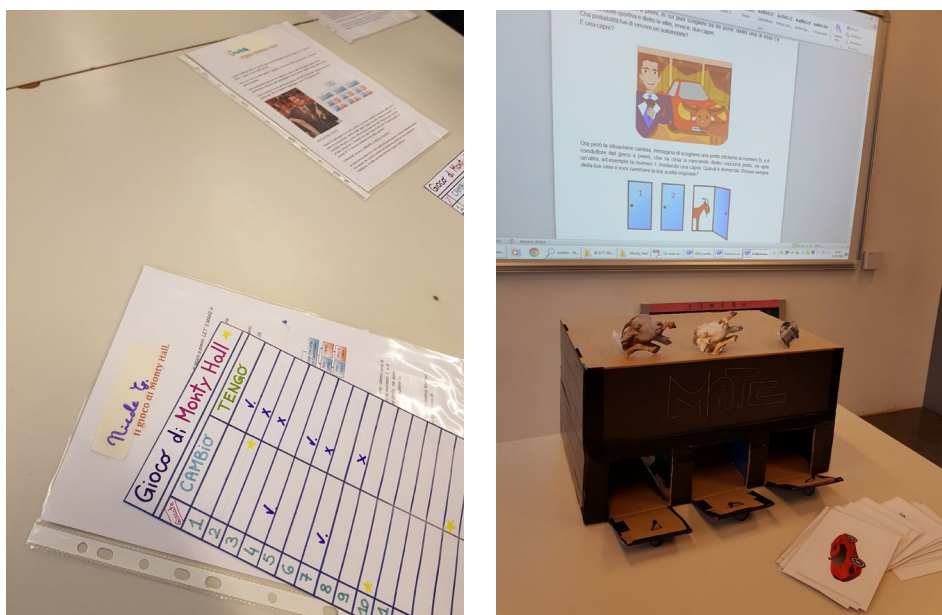


Figura 5
Il materiale relativo
all'attività e la scatola
dimostrativa costruita
da un allievo.

Nella seconda fase del lavoro si è trattato di preparare tutto il materiale necessario per riuscire a spiegare, e soprattutto per far provare, il famoso dilemma alle classi quinte della Scuola elementare di Breganzona (carte da gioco con capre e auto, schematizzazione delle probabilità di vincita, tabelle per annotare i risultati delle partite, eventuali premi da distribuire, fogli informativi sul gioco).

La parte più delicata per gli allievi è stata la preparazione *didattica* del gioco da condurre (Figura 6): suddivisione dei ruoli all'interno di ogni gruppo; anticipazione di possibili dubbi, soluzioni, domande; preparazione della fase introduttiva per spiegare le modalità di gioco. Oltre il materiale didattico (Allegato 5), sono stati mostrati agli allievi due video che illustrano la soluzione e la dimostrazione attraverso il calcolo probabilistico e il sito www.stayorswitch.com che permette di simulare il gioco in modo ancora più veloce e coinvolgente.

Nella progettazione dell'attività, gli allievi sono stati chiamati a contribuire al lavoro collettivo di gruppo, condividendo scelte, idee, scopi, cooperando, pianificando e realizzando il lavoro con gli altri. È stato inoltre possibile consolidare delle competenze legate all'alfabetizzazione probabilistica, tra cui anche la padronanza del linguaggio specifico utilizzato nella conduzione del gioco: cercare il modo migliore per mettere ordine nelle proprie idee e spiegare il gioco a un gruppo di bambini delle scuole elementari ha richiesto uno sforzo notevole. Un'allieva, a conclusione del progetto in cui è stato sperimentato il gioco con i bambini più piccoli, ha scritto:

«Parto dal presupposto che il rapporto con la matematica è personale e spesso è uno scontro difficile tra amore e odio. Tuttavia, anche per coloro che soffrono di mal di pancia ogni volta che si va a lezione, esistono dei trucchi [...]. Mi è stato molto d'aiuto il materiale concreto che abbiamo potuto utilizzare in classe (roulette, cavallini ecc.). Abbiamo potuto giocare, lavorare ed imparare allo stesso tempo con molta più facilità. Queste attività mi hanno resa più autonoma, più collaborativa e più comprensiva. Bella soddisfazione per tutti!».



Figura 6
Le carte da gioco preparate in aula informatica.

6 Il concorso finale: Gruppo Azzardo Ticino⁷

7

La collaborazione con il Gruppo Azzardo Ticino nel mese di maggio 2019 ha permesso non solo di consolidare ulteriormente le nozioni probabilistiche di base, ma anche di sensibilizzare gli allievi sul gioco d'azzardo, affrontando il legame che c'è tra la psicologia e i giochi d'azzardo e presentando gli aspetti socio-sanitari personali connessi alla ludopatia. Il progetto è stato concluso con un concorso il cui obiettivo è stato quello di instaurare un rapporto con le altre realtà impegnate nella prevenzione della dipendenza dal gioco d'azzardo. È stato deciso di usufruire del coinvolgimento del Gruppo Azzardo Ticino per lanciare una sfida, con premi previsti per i lavori migliori: ad ogni classe, suddivisa nei vari gruppetti di lavoro, è stato chiesto di creare dei cartelloni proponendo uno slogan fantasioso, accompagnato da elementi scientifici convincenti, che permettesse di comunicare gli effetti dannosi della dipendenza dal gioco d'azzardo. Il primo premio è stato assegnato al cartellone intitolato *Il re della rovina* (Figura 7): il confronto fra la probabilità di vincere al Miliardario (circa 1 su 600'000) e la probabilità che un asteroide Apophis 99942 colpisca la Terra (circa 1 su 150'000) è stato arricchito con immagini, disegni, parole, frasi scritte, calcoli.

7. Per maggiori informazioni, consultare il sito: <https://giocoresponsabile.com/>.



Figura 7
Il re della rovina, cartellone vincitore del primo premio.

Particolarmente creativo risulta il cartellone (Figura 8) che propone il confronto fra la probabilità di vincere al Miliardario (circa 1 su 600'000) e la probabilità di pescare a caso un biglietto del Miliardario (lungo 15 cm) in un'immaginaria fila di gratta e vinci disposta sul percorso tra Lugano e Napoli (lungo 900 km), sperando che sia quello vincente!



Figura 8
Un'idea originale sul percorso tra Lugano e Napoli.

7 Conclusioni e implicazioni didattiche

Portare il gioco d'azzardo nelle aule è stato un piccolo passo nell'avvicinare la scuola alle problematiche legate alla realtà e nell'implementare il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese. In ognuna delle classi in cui è stato realizzato il progetto, gli

allievi hanno apprezzato sia l'applicazione dello strumento matematico nella comprensione di un problema reale, sia l'integrazione tra il programma di matematica e quello di altre materie e momenti coinvolti (italiano, docenza di classe, differenziazione curricolare)⁸. Un altro aspetto emerso è quello dei numerosi impieghi pratici della matematica: le basi e le implicazioni matematiche riscontrate durante il progetto si sono intrecciate con tante situazioni, legate al gioco d'azzardo, di cui si sapeva ben poco all'inizio del percorso. Ci si riferisce in particolare al giudizio umano e alle decisioni che vengono prese nelle situazioni d'incertezza, dove non si è in grado di calcolare la probabilità che un determinato evento si verifichi. Si è discusso anche su come è possibile ridurre il rischio di dipendenza: il pensiero condiviso da tutti gli allievi è che la matematica potrebbe dare il suo contributo per prevenire la patologia da gioco d'azzardo (ad esempio nell'eliminare i rinforzi positivi quali le piccole vincite o le quasi vincite). Il viaggio nei meccanismi che regolano il gioco d'azzardo ha ridotto negli allievi il potere delle scintillanti e ingannevoli luci del gioco d'azzardo e ha aumentato la consapevolezza nel capire che la cosiddetta fortuna al tavolo da gioco non si siede mai per più di qualche giro.

Il gioco, utilizzato come approccio principale con cui sono state affrontate le attività proposte, è stato considerato dagli allievi come una modalità gioiosa, spensierata, libera, creativa e flessibile, ma allo stesso tempo funzionale alla comprensione di alcuni fenomeni del mondo in cui viviamo. La leggerezza del gioco, infatti, non significa superficialità, anzi: attraverso il gioco si delinea l'importanza di sentirsi liberi di sperimentare singolarmente o in gruppo, di tentare la via dell'intuizione e del pensiero originale e creativo.

Un altro obiettivo ambizioso del progetto è stato quello di rispondere alla domanda «*Che cosa conviene e che cosa non conviene dal punto di vista matematico (e non solo nel gioco d'azzardo)?*»; domanda che apre altre domande e altri mondi da esplorare con l'aiuto dei numeri e che espande la consapevolezza dei meccanismi istintivi che guidano le nostre scelte. Tutto ciò per confermare ancora una volta che la matematica è prima di tutto bella, e che il segreto per capirla è quello di divertirsi.

Ringraziamenti

Se questo progetto è stato avviato e portato avanti con grande curiosità ed entusiasmo, il merito è anche di Janos Cont, fisico e collaboratore de L'ideatorio, che ha contribuito a rendere piacevole l'inizio del percorso nel mese di settembre del 2018, in quattro classi seconde della Scuola media di Breganzona. Senza il grande lavoro di organizzazione, di coordinamento e di discussione con Alessia Fragnol, collega e amica, non sarebbe stato possibile trasformare in progetto quello che all'inizio è stato solo un'idea. Infine, il ringraziamento più sentito va a tutti gli allievi che hanno partecipato al progetto in modo attivo e vivace e che hanno reso possibile la sperimentazione delle attività descritte.

Bibliografia

Canova, P., & Rizzuto, D. (2016). *Fate il nostro gioco*. Torino: add editore.

Gentili, G., & Egidi, D. (2016). *Matematica per competenze*. Trento: Erickson.

⁸. Due allievi del corso di differenziazione curricolare (IV media) hanno costruito la roulette e la tavola per il gioco con i cavallini (Allegato 1).

DECS (2015). Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese. Tratto da ScuolaLab: Disponibile in <http://www.pianodistudio.ch> (consultato il 04.03.2020).

Autore/Sanja Komazec

Scuola media di Breganzona – Svizzera

sanjakomazec@edu.ti.ch



Recensioni

DdM

Recensioni

“L’infinito sai cos’è?”

<https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/linfinito-sai-cose/>

“L’infinito sai cos’è?”, è una canzone, e anche un video musicale, che nasce da un’idea del centro che all’interno del Dipartimento formazione e apprendimento di Locarno si occupa di didattica della matematica (DdM), ma finisce per coinvolgere, praticamente e idealmente, tutto il dipartimento. Infatti nel video vediamo, oltre ai membri del DdM, gli insegnanti e i direttori scolastici che da ormai tanti anni collaborano con loro, anche gli studenti, gli amministrativi e la direzione del dipartimento, all’interno e soprattutto fuori dagli spazi dove abitualmente si fa lezione e ricerca. Sono sicura che questa non sia una scelta casuale, ma che corrisponde all’intento comunicativo di tutto il progetto *Matematicando*: portare la matematica e la sua didattica per le strade della città di Locarno, attraverso il suo tradizionale festival e adesso, grazie alla sua piattaforma, ovunque, per raggiungere sì le scuole, ma anche le famiglie e i non addetti ai lavori.

Il tema della canzone è quello dell’infinito, che nella matematica occidentale riscuote grandissima attenzione da ben oltre un secolo all’interno della teoria degli insiemi ed è capace di affascinare anche i meno appassionati alla disciplina, come evidenziato bene da Arrigo, D’Amore e Sbaragli (2020). Al tempo stesso, però, il concetto di infinito matematico è anche davvero poco intuitivo. Ecco perciò che nel ritornello quasi si annuncia l’inevitabile ostacolo (o “conflitto commognitivo” se vogliamo pensarlo come fa Anna Sfard, 2008) che lo studente o il curioso dovranno affrontare:

Non c’è trucco e non c’è inganno
tutti quanti ormai lo sanno.
L’infinito sai cos’è? È un’arte
in cui il tutto è uguale alla sua parte.

Un bell’imbroglio in effetti, se si pensa al ben più familiare ed evidente assioma euclideo a cui il ritornello fa il verso, “Il tutto è maggiore della parte”, che qui si scontra con la sofisticata definizione di insieme infinito che dobbiamo a Dedekind. Per aiutare chi ascolta a superare questo ostacolo, perciò, in tutto il testo troviamo molte suggestioni e indizi: si parla - o forse bisognerebbe dire “si canta” - del concetto di equipotenza tra insiemi e di tanti esempi, presi dall’aritmetica e della geometria. Ecco così apparire insiemi che sono, contro il nostro intuito, “grandi quanto” l’insieme dei numeri naturali o quanto la retta reale. Lo si fa con grande ironia e leggerezza e, ovviamente, dato il contesto, senza la pretesa di essere esaustivi o formali. Inoltre, a far leva sull’attenzione di chi ascolta, ci sono le figure di due tra i matematici che più sono stati pionieri nell’esplorazione del concetto di infinito: Galileo Galilei e Georg Cantor. La matematica che conosciamo oggi, e che molti ritengono una scienza fredda e sterile, è in realtà un prodotto culturale, una creazione dell’uomo e degli uomini attraverso i secoli, o meglio i millenni: sottolineare questo aspetto durante la comunicazione è sicuramente un espediente efficace (Benvenuti & Natalini, 2017). E così risulta vincente la scelta di accennare alla scoperta di Galileo - ritenuta paradossale dal suo stesso autore - dell’equipotenza tra l’insieme dei numeri naturali e quello del suo sottoinsieme proprio dei quadrati perfetti (secondo molti storici la prima riflessione sull’equipotenza di insiemi infiniti numerabili). Scoperta che nel testo della canzone viene seguita da quella di Cantor, l’inventore della teoria degli insiemi, che nell’avvincente vicenda della storia della matematica risponde al para-

dosso di Galileo, rivoluzionando tutto il discorso sull'infinito. Cantor, infatti, introduce l'idea di confronto tra le taglie degli insiemi infiniti, e scopre che il tipo di infinito della retta reale è maggiore del tipo di infinito dei numeri naturali:

La cosa strabiliante è che anche interi e razionali
si possono associare uno a uno ai naturali.
Lo so che stai pensando: "Coi reali sarà uguale?"
No, loro son di più! Ecco il fatto eccezionale.

Eppure, lo stesso Cantor, nelle lettere al collega Dedekind, esplicita la sua difficoltà a superare la contraddizione tra l'evidenza del fatto che una parte è più piccola dell'insieme e le conseguenze a cui porta la sua teoria. E così troviamo nel testo:

Un gran bel turbamento fu per lui certamente
disse: "Lo vedo, sì, ma non ci credo veramente!"

Insomma, proprio un piacevole stimolo di riflessione quello che ci arriva dal DdM e da tutti gli attori che sono stati coinvolti nella realizzazione della canzone e del suo video, davanti e dietro la videocamera. Sono sicura che ai lettori di questa rivista ha fatto sorridere e che a molti ha offerto anche un importante spunto: comunicare la matematica a un pubblico ampio, con il coraggio di sperimentare nuovi modi e nuovi canali, non dovrebbe essere un impegno di tutti coloro che credono nel valore sociale e culturale della disciplina?

Bibliografia

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico. Storia, epistemologia e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Pitagora.

Benvenuti, S., & Natalini, R. (2017). Comunicare la matematica: chi, come, dove, quando e, soprattutto, perchè?!. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 2(2), 175-193.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Gemma Carotenuto
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università degli Studi di Napoli "Federico II", Italia

Lolli, G. (2019). *I teoremi di incompletezza*. Bologna: il Mulino.

Un libro di Gabriele Lolli con questo titolo è una specie di calamita per chiunque ami la logica; su questo tema lo stesso autore ha più volte scritto in precedenti pubblicazioni che hanno avuto fortuna editoriale, sia per il tema attraente e coinvolgente, sia per la maestria dell'autore. Quel che sempre mi sorprende e mi avvince è che un libro (breve) come questo, su questo tema, con questo linguaggio, può essere

letto con piacere da uno specialista (che sempre troverà comunque qualcosa che lo sorprenderà) sia da un amante della logica non professionista (che resterà sorpreso dalle spiegazioni e dai mille riferimenti ghiotti).

La storia di questi teoremi è nota a tutti; mentre Peano e anche Hilbert, rifacendosi al "sogno" di Leibniz, dichiaravano o speravano di aver creato sistemi logici in grado di decidere, in caso di controversie fra filosofi, chi avesse ragione, sulla base di un sistema logico semplice, formale, quasi a sorpresa, fra il 1930 e il 1931, il giovanissimo Gödel diede una mazzata a tutti, logicisti, intuizionisti, formalisti, ... pubblicando quei teoremi che hanno cambiato la storia della logica (e non solo), mostrando concretamente che, in un sistema neanche tanto potente (capace di contenere almeno l'aritmetica elementare dei numeri naturali), è possibile costruire formule ben formate che, in quel sistema, non sono né dimostrabili né confutabili. Sappiamo che fu una vera sorpresa per i più, una meraviglia assoluta. Il mondo logico era allora affascinato e conquistato dagli studi sulle antinomie e molti dei logici più famosi dedicavano tutto il loro tempo a cercare di dipanare quella matassa aggrovigliata cercando di creare ... antidoti, come la teoria dei tipi di Russell. La proposta di rimedi contro le antinomie aveva almeno in parte scardinato alcune certezze e creato discussioni di estremo interesse, come il tentativo di chiarire in modo definitivo e completo che cosa dovesse intendersi per deduzione, un concetto che appariva (appare) a molti come quasi ovvio e ad altri come estremamente complesso. Lolli ci racconta la sequenza esatta degli eventi che costituirono la storia di quella bomba, la formulazione esatta del teorema e alcune successive modifiche effettuate dallo stesso Gödel e da altri logici, per esempio quella di Barkley Rosser che riduceva alcune richieste della tesi originale. Naturalmente come quasi sempre avviene in matematica, v'erano stati precedenti al teorema di Gödel e Lolli ce li racconta con molta profondità nel capitolo III, discutendo in dettagli l'accettabilità o meno di questi precedenti come tali. Nessuno di essi raggiunse la forza enunciativa e dimostrativa di Gödel e dunque nulla faceva davvero presagire questo evento. In tal senso, sono di estremo interesse le lettere che Emil Post ha inviato a Gödel, alcuni anni dopo la pubblicazione dei suoi teoremi.

Né si deve supporre che il risultato di Gödel e soprattutto la sua dimostrazione siano passati indenni rispetto all'analisi dei contemporanei; più d'uno ha tentato di contrastare e di invalidare questi formidabili teoremi. Ernst Zermelo, per esempio, fra i più noti. Ma molti altri matematici di primo piano intervennero, von Neumann, Russell, Wittgenstein, Popper e vari altri filosofi della scienza, non sempre ben consapevoli della portata dei teoremi di Gödel. Trovo molto interessanti le notizie che Lolli narra a proposito delle diverse reazioni dei matematici non logici a proposito dei risultati di Gödel, che sono le più diverse. Molto ho appreso da questo libro quando narra delle reazioni dei fisici, in primis Stephen Hawking. Molto interessante l'incursione che Lolli fa nel campo dell'arte figurativa, campo nel quale anch'io spesso mi lancio in quanto lo trovo per molti versi paragonabile, in quanto a temi, processi e interessi, a quello della matematica; qui, Lolli cita i giganti Magritte, Escher e Pistoletto, assai a proposito. Molto interessanti le considerazioni che, grazie ai suoi risultati, Gödel fa sulla matematica prima e sull'intelligenza artificiale poi, e che Lolli commenta con la solita indubbia profondità. Trovo affascinante l'ultimo capitolo dal titolo "Bellezza e magia", nel quale si discute circa la bellezza della formula ideata da Gödel, ovviamente non in maniera frivola, ma basandosi su illustri citazioni di matematici che hanno parlato del tema assai controverso e delicato, la bellezza della matematica, tema che ha affascinato generazioni intere di matematici e che, anche se non sempre in modo esplicito, appare in modo molto presente nelle dichiarazioni di molti matematici anche contemporanei.

Credo che un simile testo dovrebbe essere letto da tutti coloro che, almeno una volta nella vita, hanno anche solo sentito citare il teorema di Gödel, anche se mai hanno dedicato tempo a leggerne l'enunciato o la dimostrazione, in una delle sue molte versioni (ricordo che esistono libri interi su questo tema, tentativi di rendere comprensibile ai non logici tale dimostrazione). Gli insegnanti di matematica, per esempio, per aumentare la capacità critica individuale della comprensione disciplinare, capire i limiti e i grandi traguardi della disciplina che insegnano, riconoscerne aspetti che altrimenti potrebbero essere basati su intuizioni poco fondate. Una lettura come questa amplia la mente, aumenta la capacità critica, dà ragione di temi affascinanti e delicati che, altrimenti, se ignorati, possono banalizzare la nostra disciplina.

Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Firenze: Mondadori Università.

«Non è la conoscenza, ma l'atto di imparare; non il possesso, ma l'atto di arrivarci, che dà la gioia maggiore».

Con questa citazione di Gauss si apre il testo *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*, e non avrebbe potuto essere scelta frase migliore per rappresentare sinteticamente il contenuto del libro scritto dalle tre ricercatrici, più una insegnante-ricercatrice, in didattica della matematica. Sì, perché in questo testo l'atto di imparare è vissuto in almeno due sensi: da un lato si ragiona su cosa significhi imparare la matematica nei primi livelli scolastici, dall'altro vengono forniti consigli e impostazioni teoriche sulle quali fondare la propria preparazione di insegnante. Il libro è strutturato in modo da integrare queste due facce continuamente, in un'ulteriore ottica binaria di arricchimento reciproco fra pratica e riflessione teorica.

Dopo un primo capitolo nel quale si presenta un inquadramento di alcune linee teoriche in didattica della matematica a carattere generale, si entra nel vivo del discorso prettamente matematico-didattico. I tre capitoli centrali si riferiscono agli ambiti Numeri, Spazio e Figure, Relazioni, e sono organizzati in modo da analizzare gli aspetti epistemologici, cognitivi e didattici di ogni tema; tale analisi è poi sempre seguita da una presentazione di esperienze didattiche analizzate con gli strumenti teorici proposti. La stessa struttura è utilizzata anche nell'ultimo capitolo del libro, nel quale si tratta lo scottante tema della valutazione in matematica; anche in questo caso sono descritte e commentate attività didattiche riproducibili e implementabili.

All'interno di ogni capitolo, sono numerosi i riferimenti teorici dai quali poter prendere spunto per approfondire le riflessioni proposte; ma numerosi sono anche i protocolli di allievi, corredati da analisi puntuali e profonde grazie alle quali poter sperimentare il proficuo arricchimento dato dall'intreccio fra pratica e riflessione didattica. Questo è forse il contributo più interessante del libro, nel quale si avverte fortemente l'integrazione fra i vari approcci delle autrici. Insomma: si capisce che è un libro scritto da ricercatrici con la passione per le pratiche d'aula e da insegnanti con la passione per la ricerca e la riflessione.

È per questi motivi che consiglio la lettura del libro in primo luogo a tutti i giovani che studiano per diventare maestri di scuola dell'infanzia ed elementare: in che cosa

consiste la formazione docenti, infatti, se non proprio nel cercare di comprendere da un lato cosa significhi insegnare e apprendere, e dall'altro come sostenere la quotidianità della pratica scolastica con la riflessione teorica e viceversa?

Michele Canducci

Dipartimento Formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Nicosia, G. G. (2019). *Contare per ventine – Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo*. Disponibile liberamente al link: <http://www.lulu.com/shop/giovanni-giuseppe-nicosia/contare-per-ventine-unanalisi-etnomatematica-di-numerali-del-mondo/ebook/product-24229523.html>

Giovanni Giuseppe Nicosia non è nuovo nel mondo dell'etnomatematica, una disciplina che si è inserita nel panorama della ricerca da alcuni decenni e che si trova a metà strada tra la matematica e l'antropologia culturale. L'inizio del suo contributo scientifico su questo tema risale al 2002, quando si è occupato di tradurre in italiano il famoso libro *Etnomatematica* (D'Ambrosio, 2002), contributo imprescindibile per i ricercatori che vogliono approfondire lo studio delle pratiche matematiche dei diversi gruppi socioculturali. Ma, oltre a essere un ricercatore e un appassionato studioso di culture del mondo, Nicosia è anche un insegnante, e proprio dall'interesse per la didattica nasce il volume *Numeri e culture* (Nicosia, 2008), libro nel quale l'autore riesce a dare un contributo all'educazione matematica dei giovani che vivono in un ambiente multiculturale.

In un certo senso, *Contare per ventine – Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo* è la continuazione di questa opera di avvicinamento del mondo scolastico, sempre più multiculturale, al mondo delle matematiche, intese come espressione culturale del sapere di un popolo.

In questo libro, che per desiderio dell'autore «appartiene al Popolo, che ne è il vero autore profondo», Nicosia tratta dei numerali e dei sistemi di numerazione dapprima nelle popolazioni europee e in Asia, poi nelle Americhe.

La quantità di culture prese in considerazione è impressionante. In Europa e in Asia si discutono i sistemi di numerazione georgiani, baschi, bretoni, gaelico irlandesi, gallesi, danesi ecc. Nelle Americhe si affrontano i numerali in uso nelle civiltà maya, atzeche, zapotечи, mesoamericane o messicane, e ancora i numerali waunana, andoque, macune ecc., provenienti dalle culture sudamericane; l'esposizione si conclude con il tentativo di raccogliere le informazioni concernenti i sistemi di numerazione in uso nei popoli indigeni dell'America del Nord. La ricerca in quest'ultimo caso è particolarmente complessa, sia a causa delle tradizioni principalmente orali di questi popoli, sia a causa di colonizzazioni e stermini avvenuti nel corso della storia.

Con questo testo, Nicosia dimostra di essere uno dei massimi cultori italiani della materia, con un'attenzione particolare alle applicazioni dei suoi studi in ambito educativo: l'autore sembra infatti essere estremamente consapevole di come il mondo multiculturale in cui è immersa la scuola al giorno d'oggi necessiti di una cultura dell'accoglienza e dell'inclusione. D'altra parte, per accogliere e includere è dapprima necessario essere disposti a conoscere non solo in modo superficiale, ma approfondito. Il contributo principale di questo volume sembra quindi essere: proporre

una conoscenza effettiva di alcuni aspetti, quelli matematici, delle culture che sono lontane dalla nostra, con il fine di aiutare insegnanti, ricercatori, lettori interessati, a entrare nella relazione con ciò che è diverso con curiosità e spirito di confronto.

Bibliografia

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

Nicosia, G.G. (2008). *Numeri e culture*. Trento: Erickson.

Michele Canducci

Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica*. Bologna: Pitagora.

Questo volume fornisce gli strumenti necessari a orientarsi nel mondo delle specificità che si incontrano nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Ricordo con affetto di averlo accolto come guida nel mio percorso di studi, fin dalla pubblicazione di una sua prima versione, nel 2008. Ma questa nuova versione del 2019 è assai più ampia e più estesa.

Il lettore che parte alla scoperta del meraviglioso mondo della didattica della matematica troverà in questo libro una mappa, in cui sono tracciati percorsi e pericoli, e una luce per districarsi nelle dinamiche d'aula e rivelarne le delicatezze.

L'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica* può essere ingenuamente o frettolosamente interpretata solo come la difficoltà di qualcuno (il tal allievo) in qualcosa (le frazioni). Gli Autori conducono invece un'analisi della questione dal punto di vista didattico più generale e scientifico, e sfruttano i risultati della ricerca degli ultimi decenni per svelare quanto la suddetta interpretazione sia illusoria.

Innanzitutto, l'apprendimento, nel caso della matematica, ha delle specificità delle quali è necessario tenere conto. Nel testo si fa continuo riferimento ad esse e riguardano sia la natura degli oggetti matematici che il processo di insegnamento-apprendimento in sé. Inoltre, come esplicitamente analizzato nell'ultimo capitolo, le dinamiche d'aula si caratterizzano per le relazioni interpersonali che ivi si instaurano. Questo significa che sarà necessario considerare opportunamente tutte le declinazioni e le sfumature di tali relazioni e dei modi in cui esse possono influenzare il processo di insegnamento-apprendimento.

Gli Autori ci rivelano un mondo dove gli "errori" e i "fallimenti" sono in realtà dei comportamenti messi in atto sempre per una ragione e che come tali dovrebbero essere trattati in modo costruttivo, come manifestazione di qualcosa che avviene e non di qualcosa che manca. Un avvertimento e non solo una manchevolezza. Il segnale di un malessere cognitivo, come dicono gli Autori.

Siamo di fronte a un cambio di prospettiva di incredibile potenza. L'attenzione – e l'intenzione – si sposta dal voler colmare ciò che (l'insegnante) identifica come

le conoscenze mancanti, al voler individuare e caratterizzare, anche in termini di conoscenza, ciò che sta accadendo all'allievo (e in aula). La forza motrice di tale spostamento è la capacità di mettersi in discussione – processo tutt'altro che facile e spontaneo. Gli innumerevoli esempi concreti che gli Autori presentano e commentano, accompagnano il lettore nel passaggio dall'uno all'altro punto di vista. È un cambio di prospettiva che può ispirare, tanto da far rendere conto di non poter – e non voler – più tornare indietro; se non per rileggere daccapo il libro.

Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica riesce a dare voce ad aspetti cruciali per il processo di insegnamento-apprendimento della matematica e trasmette un grande senso di umiltà e di rispetto per la complessità del tema trattato e per le persone coinvolte. Si prova rispetto per l'allievo che in un percorso di apprendimento significativo dovrà mettersi in gioco, assumersi responsabilità, acquisire consapevolezza, vivere conflitti cognitivi, esternare, difendere e mettere in discussione le proprie idee. Si prova rispetto per l'insegnante che, nell'esercitare la sua difficile e delicata professione, dovrà coraggiosamente essere pronto a mettersi in discussione in ogni istante con l'intelligenza e la professionalità che gli sono proprie. Si prova rispetto per la matematica, dietro la quale ci sono secoli di storia e i contributi di centinaia di persone che – ciascuna nel proprio contesto storico-culturale – con grande coraggio, e a volte anche con grande fatica, hanno portato avanti le proprie idee. Si prova rispetto per il ricercatore in didattica della matematica che, in questa dimensione così complessa, cerca di delineare con rigore scientifico i contorni del processo di insegnamento-apprendimento accogliendone e mostrandone tutta la complessità.

Per comprendere dunque il senso dell'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica*, il volume ci mostra come ciascuno di tali elementi vada considerato opportunamente in tutte le sue declinazioni e, sin dai primi paragrafi, ciò viene fatto con cura, dedizione, profondità e ricchezza di esempi.

Gli Autori, nella Premessa, si rivolgono al lettore-insegnante per il quale, di certo, il libro è uno strumento di crescita personale e professionale perché vi troverà informazioni e riferimenti essenziali per accogliere adeguatamente la complessità del tema trattato. Tuttavia, consiglio questo testo anche a molte altre categorie di lettori: il ricercatore in didattica della matematica, lo psicologo che si occupa di processi di apprendimento, l'educatore, l'editore, il politico, il genitore. In generale, consiglieri la lettura di questo libro a chiunque nell'ambito della noosfera voglia ampliare il proprio punto di vista accogliendo una visione olistica di ciò che riguarda l'insegnamento-apprendimento in matematica.

Agnese Del Zozzo

Facoltà di Scienze della Formazione
Libera Università di Bolzano, Italia

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). *Zero*. Bologna: Pitagora.

Zero, forse il più misterioso dei numeri, riveste un interesse speciale in molti ambiti. Senza dubbio è un oggetto matematicamente interessante ed è uno dei pilastri della cultura matematica internazionale, che lo sfrutta pesantemente nella scrittura di numeri in notazione posizionale. Quest'ultima è stata probabilmente uno dei fattori

del progresso delle scienze, consentendo notazioni comode e algoritmi di grande efficacia. Parimenti cruciale è il suo ruolo nella storia della matematica, costituendo un percorso interculturale che riunisce quasi tutto il mondo.

E che dire delle difficoltà causate dallo zero nella didattica?

Gli autori di questo libro, tra i maggiori esperti di ognuno dei campi citati, seguono il filo offerto dallo zero per un viaggio che li attraversa, mostrandocene le fondamenta. In questo percorso trovano posto anche alcuni temi che sono in realtà, per moltissimi, dei dubbi dimenticati dall'infanzia: perché $a^0 = 1$? Perché non si può nemmeno scrivere sensatamente $a/0$? Perché la moltiplicazione di due interi negativi dà un intero positivo? Spesso è solo una coltre di abitudine e di rimozione a non farcene più stupire, anche quando, insegnanti, incontriamo la viva curiosità dei giovani allievi. Ecco che in questo libro l'insegnante trova strumenti necessari ad approfondire il suo lavoro, mentre lo studioso trova rigore epistemologico e storico, e il generico lettore curioso trova mille stimoli.

Tutti possono leggerlo anche in ragione dell'estrema semplicità e linearità dei ragionamenti: quando il discorso diviene troppo complesso o richiede troppi termini tecnici, gli Autori lo abbandonano dicendo «Noi qui ci fermiamo» e indicano riferimenti bibliografici per approfondire.

Ma a dispetto di tale semplicità di forme, il libro approfondisce temi complessi. Zero, le sue proprietà in alcuni dei diversi insiemi cui appartiene, le ragioni logiche e storiche della sua presenza divengono pretesti per esaminare gli aspetti più interessanti delle strutture che tali insiemi costituiscono con le operazioni cui intuitivamente ci crediamo legittimati a dotarli.

Una particolare attenzione viene dedicata alla motivazione di notazioni che sono ormai familiari a tutti e che, nella loro ovvietà apparente, creano poi conflitti cognitivi ed errori. Di errori tipici e significativi si affronta una lista lunghissima. Nella pratica scolastica diffusa, purtroppo, i provvedimenti adottati contro essi si riconducono spesso alla ripetizione schematica e chiara di regole: "si fa così". In questo libro molte di queste "regole" vengono riesumate, scrollando gli strati di abitudine sotto cui li abbiamo sepolti dopo anni di pratica, rivelando la loro natura stupefacente di proposizioni matematiche o di soluzioni a problemi logici e concreti.

A fornire ulteriori motivazioni per oggetti e prassi che siamo abituati a usare, concorre anche la sezione storica. Zero percorre, in modo talora implicito, gran parte della storia delle più importanti civiltà. Una rassegna ricchissima delle sue interpretazioni matematiche e filosofiche viene qui estesa anche alle parole con cui zero viene indicato, con le loro connotazioni che le ricollegano ai contesti storici e sociali, e dunque al ruolo dello zero in culture e comunità del passato e del presente. Da artificio e strumento tecnico, zero prende il suo posto cruciale tra i numeri veri e propri in un processo che talora si ripete in diversi contesti storici.

Zero è un numero critico in campo didattico, ed ecco che gli autori forniscono qui un arsenale di strumenti teorici che ne inquadrano il ruolo nelle concettualizzazioni degli allievi. Ma si passa subito alla pratica, con l'esame di alcune registrazioni di colloqui individuali e interviste collettive a bambini di scuola dell'infanzia e primaria sullo zero. Il capitolo conclusivo riconduce tutto il materiale precedente ai principali elementi della didattica della matematica.

Su diversi piani quest'opera costituisce una lettura estremamente significativa in special modo per gli insegnanti.

Giovanni Giuseppe Nicosia

Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica di Bologna, Italia