Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 08

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio comunicazione
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Impaginazione:
Luca Belfiore

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica della matematica

08

Novembre 2020

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), I - II, DOI: 10.33683/ddm.20.8.0
OPEN ACCESS

Editoriale

L'ottavo numero della rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, il secondo di questo "faticoso" anno 2020, porta con sé delle novità che speriamo siano gradite ai nostri lettori. Innanzitutto, a partire da questa uscita, la rivista migra su una piattaforma online diversa da Wordpress, utilizzato fino ad ora. Dopo diversi mesi dedicati al processo di passaggio, tutti i contenuti sono stati implementati all'interno della piattaforma Open Journal System (OJS). I motivi per cui abbiamo ritenuto opportuno effettuare la migrazione sono diversi. In primo luogo, tramite OJS i vari contributi della rivista saranno indicizzati automaticamente dai motori di ricerca; questo comporta maggiore visibilità, soprattutto in relazione a contesti internazionali, e dunque maggiore rintracciabilità dei contributi. In secondo luogo, la piattaforma OJS consente di attivare procedure di sottomissione degli articoli automatizzate; in questo modo, tutto il processo di sottomissione e referaggio ne guadagnerà in tracciabilità e operatività. Il passaggio a OJS ha inoltre spinto il comitato redazionale a rivedere il layout del sito web, degli articoli e degli allegati migliorandoli dal punto di vista della fruibilità e della reperibilità delle informazioni. Oltre a questo aspetto, tra le novità previste per la parte *Riflessione e ricerca* vi è la possibilità per ogni numero di pubblicare un articolo anche nella lingua originale di provenienza, non per forza l'inglese, e per quanto concerne le *Esperienze didattiche* abbiamo previsto, quando possibile, di inserire gli allegati in un formato modificabile così da essere maggiormente spendibili per i docenti.

Nella sezione *Riflessione e ricerca* sono come sempre presenti tre articoli. In questo numero il primo contributo verte sul tema dell'argomentazione riflessiva (*reflective argumentation*) come strumento a supporto dei processi di valutazione formativa. Nell'articolo vengono proposte alcune riflessioni sul ruolo che il docente svolge nell'implementare pratiche mirate a valorizzare i processi argomentativi degli studenti; tali riflessioni si basano sull'analisi di stralci di discussione tratti da una sperimentazione condotta dall'autrice in una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado in Italia,[1] e mettono in luce gli interventi chiave che il docente può proporre per stimolare processi di argomentazione riflessiva e attivare specifiche strategie di valutazione formativa. Il secondo contributo propone una serie di lenti, teoriche e operative, con le quali l'autore guarda al pensiero logico-matematico e alle competenze necessarie per operare con il sistema di numerazione decimale posizionale. Dopo aver intrecciato diversi quadri teorici fra loro, l'autore presenta l'idea di "rituale-aperitivo", ovvero di un'esperienza ripetibile incentrata sul gioco di ruolo, l'apprendimento attraverso la pratica e la ricerca in classe; ne fornisce infine un esempio specifico sui temi aritmetici, relativi al sistema di numerazione decimale posizionale: un'aritmetica ludica, esplorativa e parzialmente guidata. Il terzo contributo espone e analizza i risultati del progetto di ricerca-azione "Evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento", progetto triennale che si è focalizzato sull'analisi dell'evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento da parte di futuri insegnanti di scuola elementare in Canton Ticino. Il punto di partenza del contributo è un fatto oramai assodato: la formazione dei futuri docenti di scuola elementare in didattica della matematica è fortemente influenzata da fattori affettivi, che spesso sono legati a esperienze scolastiche negative vissute con la matematica. A partire da questo assunto, gli autori hanno da un lato progettato e implementato

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

pratiche formative per lo sviluppo di atteggiamenti positivi, dall'altro hanno monitorato e studiato l'evoluzione di tali atteggiamenti nell'arco dei primi due anni della formazione.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro contributi, riferiti alla scuola obbligatoria e post-obbligatoria. Nel primo contributo si presentano e analizzano due esperienze didattiche rivolte alle classi IV e V primaria,[2] incentrate su argomenti matematici solitamente poco trattati in questo livello scolastico: l'interpretazione di dati e le loro rappresentazioni grafiche. Le esperienze presentate nell'articolo si inseriscono in un percorso più ampio, il cui intento principale era di contribuire alla formazione di cittadini consapevoli, capaci di utilizzare strumenti scientifici per interpretare le informazioni a loro disposizione e di prendere decisioni fondate. Il secondo contributo riguarda invece temi geometrici, approcciati con l'ausilio della tecnica dell'origami. L'autore illustra un percorso di geometria dell'origami parzialmente realizzato con alunni di diverse classi prime di una scuola secondaria di secondo grado in Italia;[3] il percorso ha lo scopo di favorire una riflessione sull'assiomatica della geometria e sui suoi risvolti ontologici: vengono descritte le fasi e le varie attività attuabili, commentando e approfondendo il tutto con indicazioni di possibili sviluppi. Il terzo contributo riguarda invece la scuola secondaria di primo grado italiana e si focalizza sul ruolo della metacognizione nel problem solving. Dopo aver evidenziato come le difficoltà incontrate dagli studenti nel problem solving coinvolgano necessariamente il tema della metacognizione, le autrici descrivono un percorso di apprendimento rivolto ad alunni di classe terza, grazie al quale si è riusciti a potenziare gli aspetti metacognitivi coinvolti nel processo di risoluzione di problemi da parte degli alunni. Infine, nel quarto contributo si ritorna nuovamente in una scuola primaria italiana con il tema della geometria piana. L'articolo descrive un'esperienza didattica realizzata in una classe quinta, il cui scopo era permettere agli alunni di attivare le loro potenzialità cognitive nell'affrontare situazioni geometriche in cui veniva richiesto loro di pianificare strategie di calcolo di aree non note di figure geometriche. Le consegne delle attività hanno messo in evidenza quanto sia stretto il rapporto fra il linguaggio e gli aspetti iconici e figurali e come questo possa essere discusso con gli studenti.

Nel ringraziare tutti gli autori che, con il loro impegno, la loro dedizione e la loro competenza, hanno scritto gli articoli presenti in questo numero, è importante in questa occasione ricordare anche coloro che hanno reso concretamente possibile il passaggio della rivista nella sua nuova forma digitale. In particolare, i membri del gruppo di redazione facenti parte del Centro competenze didattica della matematica che si sono occupati attivamente dei diversi aspetti di tale passaggio; il responsabile della ricerca SUPSI Giambattista Ravano per il contributo finanziario; il Direttore del DFA Alberto Piatti per il sostegno costante; il responsabile delle Riviste della Firenze University Press Alessandro Pierno per la preziosa e indispensabile guida; il Servizio comunicazione del DFA, in particolare la responsabile Claudia Di Lecce e la grafica Jessica Gallarate; il tecnico informatico SUPSI Domenico Zecchinelli per aver risolto tutti i problemi tecnici di implementazione.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
3. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), III - IV, DOI: 10.33683/ddm.20.8.0

Editorial

The eighth issue of the journal *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula,* the second of this "hard" year 2020, brings with it some news that we hope our readers will appreciate. First of all, starting from this issue, the journal migrates to an online platform other than Wordpress, which has been used until now. After several months dedicated to the transition process, all content was implemented within the Open Journal System (OJS) platform. There are several reasons why we considered it appropriate to carry out the migration. First of all, through OJS the various contributions of the journal will be automatically indexed by search engines; this implies greater visibility, especially in relation to international contexts, and therefore greater tracking of contributions. Secondly, the OJS platform allows us to activate automated submission procedures for articles; in this way, the entire submission and review process will gain in traceability and operativeness. The transition to OJS also prompted the editorial board to review the layout of the website, articles and attachments, improving them from the point of view of usability and availability of information. In addition to this aspect, among the novelties foreseen for the section *Riflessione e ricerca* there is the possibility for each issue to publish an article also in the author's original language, not necessarily English, and as far as *Esperienze didattiche* are concerned we have foreseen, when possible, to insert the attachments in a editable format so as to be more expendable for teachers.

In the *Riflessione e ricerca* section there are as always three articles. In this issue, the first contribution focuses on reflective argumentation as a tool to support formative assessment processes. The article proposes some reflections on the role that the teacher plays in implementing practices aimed at enhancing students' argumentative processes; these reflections are based on the analysis of discussion excerpts taken from a teaching experiment conducted by the author in a grade 7 class of a lower secondary school in Italy,[1] and highlight the key interventions that the teacher can propose to stimulate reflective argumentation processes and activate specific formative assessment strategies. The second contribution proposes a series of theoretical and operational lenses, with which the author looks at logical-mathematical thinking and the skills necessary to operate with the positional decimal numbering system. After interweaving different theoretical frameworks, the author presents the idea of "ritual-aperitif", i.e. a repeatable experience centered on role-play, learning through practice and research in the classroom; finally, he gives a specific example on arithmetic themes, related to the positional decimal numbering system: a playful, exploratory and partially guided arithmetic. The third contribution presents and analyses the results of the research-action project "*Evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento*", a three-year project that focused on the analysis of the evolution of attitudes towards mathematics and its teaching by future primary school teachers in Canton Ticino. The starting point of the contribution is a well-established fact: the training of future primary school teachers in mathematics education is strongly influenced by affective factors, which are often linked to negative school experiences with mathematics. Based on this assumption, the authors have on the one hand designed and implemented training practices for the development of positive attitudes, and on the other hand have monitored and studied the evolution of these attitudes during the first two years of training.

1. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.

In the section *Esperienze didattiche* there are four contributions, referring to compulsory and post-compulsory school. In the first contribution we present and analyze two didactic experiences aimed at grade 4 and 5 classes of primary school,[2] focusing on mathematical topics usually little explored at this school level: the interpretation of data and their graphic representations. The experiences presented in the article are part of a broader process, whose main aim was to contribute to the development of aware citizens who are able to use scientific tools to interpret the information available to them and to make well-founded decisions. The second contribution concerns geometric themes, approached with the help of the origami technique. The author illustrates a didactic path of geometry of origami partially realized with pupils of several grade 9 classes of a upper secondary school in Italy;[3] the path aims to encourage a reflection on the axiomatics of geometry and its ontological implications: the phases and the various activities that can be carried out are described, commenting and deepening everything with indications of possible developments. The third contribution concerns the Italian lower secondary school and focuses on the role of metacognition in problem solving. After highlighting how the difficulties encountered by the students in problem solving necessarily involve the theme of metacognition, the authors describe a learning path aimed at grade 8 students, thanks to which it was possible to strengthen the metacognitive aspects involved in the problem solving's process by the students. Finally, in the fourth contribution we come back to an Italian primary school with the theme of plane geometry. The article describes a teaching experience carried out in a grade 5 class, whose aim was to enable pupils to activate their cognitive potential in facing geometric situations where they were asked to plan strategies for calculating unknown areas of geometric figures. The tasks highlighted how close the relationship between language and iconic and figurative aspects is and how this can be discussed with the students.

In thanking all the authors who, with their commitment, dedication and expertise, have written the articles in this issue, it is important on this occasion to remember also those who have allowed the journal to migrate to its new digital form. In particular, the members of the editorial team belonging to the *Centro competenze didattica della matematica* who have been actively involved in the various aspects of this transition; SUPSI Research Manager Giambattista Ravano for the financial contribution; DFA Director Alberto Piatti for the constant support; Head of the Firenze University Press Journals Alessandro Pierno for the precious and indispensable guide; *Servizio comunicazione* DFA, in particular the Head Claudia Di Lecce and graphic designer Jessica Gallarate; SUPSI informatic technician Domenico Zecchinelli for solving all technical implementation problems.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

2. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.
3. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 9 - 27, DOI: 10.33683/ddm.20.8.1 OPEN ACCESS

L'argomentazione riflessiva come strumento a supporto dei processi di valutazione formativa: il ruolo fondamentale del docente

Reflective argumentation as a tool to support formative assessment processes: the key-role of the teacher

Annalisa Cusi
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma – Italia

✉ annalisa.cusi@uniroma1.it

Sunto / In questo articolo vengono proposte alcune riflessioni sul ruolo che il docente svolge nell'implementare pratiche mirate a valorizzare i processi di argomentazione riflessiva a supporto della valutazione formativa in matematica. Mediante l'analisi di alcuni stralci di discussione, tratti da una sperimentazione condotta in una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado, si mettono in luce gli interventi chiave che il docente può proporre per stimolare processi di argomentazione riflessiva e attivare specifiche strategie di valutazione formativa.

Parole chiave: valutazione formativa; argomentazione riflessiva; discussioni di classe; ruolo dell'insegnante.

Abstract / This paper proposes some reflections on the role played by the teacher in implementing teaching practices aimed at promoting processes of reflective argumentation as a support for formative assessment in Mathematics. Through the analysis of some excerpts from a classroom discussion realized during a teaching experiment with lower secondary school students (grade 7), the teacher's key-interventions are highlighted, focusing on their role in stimulating reflective argumentation and in fostering the activation of specific formative assessment strategies.

Keywords: formative assessment; reflective argumentation; classroom discussions; role of the teacher.

1 Introduzione

In questo articolo si focalizzerà l'attenzione sui processi di valutazione formativa, riflettendo sul ruolo chiave che gli approcci che caratterizzano quella che Hoffmann (2016) definisce argomentazione riflessiva (*reflective argumentation*) possono svolgere nel favorire l'attivazione di specifiche strategie per la valutazione formativa (Black & Wiliam, 2009). In particolare, attraverso l'analisi di alcuni stralci tratti da una discussione condotta nell'ambito di una sperimentazione, si rifletterà su quali interventi del docente possano risultare maggiormente efficaci nel supportare la creazione di un contesto di insegnamento-apprendimento nel quale si sviluppino ricchi processi di argomentazione riflessiva e si attivino molteplici strategie di valutazione formativa.

2 Inquadramento teorico

In questo paragrafo vengono presentati gli aspetti teorici che fanno da sfondo alla ricerca oggetto di questo articolo:

1. la valutazione formativa in matematica, che permette di caratterizzare la metodologia didattica adottata durante la sperimentazione;
2. l'idea di *reflective argumentation*, inserita nel più ampio quadro riguardante i processi argomentativi in matematica;
3. il costrutto M-CA_{CE} (acronimo per "Modello di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci"), che consente di caratterizzare i ruoli attivati consapevolmente dall'insegnante durante le discussioni di classe.

Tali elementi forniscono anche le lenti teoriche per l'analisi dei dati raccolti durante la sperimentazione.

2.1 La valutazione formativa in matematica

Il ruolo formativo dei processi di valutazione nell'ambito dell'insegnamento-apprendimento della matematica – e dell'educazione scientifica più in generale – è stato valorizzato, in particolare nell'ultimo decennio, grazie alla realizzazione di diversi progetti di ricerca a livello internazionale (tra gli altri, si segnalano Bernholt, Ronnebeck, Ropohl, Koller & Parchmann, 2013; Cusi, Morselli & Sabena, 2017a; Ferretti, Paraskevi & Vannini, 2018).
Secondo Black e Wiliam (2009), la pratica didattica è "formativa" nel momento in cui

> «[…] elementi di evidenza relativi all'apprendimento degli studenti vengono raccolti, interpretati ed utilizzati da insegnanti, studenti e loro pari, per prendere decisioni sui passi successivi nel processo di istruzione, che possano essere migliori o meglio fondate, rispetto alle decisioni prese in assenza di tali elementi di evidenza».
>
> (Black & Wiliam, 2009, p. 7; traduzione dell'autrice)

Questa definizione mette in evidenza diversi aspetti della valutazione formativa, che si configura come vero e proprio metodo di insegnamento:

1. la valutazione formativa non si limita al momento della prova (scritta o orale), ma riguarda qualsiasi attività realizzabile nell'ambito dei processi di insegnamento-apprendimento;
2. l'insegnante non è il solo responsabile della realizzazione dei processi di valutazione formativa, poiché anche i singoli studenti e i loro pari sono protagonisti di tali processi;
3. le decisioni prese dai diversi attori coinvolti nei processi di valutazione formativa si basano sulle evidenze raccolte grazie a tali processi e ne rappresentano il principale obiettivo.

Nel caratterizzare le pratiche di valutazione formativa, Black e Wiliam (2009) identificano cinque strategie chiave, attivate dai diversi protagonisti del processo di valutazione (insegnante, studente e suoi pari):
Strategia 1. Chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di valutazione (strategia attivata sia dall'insegnante, che dal singolo studente, che dai suoi pari);
Strategia 2. Progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti (strategia attivata dall'insegnante);

Strategia 3. Fornire feedback che consentano allo studente di migliorare (strategia attivata sia dall'insegnante che dai pari);
Strategia 4. Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri (strategia attivata sia dall'insegnante, che dai pari);
Strategia 5. Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento (strategia attivata sia dall'insegnante, che dal singolo studente).
Fornire feedback rappresenta, in particolare, un aspetto centrale nell'ambito dei processi di valutazione formativa, poiché consente agli studenti di diventare maggiormente consapevoli degli obiettivi dei percorsi di insegnamento-apprendimento nei quali sono coinvolti, di monitorare i propri progressi verso tali obiettivi e di capire quali strategie attivare per superare le proprie difficoltà e progredire verso gli obiettivi prefissati.
Nell'ambito del progetto FaSMEd (Cusi, Morselli & Sabena, 2017a, 2017b), è stata messa in luce l'incidenza dei fattori metacognitivi sui processi di valutazione formativa, mostrando l'efficacia di attività mirate a rendere visibile il pensiero degli studenti (Collins, Brown & Newmann, 1989), attraverso la condivisione dei processi di pensiero con l'insegnante e con i compagni, e a stimolare una continua riflessione su tali processi. In particolare, è stato evidenziato come la progettazione di attività ad alto contenuto argomentativo, focalizzate sulla richiesta costante di motivare le risposte fornite, possa stimolare l'attivazione di processi metacognitivi, favorendo, da un lato, lo sviluppo di maggiori consapevolezze da parte degli studenti circa i propri processi di ragionamento, e, dall'altro, l'esplicitazione e conseguente condivisione dei loro processi di pensiero.
In questo modo, gli studenti hanno l'opportunità di sviluppare la capacità di riflettere approfonditamente sul proprio modo di affrontare le attività nelle quali sono coinvolti, divenendo così maggiormente responsabili del proprio apprendimento. Contemporaneamente, questo approccio fa sì che gli studenti sviluppino un maggior senso critico, cosa che permette loro di confrontarsi efficacemente con altri modi di ragionare e di affrontare le attività e i problemi matematici.
Il ruolo dell'argomentazione come strumento per supportare la valutazione formativa, attraverso l'attivazione di processi riflessivi a livello metacognitivo, viene approfondito nel prossimo paragrafo.
Nell'ambito del progetto FaSMEd è stato, inoltre, studiato il ruolo dell'argomentazione come oggetto dei processi di valutazione formativa. In particolare, è stata evidenziata l'importanza di esplicitare e condividere con gli studenti alcuni criteri per valutare le argomentazioni da essi costruite (Cusi, Morselli & Sabena, 2017b). Il primo criterio, quello della *correttezza*, focalizza l'attenzione sulla presenza o meno di errori di tipo matematico nella risposta costruita dagli studenti e nella giustificazione da essi fornita. Il secondo criterio, quello della *chiarezza*, pone l'accento sulla comprensibilità della risposta da parte di un interlocutore (i compagni, l'insegnante), evidenziando l'importanza del piano comunicativo. Il terzo criterio riguarda la *completezza* della risposta e richiede di verificare se i vari passaggi che conducono alla conclusione dell'argomento proposto sono stati esplicitati, facendo riferimento alle conoscenze matematiche coinvolte.

2.2 Il ruolo chiave dell'argomentazione riflessiva

Il ruolo cruciale dello sviluppo di competenze argomentative come parte fondamentale per lo sviluppo del pensiero matematico è stato il focus di diversi progetti di ricerca e formazione, come il progetto "Comunicazione e apprendimento" di Radford e Demers (2006), i progetti "Bambini Maestri Realtà" e "Linguaggio e argomentazione" del DIMA-Università degli Studi di Genova[1] e il progetto Avimes-Piemonte (De Luca, Demartini, Migliano, Savioli, Serratore & Vio, 2008).

1. Alcuni dei materiali progettati ed implementati nell'ambito di questo progetto sono reperibili al link http://pls.dima.unige.it/azione1/argomentazione/azione1_argomentazione.php.

L'idea che lo sviluppo di competenze argomentative supporti anche quello del pensiero matematico è in linea con l'idea di *reflective argumentation* introdotta da Hoffman (2016), che evidenzia come l'argomentazione possa rappresentare uno strumento per stimolare la riflessione sul proprio modo di ragionare, consentendo l'identificazione di punti deboli e punti di forza dei ragionamenti sviluppati, e una conseguente riformulazione delle idee e delle strategie alla base di tali ragionamenti.
Hoffmann definisce l'argomentazione riflessiva come:

> «[…] un processo in cui la costruzione di argomenti viene utilizzata, intenzionalmente o non intenzionalmente, per stimolare uno o più dei seguenti processi: la riflessione sulla qualità dei propri argomenti; la riflessione sulla qualità del proprio modo di ragionare (il processo e il suo contenuto); l'identificazione di motivazioni per migliorare la qualità dei propri argomenti e ragionamenti; la ricerca creativa di modi per realizzare questo miglioramento; o la realizzazione di un cambiamento di prospettiva su uno di questi aspetti».
>
> (Hoffmann, 2016, p. 368, traduzione dell'autrice)

Hoffmann osserva che questo processo di riflessione è intenzionale quando l'obiettivo esplicito della costruzione di un argomento è quello di stimolare la riflessione su di sé. Tale processo è, invece, non intenzionale quando un argomento viene costruito o ricostruito per altri scopi, come ad esempio per convincere qualcuno, ma i processi indicati nella definizione vengono comunque stimolati. A volte la riflessione su di sé può essere stimolata anche dall'ascolto di argomentazioni prodotte da altri; questo capita quando colui che propone un argomento sa coinvolgere gli ascoltatori in un confronto collaborativo, in modo che essi riescano a mettere in relazione il ragionamento proposto con il proprio.
Hoffmann suggerisce tre diversi approcci attraverso i quali favorire l'attivazione di processi di argomentazione riflessiva. Il primo approccio, detto *approccio semiotico*, consiste nel concentrarsi su una rappresentazione delle proprie argomentazioni e valutare la qualità di queste mediante standard consolidati di buon ragionamento. Hoffmann afferma che esiste una condizione preliminare per l'argomentazione riflessiva, ovvero la possibilità di rappresentare le argomentazioni. Secondo Hoffmann, la riflessione è, infatti, possibile solo se guardiamo qualcosa, dove il termine "guardare" è inteso in senso metaforico, in quanto possiamo anche riflettere su un argomento attraverso l'ascolto.
Il secondo approccio, definito da Hoffmann *approccio sociale*, si concentra sulle argomentazioni, intese come dialoghi ragionati o le "controversie" tra individui. L'idea di base è che interagire con qualcuno che si oppone al proprio ragionamento, o che propone un ragionamento diverso, stimoli la riflessione su di esso e favorisca l'acquisizione di nuove prospettive sul tema oggetto di discussione.
Questo approccio all'argomentazione riflessiva è in linea con l'idea di argomentazione condivisa dalla comunità di ricercatori in didattica della matematica. Stylianides, Bieda e Morselli (2016), ad esempio, sottolineano il carattere sociale dell'argomentazione, definendola come «il discorso o i mezzi retorici (non necessariamente matematici) usati da un individuo o un gruppo per convincere gli altri che un'affermazione è vera o falsa» (Stylianides et al., 2016, p. 316, traduzione dell'autrice).
Anche la definizione proposta da Baker (2003) situa l'argomentazione all'interno di un contesto di discussione, mettendo in luce come tale contesto favorisca lo sviluppo e la condivisione di significati: «Vediamo l'interazione argomentativa fondamentalmente come un tipo di gioco dialogico o dialettico che si gioca e nasce dal terreno della risoluzione collaborativa dei problemi e che è associato alla creazione collettiva dei significati» (Baker, 2003, p. 48, traduzione dell'autrice).
Il terzo approccio proposto da Hoffmann, denominato *approccio guidato da modelli*, si basa sull'idea che sia possibile fornire "modelli di ragionamento" agli studenti, che possano rappresentare per loro un riferimento, sia per costruire argomentazioni o processi di ragionamento che, più in generale, per riflettere su di essi e sui contenuti oggetto delle argomentazioni stesse. Questa idea consente di introdurre il terzo ed ultimo elemento che compone il quadro teorico per questo articolo, spostando l'attenzione sul ruolo chiave che il docente può svolgere nel guidare i processi riflessivi che le attività argomentative possono stimolare.

2.3 Il docente come modello di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci

Le riflessioni proposte nel precedente paragrafo consentono di evidenziare l'importanza di un approccio alle discussioni di classe mirato a stimolare l'esplicitazione, da parte degli allievi, dei propri processi di pensiero, nell'ottica di "rendere visibile il pensiero" (Collins, Brown & Newmann, 1989), e di favorire l'attivazione e la condivisione di riflessioni e di processi metacognitivi. Questo suggerisce di focalizzare l'attenzione sul ruolo che il docente svolge nel progettare e gestire discussioni di classe mirate a stimolare questo tipo di processi.

Tale ruolo è stato oggetto di ricerche, che hanno consentito di delineare un costrutto teorico, quello di insegnante come Modello di Comportamenti ed Atteggiamenti Consapevoli ed Efficaci (in seguito, M-CA_{CE}), mirato ad identificare caratteristiche ed azioni che delineano il profilo di un docente che sa porsi come modello di ragionamento per i suoi studenti, stimolando allo stesso tempo riflessioni sul piano metacognitivo (Cusi & Malara, 2016; Cusi, 2017).

Il quadro che fa da sfondo a questo modello è costituito da tre principali componenti:

- le idee di Vygostkij (1978) circa l'importanza dell'interazione sociale nei processi di sviluppo del pensiero e della centralità del contributo dell'adulto o del compagno esperto nel favorire il superamento, da parte dell'allievo, del gap tra sviluppo potenziale e sviluppo attuale;
- le riflessioni di Leont'ev (1977) sul ruolo di attività svolte in contesti di socialità, non solo nel favorire la condivisione dei significati costruiti collettivamente, ma anche nel far sviluppare, da parte dell'individuo, il senso personale attribuito a tali attività e i motivi che favoriscono o meno lo sviluppo di una reale consapevolezza dei processi di apprendimento;
- il già citato modello dell'apprendistato cognitivo (Collins, Brown & Newmann, 1989), che sottolinea l'importanza di dare agli studenti l'opportunità di osservare, scoprire o inventare le strategie degli esperti nel contesto stesso in cui vengono attivate.

Nella seguente tabella (adattata da Cusi, 2017) sono sintetizzati i ruoli che caratterizzano l'approccio di un docente che si pone come M-CA_{CE}: i ruoli e la loro caratterizzazione compaiono nella prima colonna, mentre la seconda colonna contiene possibili indicatori per fare riferimento a tali ruoli nell'ambito dell'analisi di una discussione di classe.

I sette ruoli riassunti in **Tabella 1** possono essere raggruppati in due principali gruppi. I ruoli che appartengono al primo gruppo (*a*, *b*, *c*, *d*) si riferiscono a quei momenti delle discussioni di classe durante i quali il docente si pone, di fronte all'attività oggetto della discussione, non come semplice esperto, ma come *learner* e modello per gli studenti, esplicitando gli obiettivi nascosti, il senso delle strategie attivate, l'interpretazione dei risultati raggiunti.

I ruoli appartenenti al secondo gruppo (*e*, *f*, *g*) si riferiscono, invece, a quei momenti delle discussioni durante i quali il docente diventa un referente per la classe nel chiarire aspetti salienti a vari livelli e nello stimolare lo sviluppo di una reale consapevolezza del senso delle attività condotte e dei processi stessi di apprendimento.

Ruoli svolti da un docente che si pone come M-CA_{CE} e loro caratterizzazione	Indicatori per l'analisi dei ruoli
(a) Soggetto che indaga e parte integrante del gruppo classe L'insegnante cerca di stimolare nei suoi studenti un atteggiamento di ricerca nei confronti dei problemi da affrontare, chiedendo loro di fare proposte e dare suggerimenti su come procedere nell'affrontare l'attività.	Fa uso della prima persona plurale nel porre questioni mirate a chiarire che tipo di "attività di ricerca" il gruppo classe è chiamato a svolgere. Per far sì che tutti gli allievi si sentano coinvolti come gruppo nell'attività, l'insegnante accoglie le diverse proposte senza formulare giudizi.

(b) Guida operativa/strategica L'insegnante condivide, anziché trasmettere, le strategie che adotta e le conoscenze che attiva. Lo fa cercando di porsi, di fronte all'attività da affrontare, con un atteggiamento di ricerca, con l'obiettivo costante di condividere i processi di pensiero e le strategie da attivare.	Pone domande/fa affermazioni mirate a stimolare la ricerca e di strategie di approccio ad un problema da risolvere, oppure a chiarire come un esperto potrebbe porsi quando analizza tale problema: – *Che significato ha questa domanda?* – *Cosa ci viene richiesto di fare?* – *Cosa potrebbe essere utile trovare per rispondere a questa domanda?* – *Quali dati possono servirci?* – *È l'unico modo possibile di risolvere questo problema?*
(c) Attivatore di processi interpretativi L'insegnante stimola la corretta identificazione dei frame concettuali ai quali riferirsi per interpretare e trasformare le rappresentazioni che vengono costruite. Lo fa chiedendo agli allievi di interpretare le rappresentazioni costruite nel corso della discussione e di analizzare i risultati ottenuti, facendo esplicito riferimento al contesto introdotto dal problema che viene affrontato.	Pone domande mirate a chiarire i significati delle rappresentazioni che vengono costruite dagli allievi e a stimolare una continua interpretazione delle rappresentazioni e dei risultati che vengono via via ottenuti nel corso della risoluzione di un problema: – *Che significato ha questo simbolo/espressione/grafico?* – *Come possiamo rappresentare questa informazione?* – *Che interpretazione possiamo dare di questo risultato?* – *Questa soluzione è accettabile?*
(d) Attivatore di pensieri anticipatori L'insegnante stimola l'attivazione dei corretti pensieri anticipatori per poter prevedere la forma finale (o intermedia) di una o più rappresentazioni/espressioni costruite per risolvere un problema e le trasformazioni necessarie per raggiungerla, oppure gli approcci strategici più efficaci per affrontare il problema in esame. Lo fa esplicitando spesso gli obiettivi dell'attività che si sta affrontando o i sotto-obiettivi associati alla strategia attivata, in modo che tutti gli allievi condividano tali obiettivi e facciano riferimento ad essi per monitorare le strategie attivate.	Pone domande/fa affermazioni mirate a far focalizzare l'attenzione sull'obiettivo (o su specifici sotto-obiettivi) dell'attività che la classe sta affrontando o della strategia adottata, oppure a far esplorare ipotesi e a far identificare gli effetti di una possibile trasformazione operata o di una possibile strategia attivata: – *Qual è l'obiettivo?* – *Ricordate che l'obiettivo è…* – *In questo modo raggiungiamo l'obiettivo prefissato?* – *Che risultato ci aspettiamo di ottenere?* – *E se facessimo questa scelta, cosa potremmo ottenere?*
(e) Guida nel favorire un equilibrio armonico tra piano sintattico e piano semantico L'insegnante aiuta gli studenti a controllare la correttezza sintattica e il significato delle rappresentazioni che vengono costruite.	Pone domande/fa affermazioni mirate a far riflettere gli studenti sulla correttezza (o meno) delle trasformazioni che vengono eseguite sulle rappresentazioni costruite nel corso della risoluzione di un problema e su eventuali problematiche insorte in fase risolutiva, oppure a evidenziare le connessioni tra i processi che caratterizzano gli approcci adottati per risolvere il problema in esame e i corrispondenti significati: – *Questa trasformazione è corretta?* – *Perché hai eseguito questa trasformazione?* – *Come mai abbiamo ottenuto questo risultato?*
(f) Guida riflessiva L'insegnante stimola riflessioni sugli approcci efficaci adottati durante l'attività di classe in modo che gli studenti riescano ad identificare modelli strategici ai quali ispirarsi.	Pone domande/fa affermazioni mirate a far attivare processi argomentativi per esplicitare il senso di una efficace strategia attivata e a far sì che gli allievi identifichino tale strategia come possibile modello di approccio al problema. Lo fa chiedendo agli studenti di esplicitare i propri processi di pensiero o di interpretare quanto affermato da altri studenti, oppure riformulando egli stesso l'approccio proposto con l'obiettivo di sottolineare le ragioni sottese a tale approccio: – *Puoi spiegare ai tuoi compagni come hai ragionato per …?* – *C'è qualcuno che sa spiegare come ha ragionato …?* – *Marco ha ragionato in questo modo: "visto che voglio ottenere questo risultato, allora potrei …" (il docente parla in prima persona, ripetendo quanto detto dall'allievo).* – *È chiaro per tutti cos'ha detto Marco? Marco ha osservato che….* (il docente ripete quanto detto da un allievo servendosi della terza persona singolare). Nel caso di strategie non efficaci proposte da un allievo, il docente ripete quanto detto dall'allievo per far focalizzare l'attenzione degli altri studenti su aspetti problematici delle affermazioni proposte.

(g) Attivatore di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi L'insegnante stimola atteggiamenti metacognitivi, con focus sul controllo del senso globale dei processi attivati.	Pone domande mirate a far sì che gli allievi esplicitino il senso delle strategie che propongono e a favorire un confronto tra diversi processi di pensiero e strategie che vengono attivati e una riflessione sull'efficacia (o meno) di specifiche scelte strategiche: – *Come mai hai scelto questa rappresentazione?* – *Come mai la tua scelta è produttiva?* – *Cosa ne pensate della proposta di Marco?* – *Che differenze ci sono tra questa risposta e quest'altra? Che cos'hanno in comune?* – *Perché secondo voi questa strategia è efficace?*

Tabella 1. I ruoli svolti da un docente che si pone come M-CA_{CE} con relativi indicatori.

3 Contesto della ricerca: metodologia adottata e problema proposto

Nel prossimo paragrafo (par. 4) verranno analizzati alcuni stralci tratti da una discussione condotta in una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado,[2] composta da 15 studenti. Prima di procedere con l'analisi, si introdurrà il contesto della ricerca, descrivendo la metodologia didattica adottata e presentando il problema oggetto della discussione.

3.1 Metodologia didattica

In linea con quanto discusso nei paragrafi nei quali è stato introdotto il quadro teorico, la progettazione e l'implementazione dell'attività che viene presentata e analizzata in questo articolo traggono ispirazione da un approccio alla valutazione formativa caratterizzato da un focus sull'argomentazione (Cusi, Morselli & Sabena, 2017a, 2017b), nel senso di argomentazione riflessiva (Hoffmann, 2016).
Nella prima parte della lezione in esame (della durata di circa 2 ore), gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi (costituiti da 2 o 3 studenti) omogenei per competenze, lavorano su schede cartacee (si veda il par. 3.2). Il ricercatore è presente in aula, assieme al docente. Il docente e il ricercatore monitorano il lavoro dei gruppi, in modo da identificare possibili gruppi in difficoltà e fornire loro una scheda di aiuto (Cusi, Morselli & Sabena, 2017a, 2017c), che sarà presentata nel prossimo paragrafo. In questa fase di monitoraggio, docente e ricercatore hanno anche modo di identificare le risposte che potranno essere condivise e discusse nella seconda parte della lezione, ipotizzando come raggrupparle e ordinarle per rendere più ricca la riflessione collettiva.
Per favorire la condivisione, i protocolli scritti prodotti da ciascun gruppo vengono fotografati in formato digitale, raggruppati e ordinati all'interno di un file .doc e successivamente mostrati attraverso la LIM.

3.2 Il problema analizzato

Il problema che è stato affrontato dagli studenti nel corso dell'attività si situa nel contesto dell'*early algebra* e costituisce un adattamento del problema "Barriera corallina", tratto dall'unità ArAl "Successioni come funzioni" (Malara, Navarra & Sini, 2012).
Le schede di lavoro oggetto dell'attività analizzata in questo articolo fanno parte di una sequenza costituita da 4 schede di lavoro, corredate di schede di aiuto (Cusi, Morselli & Sabena, 2017c), che delineano un percorso denominato "Sea world"[3]. La prima scheda e una delle schede di aiuto pre-

2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
3. Tale sequenza è stata progettata assieme ad alcuni docenti che fanno parte di un gruppo di ricerca-azione che afferisce al Dipartimento di matematica dell'Università Sapienza di Roma. Si ringrazia, in particolare, Donatella Di Girolamo, che ha sperimentato l'attività nella sua classe.

disposte per supportare il lavoro degli studenti in difficoltà, entrambe oggetto della discussione che sarà analizzata nei prossimi paragrafi, sono presentate in Figura 1 e Figura 2.
Le schede hanno per oggetto lo studio di una particolare relazione funzionale che collega due progressioni aritmetiche che vengono messe a confronto: la progressione aritmetica dei naturali, che costituisce la sequenza dei numeri di casa delle stelle marine (si veda il diagramma in Figura 1), e un'altra progressione, costituita dai numeri pari a partire da 4, che rappresenta la sequenza dei numeri di casa dei granchi. La relazione che connette ogni elemento della prima progressione con il corrispondente elemento della seconda progressione è rappresentabile mediante un'espressione del tipo $y=ax+b$. Infatti, si può facilmente evidenziare che, se indichiamo con x il numero di casa di una stella marina e con y il numero di casa del granchio dirimpettaio, la relazione che lega x e y è rappresentabile mediante l'espressione $y=2x+2$ (o con un'espressione ad essa equivalente).
L'intera sequenza di schede prevede l'uso di diversi registri di rappresentazione (verbale, iconico, numerico-simbolico, grafico) e l'introduzione di diversi strumenti utili per supportare processi di generalizzazione: tabelle, grafici, diagrammi, espressioni numerico-simboliche ecc.

SEA WORLD

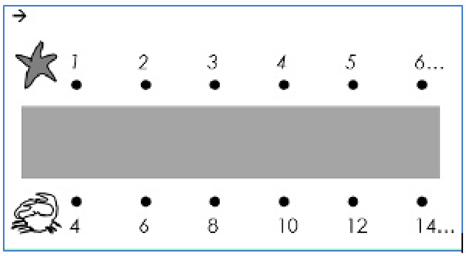
SCHEDA 1

Alcuni biologi hanno riprodotto una barriera corallina nel parco acquatico SEA WORLD.

Per attirare l'attenzione dei visitatori hanno creato dei ripari per le stelle marine e per i granchi in questo modo:

Le stelle marine abitano in casette numerate 1, 2, 3 e così via. Le casette dei granchi sono a loro volta numerate a cominciare da 4: 4,6,8,10: e così via. Ogni stella è dirimpettaia di un granchio.

Le rispettive case sono separate da una strada tracciata sul fondo della laguna dell'atollo.



I visitatori possono partecipare ad una gara che offre la possibilità di visitare gratuitamente un'attrazione del parco a chi risponde correttamente alla seguente domanda:

Che numero di casa ha il granchio dirimpettaio della stella nella **57ª posizione?**

Chi risponde alla domanda deve anche spiegare come ha ragionato, pena l'esclusione dalla gara.

Partecipa anche tu alla gara, rispondi alla domanda, spiegando come hai ragionato.

Figura 1. La prima scheda di lavoro del percorso didattico "Sea world".

In linea con l'approccio che ha ispirato il lavoro, il focus sui processi argomentativi è costante. Nella scheda 1 (Figura 1), ad esempio, viene fatta richiesta esplicita di condividere il ragionamento sviluppato per rispondere alla domanda, esplicitandolo nella propria risposta. L'ipotesi è che questa richiesta possa spingere gli studenti a non focalizzare l'attenzione soltanto sul prodotto di tale ragionamento (il numero corrispondente a 57 nella relazione, ovvero 116) e a costruire una rappresentazione che

consenta di esplicitare il processo che può condurre a tale prodotto, come, ad esempio, un'espressione verbale, numerica o simbolica, oppure un particolare diagramma che metta in evidenza come sono stati raccolti ed interpretati i dati con l'obiettivo di attivare processi di generalizzazione.
La scheda di aiuto 1A (**Figura 2**) introduce una tabella per raccogliere i dati presenti nel diagramma inserito nella scheda 1, determinando ulteriori coppie di numeri corrispondenti a partire da quelli noti, e suggerisce di focalizzare l'attenzione sulle due variabili che vengono messe in relazione.

AIUTO – SCHEDA 1A

Costruisci una tabella per raccogliere i dati relativi al numero delle casette dei granchi dirimpettai di ciascuna stella.

Numero delle casette delle stelle marine	Numero delle casette dei granchi
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Ora riesci a vedere che relazione c'è tra il numero delle casette delle stelle marine ed il corrispondente numero delle casette dei granchi?

Figura 2. La scheda di aiuto a supporto della prima scheda di lavoro del percorso "Sea world".

4 Analisi di alcuni stralci di discussione

Come anticipato in precedenza, in questo paragrafo si proporrà l'analisi di alcuni stralci tratti dalla discussione di classe focalizzata sulle risposte fornite, dagli studenti della classe seconda coinvolta nella sperimentazione, durante il loro lavoro sulle schede 1 e 1A, presentate nel precedente paragrafo.
L'obiettivo dell'analisi degli stralci di discussione, che è stata condotta dal ricercatore, è quello di evidenziare i ruoli che il docente può assumere nell'ambito di discussioni di classe mirate a realizzare processi di argomentazione riflessiva (Hoffmann, 2016) associati all'attivazione delle cinque specifiche strategie di valutazione formativa descritte nel **par. 2.1** (Black & Wiliam, 2009). Si cercherà, in particolare, di mettere in evidenza le connessioni tra i ruoli attivati (con riferimento al costrutto M-CA_{CE}), le strategie di valutazione formativa e i processi di argomentazione riflessiva.

4.1 Stralcio 1: focus sui criteri per far scaturire riflessioni su una risposta errata

Il primo stralcio si situa nella parte iniziale della discussione. Il ricercatore (indicato in seguito con la lettera R) decide di mostrare alla LIM una risposta che evidenzia una errata generalizzazione da parte del gruppo di studenti che l'ha prodotta (**Figura 3**). La discussione inizia con un intervento di R, che ha l'obiettivo di chiarire quale sarà il tipo di approccio all'analisi delle risposte degli studenti che caratterizzerà l'intera discussione.

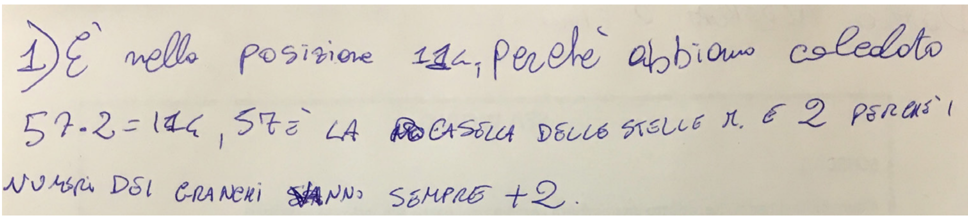

1) È nello posizione 114, perchè abbiamo calcolato 57·2=114, 57 è LA CASELLA DELLE STELLE N. E 2 PERCHÈ I NUMERI DEI GRANCHI STANNO SEMPRE +2.

Figura 3. La prima risposta proiettata durante la discussione.

1. R: «Obiettivo di questo lavoro non sarà solo trovare la risposta corretta, ma vedere come si può ragionare per trovarla e anche vedere qual è la spiegazione più completa. Se devo spiegare il mio ragionamento, devo poterlo far capire agli altri, quelli che leggono, quindi deve essere chiaro. Poi deve essere corretto, non ci devono essere errori. Poi dev'essere completo, cioè si deve capire bene tutto ciò che porta alla risposta. Mentre analizziamo le risposte, teniamo questa cosa in mente» [Alza la mano S1[4] per intervenire].

R introduce la discussione ponendosi come attivatore di *atteggiamenti riflessivi ed atti metacognitivi* (ruolo *g* del modello M-CA$_{CE}$). L'esplicitazione iniziale (intervento 1) dei criteri che guideranno l'analisi delle risposte (correttezza, chiarezza e completezza) è in sintonia con l'idea di Hoffmann di approccio all'attivazione di processi di argomentazione riflessiva *guidato da modelli*, visto che i tre criteri permettono di delineare un modello di riferimento al quale ispirarsi sia per analizzare le diverse risposte che sono state fornite, sia per costruire, nel corso delle successive attività, risposte corrette, chiare e complete.

2. S1: «Non si capisce bene il ragionamento…».
3. R: «Quindi per te non è tanto chiaro il ragionamento».
4. S1: «Sì, si capisce, ma non perfettamente. Poi il numero della casella del granchio non è giusto, secondo me».
5. R: «Quindi secondo te non è del tutto chiaro quello che hanno scritto. In più, secondo te c'è un errore cioè la risposta corretta non è 114. Vorrei sapere dagli altri cosa ne pensano. Siete d'accordo con lui?»
6. S2: «Per il fatto del ragionamento, ha ragione lui».
7. R: «Come ha ragionato questo gruppo?»
8. S3: «Questo gruppo ha fatto 57, che sarebbe il numero della stella, per 2, che sarebbe il numero della stella moltiplicato per ottenere il numero della casa del granchio. Hanno moltiplicato per 2. Avrebbero dovuto fare 58 per 2 perché praticamente…».
9. R: «Prima di correggere la risposta, vediamo cosa ne pensano gli altri. Quindi anche tu pensi che la risposta corretta non sia 57 per 2?»
10. S3: «Sì».

(…) [Altri studenti dichiarano di essere d'accordo con quanto osservato da S1 ed S3].

Negli interventi 3 e 5, nei quali esplicita i criteri ai quali i commenti dello studente S1 possono essere associati, R continua a porsi come a*ttivatore di atteggiamenti riflessivi ed atti metacognitivi* (ruolo *g* del modello M-CA$_{CE}$), con l'obiettivo di consolidare il modello delineato nell'intervento 1.
La condivisione di tali criteri, che corrisponde all'attivazione della *strategia 1 di valutazione formativa*, e la richiesta di fare riferimento ad essi per analizzare la risposta mostrata alla LIM fa sì che gli studenti

4. S1, S2, … indicano i diversi studenti che intervengono nel corso della discussione.

(interventi 2, 4, 8, 10) forniscano *feedback* agli autori della risposta (*strategia 3*), attivandosi come risorse per i compagni (*strategia 4*).

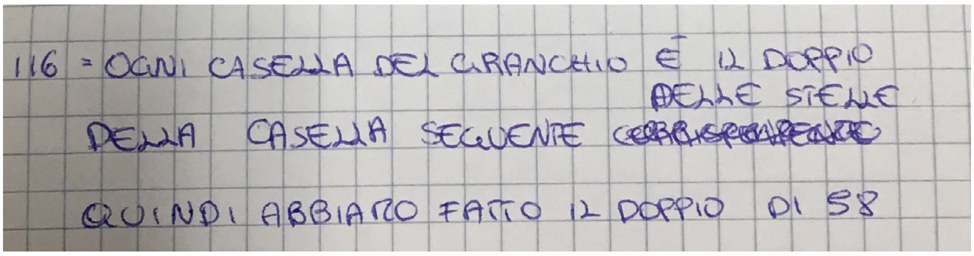
13. R: «Quando voglio verificare se una strategia è corretta oppure no, cosa posso fare?»
14. S4: «Possiamo fare il disegno e scrivere tutti i numeri».
15. S1: «È la stessa cosa che volevo dire io…cioè continuiamo la striscia dei numeri. Quelli della stella sarebbero 1, 2, 3, 4, … fino a 57. Quella dei granchi sarebbe 4, 6, 8, 10, 12 … fino al numero che sarebbe stato sotto a 57».
16. R: «Mi può bastare anche solo quello che c'è scritto lì [indica la scheda 1, proiettata alla LIM] per far vedere che la strategia di moltiplicare per 2 non è corretta?»
17. S5: «Loro hanno fatto 57 per 2. Ma allora, visto che 2 per 2 fa 4, al posto del 6 avrebbe dovuto esserci il 4».
(…) [R invita S5 ad avvicinarsi alla LIM per spiegare il proprio ragionamento facendo riferimento al diagramma presente nella scheda 1]
19. S5: «Se fare 57 per 2 fosse giusto, allora anche il 6 [indica il numero 6 nella successione dei numeri di casa delle stelle], moltiplicato per 2, dovrebbe dare questo risultato [indica il numero 14 presente, in corrispondenza del 6, nella successione dei numeri di casa dei granchi]. Ma è errato perché 6 per 2 fa 12, non 14. Quindi non è corretto fare per 2».

Quest’ultima parte del primo stralcio di discussione inizia con un intervento di R (intervento 13) mirato a fornire un feedback per supportare gli studenti nel monitoraggio del proprio lavoro. Ponendosi come *guida operativa/strategica* (ruolo *b* del modello M-CA_{CE}) e come *attivatore di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi* (ruolo *g* del modello M-CA_{CE}), infatti, R mira a far sì che gli studenti identifichino ed esplicitino possibili strategie di controllo dei processi attivati. In questo modo, le strategie proposte dagli studenti (interventi 14, 15, 17, 19) diventano il nuovo oggetto della discussione. In particolare, in linea con il modello dell’apprendistato cognitivo, S5 viene invitato a chiarire le proprie osservazioni facendo riferimento al diagramma presente nella scheda 1 e mostrato alla LIM. In questo modo vengono identificati controesempi che mettono in luce la non correttezza della relazione proposta nella risposta in Figura 3.

4.2 Stralcio 2: focus sul confronto tra risposte per stimolare l’esplicitazione dei possibili processi di generalizzazione

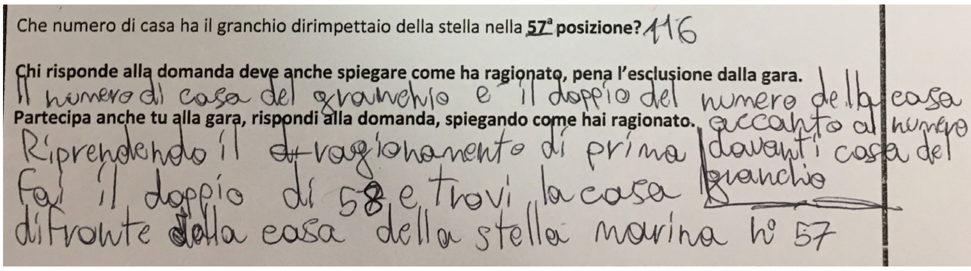
Poiché tutti i gruppi di studenti, ad eccezione di quello che ha prodotto la risposta in Figura 3, hanno identificato la risposta corretta alla prima domanda presente nella scheda 1, il focus della discussione si sposta sui processi di ragionamento che hanno condotto alle risposte corrette. Inizialmente viene proposta la risposta di un gruppo che ha semplicemente costruito l’intera successione dei numeri di casa delle stelle e dei corrispondenti numeri di casa dei granchi, come suggerito anche nei due interventi 14 e 15 del precedente stralcio. R guida la classe ad osservare che questo approccio risulta poco efficace perché non sarebbe attivabile nel caso in cui la domanda richiedesse di determinare il corrispondente di un numero molto grande.
Successivamente, R mostra alla LIM le risposte fornite da tre gruppi (Figura 4) che propongono la stessa rappresentazione della relazione che lega il numero di casa di una stella al corrispondente numero di casa del granchio dirimpettaio (in tutte e tre le risposte, infatti, si afferma che il corrispondente del numero di casa di una stella si ottiene moltiplicando per due il successivo del numero della stella). Nelle prime due risposte in Figura 4 (a e b), tale relazione è esplicitata soltanto a livello verbale, mentre nella terza risposta (c) viene proposto un diagramma (che verrà indicato in seguito con il termine rappresentazione sagittale) che mette in evidenza il fatto che ciascun numero della seconda progressione è il doppio del successivo del numero che gli corrisponde nella prima progressione.

A


116 = OGNI CASELLA DEL GRANCHIO È IL DOPPIO DELLE STELLE DELLA CASELLA SEGUENTE ~~CORRISPONDENTE~~

QUINDI ABBIAMO FATTO IL DOPPIO DI 58

B


Che numero di casa ha il granchio dirimpettaio della stella nella 57ª posizione? 116

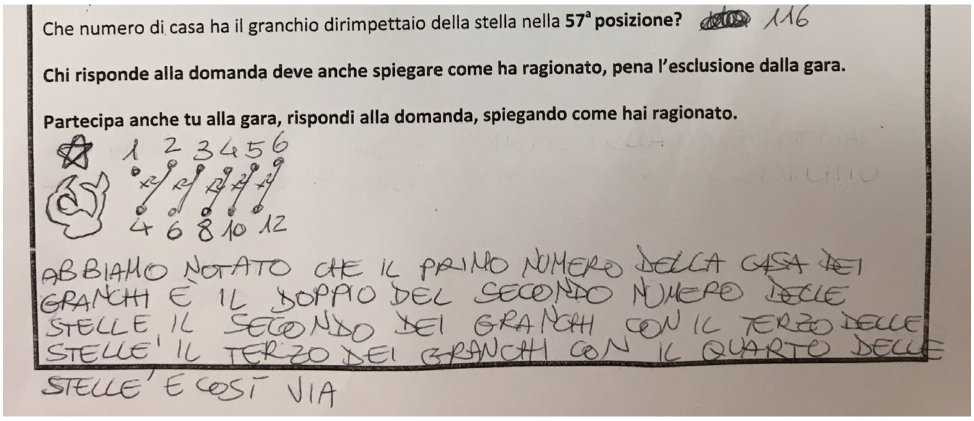
Chi risponde alla domanda deve anche spiegare come ha ragionato, pena l’esclusione dalla gara.

Il numero di casa del granchio è il doppio del numero della casa accanto al numero davanti casa del granchio

Partecipa anche tu alla gara, rispondi alla domanda, spiegando come hai ragionato.

Riprendendo il ragionamento di prima fai il doppio di 58 e trovi la casa difronte della casa della stella marina n° 57

C


Che numero di casa ha il granchio dirimpettaio della stella nella 57ª posizione? 116

Chi risponde alla domanda deve anche spiegare come ha ragionato, pena l’esclusione dalla gara.

Partecipa anche tu alla gara, rispondi alla domanda, spiegando come hai ragionato.

1 2 3 4 5 6

4 6 8 10 12

ABBIAMO NOTATO CHE IL PRIMO NUMERO DELLA CASA DEI GRANCHI È IL DOPPIO DEL SECONDO NUMERO DELLE STELLE IL SECONDO DEI GRANCHI CON IL TERZO DELLE STELLE IL TERZO DEI GRANCHI CON IL QUARTO DELLE STELLE E COSÌ VIA

Figura 4. Le tre risposte (a, b, c) che vengono messe a confronto nel secondo stralcio di discussione.

28. R: «Secondo voi perché le ho messe tutte nella stessa pagina?»
29. S6: «Secondo me perché sono simili. Il ragionamento è lo stesso».
30. R: «Che ragionamento è stato fatto per trovare la risposta?»
31. S6: «Che ogni casella del granchio è il doppio della casella avanti a quella corrispondente delle stelle».
32. R: «Vieni a ripetere questo ragionamento alla LIM. Quello che adesso hai detto a parole, ripetilo guardando il disegno».
33. S6: «I numeri sulla fila del granchio sono il doppio dei numeri della fila della stella marina, ma non di quella corrispondente, ma di quella avanti a quella corrispondente. Ad esempio, 4 è il doppio di 2, 6 è il doppio di 3, 8 è il doppio di 4… [Indica i vari numeri nel diagramma]».
34. R: «Se volessi riassumere il metodo usato da questi tre gruppi, che cosa potrei scrivere in simboli matematici?»

(…) [Al termine del momento di confronto, la classe concorda che l'espressione che meglio rappresenta il ragionamento proposto nelle prime tre risposte è (57+1)·2]

Il primo intervento di R (intervento 28) pone la questione ancora sul piano metacognitivo, visto che si pone come *attivatore di processi riflessivi e di atti metacognitivi* (ruolo *g* del modello M-CA_{CE}),

chiedendo agli studenti di identificare i criteri che hanno guidato la sua raccolta delle risposte. Leggere le tre risposte con l'obiettivo di ipotizzare le motivazioni alla base della scelta di inserirle nello stesso gruppo fa sì che gli studenti focalizzino l'attenzione sugli elementi comuni a tali risposte, identificando così la struttura che caratterizza il processo di generalizzazione sotteso. Questo situa l'approccio alla *reflective argumentation*, adottato da R in questo stralcio di discussione, in un ambito semiotico (secondo la terminologia di Hoffmann), visto che le rappresentazioni verbali e iconiche dei processi di ragionamento attivati dai gruppi di studenti che hanno fornito le tre risposte diventano il principale oggetto di analisi e riflessione. Il focus su un approccio semiotico è ancora più evidente nell'ultimo intervento di R inserito in questo stralcio (intervento 34). Infatti, R si pone da *attivatore di processi interpretativi* (ruolo *c* del modello M-CA_{CE}), stimolando gli studenti a costruire una nuova rappresentazione (numerico-simbolica) della relazione espressa nelle tre risposte. Questa richiesta ha l'obiettivo di supportare il confronto tra questa rappresentazione e quelle associabili ad altre risposte che successivamente verranno discusse, esplicitando gli elementi che caratterizzano i processi di generalizzazione attivati dai diversi gruppi e stimolando la ricerca delle ragioni alla base dell'equivalenza tra le diverse espressioni costruite nel corso della discussione.
Notiamo che anche in questo stralcio R svolge un importante ruolo mirato a far attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri (*strategia 4*), ovvero quello di guida riflessiva (ruolo *f* del modello M-CA_{CE}), poiché invita S6 (intervento 32) ad esplicitare le proprie osservazioni facendo riferimento al diagramma a disposizione, quindi appoggiandosi ad un'altra rappresentazione.

4.3 Stralcio 3: riflessioni meta sull'uso di specifici strumenti a supporto del ragionamento

Il terzo stralcio riguarda la fase della discussione in cui i gruppi che hanno utilizzato la scheda di aiuto 1A (Figura 2) vengono invitati a riflettere sull'efficacia dell'aiuto utilizzato e sui processi di ragionamento che il supporto fornito ha permesso di stimolare.
R mostra la risposta (Figura 5) di una coppia che ha ricevuto l'aiuto della scheda 1A. Inizialmente il focus della discussione è sul ragionamento che il gruppo ha condotto. La classe, stimolata ancora una volta a costruire una rappresentazione che riassuma tale processo, conclude che il processo di generalizzazione sotteso può essere sintetizzato mediante l'espressione 57·2+2. Tale espressione viene messa a confronto con quella identificata analizzando le risposte in Figura 4 [(57+1)·2] e viene richiesto agli studenti di esplicitare, facendo riferimento ad aspetti sintattici (focus sulla proprietà distributiva), perché le due espressioni sono equivalenti. R, ponendosi come *guida operativa/strategica*, guida anche la classe a riflettere su come lo strumento rappresentazione sagittale possa supportare la costruzione di entrambe le espressioni identificate nel corso della discussione.
In un secondo momento, R invita gli studenti a riflettere su ciò che è scritto nella parte alta del protocollo in Figura 5: «Tra 1 e 4 ci sono 3 differenze, tra 2 e 6 [ci sono] 4 [differenze], tra 3 e 8 [ci sono] 5 [differenze], e così via. Anche la differenza tra i due numeri avanza sempre di uno, mentre nella parte del granchio avanza di 2». Questo stralcio evidenzia che il gruppo che ha prodotto questa risposta ha focalizzato inizialmente l'attenzione sulle differenze tra il numero di casa dei granchi e i corrispondenti numeri di casa delle stelle, osservando che tali differenze sono in progressione aritmetica di ragione 1, senza però esplicitare se esistono connessioni tra queste osservazioni e l'approccio successivamente adottato per rispondere alla domanda. Nel corso della discussione, gli studenti del gruppo dichiarano che tali connessioni non sono state esplicitate perché il gruppo ha abbandonato la strada tracciata inizialmente.

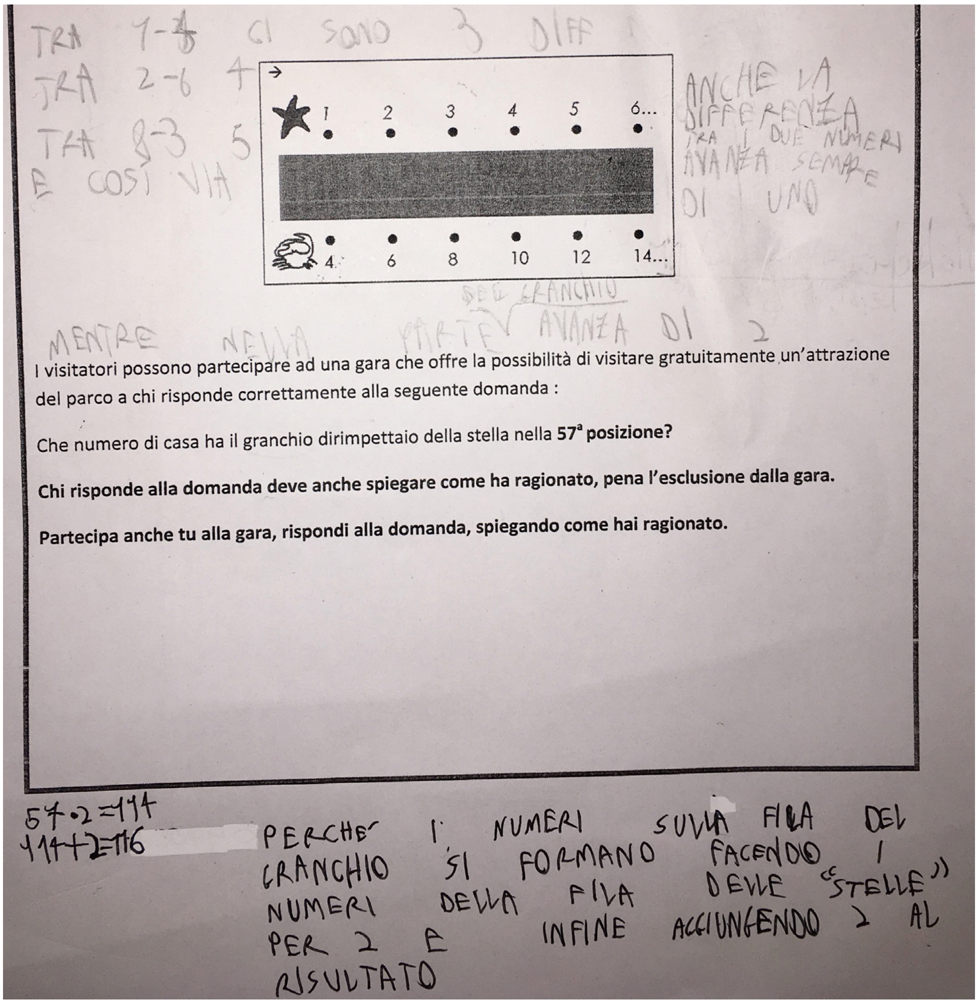


Figura 5. Il protocollo prodotto dal primo gruppo di studenti che ha ricevuto l’aiuto 1A.

Lo stralcio che viene presentato in questo paragrafo ha inizio con l’intervento di S7, componente del secondo gruppo che ha utilizzato la scheda di aiuto 1A, la cui risposta è presentata in Figura 6.

61. S7: «Anche noi abbiamo fatto questo ragionamento».
62. R: «Infatti mi voglio collegare anche al vostro ragionamento. Cosa avete osservato? Venite alla lavagna a raccontarlo…È un ragionamento che loro [gli studenti che hanno prodotto la risposta in Figura 5] hanno iniziato a fare e loro [gli studenti che hanno prodotto la risposta in Figura 6] hanno completato» [R mostra la risposta del gruppo di cui S7 fa parte, Figura 6].

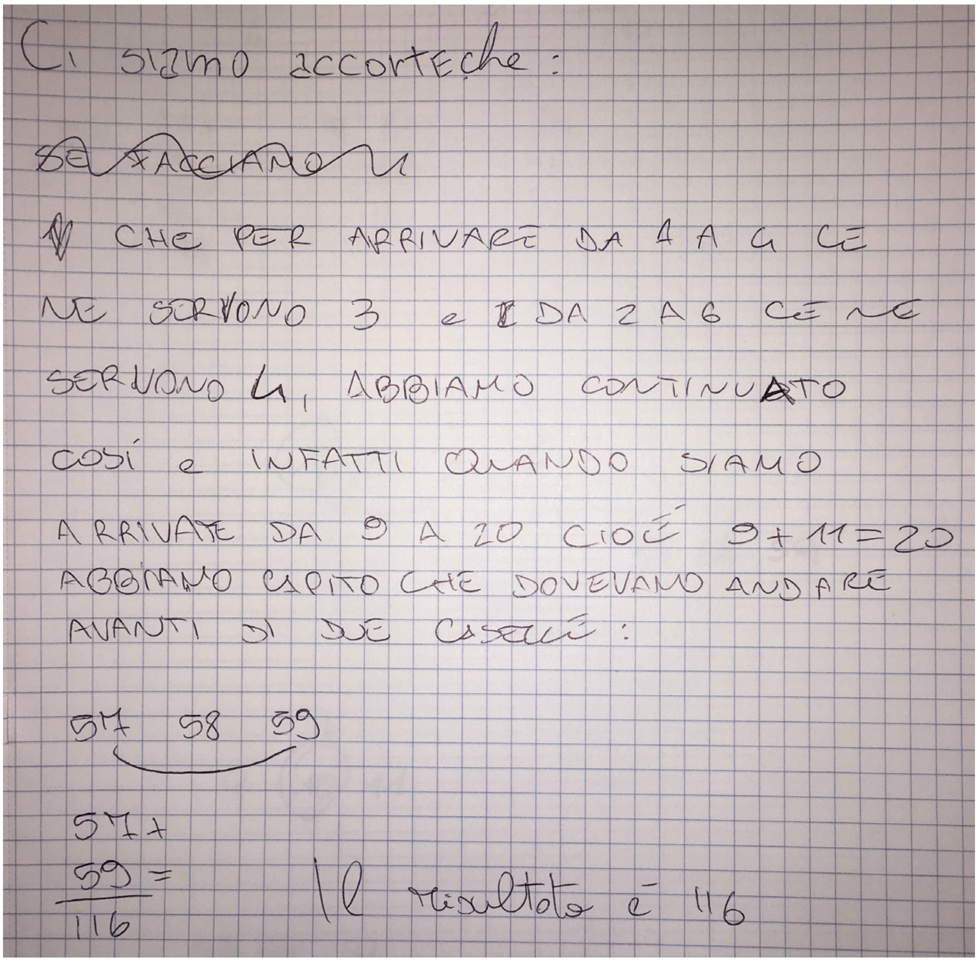

Ci siamo accorte che:
~~SE FACCIAMO~~ u
CHE PER ARRIVARE DA 1 A 4 CE
NE SERVONO 3 e DA 2 A 6 CE NE
SERVONO 4, ABBIAMO CONTINUATO
COSÍ e INFATTI QUANDO SIAMO
ARRIVATE DA 9 A 20 CIOÉ 9+11=20
ABBIAMO CAPITO CHE DOVEVAMO ANDARE
AVANTI DI DUE CASELLE:
57 58 59
57+
59=
116
Il risultato è 116

Figura 6. Il protocollo prodotto dal secondo gruppo di studenti che ha ricevuto l'aiuto 1A.

L'inizio di questo stralcio mette in evidenza come l'approccio adottato stimoli gli studenti ad *assumere la responsabilità del proprio apprendimento* (*strategia 5*). Infatti, S7 identifica il ragionamento abbozzato nella parte alta di **Figura 5** con il proprio (intervento 61), spostando l'attenzione sulla risposta costruita dagli studenti del suo gruppo e divenendo così protagonista dello stralcio di discussione. R supporta l'entrata in scena di S7, mostrando la risposta prodotta dal gruppo al quale S7 appartiene e dichiarando che il ragionamento introdotto nella parte alta della risposta in **Figura 5** è stato completato da questo gruppo.

63. S7: «All'inizio non avevamo capito bene, poi la prof ci ha dato la scheda di aiuto».
64. R: «Faccio vedere a tutti la scheda di aiuto, perché non l'hanno ricevuta tutti. Poi torniamo qua» [Viene mostrata la scheda di aiuto 1A].
65. S7: «Abbiamo capito che dalla casella 1 alla casella 4 c'erano tre numeri, dalla casella 2 alla casella 6 c'erano 4 numeri, e così via…la scheda d'aiuto arrivava fino a 9, che va a 20… Quando abbiamo ottenuto tutti i risultati, abbiamo capito che ogni numero, cioè, ad esempio, 57, avanzava sempre di un numero in più, quindi abbiamo preso 57, 58, 59, quindi abbiamo preso 57+59, che fa 116».
66. R: «Hanno notato che ogni volta, su questa freccia, aggiungo un numero in più…però non posso mica mettermi a disegnarli tutti!» [R ricostruisce la generalizzazione che questo gruppo ha fatto a partire dall'esplorazione numerica, costruendo il diagramma sagittale in **Figura 7**].

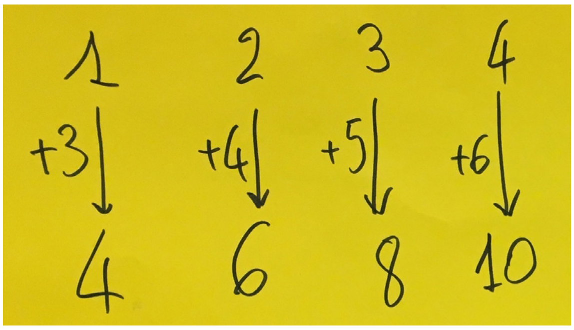


Figura 7. Immagine del diagramma sagittale costruito da R mentre esplicita (intervento 66) la prima parte del ragionamento proposto da S7.

67. R: «Potete spiegare questa parte qua della vostra risposta? [R indica lo stralcio di risposta che evidenzia la seconda parte del ragionamento proposto dal gruppo e non ancora ben esplicitato: "Quando siamo arrivate da 9 a 20, cioè 9+11=20, abbiamo capito che dovevamo andare avanti di due caselle"] Loro hanno detto "non li andiamo a fare tutti tutti" [Si riferisce alla ricostruzione delle due sequenze di numeri fino alla coppia 57-116]».
68. S7: «Quando siamo arrivati da 9 a 20, che 9+11 fa 20, abbiamo capito che dovevamo andare avanti di 2 caselle. Quindi abbiamo scritto 57, 58, 59 e abbiamo preso 59, quindi 57+59, che fa 116» [Mentre S7 spiega il suo ragionamento, R completa la rappresentazione sagittale precedentemente introdotta, **Figura 8**].

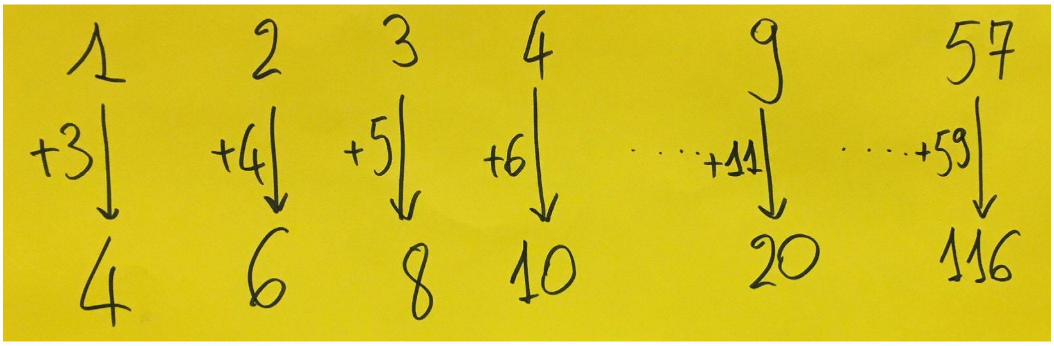


Figura 8. Immagine del diagramma sagittale completato da R per rappresentare l'intero ragionamento proposto da S7.

Negli interventi di questo stralcio di cui è protagonista (interventi 63, 65 e 68), S7 riconosce e condivide le difficoltà incontrate inizialmente e cerca di esplicitare il ragionamento che ha condotto, lei e gli altri membri del suo gruppo, ad identificare la risposta alla domanda presente nella scheda 1. Per favorire la condivisione di questi processi di ragionamento e generalizzazione, R si pone come *guida operativa-strategica* (ruolo *b* del modello M-CA$_{CE}$), esplicitando l'approccio strategico che ha condotto il gruppo a cercare di sfruttare l'osservazione sulle differenze tra numeri corrispondenti nelle due successioni per determinare il corrispondente di 57 (intervento 66) e focalizzando l'attenzione su una parte della risposta prodotta dal gruppo (intervento 67), nella quale le studentesse identificano in maniera esplicita il momento chiave in cui il processo di generalizzazione da esse attivato è stato completato. Contemporaneamente, R si pone come *guida riflessiva* (ruolo *f* del modello M-CA$_{CE}$), costruendo il diagramma sagittale (**Figure 7** e **8**) per rappresentare il processo di ragionamento che S7 sta provando ad esplicitare. Ancora una volta notiamo la messa in atto di un *approccio semiotico* ai processi di argomentazione riflessiva attivati nel corso della discussione. Il diagramma sagittale rappresenta, infatti, lo strumento di rappresentazione che consente di *rendere visibile* il processo di pensiero attivato dagli studenti e verbalizzato nella risposta in Figura 6. Contemporaneamente, la costruzione condivisa di diagrammi sagittali in diversi momenti della discussione e l'esplicitazione delle modalità attraverso le quali interpretarli fa sì che tali diagrammi possano diventare riferimenti importanti per gli studenti, *modelli* ai quali ispirarsi per costruire rappresentazioni dei propri processi di pensiero e di quelli altrui per favorire il confronto e la riflessione che caratterizzano i processi di argomentazione riflessiva.

69. R: «C'è qualcuno che vuole ripetere questo ragionamento?»
70. S8: «Loro hanno capito che nella casella della stella i numeri vanno regolarmente, mentre nella casella del granchio vanno di +2. Da 1 a 4 si aggiunge 3. Da 2 a 6, 4. Da 3 a 8, 5. Da 4 a 10, 6. E così via…fino ad arrivare a 9+11. Loro hanno fatto 57+59, che fa 116».
71. R: «Quindi…Loro cos'hanno osservato? Hanno cercato il legame tra il numero da cui si parte e quello che c'è sulla freccia. Perché? Perché, se capisco questo legame, posso generalizzare e non ho bisogno di costruire tutte le frecce [fino a 57]».

In questa ultima parte del terzo stralcio, R si pone nuovamente come *guida riflessiva* (ruolo *f* del modello M-CA_{CE}), chiedendo ad altri studenti di provare ad esplicitare il ragionamento proposto da S7 (intervento 69) ed esplicitando lei stessa l'approccio strategico che ha guidato i processi di pensiero attivati dal gruppo al quale S7 appartiene (intervento 70), parlando in prima persona per porsi anche come *soggetto che indaga* (ruolo *a* del modello M-CA_{CE}). Questi interventi sono mirati a far sì che gli altri studenti identifichino questo approccio come modello al quale ispirarsi quando dovranno affrontare altre attività caratterizzate dalla necessità di attivare processi di generalizzazione.

5 Discussione dei risultati

L'analisi presentata nel precedente paragrafo ha consentito di evidenziare sinergiche combinazioni tra specifici ruoli identificati dal modello M-CA_{CE}, corrispondenti approcci ai processi di argomentazione riflessiva e strategie di valutazione formativa che vengono attivate grazie ad essi. In quest'ultimo paragrafo vengono forniti possibili spunti per la progettazione di discussioni di classe, attraverso l'esplicitazione di tali sinergie. In particolare, si evidenziano, in riferimento a ciascuno stralcio, quindi a specifici focus delle discussioni, i principali ruoli che colui che coordina le discussioni di classe può cercare di assumere, con l'obiettivo di attivare approcci diversi all'argomentazione riflessiva e realizzare processi di valutazione formativa.
L'analisi del primo stralcio ha permesso di mettere in luce come l'assunzione del ruolo di *attivatore di processi riflessivi e di atti metacognitivi* da parte del docente, nell'ambito di discussioni focalizzate sull'analisi delle risposte degli studenti e su eventuali errori che possono essere evidenziati, possa promuovere la condivisione di un *modello* di riferimento (nel caso di questa discussione, i criteri di correttezza, chiarezza e completezza) per guidare sia l'analisi delle risposte oggetto della discussione che i *conseguenti processi di argomentazione riflessiva* che vengono realizzati. L'attivazione di questo ruolo consente di realizzare la strategia 1 di valutazione formativa (visto che i criteri di valutazione vengono introdotti e condivisi) e, come diretta conseguenza, anche le strategie 3 e 4, poiché gli studenti diventano risorse gli uni per gli altri, fornendo feedback agli autori della risposta analizzata. Questo stralcio evidenzia anche che l'attivazione dell'ulteriore ruolo di *guida operativa/strategica* consente di stimolare la riflessione su strategie metacognitive per il controllo della correttezza o meno dei processi di ragionamento attivati.
Il secondo stralcio evidenzia come un *approccio semiotico* ai processi di argomentazione riflessiva

possa essere realizzato attraverso la combinazione tra il ruolo di *attivatore di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi*, mirato a supportare il confronto e la riflessione sulle risposte prodotte dagli studenti, e quello di *attivatore di processi interpretativi*, attraverso il quale è possibile stimolare l'interpretazione delle rappresentazioni dei processi di ragionamento che caratterizzano le risposte degli studenti e la costruzione di nuove rappresentazioni mirate ad esplicitare tali processi. L'analisi di questo stralcio ha consentito, inoltre, di mettere in luce come la riflessione sulle diverse rappresentazioni esaminate e costruite faccia sì che gli studenti, nel momento in cui esplicitano i processi di ragionamento sottesi, si attivino come risorse gli uni per gli altri (*strategia 4*).

Grazie all'analisi del terzo stralcio, infine, è stato possibile evidenziare come la combinazione efficace dei ruoli di *guida operativa-strategica* e di *guida riflessiva*, nel condurre una discussione sugli strumenti forniti agli studenti per supportare i processi di ragionamento e generalizzazione, abbia favorito la presa in carico del proprio apprendimento da parte degli studenti stessi *(strategia 5 di valutazione formativa*). Lo studente che interviene, infatti, sceglie spontaneamente di condividere difficoltà incontrate e processi di pensiero attivati. L'introduzione del diagramma sagittale e l'esplicitazione dei significati associati a tale diagramma consentono agli studenti di identificare un'ulteriore rappresentazione del ragionamento sotteso alla risposta che viene analizzata. In questo modo, tale ragionamento viene reso visibile e, di conseguenza, realmente condiviso nel corso della discussione. Questo stralcio mette perciò in evidenza come la combinazione di questi ruoli possa stimolare un duplice approccio ai *processi di argomentazione riflessiva*: l'approccio semiotico, poiché il focus è ancora sulla costruzione e interpretazione di diverse rappresentazioni delle argomentazioni e dei ragionamenti proposti; l'approccio *guidato da modelli*, visto che il docente si pone come modello di ragionamento e fa sì che siano identificati altri efficaci modelli di ragionamento nel corso della discussione.

Osserviamo, infine, come *l'approccio sociale ai processi di argomentazione riflessiva* permei l'intera discussione e come questo approccio risulti il frutto di una progettazione della discussione stessa (*strategia 2 di valutazione formativa*) realizzata consapevolmente con l'obiettivo di stimolare un dibattito collettivo che consenta agli studenti di confrontare argomentazioni, strategie, processi di ragionamento (propri e altrui), rendendoli tangibili oggetti di riflessione.

Bibliografia

Baker, M. (2003). Computer-mediated interactions for the co-elaboration of scientific notions. In J. Andriessen, M. Baker & D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: confronting cognitions in computer supported collaborative learning environments*. Computer-Supported Collaborative Learning book series, vol. 1 (pp. 47-78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bernholt, S., Ronnebeck, S., Ropohl, M., Koller, O., & Parchmann, I. (2013). *ASSIST ME. Report on current state of the art in formative and summative assessment in IBE in STM*. ASSIST-ME Report Series Number 1-2.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5-31.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics! In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cusi, A. (2017). Il ruolo dell'insegnante nell'ambito di una didattica dell'algebra come strumento per ragionare: lenti teoriche per l'analisi. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 40 A-B* (2), 157-180.

Cusi, A., & Malara, N. A. (2016). The Intertwining of Theory and Practice: Influences on Ways of Teaching and

Teachers’ Education. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education 3rd Edition* (pp. 504-522). Taylor & Francis.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017a). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM Mathematics Education, 49*(5), 755-767.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017b). Promuovere strategie di valutazione formativa in Matematica con le nuove tecnologie: l'esperienza del progetto FaSMEd. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente, 9*(14), 91-107.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017c). Designing and analysing the role of digital resources in supporting formative assessment processes in the classroom: The helping worksheets. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of Cerme 10* (pp. 3452-3459). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

De Luca, M., Demartini, L., Migliano, P., Savioli, K., Serratore, E., & Vio, E. (Eds.) (2008). *Argomentare: un “laboratorio” per le competenze*. AVIMES-VALMAT.

Ferretti, F., Paraskevi, M.-C., & Vannini, I. (2018). *Formative assessment for mathematics teaching and learning. Teacher professional development research by video analysis methodologies*. Franco Angeli editore.

Hoffmann, M. H. G. (2016). Reflective argumentation: A Cognitive Function of Arguing. *Argumentation, 30*(4), 365-397.

Leont’ev, A. N. (1977). *Attività, coscienza e personalità*. Ed. Giunti Barbera.

Malara, N. A., Navarra, G., & Sini, S. (2012). *Unità 12: Successioni come funzioni. Loro esplorazioni attraverso differenti registri di rappresentazione*. Progetto ArAl. Pitagora Editrice.

Radford, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), T*he Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315-351). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Vygostkij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher mental processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 28 - 47, DOI: 10.33683/ddm.20.8.2 OPEN ACCESS

Pensieri all'aperitivo.
Imparare a padroneggiare il sistema di numerazione decimale posizionale in situazioni divertenti

Thinking during the aperitif.
Learning to master the decimal place value system in entertaining situations

Stefan Meyer
Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik – Zurigo, Svizzera

stefan.meyer@hfh.ch

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA ORIGINALE

Sunto / L'articolo descrive come è possibile sviluppare il pensiero logico-matematico e le competenze operative concernenti il sistema di numerazione decimale posizionale in modo creativo, operativo ed esemplificativo. Teoricamente l'articolo è vicino al costrutto di «accelerazione cognitiva» (Adey, 2008) che collega in una "scuola del pensiero" la teoria genetica dello sviluppo cognitivo (Piaget, 1977a, 1977b; Piaget & Voelin, 1980), il Piano di studio in vigore (Lehrplan21), la zona di sviluppo prossimale (Vygotskij, 1986) e la metacognizione. Inoltre, l'articolo integra il gioco di ruolo nel senso di esperimento sociometrico (Moreno, 1996; 2007), il metodo dell'esplorazione critica (Piaget, in Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974) e l'abaco scolastico come mezzo operativo di rappresentazione del sistema di numerazione decimale posizionale (Johann, 2002; Johann & Matros, 2003). Questi metodi possono orientare il processo di comprensione durante l'apprendimento della matematica.

Parole chiave: aritmetica; sistema di numerazione decimale posizionale; abaco; mezzo di rappresentazione; gioco di ruolo.

Abstract / The paper describes how it is possible to develop logical-mathematical thinking and operational skills regarding the positional decimal numeral system in a creative, operational and illustrative way. Theoretically the paper is close to the construct of «cognitive acceleration» (Adey, 2008) that connects in a "school of thought" the genetic theory of cognitive development (Piaget, 1977a, 1977b; Piaget & Voelin, 1980), the current curriculum (Lehrplan21), the proximal development zone (Vygotskij, 1986) and metacognition. Moreover, the article integrates the role play in the sense of sociometric experiment (Moreno, 1996; 2007), the method of critical exploration (Piaget, in Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974) and the abacus as an operational tool of representation of the positional decimal numeral system (Johann, 2002; Johann & Matros, 2003). These methods can guide the understanding process during the learning of mathematics.

Keywords: arithmetic; positional decimal numeral system; abacus; tool of representation; role play.

1 Il problema

Il sistema di numerazione decimale posizionale è una rappresentazione concettuale e simbolica dei numeri naturali (ℕ) fino ai reali (ℝ). Secondo Reiss e Schmieder (2005) è un sistema semplice, ma allo stesso tempo anche impegnativo; in effetti giungere alla comprensione del nostro sistema di numerazione è un compito complesso che richiede molto tempo. I risultati della ricerca degli ultimi decenni confermano che la concezione di numerosità, normalmente acquisita da alunni e alunne tra il secondo e il quinto anno della scuola elementare, in alcuni casi si protrae fino alla secondaria e oltre (Ross, 1986; Schuler, 2004; Brugger, Sidler & Meyer, 2007; Moser Opitz, 2007; Ruflin, 2008; Herzog, Fritz & Ehlert, 2017; Herzog, Ehlert & Fritz, 2019; vedi Tabella 1).
Dai dati delle ricerche cliniche relative allo sviluppo psicologico del pensiero è difficile dedurre informazioni sullo sviluppo dei livelli cognitivi raggiunti dagli allievi, perché di solito le ricerche sono effettuate in ambiti creati ad hoc. Anche nel caso di dati provenienti da ricerche in classe, occorre chiarire a quale modello pedagogico appartengono: sono compiti artificiali ed esercizi ripetitivi, o sono problemi reali che suscitano interesse? Dati sull'apprendimento dipendono dunque dalla qualità dei processi formativi realizzati dai docenti in ambito matematico e da altri fattori correlati (Dewey, 2008; Weltgesundheitsorganisation,[1] 2011). Secondo Dewey (2008), è possibile valutare un costrutto matematico come il sistema di numerazione decimale posizionale, oggetto dell'articolo, sviluppato *con o senza riferimento a situazioni*; questo perché «[…] non consideriamo mai le esperienze di oggetti o eventi per sé stessi, nemmeno formuliamo valutazioni su giudizi formulati unicamente su di essi, ma solo in un contesto nel suo insieme» (Dewey, 2008, p. 87, traduzione dell'autore). Analogamente Kamii (1985, 1994, 2004, 2005) sottolinea in modo rigoroso che il pensiero logico-matematico non può essere insegnato, ma conquistato in prima persona e co-costruito. Inoltre, Wittmann (2002) ha sviluppato il concetto dell'insegnamento e dell'apprendimento attivo ed esplorativo, ma si è reso conto che tutti i nobili approcci didattici vengono vanificati dalla pressione dei tempi e dall'uso dei materiali didattici considerati. Così la formazione è in contrasto non solo con i problemi che scaturiscono dal sistema di numerazione stesso, ma anche con i limiti di insegnamento-apprendimento interni alle situazioni assunte.
Alla luce della pedagogia critica (Gur-Ze'ev, 2005; Freire, 2011; Wink, 2011), i limiti del lavoro dell'insegnante hanno a che fare con la pedagogia della trasmissione, che è il credo che in parte continua ancora a esistere nella pratica di tanti insegnanti. Questa pedagogia si attua attraverso una "didattica dei compiti", ossia una didattica basata sull'esclusiva consegna di esercizi staccati da un contesto reale, che è stata analizzata da Lenné (1969, "Aufgabendidaktik"). Secondo Freudenthal (1977), i presupposti della pedagogia della trasmissione si manifestano nei compiti focalizzati esclusivamente su riferimenti intra-matematici, senza un aggancio con la realtà circostante degli allievi, ossia con riferimenti extra-matematici. La conseguenza è, secondo Freudenthal, che la didattica diventi un sistema illusorio (intra-matematico). La distinzione proposta da Freudenthal serve per capire a fondo i concetti e i design moderni. Secondo Freudenthal, le relazioni extra-matematiche sono la linfa vitale dell'educazione, comprese le situazioni didattiche. Freudenthal (1991) creò il ben noto concetto didattico "Realistic Mathematics Education" (RME) con il quale vengono superate le tentazioni del sistema illusorio. L'aggettivo "realistic" indica l'esperienza dell'allievo con la matematica scolastica agganciata con la matematica vissuta nella propria vita quotidiana. Allo stesso tempo il significato di "realistic" tende ad esplorare e integrare *la matematica nella mente* degli allievi attraverso dei vivi processi educativi e di reinvenzioni guidate. Per definizione la didattica dei compiti non integra la sintesi realistica e mentale degli allievi, rimanendo un "ping-pong behavioristico" fra stimolo e reazione (Abrahamson, Zolkower & Stone, 2020).

1. Organizzazione per la salute mondiale.

Il sistema illusorio può essere esaminato e superato grazie a metodi sociometrici come quello proposto da Moreno (1996) e che vengono presentati in questo articolo. Il credo nella pedagogia della trasmissione, la concentrazione sulle relazioni esclusivamente interne alla matematica, come anche la didattica dei compiti, sono indicatori dell'illusione e della mancanza di relazioni esterne al mondo intrinseco della matematica. Secondo Moreno (1996) esiste una tendenza paradossale fra innovazione, produzione e consumo, secondo la quale prodotti innovativi, creati con processi creativi, vengono dati in pasto a usi routinari e consumistici; nel caso specifico della matematica, materiali didattici innovativi vengono "imprigionati" nell'attuale didattica dei compiti. Moreno chiama questi prodotti «conserve culturali» (Storch, 1996; Moreno, 2007, in inglese: «cultural conserves»). Storch (1996, p. 1, traduzione dell'autore) riprende il concetto e precisa: «Le conserve rappresentano il tentativo di congelare la spontaneità e la creatività di un momento passato in un prodotto concreto».

Se descrizioni e processi come la semplice trasmissione di contenuti scolastici diventano dominanti nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica, indipendentemente dalla comprensione della materia, è evidente che la *spontaneità come requisito della creatività viene del tutto persa* (Storch, 1996).

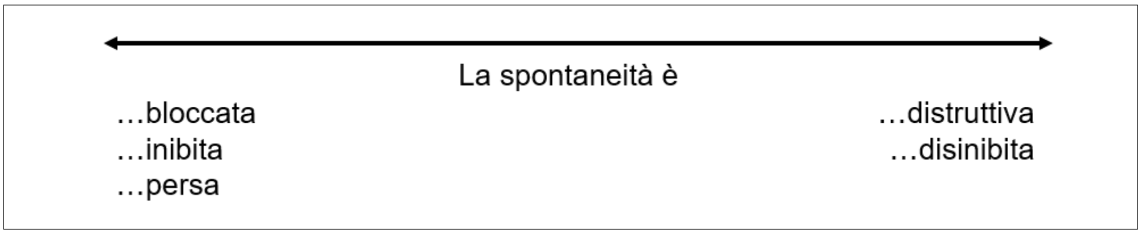


Figura 1. Poli della *nevrosi* della creatività.

La Figura 1 mostra schematicamente, secondo ciò che sostengono Wieser e Ottomeyer (2000, p. 662), come le capacità di agire e socializzare vengono bloccate o disinibite da un approccio *nevrotico* alla creatività che conduce a polarizzare anche la spontaneità, che può così emergere in modo alternato e passare dall'essere inibita o, all'opposto, completamente disinibita. Tradotto in ambito formativo, ciò significa che pratiche didattiche che sacrificano la comprensione dei contenuti in gioco mettono in pericolo anche la spontaneità di chi le vive. Coloro che si aggrappano ad una didattica immediata, scontata e "dozzinale" (Freire, 2011) considerano la spontaneità come un disturbo all'apprendimento della matematica e seguono quello che Watzlawick (2017) chiama «gioco senza fine». All'interno di questa dinamica esistono attività sociali nelle quali i partecipanti non capiscono *le regole* di ciò che si sta facendo come avviene, per esempio, per la pedagogia della trasmissione. Per superare tali dinamiche, Watzlawick sostiene la necessità di un salto nell'astrazione degli apprendimenti e un approfondimento dell'errore. Con ciò la spontaneità e la creatività potrebbero fare da censura della pedagogia della trasmissione aiutando a superare la paura irrazionale nei confronti della matematica e favorendo la sua comprensione (Devereux, 1998).

Non basta quindi considerare la didattica della matematica come «design science» (Wittmann, 2020, p. 66), ossia come modernità fine a sé stessa: occorre invece che la «design science» conosca e padroneggi il paradosso delle "conserve culturali" e dei "giochi fini a sé stessi".
Alcuni metodi non conformisti possono permettere questo salto di prospettiva. Secondo Freudenthal (1983, 1991) tali metodi potrebbero essere ancorati all'analisi didattica (Klafki, 1996; S. Meyer, 2020a) che è un processo multidimensionale pensato per guidare la preparazione delle lezioni. In questo approccio, gli insegnanti organizzano e perfezionano l'insieme di queste dimensioni: le risorse

e le condizioni, i contenuti significativi (che sono gli elementi realistici secondo Freudenthal, 1991), gli scopi, i metodi, la comunicazione, la cooperazione e l'interazione, e l'organizzazione delle sequenze. Più vivi e sistemici risultano gli scambi tra le persone e i diversi elementi in gioco, più significativo risulta il processo educativo. In un design di questo tipo, emerge la spontaneità come adeguata reazione di fronte a una nuova *situazione* o come nuova reazione davanti a vecchie situazioni (Wieser & Ottomeyer, 2000).
Per favorire la spontaneità risulta interessante anche la metodologia dei *giochi di ruolo*.
In un progetto relativo allo sviluppo dell'alfabetizzazione tramite il racconto di storie e i giochi di ruolo, Gupta (2009) riscontrò i seguenti risultati:

1. I bambini svilupparono un ricco vocabolario e strutture di frasi complesse.
2. I bambini mostrarono profonde attitudini emozionali nel gioco di ruolo. Si confrontavano con i propri conflitti sociali, portandoli a un maggiore apprezzamento di sé stessi e a un innalzamento della fiducia nelle proprie capacità.
3. Le questioni sociali relative a giochi di genere, impegno, problemi di etica e altri aspetti relativi all'esperienza vissuta furono gestite con grande consapevolezza e interesse.
4. I giochi di ruolo consentirono di risolvere problemi in comune, di negoziare, organizzare e decidere.
5. Nei colloqui *peer to peer* i bambini si sostenevano a vicenda nel pensiero fattuale e sociale.
6. Aumento della capacità di riconoscere diversi punti di vista e possibilità. L'io egocentrico diventò così decentrato. Si sono pure sviluppati il senso di comunità e il fatto che il sapere del gruppo si pone al di sopra di quello dei singoli.

L'idea centrale del gioco di ruolo fu elaborata successivamente da LeMa-Methode (Leggere e matematizzare) nel MKT-Testsystem (S. Meyer & Wyder, 2017), che ha rilevato l'efficacia di tale metodo. I risultati hanno messo in evidenza come sia particolarmente utile che gli insegnanti, di fronte a problemi di calcolo concernenti l'insegnamento dell'aritmetica, si calassero nel ruolo di una segretaria spiritosa e lasciassero al bambino il "ruolo di protagonista" nella risoluzione di problemi. In particolare, nel caso specifico di una bambina di seconda elementare, convinta che non sarebbe mai riuscita ad effettuare calcoli, sono stati osservati effetti molto positivi. La docente di sostegno giocò in questo caso il ruolo di calcolatrice tascabile e tramite questo gioco di ruolo la bambina intavolò subito con lei un rapporto costruttivo e competente (S. Meyer, 2019).

La spontaneità, nel senso della sociometria, è requisito per nuove e creative forme di insegnamento-apprendimento, che saranno delineate in seguito relativamente al sistema di numerazione decimale posizionale.

2 Pensieri pedagogico-didattici

Supponiamo di dover organizzare un aperitivo verso le 11 del mattino. Nel caso di attività concordate con un significato sociale (Klafki, 1996; S. Meyer, 2020a), la risoluzione di problemi matematici, il pensiero operativo e socialmente condiviso e l'astrazione riflessiva (Piaget, 1977a, 1977b) sono promossi con creatività. Problemi attinenti al sistema di numerazione decimale posizionale, e concernenti idee errate, conflitti cognitivi o nuovi interessi potrebbero essere trattati con l'abaco scolastico o con, per esempio, bastoncini salati nel ruolo di mezzi di rappresentazione. Alla fine del rituale i bastoncini vengono mangiati e la classe si concede un bicchiere d'acqua o di sciroppo.

L'esplorazione del fenomeno matematico si svolge in un processo *co-costruttivo* del gruppo. I risultati vengono messi in comune nel *plenum*, ossia nell'informazione e nell'argomentazione di tutti (*sharing*) e anche discussi in senso metacognitivo. Alla fine di questa prima fase chiamata "bridging", si pone l'attenzione sull'insegnamento che avviene nel tempo libero e nel nuovo rituale di aperitivo. Il "bridging" crea dei ponti verso i rituali futuri.
Questi elementi metodici appartengono al fondamento del supporto all'apprendimento nel senso di Vygotskij (1986) e all'«accelerazione cognitiva» (Adey, 2008). Le possibilità di rappresentazione (dal concreto al sistema di scrittura numerico-algebrico), come anche le operazioni fatte con l'ausilio di mezzi di rappresentazione, danno informazioni sul livello attuale del pensiero astratto e anche sui livelli del leggere e capire relativi al sistema di scrittura matematico.
La tecnica sviluppata dalla scuola ginevrina della «vérification sur le vif» e l'«astrazione riflessiva» (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974)[2] sono molto vicine alla zona di sviluppo prossimale di Vygotskij (1986). L'ambito è quello della verità logico-matematica di modelli e modi di pensiero e di azione. Vengono esaminati ipotesi di contenuti e connettivi e in seguito tematizzati processi di un'intervista flessibile o di un episodio nell'«accelerazione cognitiva», oppure testati operativamente e socialmente. Ciò stimola l'astrazione riflessiva, come hanno dimostrato le ricerche sull'accelerazione cognitiva: gli alunni diventano intellettualmente più pronti, dimostrando l'efficacia dell'«accelerazione cognitiva», *come fattore ambientale* (*Inquiry-Situation*; vedi Adey, 2008).

2.1 La progettazione della conversazione nell' "aritmetica ludica"

In questo articolo viene anche collegato il metodo di «esplorazione critica» (Piaget in Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974), che è una parafrasi dell'intervista flessibile, con la co-costruzione e la zona di sviluppo prossimale di Vygotskij (Gupta, 2009). In tale prospettiva sono integrati anche la metacognizione (Piaget, 1977a, 1977b; Adey, 2008) e i metodi di azione di Moreno (1996, vedi **Figura 2**; H. Meyer, 2000).

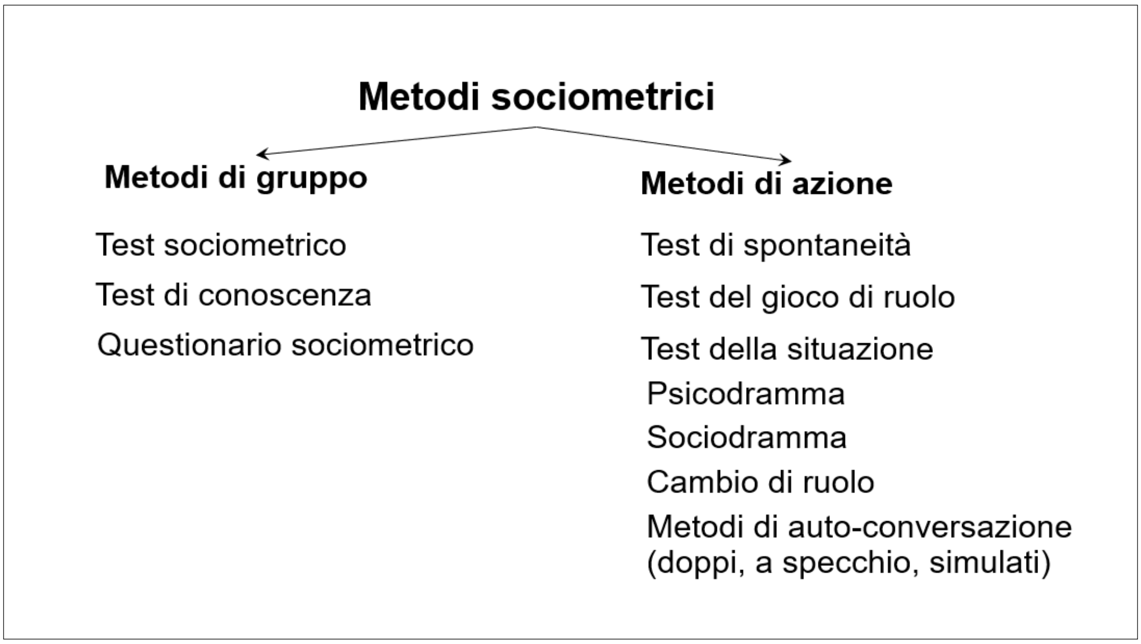


Figura 2. Dimensioni del metodo sociometrico secondo Moreno (1996).

2. La «vérification sur le vif», che è una delle caratteristiche fondamentali dei nostri metodi, procede a passi dall'esplorazione critica e colloquiale del bambino all'analisi e all'interpretazione dei modi di comportamento (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974, p. 40; traduzione dell'autore).

I metodi sociometrici (Figura 2) indicano varie possibilità di azione che qui saranno discusse parzialmente. La spontaneità bloccata e la creatività ristretta nelle «conserve culturali» (Moreno, 2007) vengono liberate dai giochi e dall'esplorazione critica. In tal senso, l'approccio al sistema di numerazione decimale posizionale è introdotto e inscenato mediante il teatro improvvisato, il cambio di ruoli, i soliloqui, i giochi di pensiero, "l'artista aritmetico", espressione che deriva dal greco "arithmós" (numero) e dall'aggettivo arithmētikós (appartenente al conteggio o al calcolo) e da téchnē (arte), cioè l'arte del conteggio o del calcolo, e anche da colloqui di gruppo. Di qui si arriva direttamente al «calcolo ragionato» come rappresentazione ragionata di pensieri e fatti. I metodi di azione sono sempre correlati con domande o richieste.
Arrigo (2014) riferisce ciò che intende con «calcolo ragionato» in relazione alla teoria delle trasformazioni semiotiche di Duval (1993; S. Meyer, 2017; vedi par. 4). Il processo è fondamentalmente mentale: il calcolo pensato e argomentato, con più gradi di libertà, si conforma in calcolo mentale con supporto scritto. Questo metodo ingloba la concettualizzazione (intuizione del concetto), l'apprendimento strategico, la comunicazione e l'approccio alla rappresentazione. Il calcolo ragionato o arte riflessiva dei numeri si trasforma in pratica in un'introduzione ben fondata nelle operazioni di base e nelle leggi commutative, associative e distributive del calcolo (Arrigo, 2014).
La dinamica di questi metodi contribuisce al superamento della pedagogia della trasmissione e dell'istruzione inefficace. I metodi portano motivazione e promuovono la comprensione dei concetti matematici e relative connessioni, anche quando sorgono problemi di comprensione, conflitti sociali o cognitivi. Le soluzioni non sono ricercate razionalmente, ma attraverso esplorazioni ludiche e rassicuranti. Il dilemma relazioni intra-matematiche/extra-matematiche (Freudenthal, 1977) diventa elemento dinamico dell'"aritmetica ludica", del gioco di ruolo matematico.

2.2 Matematica mentale e comunicazione liberatoria

I metodi e i principi descritti sopra sono certamente complessi. Quali atteggiamenti e quali tecniche del colloquio sono necessari, per far sì che docenti professionisti diventino liberi comunicatori e moderatori di tali pratiche? I seguenti suggerimenti facilitano l'acquisizione di pratiche efficaci della comunicazione (Cuomo, 2007; Gupta, 2009):

- Proporre a bambini o adulti uno stimolo che può essere pensato liberamente o integrare un problema mediante un colloquio con alunne e alunni.
- Proporre uno stimolo invitante e che porti gioia.
- Lo stimolo può rappresentare parte di un gioco di ruolo. Tutti si comportano in modo conveniente, come a un aperitivo nel quale si discute su una questione interessante.
- Gli stimoli funzionano attraverso modelli, giochi di ruolo e teatro improvvisato. Persone o figure (peluches) sono gli attori. Potrebbero esordire con affermazioni come: «L'orso (o Elsa) ha un po' di fame, al ristorante (della famiglia o della scuola) è servito un aperitivo. Vengono offerti sciroppo e bastoncini salati, ma di questi ce ne sono solo tre». (In particolare, un bastoncino su una carta che rappresenta le decine e due bastoncini sulla carta delle unità). Può anche essere organizzato un vero rituale di aperitivo.
- Non affidare agli allievi troppi compiti alla volta. Si potrebbe fare come nel calendario dell'avvento. Invece del Natale si aspetta l'entrata nel sistema di numerazione decimale posizionale.
- Trattenersi dal dare istruzioni e assumere un atteggiamento socratico.
- Assumere con delicato *humor* il ruolo di una persona smemorata e irragionevole e stimolare gli alunni alla riflessione e alla comunicazione.
- Non spiegare mai passo per passo e linearmente. L'intuizione non sorge in modo lineare, ma attraverso un pensiero cosciente e anche incosciente (sentire) attraverso canali nervosi collegati esponenzialmente.

- Proporre molte figure e lasciare scegliere ai bambini quelle che preferiscono. Ci sono molti modelli di ruolo interessanti come per esempio «La Linea – Series» (Osvaldo Cavandoli) oppure «Il rosso e il blu» (Francesco Misseri: https://www.youtube.com/watch?v=koZeA5zDbF0) oppure Mio Mao (Misseri Studio: https://www.youtube.com/user/MISSERISTUDIO/videos).
- Durante questi giochi occorre essere vivaci e proporre una dopo l'altra domande e interventi matematici. Il compagno di gioco o i bambini vengono incoraggiati a comunicare. Le domande e i problemi circolano. Non deve nascere alcun effetto "ping-pong" tra alunno e insegnante.
- Le cosiddette «lacune dell'apprendimento» vengono integrate e collegate dall'intuizione. Occorre avere fiducia e confidare apertamente nella crescita delle risorse del gruppo classe.
- Osservare liberamente come farebbe un barista discreto.
- Porre spontaneamente domande aperte e pertinenti, che invitano gli altri a pensare, parlare e agire.
- Invitare i gruppi a descrivere con *segni e pensieri* diversi (Duval, 1993; Presmeg, Radford, Roth & Kadunz, 2016). I segni e i pensieri possono essere espressi oralmente, per iscritto, con disegni oppure in modo *enattivo*, ossia attivo-motorio (Bruner, 1971). Fare circolare le domande sul significato dei segni.
- Evitare giudizi del tipo errato-corretto. Chiedere invece sempre a ciascuno: «È vero?» (nel senso della verità logico-matematica). «Da cosa deduci che le tue conclusioni sono vere? Su cosa ti basi quando giudichi se quello che ha detto un tuo compagno o una compagna è vero?»
- Esigere sempre una giustificazione, come per esempio potrebbe sostenere l'orso: «Ma questo non può essere vero! Trovate dimostrazioni che mi possano convincere». Come detto sopra, è l'orso (o Elsa) che dice queste cose. Se ci si tuffa nel gioco di ruolo, questo stile comunicativo allegro e dinamico riesce meglio (Kamii, 2000; Bodrova, 2007; Cuomo, 2007; Wittgenstein, 2013; Resnick, Asterhan & Clarke, 2018; Schenker, 2018; Piaget in Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974; Piaget, Henriques & Ascher, 1990).
- Gestite questi conflitti cognitivi, per esempio dicendo: «Su questo possiamo rifletterci domani. Se ci troviamo per l'aperitivo possiamo proporre la stessa questione ancora una volta? Lo volete? L'orso ne ha abbastanza!» Con ciò si crea una tensione mentale motivante nei confronti del problema matematico. Come già anticipato, occorre non distruggere la tensione cognitiva dando la soluzione!

I suggerimenti chiariscono il fatto che il gioco di ruolo matematico è una metodologia divertente e intelligente. Secondo Freire (2011) ci si muove nel campo dell'empatia e non nel campo della comunicazione subita. Il gioco di ruolo crea così uno stile di educazione vissuto e positivo (Cuomo, 2007), nel quale è normale trovarsi in situazioni senza capire e in cui l'apprendimento diventa empatico e bello. L'aritmetica vissuta proposta dall'insegnante rappresenta così un modello che si colloca nella zona dello sviluppo prossimale nel senso di Vygotskij (1986).

3 L'aperitivo come esperimento pedagogico, la PASS-Teoria

La cura dell'intuizione nel sistema di numerazione decimale posizionale e nelle relative rappresentazioni richiede uno sforzo di più anni con problemi e riflessioni astratte sul compito stesso (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974; Piaget, 1977a, 1977b; Adey, 2008). Sulla linea di Dewey (2008) occorre scoprire gli oggetti del sistema di numerazione all'interno di una situazione. Il rituale dell'aperitivo, inteso come situazione, discende dalla neuropsicologica PASS-Teoria sviluppata da Lurija. Si tratta di una serie di compiti e criteri, che sono stati inclusi nei test proposti da Goldstein, Princiotta e

Naglieri (2015) e specialmente da Otero (2015). Lurija e Judowitsch (1982), e Cuomo (2007) hanno trasformato la logica dei test nella logica dei processi della formazione scolastica integrativa. L'analisi didattica e sistemica descritta nel primo paragrafo serve come avvocato-mediatore (Klafki, 1996; S. Meyer, 2020a).

PASS è l'acronimo di Piani dell'Attenzione, della Simultaneità e della Successione, che in relazione al rituale dell'aperitivo significano:

– Piani. Sono processi cognitivi, operativi e sociali, nei quali persone in situazioni si sfidano a determinare, scegliere, applicare strategie e tattiche nella risoluzione di problemi. Pianificare è perciò compito dei professionisti e dei bambini, che, al servizio dell'intuizione, sono messi di fronte al sistema di numerazione decimale posizionale. Questi processi sono annoverati fra le funzioni esecutive.
– Attenzione. È un processo cognitivo e sociale che è richiesto a persone che trattano selettivamente un certo contenuto o una determinata domanda. Questo processo impedisce che la persona venga ostacolata da contenuti concorrenti.
– Simultaneità. È un processo cognitivo, operativo e sociale, nel quale stimoli separati o contenuti vengono integrati in un unico insieme o gruppo. Questa è una caratteristica fondamentale del rituale aperitivo nel quale il sistema di numerazione viene discusso simultaneamente con tutti i mezzi e le conoscenze.
– Successione. È un processo cognitivo, operativo e sociale, che ordina serialmente cose/fatti: ad esempio, mettere acqua nella Moka significa qualcosa d'altro che mettere la Moka nell'acqua, così come scrivere 12 significa qualcosa di diverso che scrivere 21; "Prima la moltiplicazione" è un motto che regola la successione (la precedenza) nelle operazioni aritmetiche. Nell'aperitivo troviamo successioni della simbolizzazione, della descrizione, delle parentesi, della quantificazione come anche il rituale del «prima il dovere e poi il piacere!».

Fondamenti neuropsicologici e pedagogici dei rituali nella PASS-Teoria sono la stimolazione ottimale, le emozioni e l'attenzione (Lurija & Judowitsch, 1982; Cuomo, 2007; Goldstein, Princiotta & Naglieri, 2015; Otero, 2015). La PASS-Teoria permette una relazione dinamica e olistica tra insegnamento e apprendimento del sistema di numerazione nei rituali dell'aperitivo o in altri colloqui matematici. L'attenzione condivisa, l'organizzazione e i piani comuni delle attività in riferimento ai problemi cognitivi e ai compiti garantiscono il successo nell'apprendimento (Dewey, 2008; McCabe & Farrell, 2020).

4 Riflessioni sulla teoria delle rappresentazioni (Duval, 1993)

Secondo Duval (1993), quando si ha a che fare con un oggetto matematico si dovrebbero mobilitare più registri semiotici e diverse forme di rappresentazione (citato anche in Presmeg et al., 2016) (vedi Figura 3).

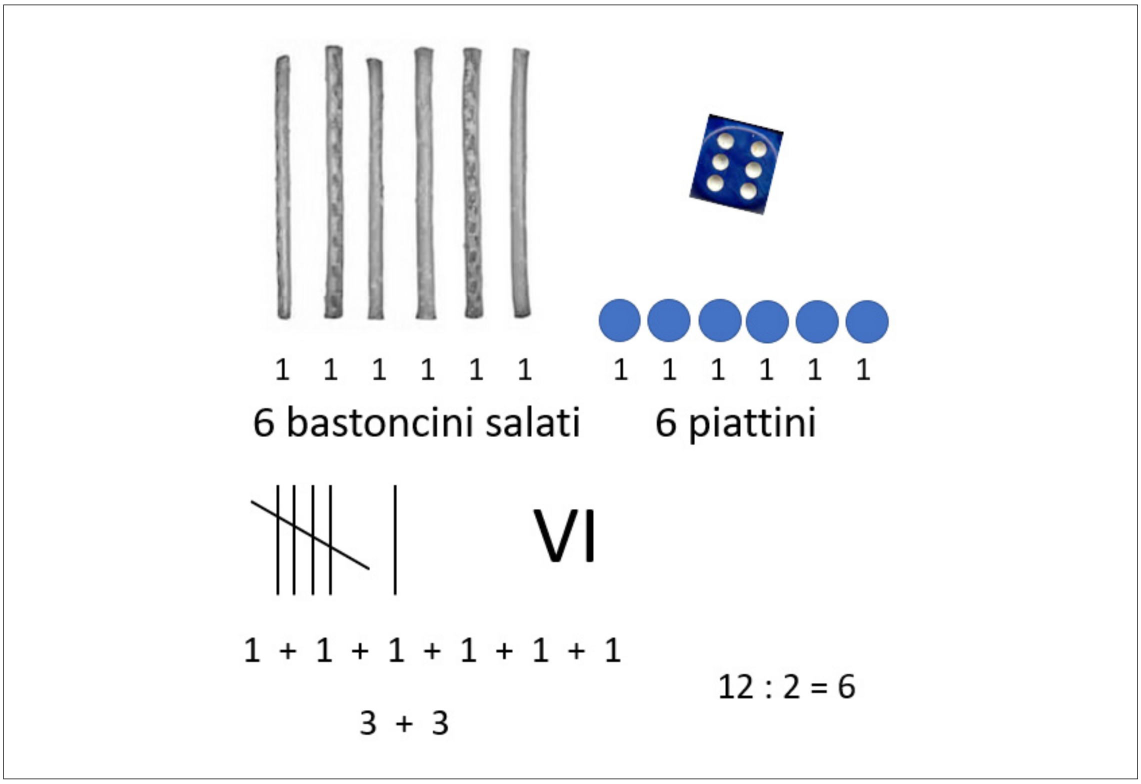


Figura 3. Esempi di rappresentazioni del numero 6.

La diversità dei registri semiotici (linguaggi) in classe è sempre presente, quando i bambini possono mostrare liberamente le loro rappresentazioni e i linguaggi scelti, se non sono obbligati a seguire sistemi di segni (linguaggi) convenzionali, con i quali il pensiero viene presentato come fatto [figure, grafici, scritture simboliche, l'insieme delle cifre da 0 a 9, il linguaggio comune ecc. (vedi Duval, 1993, p. 40)]. Per contro, i diversi registri semiotici contribuiscono a far capire che *gli oggetti matematici non possono essere scambiati con la loro rappresentazione*, ma è proprio l'uso di tutte queste rappresentazioni che contribuisce alla costruzione dell'oggetto matematico.
Secondo Duval (2006, p. 64) la moltitudine delle possibili rappresentazioni genera un problema cognitivo necessario per l'apprendimento. Il problema cognitivo emerge per esempio quando si mostrano le diverse rappresentazioni (espressioni simboliche) di 100: 90+10; 5·20; 1000:10; $1:\frac{1}{100}$ ..., in quanto occorre trovare delle proprietà invarianti nelle molteplici forme di rappresentazione di un oggetto. «La matematica è ricerca di invarianti» (comunicazione orale di Hans Walser, 2020-01-17 dedicata al suo professore di matematica Heinz Hopf): apprendere significa avanzare in mezzo a problemi cognitivi verso la conoscenza delle cose comuni, cioè sapere cosa è comune e perché è comune (vedi anche Piaget & Szeminska, 1975). Di conseguenza, se si fornisce agli allievi solo un'univoca rappresentazione dell'oggetto in gioco e si prescinde da buone intenzioni didattiche, tale rappresentazione uniformata genera sistematicamente disturbi e un effetto paradossale, precludendo così la possibilità agli insegnanti di integrare la matematica vissuta dagli allievi (vedi la nozione "realistic" di Freudenthal nei par. 1 e 2.1).

4.1 L'abaco scolastico come sistema di rappresentazione

Johann (2002) e Johann e Matros (2003) hanno presentato l'abaco scolastico come mezzo di rappresentazione. Essi mostrarono con esempi concreti che questo strumento risulta molto utile anche per alunni con difficoltà cognitive nell'ambito del sistema di numerazione decimale posizionale. Vantaggi

di questo mezzo sono l'adattabilità e le infinite possibilità d'uso. È un mezzo didattico e nello stesso tempo una metodologia qualitativa di ricerca, nel senso che gli allievi operano con le carte posizionali e con i simboli per le cifre, spiegando ed esplorando la logica delle strutture aritmetiche, mentre l'educatore-ricercatore provoca la conversazione sul significato del fare e del dire. Questo metodo si chiama "Strukturlegetechnik" (*The structure laying technique*; Flick, 2006) e si situa molto vicino al metodo dell'esplorazione critica di Piaget. In questa attività gli alunni usano *fogli sciolti* e barrette (di legno, o anche bastoncini salati) per fissare quantità nel sistema posizionale con la base 10 (Barrow, 1999). Queste quantità possono essere scritte in vari modi e convertite tra rappresentazione iconica e simbolica. Il materiale è *variabile*, i simboli possono essere spostati, rielaborati, scambiati e combinati. Gli alunni discutono e verificano le rappresentazioni ottenute. Eventualmente le rappresentazioni possono essere anche fotografate, se devono essere ulteriormente elaborate. La struttura del materiale è funzionale a poter rappresentare e chiarire meglio il sistema posizionale: gli alunni scoprono la logica della scrittura dei numeri nel nostro sistema (Barrow, 1999, p. 162), ciò che con Freudenthal (1991) può essere indicata come «guided-reinvention».
È possibile iniziare l'esperienza prendendo 2-3 fogli A4 e scrivendo ciò che viene proposto nella Figura 4. È possibile proporre ai bambini un gioco di ruolo, nel quale il docente scrive dei numeri e loro devono individuare il criterio adottato.

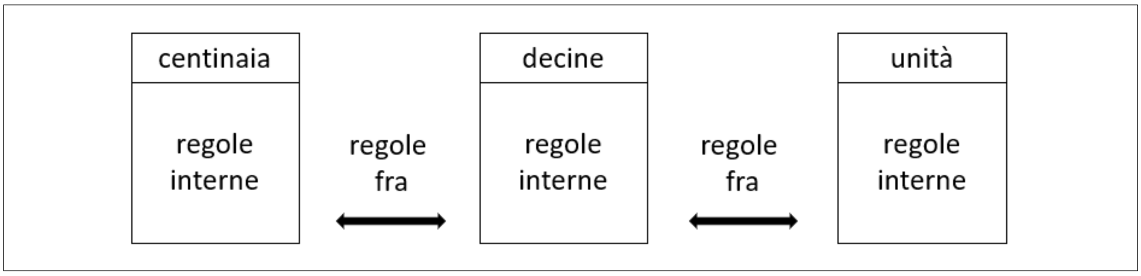


Figura 4. Rappresentazione schematica del sistema di numerazione posizionale con *base* 10.

L'approccio alla logica del sistema di numerazione decimale posizionale proposto nella Figura 4 diventa difficile se gli alunni devono solamente applicare regole date (Barrow, 1999; Reiss & Schmieder, 2005). La base 10, la successione delle potenze di 10, il significato del numero 0, le operazioni aritmetiche, le regole del calcolo (soprattutto le leggi associativa e distributiva) e le convenzioni di scrittura sono elementi aritmetici. La classificazione multipla e la seriazione come l'inclusione di classi (relazione parte-intero), le corrispondenze e le trasformazioni (Piaget & Voelin, 1980) sono schemi di operazioni cognitivo-psicologiche. Ambedue queste dimensioni, che rientrano nell'aritmetica e nella psicologia cognitiva, devono essere tematizzate ed esercitate durante l'intero arco scolastico.

K	+	**H**	+	**Da**	+	**U**	+	**D**	+	**c**
$9 \cdot 10^3$	+	$9 \cdot 10^2$	+	$9 \cdot 10^1$	+	$9 \cdot 10^0$	+	$9 \cdot 10^{-1}$	+	$9 \cdot 10^{-2}$
9 000	+	900	+	90	+	9	+	0,9	+	0,09

Figura 5. Esempio delle varie espressioni del numero 9 999,99.

La Figura 5 spiega la relazione fra i segni simbolici, mostra forme di rappresentazione e di logica che operano in modo astratto. Ma se si vuole superare un'impostazione statica, occorre cambiare il focus. Da questo punto di vista Barrow afferma:

> «I matematici hanno estratto il progresso matematico dagli esempi specifici che hanno usato per la loro introduzione e studiano i concetti di "numero", "forma" o "distanza" come enti astratti. Lo fanno dirigendo la loro attenzione alle operazioni che cambiano i numeri, non sui numeri stessi».
>
> (Barrow, 1999, p. 164, traduzione dell'autore)

La didattica dinamica della matematica orientata all'intuizione dovrebbe dunque lavorare con vari aspetti del numero, rappresentazioni e segni, con il «calcolo ragionato» e con l'«astrazione riflessiva».

Nella **Tabella 1** sono illustrate le connessioni tra i livelli cognitivi secondo Piaget (1977a, 1977b) e Piaget et al. (1990), i livelli cognitivi della comprensione del sistema di numerazione decimale posizionale secondo Ross (1986) e Herzog et al. (2019), i modi di agire nelle varie fasi di insegnamento, le diverse forme di rappresentazione e i cicli della formazione secondo il Piano di studio Lehrplan21[3] (concordato fra i cantoni della Svizzera tedesca). Il contenuto della **Tabella 1** è orientato verso il concetto dell'«accelerazione cognitiva» (Adey, 2008).

<table>
<tr><th colspan="2">Piano 21 (2016, versione modificata)</th><th colspan="2">Psicologia dello sviluppo</th></tr>
<tr><td>Ciclo Età (a.)</td><td>Numero e variabili</td><td>Livello
(Ross, 1986; Herzog et al., 2019)</td><td>Teoria del morfismo
(Piaget et al., 1990)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1

da
4
a
8
anni</td><td>MA.1.A1 Operare e nominare

c) capire e usare i concetti: per, maggiore di, uguale a, minore di, pari, dispari, completare, dimezzare, raddoppiare, decine, unità e i simboli, <, >.
Conoscere i numeri naturali fino a 100, leggerli e scriverli.</td><td>Livello 1 Il numero intero (con 2 cifre) rappresenta l'insieme degli oggetti (tutte le 25 barrette).

Livello 2
Numeri di due cifre rappresentano l'intero insieme (25 barrette). Il bambino "ricerca" significati per le singole cifre.</td><td rowspan="3">Livello intramorfico
(preoperativo)

Solo relazioni fra stati osservabili (5-6 anni).

Livello intermorfico
(operazioni concrete)

Coordinamento sistematico della corrispondenza (tessere, numeri, posizioni), soprattutto di stati ed eventi osservabili (6-10 anni).</td></tr>
<tr><td>MA.1.C2 Matematizzare e rappresentare

c) sanno descrivere il significato delle cifre nel sistema posizionale (es: 5 barrette decine e 7 cubi-unità rappresentano 57).</td><td rowspan="2">Livello 3
I numeri di due cifre rappresentano l'intero insieme di 25 oggetti. Le singole cifre significano decine o unità. Il bambino conosce però in modo solo impreciso come ciò funziona.

Livello 4
I numeri di due cifre (o maggiori) rappresentano l'intero insieme di 25 o più oggetti.

I singoli posti sono parti di numeri interi. Appartengono ai gruppi delle decine e unità. L'intero è uguale alla somma delle parti.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>MA.1.C2 Matematizzare e rappresentare

2) sanno rappresentare il significato delle cifre nel sistema posizionale (es: 2 tessere-centinaia, 5 barrette-decine e 7 cubi-unità rappresentano 257).</td></tr>
</table>

3. È possibile visionare il Piano di studio 21 (Lehrplan21) al sito https://www.lehrplan21.ch.

da 9 a 12 anni	MA.1.B3 Esplorare e argomentare c) per l’esplorazione di strutture aritmetiche possono essere utili tavole particolari (“Stellenwerttafel”, esempio: posizionare e spostare tessere sulla tavola).		
	MA.1.B.1 Esplorare e argomentare i) sanno stabilire connessioni aritmetiche mediante variazione sistematica di numeri, valori posizionali e operazioni e compiere osservazioni	Nuovo: Le potenze di 10 sono messe in tutte le posizioni, anche nei numeri decimali vengono ordinate e spiegate (S. Meyer, 2020b).	
3 da 13 a 16 anni	MA.1.A.1 Operare e nominare i) capire e usare i concetti: termine, variabile, incognita, elevato a, potenza, potenza di 10, segno (+o-), numero positivo, numero negativo, radice (quadrata). Estensione: capire e usare i concetti di base, esponente.	Nuovo: le potenze di base g vengono ordinatamente posizionate, rappresentate e spiegate per mezzo di espressioni algebriche (S. Meyer, 2020b).	**Livello transmorfico** Distacco dagli stati osservabili e operazioni. Costruzione di un sistema astratto operativo, cognitivo.
	MA.1.B.2 Esplorare e argomentare j) saper verificare espressioni algebriche mediante inserimento di numeri.		Sistemi posizionali vengono costruiti algebricamente (da 11 anni).

Tabella 1. Piano di studio 21 (Lehrplan21) (dalla scuola dell’infanzia ai nove anni della scuola obbligatoria) e i livelli di sviluppo cognitivo (S. Meyer, 2020b).

Va considerato che nelle classi c’è diversità nei livelli cognitivi: può succedere che bambini e ragazzi vogliano scoprire ed esaminare i numeri naturali, mentre altri hanno già capito il passaggio ai numeri decimali e alle potenze di 10. È importante interpretare queste differenze come normale diversità e risorsa per stimolare il pensiero operativo nel senso della zona di sviluppo prossimale e della co-costruzione (Vygotskij, 1986; Cuomo, 2007; Adey, 2008).
La **Tabella 1** serve come orientamento nelle fasi di sviluppo e azione e anche nella determinazione dei cicli del Piano di studio Lehrplan21.

5 Stimoli per il rituale dell’aperitivo

I prossimi paragrafi descrivono quali problemi dovrebbero essere affrontati all’inizio del rituale-aperitivo. Occorre rinunciare a stabilire una sequenza sistematica, ma dare spazio alle domande spontanee dei bambini, ai problemi e agli interessi dell’intera classe. Se la classe suggerisse di affrontare più tematiche in un rituale, i gruppi di preparazione potrebbero creare nuovi compiti per rituali futuri.
Il primo passo, detto “borsa fortunata“, raffigura a grandi linee i passi della sequenza. Gli obiettivi vengono tuttavia fissati tenendo conto degli interessi e delle necessità degli alunni e degli insegnanti. Con il tempo si forma un ventaglio di traguardi che andranno elaborati, coordinati e mobilitati al fine

di far sbocciare la comprensione (Deleuze & Guattari, 1977). La curiosità e il piacere di capire sono le forze motrici del sistema operativo che porta al raggiungimento del traguardo. Sorgono domande del tipo: «Lo sai perché è così? Cosa succede, se si addiziona il numero 9,99 con 0,01? E perché succede questo? Chi conosce un problema che non abbiamo ancora affrontato? Perché questo è vero?». Ponendo le domande e rilanciando le risposte, gli insegnanti curano il crescere della comprensione come un giardiniere cura le proprie piantine.

6 Rituale-aperitivo: la "borsa fortunata"

Il rituale della "borsa fortunata" è preparato da gruppetti di allievi secondo uno schema coerente. Il gruppo è responsabile del rituale, del materiale e delle domande dei compiti di riflessione. Durante la preparazione i bambini possono chiedere consigli agli insegnanti o ai compagni. I contenuti rimangono segreti fin quando le "borse fortunate" dell'intera classe sono determinate. La preparazione dei compiti è anche una forma di *preteaching* e di prevenzione (Berg, 2013) soprattutto per allievi con deficit nel vocabolario e nelle prassi. Si esplorano gli interessi e le competenze, si acquisiscono informazioni importanti e conoscenze pratiche e si preparano più chiaramente le prossime lezioni per gli insegnanti e gli studenti.

Figura 6. Esempio di materiale di rappresentazione per la borsa fortunata.

La **Figura 6** mostra un compito della "borsa fortunata". Il gruppo ha scelto di lavorare con un centinaio e 8 unità simbolizzati con numeri romani, come è usanza nei giochi delle carte. L'obiettivo di questo rituale consiste nell'ordinare e interpretare i simboli romani nel sistema decimale posizionale. Un alunno della classe può estrarre le carte dalla borsa fortunata e affiggerle alla lavagna.
Ora i gruppetti discutono in base alle seguenti domande:

1. Di che numero si tratta?
2. Come si scrive questo numero con le cifre indo-arabe?
3. Come potrebbe essere suddiviso il numero dei bastoncini salati a tutta la classe?

Dopo che queste domande sono state discusse nei gruppetti, alcuni relatori dei gruppi mostrano ciò che hanno pensato. Devono scrivere le osservazioni più importanti alla lavagna. L'insegnante incoraggia i gruppi a presentare alla classe tutte le risposte e le riflessioni possibili (*Sharingphase*, Adey, 2008), loda lo spirito di ricerca della classe ed evita di proposito giudizi del tipo giusto-sbagliato. Eventuali conflitti cognitivi vengono registrati per poi essere affrontati nella "scuola del pensiero", che è *un colloquio matematico adattivo* nel quale i gruppi di allievi e la classe intera esplorano il problema registrato per avanzare nella comprensione logica dell'oggetto matematico.

4. Il quarto passo è dedicato all'astrazione riflessiva ("scuola del pensiero"). I gruppetti discutono in riferimento a domande preparate dagli allievi, di tipo metacognitivo. L'insegnante aiuta nel perfezionamento delle domande.

Riportiamo di seguito alcuni esempi:
- Quali pensieri ti mostrano che il numero trovato sia giusto?
- Quali pensieri ti mostrano che le due carte simboliche sono state convertite fedelmente nella scrittura numerica indo-araba?
- Quali pensieri ti mostrano che il numero di bastoncini salati è stato distribuito correttamente alla classe? Con quali pensieri si può valutare che la distribuzione sia avvenuta correttamente?

Ai gruppetti viene chiesto dall'insegnante di rispondere alle domande nel modo più chiaro possibile. L'insegnante si muove tra i banchi, loda i gruppi per i loro sforzi mentali e ripete le domande di tipo metacognitivo. I pensieri metacognitivi vengono a loro volta presentati alla classe e condivisi con gli alunni. L'insegnante interviene nei casi di giudizi corretto-errato dati dai compagni e rafforza deliberatamente i diversi pensieri e la diversità delle motivazioni (Adey, 2008).
Da questo punto di vista, nell'esperienza di Adey (2008) viene mostrato come le domande metacognitive debbano essere intensamente praticate dagli insegnanti e supervisionate. Spesso tali tipi di domande sorgono in modo inconsapevole, quando si pongono domande dopo l'astrazione empirica (Piaget, 1977a, 1977b), ad esempio: «Cos'hai imparato oggi? È stato facile o difficile? Come avete risolto il compito?» ecc. L'astrazione riflessiva ha bisogno di domande, che richiedono ai bambini non solo di raccontare, ma anche di *pensare sul pensare*.
Conflitti e problemi possono essere ripresi dai successivi gruppi di preparazione e integrati in un nuovo "borsa fortunata-compito". Su questo l'insegnante attira l'attenzione della classe: esso è il ponte che conduce a successivi rituali e a scuole del pensiero; questa fase finale, nell'accelerazione cognitiva, è detta «bridging» (Adey, 2008).

7 Tre amici, tre bastoncini salati e valori posizionali

Con un gioco in stile fumetto gli spettatori vengono introdotti nel significato di valore posizionale con l'aiuto di un abaco scolastico. All'inizio vengono distribuiti tre bastoncini salati a tre persone. Un'altra scena mostra un bastoncino salato su una cartina e due bastoncini salati su un'altra. Una persona interpreta ciò che si è visto nella prima scena, ossia che tre bastoncini salati vengono distribuiti a tre persone. Le due altre persone interpretano l'insieme simbolico in relazione al sistema di valori posizionali come una decina e due unità, dunque come numero 12. I 12 bastoncini salati si distribuiscono secondo un criterio di età in questo modo: la persona più piccola ne riceve 3, quella media 4 e la più grande 5. Nasce un conflitto cognitivo e sociale, che richiede una soluzione corretta e che nei gruppi di discussione deve essere esaminata e risolta, si veda https://www.youtube.com/watch?v=ZrQaswrCLwc "Three friends, three salt sticks".
La sequenza filmata permette altre interpretazioni e attività. Queste possono scaturire dalla frase: «Quali numeri possono essere creati, se si mantengono i simboli "I" e "II" oppure "II" e "I", ma si assegnano alle cartine altri valori posizionali?» I bambini esplorano in gruppetti nuovi numeri, come per esempio 21, 1200 ecc., usando i bastoncini salati come simboli.

8 Quanti bastoncini salati ci sono da mangiare se sono presenti cinque segni simbolici?

In questo rituale un numero scritto funge sempre da coefficiente del moltiplicando determinato dalla posizione, che rappresenta anche il traguardo di questo rituale. Nei numeri naturali in base 10 possono essere unità, decine, centinaia, i cui prodotti parziali vengono poi addizionati.
Un gruppo potrebbe preparare il rituale-aperitivo insieme all'insegnante: vengono messi nelle scatole, ad esempio, cinque bastoncini salati e tre fogli A4 che determinano le posizioni. Ogni gruppo di lavoro riceve una scatola. Il compito è il seguente:

> «Quali numeri possono essere trovati con questi cinque bastoncini salati che rappresentano simboli per numeri? Quale sarebbe il numero più piccolo di bastoncini salati per l'aperitivo, quale sarebbe il più grande? Quali numeri tra il più piccolo e il più grande possono essere individuati? Metti i bastoncini salati sui fogli, anche loro si possono suddividere, e scrivi i numeri su un foglio usando le cifre indo-arabe».

Un bambino del gruppo di preparazione potrebbe dare un esempio: con 3 bastoncini salati e 2 fogli di posizione. «Metto 3 bastoncini salati sul foglio delle decine e scrivo il numero 30 sul foglio del protocollo».

9 Che cosa non va se metto una virgola nel simbolo numerico 5 – 0,5?

La percezione e il significato dei segni non stanno fra loro in un rapporto lineare. Il rapporto è determinato dal significato della logica del sistema dei valori posizionali decimali. Questo può essere esaminato mediante il rituale "virgola nel simbolo del numero".
La Figura 7 illustra la rappresentazione del numero decimale 0,5 per mezzo dell'abaco scolastico. Gli alunni hanno imparato che la percezione dei segni non è uguale al significato dei segni e alla logica del sistema posizionale. Hanno inoltre già sperimentato con i numeri naturali il cambiamento di posizione. Il segno "5" può essere collegato quale moltiplicatore in ogni posizione.

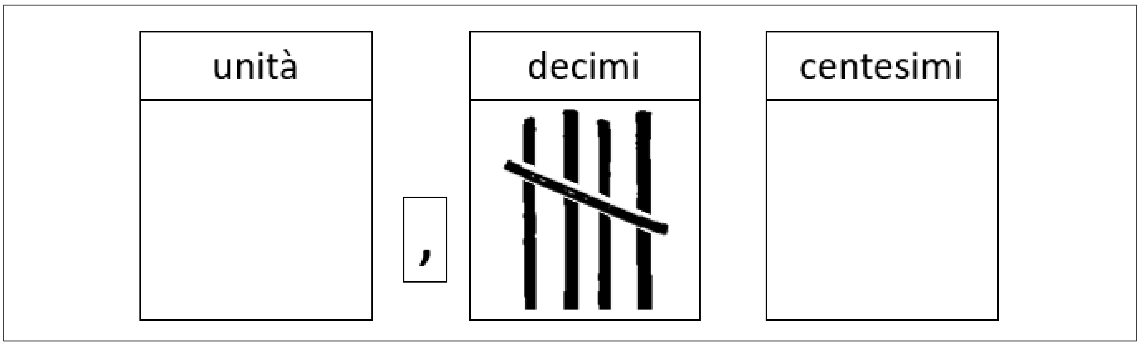


Figura 7. Imparare a percepire e a capire 0,5.

Il traguardo di questo rituale è far sì che gli alunni imparino a sperimentare con rappresentazioni e significati di numeri decimali.

I gruppi di lavoro ricevono una scatola con il materiale descritto nella Figura 7 e le domande. Il gruppo di preparazione legge le domande e le commenta brevemente. Dopo di che le stesse vengono rielaborate dai gruppi:

1. «Di che numero si tratta? Come lo si legge?»
2. «Come si scrive il numero nel sistema numerico indo-arabo?»
3. «Due bambini come potrebbero ripartire correttamente il numero dei bastoncini indicati?»
   Alcuni relatori dei gruppi spiegano come nel loro gruppo hanno risolto il problema. Anche in questo caso gli allievi vengono incoraggiati dall'insegnante a comunicare a tutta la classe più risposte e riflessioni possibili (*Sharingphase*, Adey, 2008). La rinuncia ai giudizi giusto-sbagliato e la lode allo spirito di ricerca della classe sono azioni che l'insegnante deve sempre compiere. I conflitti cognitivi vengono demandati a successive sedute di "scuola del pensiero".
4. Il quarto passo concerne di nuovo l'astrazione riflessiva-metacognitiva. L'insegnante domanda:
   – «Quali pensieri ti dimostrano che il numero trovato 0,5 è corretto?»
   – «Quali pensieri dimostrano che le carte sono state convertite fedelmente nella scrittura numerica indo-araba?» Se avessi cinque bastoncini salati, ne avrei la metà di dieci. Di conseguenza i cinque bastoncini della figura sono anche la metà di uno. Cioè i cinque bastoncini nella posizione dei decimi sono la metà di un bastoncino salato. Ritornando alla domanda: «Due bambini come potrebbero ripartire correttamente il numero dei bastoncini indicati?», i due bambini ricevono ciascuno la metà di un mezzo bastoncino salato, cioè un quarto di bastoncino.

10 Prospettiva

Siamo dunque giunti alla domanda finale: che cosa significa esattamente un rituale-aperitivo? Seguendo le parole di John Dewey (1993) un rituale-aperitivo si può paragonare a un grammo di esperienza della classe nei confronti di una tonnellata di teoria degli insegnanti: «Un'esperienza, anche umile, può generare e portare teoria in qualsiasi misura, ma una teoria senza riferimento a una qualsiasi esperienza non può nemmeno essere determinata e chiaramente compresa come teoria» (Dewey 1993, p. 193, traduzione dell'autore).
Il rituale che abbiamo presentato, così come l'uso di metodi dinamici, producono esperienze di "aritmetica ludica" e di aritmetica esplorativa e guidata. Vengono svolti meno esercizi ripetitivi e in cambio si crea tempo per l'apprendimento attraverso la pratica (*learning-by-doing*), per la ricerca in classe (*inquiry*) e per un rituale comune come quello dell'aperitivo. Il rituale, insieme ai metodi dinamici, approfondiscono la scuola del pensiero insieme alla matematica vissuta.
Queste esperienze condurranno a nuove teorie dell'educazione matematica e contribuiranno a sostenere il concetto che la spontaneità e la creatività sono veicoli essenziali per la comprensione dei problemi di matematica.

Traduzione di Gianfranco Arrigo, Società matematica della Svizzera italiana, Lugano, Svizzera.

Bibliografia

Abrahamson, D., Zolkower, B., & Stone, E. (2020). Reinventing Realistic Mathematics Education at Berkeley – Emergence and Development of a Course for Pre-service Teachers (ICME-13 Monographs). In M. van den

Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 255–277). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_14

Adey, P. (2008). *Let’s Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Arrigo, G. (2014). Calcolo mentale-approssimato-strumentale. *Bollettino dei docenti di matematica, 68*, 53–62.

Barrow, J. D. (1999). *Ein Himmel voller Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit*. Reinbek b. Hamburg: Rowohlt.

Berg, J. L. (2013). Preteaching Strategies to Improve Student Learning in Content Area Classes. *Intervention in School and Clinic, 49*(1), 14–20.

Bodrova, E. (2007). *Tools of the Mind. The Vygotskian Approach to Early Childhood Education* (2nd ed.). New Jersey: Pearson Education Inc.

Brugger, C., Sidler, A., & Meyer, S. (2007). *Stellenwerte des Zehnersystems verstehen*. Rapporto di ricerca inedito (p. 9). Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Bruner, J. S. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung: eine kooperative Untersuchung am „Center for cognitive studies“ der Harvard-Universität*. Stuttgart: Klett.

Cuomo, N. (2007). *Verso una scuola dell’emozione di conoscere. Il futuro insegnante, insegnante del futuro*. Pisa: Edizioni ETS.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1977). *Rhizom*. Berlin: Merve Verlag.

Devereux, G. (1998). *Angst und Methode in den Verhaltenswissenschaften* (4. Aufl.). Frankfurt a.M.: suhrkamp taschenbuch verlag.

Dewey, J. (1993). *Demokratie und Erziehung: eine Einleitung in die philosophische Pädagogik*. Herausgegeben und mit einem Nachwort versehen von Jürgen Oelkers. Weinheim: Beltz.

Dewey, J. (2008). *Logik. Die Theorie der Forschung*. Frankfurt a.M.: suhrkamp taschenbuch verlag.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37–65.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime, Número Especial*, 45-81.

Flick, U. (2006). *Qualitative Sozialforschung* (4. vollständig überarbeitete und erweiterte Neuausgabe.). Reinbek b. Hamburg: Rowohlt.

Freire, P. (2011). *Pedagogy of the oppressed*. New York: Continuum International Publishing Group.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (2., durchgesehene Auflage., Band 1 und 2). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goldstein, S., Princiotta, D., & Naglieri, J. A. (2015). *Handbook of Intelligence: Evolutionary Theory, Historical Perspective, and Current Concepts* (2015. Auflage). Springer.

Gupta, A. (2009). Vygotskian perspectives on using dramatic play to enhance children's development and balance creativity with structure in the early childhood classroom. *Early Child Development and Care, 179*(8), 1041–1054. Routledge. https://doi.org/10.1080/03004430701731654

Gur-Ze'ev, I. (Ed.). (2005). *Critical Theory and Critical Pedagogy Today - Toward a New Critical language in Education* (Studies in Education). Haifa: University of Haifa. Disponibile in: https://www.academia.edu/195758/Critical_Theory_and_Critical_Pedagogy_Today_-_Toward_a_New_Critical_language_in_Education (consultato il 10.10.2020).

Herzog, M., Fritz, A., & Ehlert, A. (2017). Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Eds.), *Handbuch Rechenschwäche* (3., vollständig überarbeitete u. erweiterte Aufl., pp. 266–285). Weinheim: Beltz Verlag.

Herzog, M., Ehlert, A., & Fritz, A. (2019). Development of a Sustainable Place Value Understanding. In A. Fritz, V. G. Haase & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 561–579). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_33

Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974). *Apprentissage et structures de la connaissance*. Paris: Presses Universitaires de France.

Johann, M. (2002). Pumucklzahlen am Abakus. Einsatz des Abakus beim Aufbau des Zahlbewusstseins und des Zahlwortschatzes. *Grundschulunterricht, 6*, 1–5.

Johann, M., & Matros, N. (2003). *Wechselspiele - Kreatives Rechnen am Schulabakus* (2. Auflage). Weinheim: Beltz.

Kamii, C. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic. 3rd Grade*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2000). *Number in preschool & kindergarten* (8th Printing.). Washington: National Association for the Education of Young Children.

Kamii, C. (2004). *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic. 2nd Grade* (2nd ed.). New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 39–50.

Klafki, W. (1996). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemässe Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik* (5. Auflage.). Basel: Beltz Verlag.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Lurija, A. R., & Judowitsch, F. Ja. (1982). *Die Funktion der Sprache in der geistigen Entwicklung des Kindes*. Frankfurt a.M.: Ullstein.

McCabe, U., & Farrell, T. (2020). Play, pedagogy and power: a reinterpretation of research using a Foucauldian lens. *International Journal of Early Years Education, published online, 1-13.* Routledge. https://doi.org/10.1080/09669760.2020.1742669

Meyer, H. (2000). *Unterrichtsmethoden II: Praxisband* (9. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Meyer, S. (2017). Mathematik-Kurz-Test (MKT) 1-9. Flexible Interviews und Blitzrechnen (FI-B). Disponibile in: https://www.hfh.ch/de/unser-service/shop/produkt/mathematik_kurztest_mkt_19 (consultato il 12.10.2020).

Meyer, S. (2019). „Ich bin dein Taschenrechner" - Kritische Exploration und Rollenspiel. Disponibile in: https://flexiinterview.blogspot.com/2019/05/ich-bin-dein-taschenrechner-kritische.html (consultato il 10.10.2020).

Meyer, S. (2020a). Bedeutsame Inhalte in der mathematischen Bildung. Was systemische didaktische Analysen bewirken können. Unveröffentlichter Essay, Zürich.

Meyer, S. (2020b). Muster einer Denkschulung – Das Stellenwertsystem. Wahlmodul 207: Das Denken miteinan der schulen – Cognitive Acceleration, Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Meyer, S., & Wyder, A. (2017). Mathematik-Kurz-Test (MKT) 1-9. Disponibile in: https://www.hfh.ch/de/unser-service/shop/produkt/mathematik_kurztest_mkt_19 (consultato il 10.10.2020).

Moreno, J. L. (1996). *Die Grundlagen der Soziometrie. Wege zur Neuordnung der Gesellschaft* (Unveränderter Nachdruck der 3. Auflage.). Opladen: Leske + Budrich.

Moreno, J. L. (2007). Theorie der Spontaneität-Kreativität. In H. G. Petzold & I. Orth (Eds.), *Die neuen Kreativitätstheorien. Handbuch der Kunsttherapie. Theorie und Praxis* (4. Aufl., Bände 1-II, Band I, pp. 189–202). Bielefeld und Locarno: Edizioni Sirius.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie.* Bern: Haupt-Verlag.

Otero, T. M. (2015). Intelligence: Defined as Neurocognitive Processing. In S. Goldstein, D. Princiotta & J. A. Naglieri (Eds.), *Handbook of Intelligence: Evolutionary Theory, Historical Perspective, and Current Concepts* (pp. 193–208). New York: Springer.

Piaget, J. (1977a). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 1. L'abstraction des relations logico-arithmétiques*. (Études d'épistémologie génétique) (Band 1). Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J. (1977b). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 2. L'abstraction de l'ordre des relations spatiales* (Bände 1-2, Band 2). Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J., Henriques, G., & Ascher, E. (1990). *Morphismes et Catégories. Comparer et Transformer*. Lausanne: Delachaux et Niestlés.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1975). Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde (Bd. 3). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Piaget, J., & Voelin, Cl. (1980). Correspondances et transformations dans le cas de l'intersection. In J. Piaget (Ed.), *Recherches sur les correspondances* (pp. 121- 131). Paris: Presses Universitaires de France.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W.-M., & Kadunz, G. (2016). Semiotics in Theory and Practice in Mathematics Education (ICME-13 Topical Surveys). In N. Presmeg, L. Radford, W.-M. Roth & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 5–29). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2_2

Reiss, K., & Schmieder, G. (2005). *Basiswissen Zahlentheorie.* Berlin: Springer.

Resnick, L. B., Asterhan, C. S. C., & Clarke, S. N. (2018). Accountable Talk: Instructional dialogue that builds the mind. *Educational Practices Series, 29*. International Academy of Education. Disponibile in: http://www.iaoed.org (consultato il 12.10.2020).

Ross, S. H. (1986). The Development of Children's Place-Value Numeration Concepts in Grades Two through Five. Gehalten auf der Annual Meeting of the American Educational Research Association, (ERIC Dokument

Reproduction Service No. ED, 273 482).

Ruflin, A.-L. (2008). *Stellenwert unter erschwerten Bedingungen entdecken: verbessert aktiv-entdeckender und problemlösender Mathematikunterricht das Verständnis der Stellenwerte bei lernbehinderten Schülern der Oberstufe?* Lavoro per il master, inedito. Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Schenker, I. (2018). Die didaktische Unterstützung des kindlichen Spielens durch pädagogische Fachkräfte. In I. Schenker (Ed.), *Didaktik der Kindertageseinrichtungen. Eine systemisch-konstruktivistische Perspektive* (pp. 250–268). Weinheim: Beltz Juventa.

Schuler, M. (2004). *Neue Erfahrungen mit dem Zehnerübergang.* Unveröff. Modul-Leistungsnachweis. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Storch, M. (1996). Kreativität und Psychodrama. Vortrag gehalten auf der 53. Psychotherapie-Seminar vom 22. bis 27. September 1996, Freudenstadt. Disponibile in: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi47Jmfq8zqAhXMi1wKHeSyDGQQFjAAegQIAhAB&url=https%3A%2F%2Fzrm.ch%2Fimages%2Fstories%2Fdownload%2Fpdf%2Fpublikationen%2Fpublikation_storch_19960927.pdf&usg=AOvVaw3k4XHuFuofUakmJNRDXKZH (consultato il 10.10.2020).

Vygotskij, L. S. (1986). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer.

Walser, H. (2020). Kinematische Geometrie. Atelier gehalten auf der Wintertagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik CH, Zürich. Disponibile in: http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20200117/index.html (consultato il 10.10.2020).

Watzlawick, P. (2017). *Menschliche Kommunikation: Formen Störungen, Paradoxien* (13., unveränderte Auflage.). Bern: Hogrefe.

Weltgesundheitsorganisation. (2011). *ICF-CY. Internationale Klassifikation der Funktionsfähigkeit, Behinderung und Gesundheit bei Kindern und Jugendlichen*. Bern: Hans Huber.

Wieser, M., & Ottomeyer, K. (2000). Spontaneität. In G. Stumm & A. Pritz (Eds.), *Wörterbuch der Psychotherapie* (p. 662). Vienna: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-211-99131-2_1804

Wink, J. (2011). *Critical pedagogy: notes from the real world* (4th ed.). New Jersey: Pearson Education.

Wittgenstein, L. (2013). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Werkausgabe Band 6) (9. Auflage.). Frankfurt a.M.: Suhrkamp Verlag.

Wittmann, E. C. (2002). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6. neu bearbeitete Auflage.). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (2020). The Impact of Hans Freudenthal and the Freudenthal Institute on the Project Mathe 2000 (ICME-13 Monographs). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 63–69). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_4

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 48 - 77, DOI: 10.33683/ddm.20.8.3 OPEN ACCESS

L'evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento degli insegnanti di scuola elementare in formazione iniziale

The evolution of preservice primary school teachers' attitudes towards mathematics and its teaching

Monica Panero*, Pietro Di Martino°, Luciana Castelli* e Silvia Sbaragli*
*Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno – Svizzera
°Dipartimento di Matematica, Università di Pisa – Italia

monica.panero@supsi.ch, pietro.di.martino@unipi.it, luciana.castelli@supsi.ch, silvia.sbaragli@supsi.ch.

Sunto / Il percorso formativo come docenti di scuola elementare in didattica della matematica può essere fortemente influenzato da fattori di natura affettiva, che, a loro volta, risultano spesso legati ad esperienze scolastiche negative vissute con la matematica. Il progetto di ricerca-azione qui descritto ha approfondito proprio questo fenomeno, focalizzandosi sui futuri docenti di scuola elementare del Canton Ticino, con un duplice obiettivo: da un lato, progettare e implementare efficaci pratiche formative per lo sviluppo di atteggiamenti positivi verso la matematica e il suo insegnamento; dall'altro, studiare l'evoluzione di tali atteggiamenti nell'arco dei primi due anni della formazione. Sono stati sviluppati specifici interventi didattici e strumenti di osservazione che hanno permesso di rilevare e monitorare gli atteggiamenti degli studenti e di analizzare quali dimensioni – disposizione emozionale, senso di autoefficacia, visione della disciplina (Di Martino & Zan, 2011) – sono state più o meno influenti sul cambiamento di atteggiamento, e su quali componenti quindi la formazione può cercare di intervenire in modo più incisivo ed efficace.

Parole chiave: atteggiamenti; emozioni; autoefficacia; formazione dei docenti; scuola elementare.

Abstract / The training as primary school teachers in mathematics education can be strongly influenced by emotional factors, which, in turn, are often linked to negative school experiences with mathematics. The research-action project described in this article has deepened on this phenomenon focusing on future primary school teachers in Canton Ticino, with a twofold objective: on the one hand, to design and implement effective training practices for the development of positive attitudes towards mathematics and its teaching; on the other hand, to study the evolution of such attitudes during the first two years of training. Specific didactic interventions and observation tools have been developed to detect and monitor students' attitudes and to analyse which dimensions – emotional disposition, sense of self-efficacy, vision of the discipline (Di Martino & Zan, 2011) – have been more or less influential on the change of attitude and on which components therefore training can try to intervene more incisively and effectively.

Keywords: attitudes; emotions; self-efficacy; teacher training; primary school.

1 Introduzione

Il progetto di ricerca-azione "Evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento" (AMI)[1] della durata di tre anni (settembre 2017 – agosto 2020) si è focalizzato sull'analisi dell'evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento da parte dei futuri insegnanti di scuola elementare, anche a seguito di interventi formativi progettati e proposti appositamente per sviluppare o rafforzare un atteggiamento positivo. Il progetto ha coinvolto la coorte di studenti immatricolati nell'a.a. 2017/18 al Bachelor in "Insegnamento per il livello elementare" offerto dal Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI) di Locarno, attraverso un disegno di ricerca longitudinale condotta sui primi due anni di formazione. Il percorso di formazione seguito dagli studenti ha una durata complessiva di tre anni e permette di diventare docenti generalisti nelle scuole elementari del Canton Ticino. Una parte importante e caratterizzante della formazione è la pratica professionale realizzata nelle scuole, dove gli studenti osservano, progettano e realizzano in prima persona percorsi didattici. Sui moduli professionali, in cui gli studenti vengono accompagnati e guidati nella riflessione sulle proprie pratiche e sul proprio sviluppo personale e identitario come futuri docenti, si innestano i moduli di matematica, per orientare le progettazioni e le riflessioni dei futuri docenti verso questioni di natura disciplinare e didattica.
Nel contesto della formazione dei docenti di scuola elementare, come riscontrato in diverse ricerche a livello internazionale (si vedano ad esempio Bursal & Paznokas, 2006; Coppola, Di Martino, Pacelli & Sabena, 2012; Coppola, Di Martino, Mollo, Pacelli & Sabena, 2013; Di Martino & Sabena, 2011; Hannula, Liljedahl, Kaasila & Rösken, 2007; Wood, 1987), molti studenti, pur provenendo da percorsi scolastici diversi tra loro, hanno avuto un'esperienza piuttosto negativa con la matematica, sviluppando un atteggiamento generalmente avverso alla disciplina che può rappresentare un ostacolo al loro percorso formativo come futuri docenti. La ricerca in tal senso evidenzia infatti come un atteggiamento di questo tipo possa «seriamente interferire con il fatto che gli studenti diventino bravi insegnanti di matematica» (Hannula et al., 2007, p. 153, traduzione degli autori), incidendo sia nel percorso formativo per diventare insegnanti, sia nelle loro future scelte didattiche.
Già nel 1978, Mihalko sottolineava l'importanza di rompere il ciclo della "mathophobia" (la fobia della matematica) riconoscendo nella formazione dei futuri docenti il momento cruciale per intervenire: «Non ci si può aspettare che [gli insegnanti di matematica] generino entusiasmo ed eccitazione per una materia per la quale provano paura e ansia. Se vogliamo spezzare il ciclo della fobia della matematica, questo deve accadere nella formazione degli insegnanti» (Mihalko, 1978, p. 36, traduzione degli autori).
La ricerca in didattica della matematica ha iniziato a sviluppare un interesse specifico per lo studio dei fattori affettivi legati alla disciplina a partire dalla metà degli anni '80, con la nascita di un filone di studi focalizzato inizialmente sulle convinzioni (*beliefs*) degli studenti, e nato con l'obiettivo di interpretare, all'interno di attività di problem solving, fenomeni difficili da spiegare in termini puramente cognitivi (Schoenfeld, 1983). In particolare, Schoenfeld (1992) ha messo in risalto come gli studenti vedano e concettualizzino in modo diverso la matematica e come la loro visione della disciplina influenzi il loro comportamento e la loro presa di decisioni mentre affrontano e risolvono un problema matematico. Nello stesso periodo, basandosi sugli studi di Thompson (1992), l'interesse di questo filone di ricerca si è spostato anche sulle convinzioni degli insegnanti riguardo la matematica, mettendo in evidenza come la visione della matematica di un docente influenzi le sue scelte didattiche (Calderhead, 1996; Hodgen & Askew, 2011; Sbaragli, 2006) nonché le interazioni con gli studenti (Buehl, Alexander & Murphy, 2002). Questi studi, incentrati sulle convinzioni di studenti e insegnanti

1. Oltre agli autori di questo articolo, hanno collaborato al progetto Francesca Antonini, responsabile del Bachelor in "Insegnamento per il livello elementare", e Alberto Piatti, direttore del Dipartimento.

riguardo la matematica, sono stati il primo passo per andare oltre a un approccio puramente cognitivo in didattica della matematica, prendendo in considerazione l'influenza di fattori affettivi, quali emozioni, valori, atteggiamenti, oltre a credenze e convinzioni, nel processo di insegnamento-apprendimento (McLeod, 1992).
Questo filone di ricerca ha aperto un campo completamente inesplorato: fino a quel momento infatti le ricerche condotte nel contesto della formazione degli insegnanti si erano focalizzate sul determinare quali saperi disciplinari, didattici e pedagogici, fossero necessari per insegnare la matematica a diversi livelli scolastici, con risultati sicuramente molto interessanti prodotti nel filone di quella che viene chiamata la *Mathematical Knowledge for Teaching* (si veda per esempio Hill et al., 2008). D'altra parte, l'esclusione della sfera affettiva dalle ricerche sullo sviluppo professionale dei docenti (in formazione e in servizio) ha comportato nel tempo importanti lacune nell'interpretazione di fenomeni legati all'insegnamento e all'apprendimento. È ormai infatti assodato che ogni individuo si approccia ai saperi da acquisire e da insegnare in modi personali fortemente dipendenti da aspetti affettivi, quali le emozioni che ha provato e prova nei confronti della disciplina nella sua esperienza come studente, le competenze che crede di possedere, le convinzioni sui contenuti disciplinari da apprendere o da spiegare agli altri e la propria identità come insegnante di matematica.
Nel caso specifico degli insegnanti di scuola elementare, come già in parte accennato, tali esperienze, emozioni e atteggiamenti nei confronti della disciplina hanno spesso una connotazione negativa. Risulta quindi cruciale che un percorso di formazione per futuri docenti di scuola elementare crei le condizioni per rafforzare e sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica e verso il suo insegnamento.

2 Le tre dimensioni dell'atteggiamento

Nel campo della ricerca in didattica della matematica è stato elaborato un modello teorico ormai consolidato che descrive l'atteggiamento nei confronti della matematica come un costrutto tridimensionale (Di Martino & Zan, 2011) composto da *emozioni* associate alla matematica, *convinzioni su sé stessi* in relazione alla matematica e *convinzioni sulla matematica*. L'atteggiamento verso la matematica viene dunque descritto e analizzato considerando tre componenti e le loro mutue relazioni: la *disposizione emozionale*, il *senso di autoefficacia*, la *visione della disciplina*.
La disposizione emozionale verso la disciplina si manifesta tipicamente con espressioni come «Mi piace/non mi piace la matematica perché…»; la percezione di riuscire o non riuscire in matematica, ovvero il senso di autoefficacia individuato in letteratura come "competenza percepita" (Pajares & Miller, 1994), si trova espressa in forme linguistiche del tipo «Riesco/non riesco…»; infine, la visione della matematica è tipicamente introdotta da frasi che cominciano nel seguente modo: «La matematica è…».
Le analisi condotte con il modello tridimensionale dell'atteggiamento (Di Martino & Zan, 2011) hanno mostrato come le tre componenti siano profondamente interconnesse. Sono emerse, in particolare, interessanti relazioni tra disposizioni emotive negative verso la matematica e le altre componenti dell'atteggiamento. Nello specifico, gli studi condotti da Di Martino e Zan hanno mostrato come una disposizione emozionale negativa verso la matematica possa essere dovuta a diversi fattori legati al senso di autoefficacia e alla visione della matematica. Inoltre, il senso di autoefficacia in matematica è strettamente legato alla visione che lo studente ha del successo e dell'errore in matematica (Di Martino & Zan, 2011).
Nei prossimi paragrafi (par. 2.1, 2.2, 2.3) approfondiamo ciascuna delle tre dimensioni del costrutto di atteggiamento verso la matematica preso in considerazione.

2.1 Disposizione emozionale

In ambito educativo, Pekrun e il suo gruppo di ricerca hanno condotto interessanti studi sulle emozioni legate all'apprendimento (Pekrun, 2006; Pekrun, Frenzel, Goetz & Perry, 2007; Pekrun, Vogl, Muis & Sinatra, 2017) considerandole come «processi multidimensionali e coordinati di sottosistemi psicologici, compresi i processi fisiologici affettivi, cognitivi, motivazionali, espressivi e periferici» (Pekrun, 2006, p. 316, traduzione degli autori). Il modello teorico proposto da Pekrun e colleghi risulta sufficientemente flessibile per descrivere e classificare le emozioni associate all'apprendimento, sia relative a situazioni e attività che gli studenti hanno vissuto o possono immaginare di affrontare (emozioni di riuscita legate all'attività ed emozioni epistemiche innescate dalle caratteristiche cognitive del compito), sia relative a risultati ottenuti (emozioni di riuscita legate ai risultati).
A partire da questi studi, e in linea con altre ricerche condotte nello stesso campo (si vedano ad esempio: Raccanello & Brondino, 2017; Russel, 1980), le emozioni possono essere categorizzate come in Tabella 1, distinguendo tra:
– *positive*, se sono piacevoli, e *negative*, se sono spiacevoli;
– *attivanti* o *deattivanti*, a seconda che attivino o meno il soggetto dal punto di vista fisiologico con reazioni quali arrossamento, sudorazione, aumento del battito cardiaco ecc.

	Attivanti	Deattivanti
Positive	Piacere Speranza Orgoglio Gratitudine Sorpresa (in senso positivo) Curiosità	Sollievo Calma Appagamento
Negative	Rabbia Ansia Vergogna Frustrazione Paura Disgusto Confusione	Sconforto Noia Tristezza Delusione Affaticamento

Tabella 1. Categorizzazione delle emozioni legate all'apprendimento.

Usando tali categorizzazioni, Pekrun e colleghi osservano che emozioni positive attivanti nei confronti di un'attività o di un risultato (ad esempio, piacere, speranza e orgoglio) hanno influenze positive sulla motivazione dello studente, lo rendono flessibile nella scelta delle strategie di apprendimento e supportano la sua capacità di autoregolazione, influenzando positivamente nella maggior parte dei casi la sua performance accademica. Al contrario, le emozioni negative deattivanti, come sconforto e noia, possono ridurre la motivazione e la partecipazione dello studente, avendo conseguenze negative anche sulla sua performance (Pekrun, 2006). Per quanto riguarda le emozioni positive deattivanti o quelle negative attivanti, gli effetti sono più complessi da essere interpretati; ciò comporta che tali emozioni possano favorire o al contrario ostacolare l'apprendimento degli allievi (Rowe & Fitness, 2018).
Che le emozioni influenzino l'apprendimento e possano incidere sulle singole prestazioni matematiche è ormai uno dei cosiddetti "solid findings" della ricerca educativa, in particolare di quella matematica (si vedano ad esempio Antognazza, Di Martino, Pellandini & Sbaragli, 2016; Evans, 2000; Hannula, 2002; Op 'T Eynde, De Corte & Verschaffel, 2006).
Per quanto concerne i futuri docenti di scuola elementare, molte ricerche si sono concentrate sulle emozioni negative legate alla matematica, e in particolare sull'ansia, proponendo degli approcci efficaci per ridurre la cosiddetta "ansia da matematica" negli studenti, permettendo così di (ri)costruire un rapporto positivo con la disciplina che saranno chiamati a insegnare (Hannula et al., 2007). Questi

approcci si basano sull'idea di far vivere ai futuri docenti delle esperienze positive con la matematica, proponendo attività manipolative per impararla in modo costruttivo e attività sfidanti di problem solving e di scoperta di congetture e proprietà. Il tutto in un clima d'aula che consacra uno spazio importante alla discussione e alle domande, promuove la riflessione e non stigmatizza l'errore. Tali metodologie possono aiutare i formatori a «fornire loro [agli studenti] l'opportunità di cambiare. [...] possiamo parlare di *dare possibilità* agli studenti, o di *creare occasioni favorevoli al cambiamento* in coloro che soffrono di ansia da matematica» (Hannula et al., 2007, p. 156, traduzione degli autori).
Altri studi dimostrano che paura e ansia sono solo alcune delle emozioni negative provate dagli studenti e che lo spettro di emozioni da rilevare, analizzare e su cui intervenire è molto più ampio. Di Martino e Sabena (2011), in particolare, sottolineano l'importanza di analizzare in modo distinto le emozioni verso la matematica e quelle verso il suo insegnamento come «due facce diverse della stessa medaglia» (Di Martino & Sabena, 2011, p. 91). Tra i risultati di tale ricerca, emerge che le emozioni negative verso l'insegnamento della matematica sono spesso legate al senso di autoefficacia come docente e che questa relazione è da studiare più nel dettaglio.
È stato inoltre evidenziato un fenomeno interessante tra i futuri docenti di scuola elementare che dichiarano un'emozione o un rapporto negativo con la matematica: il desiderio di una *math-redemption* (Coppola et al., 2013), ovvero un senso di riscatto e di rivincita sulle esperienze negative vissute con la matematica nel loro passato come allievi, una volontà di riappacificarsi con la materia, spinti dalla possibilità di insegnarla in modo diverso da quello subìto. Nella formazione dei docenti, individuare, suscitare e supportare questo desiderio appare fondamentale per quegli studenti che hanno maturato una disposizione emozionale negativa nei confronti della disciplina.

2.2 Autoefficacia

Bandura (1997) definisce l'autoefficacia come l'insieme delle convinzioni o percezioni che un individuo ha delle proprie abilità. Nel quadro della sua teoria sociale cognitiva, viene ipotizzato che un individuo sviluppi e maturi le convinzioni sulla propria autoefficacia basandosi su quattro fonti:

– *Mastery experience,* ossia l'interpretazione personale dei propri risultati raggiunti; l'individuo interpreta e valuta i risultati ottenuti, crea e rivisita, in base a tali interpretazioni, giudizi personali sulle proprie competenze acquisite.
– *Vicarious experience*, ossia la misura delle proprie capacità accademiche, grazie al confronto con le performance positive o negative di altri compagni o di adulti scelti come punti di riferimento.
– *Social persuasion*, data dai feedback, dai rinforzi positivi o negativi che lo studente riceve dagli altri (genitori, insegnanti, compagni).
– *Emotional and physiological states*, che lo studente impara a interpretare come un indicatore di competenza personale valutando le proprie prestazioni in diverse situazioni.

Usher e Pajares (2009) hanno ripreso in seguito queste quattro dimensioni, proponendo e validando una batteria di item specifici per misurare ciascuna fonte di autoefficacia nel contesto dell'apprendimento della matematica a livello di scuola media. Tale studio dimostra che le fonti di autoefficacia individuate hanno un impatto significativo anche sulla motivazione e sulla riuscita degli studenti in matematica. Risulta inoltre confermato, come aveva già ipotizzato Bandura (1997), che la *mastery experience* è la più influente tra le fonti di autoefficacia.
D'altra parte, per il contesto di ricerca e intervento del progetto AMI, oltre al senso di autoefficacia in matematica, è interessante monitorare il senso di autoefficacia dei futuri insegnanti di scuola elementare come insegnanti di matematica, ovvero le convinzioni che i futuri docenti possiedono relativamente alle loro abilità e possibilità di insegnare la matematica in modo efficace. L'autoefficacia nell'insegnamento della matematica è sicuramente correlata con l'autoefficacia in matematica (Esterly, 2003; Zuya, Kwalat & Attah, 2016), ma non è sovrapponibile ad essa: la riflessione in questo senso viene avviata e regolata costantemente dal futuro docente nel corso della propria formazione come insegnante nei corsi e seminari e grazie ai feedback che riceve dalla pratica professionale svolta in

classe, mentre progetta, sperimenta e analizza percorsi didattici per gli allievi. È dunque evidente che i percorsi formativi forniti ai futuri docenti di scuola elementare possono incoraggiare in maniera più o meno forte le pratiche riflessive dello studente sul proprio senso di autoefficacia come insegnante di matematica.

Nell'ambito della formazione iniziale dei docenti di scuola elementare, già Kahle (2008) ha condotto una ricerca per esplorare la relazione tra autoefficacia in matematica e autoefficacia nell'insegnamento della matematica, nonché l'influenza di tali fattori sulle pratiche didattiche che i futuri docenti sperimentano in classe nel corso della loro formazione professionale. Kahle (2008) sottolinea quanto sia fondamentale che i futuri docenti abbiano sviluppato in prima persona una forte autoefficacia in matematica e nell'insegnamento della matematica, affinché possano insegnare la matematica creando connessioni tra i saperi in gioco e in modo che i loro allievi non solo imparino delle procedure ma soprattutto comprendano perché esse funzionano.

Zuya et al. (2016) hanno in seguito ripreso le teorie di Bandura (1997) e gli studi di Kahle (2008) e hanno somministrato un questionario per misurare l'autoefficacia nelle due dimensioni – in matematica e nell'insegnamento della matematica – da parte dei futuri docenti di matematica nella scuola secondaria, ottenendo risultati più alti in media per la seconda dimensione rispetto alla prima. Un risultato analogo, forse ancor più accentuato, potrebbe emergere nel caso di studenti in formazione per diventare futuri docenti di scuola elementare, che hanno dunque scelto di diventare docenti generalisti e non specializzati in matematica. Mettere alla prova gli studenti con sfide accattivanti ma sempre alla loro portata (Zuya et al., 2016), così come renderli attivi nel loro apprendimento e nella loro riflessione (Briley, 2012), sono strategie che «potrebbero portare a un cambiamento più duraturo delle loro convinzioni matematiche, dell'autoefficacia in matematica e dell'autoefficacia nell'insegnamento della matematica, che potrebbe proseguire nella loro carriera di insegnanti» (Briley, 2012, p. 10, traduzione degli autori). Tale auspicabile cambiamento, quindi, ha a che fare non solo con le convinzioni che il futuro docente matura su di sé e sul suo essere docente ma anche con le sue convinzioni sulla disciplina che andrà ad insegnare, ovvero con la sua visione della matematica, la terza e ultima dimensione che viene approfondita nel paragrafo seguente.

2.3 Visione della matematica

L'insieme delle convinzioni che un individuo possiede sulla matematica è, come già ricordato, uno dei primi focus di studio nell'ambito della ricerca su *affect* e insegnamento della matematica (Thompson, 1992). Se è vero che metodologicamente non è facile indagare quest'ambito, in quanto gli adulti tendono a non esporsi quando dichiarano le proprie convinzioni in un ambito che considerano sensibile, ed è dunque molto studiato il fenomeno della discrepanza tra convinzioni dichiarate e convinzioni in azione (Raymond, 1996), l'ipotesi alla base degli studi sulle convinzioni degli insegnanti è che la loro visione della matematica possa influenzare fortemente le loro scelte didattiche, così come l'approccio al percorso formativo degli insegnanti in ingresso. Dalla letteratura emergono convinzioni relative alla matematica con cui tipicamente gli studenti si approcciano alla formazione per diventare maestri e che spesso si ritrovano riflesse nel modo di insegnare, e che sono già visibili durante la pratica professionale o successivamente, con l'effettiva entrata in servizio. Handal (2003), nella sua revisione della letteratura, ha rilevato che gran parte degli studenti all'inizio della formazione ritengono che la matematica sia una disciplina basata su regole e procedure da memorizzare, e che in matematica esista solitamente una sola strategia o comunque una strada migliore rispetto a tutte le altre per arrivare alla soluzione, anch'essa solitamente considerata unica, in quanto in matematica ogni cosa è completamente giusta o completamente sbagliata. Altre credenze, tra le più diffuse, inoltre, vedono la matematica principalmente come una disciplina che richiede precisione e velocità, e ritengono che le abilità matematiche siano innate e che si basino sulla logica piuttosto che sull'intuizione. In relazione con queste ultime credenze, vi è la convinzione diffusa che la matematica sia una disciplina complessa e difficile da apprendere.

Dietro ad alcune di queste convinzioni si celano visioni *strumentali* dell'apprendimento della matematica (Skemp, 1976), che si hanno quando la matematica viene vista come un insieme di regole, formule e procedure, e quando fare matematica significa apprenderle e utilizzarle all'occorrenza. Tale visione potrebbe influenzare pesantemente il modo in cui il futuro docente concepisce l'insegnamento della matematica, riducendolo alla semplice presentazione e ripetizione di regole ed esercizi, senza creare alcun legame tra i concetti appresi, e valutando positivamente l'apprendimento mnemonico e la riproduzione di procedure da parte degli allievi.
Al contrario, sarebbe auspicabile che una formazione indirizzata ai futuri docenti di scuola elementare possa contribuire a sviluppare una visione *relazionale* dell'apprendimento della matematica (Skemp, 1976), promossa dai curriculum (nello specifico, dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese: DECS, 2015), in cui ci si interroga sul perché formule e regole funzionino e si è in grado di ricostruirle anche senza ricordarle a memoria, creando e sfruttando connessioni significative tra le conoscenze apprese. Questo modo di vedere la matematica e il suo apprendimento influenza chiaramente anche il modo di insegnarla, portando a una distinzione in due grandi categorie di insegnanti in termini di visione dell'insegnamento della matematica: coloro che lo vedono come un processo cognitivo di stampo costruttivista e coloro che lo intendono come una trasmissione diretta di conoscenze (Staub & Stern, 2002).

3 Ipotesi e finalità del progetto

A partire dall'assunto, già esposto nel par. 1 e confermato dalla letteratura (par. 2), secondo il quale nella maggior parte dei casi gli studenti che intraprendono un percorso di formazione per diventare docenti di scuola elementare hanno spesso un atteggiamento negativo nei confronti della matematica che si ripercuote anche sulla competenza percepita come futuri docenti di matematica, sono state identificate le seguenti ipotesi di lavoro alla base del progetto:
1. il senso di autoefficacia rispetto all'insegnamento della matematica è condizionato dall'atteggiamento nei confronti della matematica del soggetto;
2. l'atteggiamento nei confronti della matematica in tutte le sue tre componenti – emozioni, senso di autoefficacia e convinzioni – può essere modificato anche nella formazione terziaria dei futuri insegnanti attraverso interventi formativi mirati.

Il progetto AMI si è dunque sviluppato su due piani fortemente intrecciati: quello della formazione, finalizzato alla progettazione e all'implementazione di efficaci pratiche educative per lo sviluppo di un atteggiamento positivo nei confronti della matematica da parte dei futuri maestri, e quello della ricerca, finalizzato allo studio della modificabilità nel lungo periodo degli atteggiamenti e dell'efficacia di interventi multipli specificatamente sviluppati.
Questa doppia finalità ha richiesto la progettazione e lo sviluppo non solo di specifici interventi formativi, ma anche di strumenti di osservazione e di analisi per monitorare gli eventuali cambiamenti negli atteggiamenti degli studenti nel corso della formazione.

4 Partecipanti e dispositivo di formazione

I partecipanti allo studio sono 80 studenti iscritti nell'a.a. 2017/18 al primo anno di Bachelor in "Insegnamento per il livello elementare" (in seguito denominato "Bachelor") offerto dal Dipartimento formazione e apprendimento (in seguito abbreviato con DFA) della SUPSI di Locarno. Di essi, 75 risultano iscritti al primo anno per la prima volta e 5 ripetono il primo anno; inoltre, 20 sono maschi e 60 sono femmine, di età media 22 anni.

Come già anticipato nel par. 1, una parte fondamentale della formazione Bachelor è costituita dalla pratica professionale che viene svolta per i primi due anni con una frequenza di un giorno a settimana, salvo i momenti cosiddetti di "pratica blocco", che consistono in una pratica continuativa di tre settimane per ogni semestre effettuata nella classe di un "docente di pratica professionale" che accoglie lo studente e svolge il ruolo di tutor. In questi primi due anni gli studenti osservano alcune attività proposte dal docente di pratica professionale e ne progettano e realizzano altre in prima persona. Al terzo anno di formazione il tempo e l'impegno dedicati alla pratica aumentano notevolmente, poiché agli studenti è data la possibilità di assumere un incarico di docenza in classe a metà tempo (per l'altra metà del tempo sono impegnati a seguire dei corsi di approfondimento al DFA), organizzando e gestendo tutti i momenti in aula da soli con i bambini.

Per quanto riguarda la matematica, la formazione prevede 4 moduli di didattica disciplinare per i primi due anni e il seminario di *Progettazione annuale di matematica* al terzo anno (si veda la Tabella 2 per i dettagli). I moduli e il seminario sono progettati attorno ai tre ambiti disciplinari previsti dal Piano di studio per la scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015) per quanto concerne la scuola elementare: *Geometria, Grandezze e misure, Numeri e calcolo*.

Ogni modulo si compone di due parti:

– *Corsi*. Parti teoriche che si svolgono a grande gruppo (tutti gli studenti dello stesso anno), con modalità il più possibile partecipata e dialogata. Sono basati su approfondimenti di matematica e riflessioni in ambito didattico al fine di riprendere e approfondire lo studio dei saperi di base epistemologici, disciplinari e di didattica della disciplina.
– *Seminari*. Parte applicativa incentrata sulla trasposizione didattica degli elementi teorici dei corsi e sull'uso e l'analisi di strumenti di progettazione per attività e percorsi matematici destinati alla classe. I seminari vengono svolti in piccoli gruppi di 25 studenti circa, in stretto legame con la loro pratica professionale.

Periodo	Moduli inerenti l'area matematica
I anno, I semestre	*Matematica I: fondamenti di didattica della Geometria* (4 ECTS) – Corso *Geometria* (24h) – Seminario *Geometria* (24h)
I anno, II semestre	*Matematica II: fondamenti di didattica di Grandezze e misure* (4 ECTS) – Corso *Grandezze e misure* (24h) – Seminario *Grandezze e misure* (24h)
II anno, I semestre	*Matematica III: la didattica nel I ciclo* (4,5 ECTS) – Corso *Risoluzione di problemi* (12h) – Corso *Numeri e calcolo I ciclo* (24h) – Seminario *Numeri e calcolo I ciclo* (24h)
II anno, II semestre	*Matematica IV: la didattica nel II ciclo* (4,5 ECTS) – Corso *Aspetti dell'apprendimento della matematica nel II ciclo* (12h) – Corso *Numeri e calcolo II ciclo* (24h) – Seminario *Numeri e calcolo II ciclo* (24h)
III anno, I-II semestre	*La progettazione annuale* (6 ECTS), comprende tre seminari: – *La progettazione annuale di italiano* (24h) – *La progettazione annuale di matematica* (24h) – *La progettazione annuale di ambiente* (24h)

Tabella 2. Presentazione dei moduli inerenti la didattica della matematica offerti dal Bachelor.

5 Procedura

Per rilevare e monitorare l'evoluzione degli atteggiamenti degli studenti verso la matematica e verso il suo insegnamento è stato predisposto un disegno di ricerca longitudinale che ha previsto tre momenti di raccolta dei dati (Tabella 3) distribuiti su due anni, a partire da settembre 2017, in parallelo ai momenti di formazione.
La raccolta dei dati per rilevare e monitorare l'evoluzione degli atteggiamenti degli studenti è avvenuta tramite tre questionari (iniziale Q1, intermedio Q2 e finale Q3) e le considerazioni emerse durante le lezioni e gli interventi didattici mirati a lavorare sugli atteggiamenti, che sono stati audio-registrati o annotati.

Fasi	Periodi	Strumenti
Prima Raccolta dei dati in entrata e analisi della situazione iniziale.	Settembre 2017	Q1: Questionario iniziale (Allegato 1)
Seconda Interventi nei moduli della formazione relativi al tema degli atteggiamenti e basati sulla condivisione, discussione e scambio. Progettazione e implementazione di interventi didattici mirati a promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e verso il suo insegnamento. Monitoraggio dell'evoluzione degli atteggiamenti con raccolta di dati intermedi.	Settembre 2017 – maggio 2019 11 gennaio 2018 14 gennaio 2019 Gennaio 2019	Interventi nei moduli previsti dalla formazione. Interventi didattici mirati. Q2: Questionario intermedio (descrizione nel par. 6.2.2)
Terza Raccolta dei dati a conclusione del secondo anno di formazione e analisi della situazione finale.	Maggio 2019 – agosto 2020	Q3: Questionario finale (Allegato 2)

Tabella 3. Fasi, periodi e strumenti del progetto AMI.

Tutti e tre i questionari sono stati somministrati agli studenti attraverso un form online da compilare in forma anonima, in momenti diversi dagli orari delle lezioni; all'inizio dello studio è stato assegnato agli studenti un codice univoco per l'identificazione dei questionari (formato dalle lettere "AMI" e da due cifre numeriche), in modo da poter operare confronti longitudinali fra i dati raccolti nelle diverse fasi. La partecipazione è stata incoraggiata, ma si è svolta su base completamente volontaria: il progetto AMI è stato presentato agli studenti come un progetto di ricerca-azione avente per obiettivo anche quello di supportarli nello sviluppo di un atteggiamento positivo nei confronti della matematica e del suo insegnamento.

6 Strumenti

6.1 Prima fase

Il questionario iniziale Q1 (Allegato 1) è stato progettato allo scopo di indagare l'atteggiamento iniziale degli studenti verso la matematica e la loro *disposizione emozionale* verso il suo insegnamento. Per realizzarlo ci si è ispirati al questionario testato da Coppola et al. (2012), integrandolo con una sezione specifica di item scelti per sondare le fonti di autoefficacia in matematica, riadattando quelli

proposti da Usher e Pajares (2009). Le domande erano suddivise in tre sezioni, ognuna dedicata a una specifica componente dell'atteggiamento.
Più in dettaglio, per quanto riguarda la *disposizione emozionale* sono state poste delle domande aperte, chiedendo di riportare l'emozione provata nei confronti della matematica e nei confronti del suo insegnamento, di qualificare il proprio rapporto con la disciplina, di motivare le risposte fornite e di raccontare un episodio significativo vissuto in relazione alla matematica come allievi.
Per la rilevazione dell'*autoefficacia in matematica* è stata utilizzata una batteria di 24 item, secondo il modello descritto nel par. 2.2, con risposta su scala Likert di accordo a 5 passi (da 1 = totalmente falso a 5 = totalmente vero). Due esempi di item sono «Di solito non ho difficoltà a risolvere problemi di matematica» o «Le persone mi dicono che sono portato per la matematica».
Per la dimensione di *visione della matematica*, è stato chiesto agli studenti di indicare, argomentando, una caratteristica positiva e una negativa della matematica.

6.2 Seconda fase

Dopo aver analizzato la situazione iniziale, si è cercato di favorire lo sviluppo di un atteggiamento positivo sia durante i corsi regolari sia con interventi progettati *ad hoc*, cercando di lavorare sulle tre dimensioni del modello di atteggiamento assunto – disposizione emozionale, senso di autoefficacia, visione – proponendo attività e occasioni di riflessione focalizzate anche solo su una delle tre dimensioni, ma senza perdere di vista la stretta relazione tra esse. Di seguito vengono descritti gli interventi realizzati, distinti tra quelli continuativi abitualmente svolti durante i corsi e i seminari dei moduli regolari e quelli specifici realizzati *ad hoc* per il progetto.

6.2.1 Interventi continuativi nei corsi e nei seminari regolari

Tra gli autori di questo articolo, due ricercatrici sono state docenti di alcuni corsi offerti al primo e al secondo anno della formazione Bachelor, in particolare il corso teorico di *Geometria*, il corso teorico di *Numeri e calcolo I ciclo* e il seminario di *Numeri e calcolo II ciclo* (si veda la Tabella 2).
All'interno di tali moduli, sono state dichiarate fin dall'inizio le finalità principali della formazione:

- cercare di far riappacificare con la matematica coloro che non avevano avuto un buon rapporto e di consolidare o ampliare il rapporto positivo già instaurato da altri;
- accrescere il senso di autoefficacia degli studenti sia in matematica sia nell'insegnamento della matematica;
- identificare e far evolvere convinzioni che relegassero la matematica a una disciplina arida e fatta unicamente di regole, di giusto o sbagliato, senza spazio per la creatività e la scoperta.

Condividere le proprie emozioni. Per lavorare in quest'ottica, si è fatto spesso leva su come gli studenti si sentivano e su come cercavano di gestire le loro emozioni quando nei corsi teorici dovevano riaffrontare saperi matematici di base e negli incontri dei seminari dovevano progettare una lezione di matematica o l'avevano appena proposta in classe. Un esempio paradigmatico può essere rappresentato dal seminario di rientro dalla pratica blocco del quarto semestre, in cui tutto il bilancio dell'esperienza è stato giocato sulle emozioni provate: una selezione di immagini evocative sono state appese alla lavagna e gli studenti dovevano scrivere il proprio nome accanto a quella che rispecchiava maggiormente il proprio percorso. In seguito, immagine per immagine, ognuno di loro è stato invitato, se lo desiderava, a condividere il motivo per cui aveva scelto quell'immagine, che cosa lo aveva colpito, in che modo si legava alla sua esperienza, e se si trattava più di un'emozione positiva o negativa per lui/lei.

Confrontarsi con i compagni e rivalutare l'errore. Nei corsi e nei seminari è stato inoltre favorito il continuo confronto tra i compagni, sia nelle discussioni aperte in aula, sia assegnando compiti da una settimana all’altra per poi costruire la lezione successiva a partire dalle proposte di soluzioni degli studenti, mostrando diverse strategie possibili, anche errate o parziali, e per stimolare la discussione e il confronto. In questo modo, si è voluto anche creare un clima in cui gli studenti si sentissero liberi di proporre una loro strategia, anche se scorretta, parziale o in contrasto con quella di altri compagni, in modo da favorire l’argomentazione e la ricerca di risposte alle diverse problematiche. Si è cercato così di lavorare sulla paura di sbagliare e del confronto con gli altri, per accrescere il senso di autoefficacia in matematica soprattutto nelle dimensioni di *mastery* e *vicarious experience*.

Far emergere e sviluppare le proprie convinzioni. Infine, si è cercato di lavorare in profondità sulle convinzioni degli studenti, così da innescare un cambiamento nel rapporto con la matematica e, più in generale, riflettere sul loro futuro ruolo di docenti di matematica. Per intervenire su visioni negative ed esclusivamente strumentali della matematica, che in alcuni casi portano a vere e proprie misconcezioni in relazione ai diversi nuclei fondanti della matematica oggetto di insegnamento nella scuola elementare, anche i corsi a grande gruppo sono stati impostati come lezioni dialogate, in cui gli allievi sono stati invitati a partecipare alla costruzione dei concetti, a esplorare e provare, a risolvere situazioni e inventarne di nuove, a non aver paura di esplicitare i propri dubbi e le proprie difficoltà. Per riportare alcuni esempi, nel corso teorico *Geometria*, due lezioni sono state dedicate alle misconcezioni più diffuse e difficili da sradicare sulle quali si è riflettuto insieme e durante un incontro gli studenti hanno personalmente realizzato le definizioni dei quadrilateri e la loro classificazione, riflettendo sulle proprietà necessarie e sufficienti per definire una particolare figura; inoltre, ha contribuito a creare un clima di esplorazione in aula anche il fatto che parte del corso sia stato svolto in modalità *flipped classroom*, con video da visionare prima della lezione e attività da svolgere in aula in presenza durante la lezione successiva (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017). Nel corso *Grandezze e misure*, una lezione è stata dedicata a riflettere sulla inesistenza di una relazione tra area e perimetro delle figure piane, basandosi su esempi forniti dagli studenti stessi. Nel corso *Numeri e calcolo*, diverse lezioni sono state dedicate a riprendere i modelli mentali associati alle quattro operazioni, partendo dall’analisi di quanto gli studenti avevano potuto osservare e raccogliere in classe con i loro allievi. Questo modo di far lezione intende portare gli studenti a vedere la disciplina in modo non nozionistico, ma come qualcosa da costruire insieme. Per questo si è cercato di incentivare gli studenti ad affrontare la matematica in gruppo, sia in presenza sia a distanza, così da confrontare i diversi punti di vista e arricchire il proprio sguardo.
Attraverso tali riflessioni si è cercato di far apprezzare questa disciplina anche agli studenti che la ritenevano troppo complessa, portandoli a vedere la complessità come un catalizzatore piuttosto che un freno alla loro immaginazione. Dedicando inoltre del tempo al confronto di diverse convinzioni e diverse strategie risolutive, si è cercato anche di mettere l’accento sulla dimensione del tempo e su quanto sia importante in matematica lasciarlo agli allievi per consentire loro di porsi domande, ragionare, abbandonare strategie risolutive e intraprenderne altre.

Proporre e vivere esperienze positive con la matematica in contesti informali. In questo senso, un’esperienza importante per il rafforzamento e lo sviluppo di un atteggiamento positivo verso la matematica e il suo insegnamento da parte degli studenti è stata la loro partecipazione attiva al festival “Matematicando: a spasso con la matematica per le strade di Locarno”,[2] tenutosi a maggio 2018 a Locarno. Gli studenti, al loro primo anno di formazione, sono stati coinvolti come animatori progettando laboratori e attività durante l’anno accademico per poi realizzarle nelle tre giornate del festival rivolte ad allievi, famiglie, e più in generale all’intera popolazione, con l’intento di promuovere e

2. https://www.matematicando.supsi.ch/eventi/matematicando-festival-2018/.

far vivere esperienze positive con la matematica e rinnovare il fascino per questa disciplina. Per gli studenti si è trattata di un'occasione preziosa per sperimentare modi di apprendere e di insegnare matematica, fuori dall'aula scolastica, come disciplina viva ed emozionante.

6.2.2 Interventi specifici realizzati *ad hoc*

In parallelo al percorso regolare dei moduli di matematica, sono stati organizzati degli incontri specifici per discutere delle emozioni scaturite dalle pratiche in classe o in relazione allo studio di particolari temi. Tali discussioni hanno portano inevitabilmente a toccare anche le altre dimensioni dell'atteggiamento.

Primo incontro. Il primo di questi momenti si è svolto a gennaio 2018 ed è stato introdotto con una classica attività proposta da Brousseau (1981) come esempio paradigmatico di attività a-didattica. Gli studenti sono stati divisi in gruppi di 4-5 persone e hanno ricevuto un puzzle come quello riportato in Figura 1, con la seguente consegna:

> «Dovete costruire un puzzle più grande, simile a quello che vi è stato consegnato: il segmento che misura 4 cm nel modello dovrà misurare 7 cm nella vostra riproduzione. Ciascun componente del gruppo dovrà fare uno o due pezzi del puzzle. Quando ogni componente del gruppo avrà finito il lavoro assegnato, provate a mettere insieme i pezzi e a ricostruire il puzzle ingrandito».

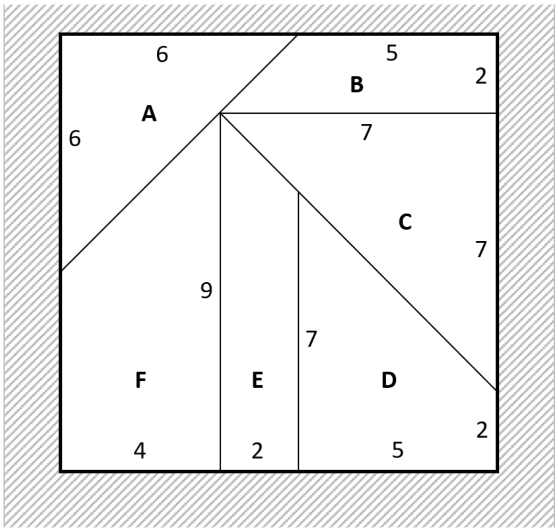


Figura 1. Il puzzle di Brousseau (1981, p. 70).

L'attività mette in gioco aspetti matematici importanti e non banali (a partire dal concetto di similitudine e proporzione) e ingaggia chi la intraprende in una "sfida intellettuale". Il fine è univoco: quello di ricostruire un puzzle e, usualmente, questo fa sì che non entrino in gioco aspetti del contratto didattico legati all'interpretazione della richiesta («Cosa vorrà chiedermi il docente con questa domanda?») o della domanda attesa («Cosa vorrà che risponda?»).
La discussione è stata centrata prevalentemente sulle emozioni, con l'obiettivo però di evidenziare un altro aspetto cruciale: il ruolo dell'errore in un'attività di questo tipo. L'errore infatti non è certificato da un'autorità esterna, ma dal non riuscire a ricostruire il puzzle. L'obiettivo della discussione è stato quello di generare negli studenti una curiosità intrinseca (e rara alla fine di un'attività matematica) relativa a quale fosse l'eventuale errore (o gli errori) e quali le cause. L'errore in questa attività non è

vissuto come un giudizio (negativo) in un certo senso puramente valutativo, ma come un'evidenza che si tramuta in ipotesi di lavoro. La proposta può servire a mostrare come il tipo di attività può creare le condizioni affinché l'errore abbia un carico emozionale legato alla curiosità della scoperta piuttosto che alla paura di sbagliare.

Secondo incontro. Un secondo incontro specifico per parlare delle emozioni provate dagli studenti, della loro origine e del loro eventuale cambiamento si è svolto dopo la somministrazione del questionario intermedio (Q2), costituito dalla seguente domanda aperta: «Che emozione provi ripensando alle attività di matematica che hai proposto nelle tue pratiche in classe? Spiega perché provi questa emozione». Gli studenti hanno avuto una settimana di tempo per rispondere al questionario, poi è seguito un incontro a grande gruppo in aula. All'inizio dell'incontro, gli studenti hanno preso un foglio rosso, verde o giallo a seconda che l'emozione dichiarata nel questionario fosse rispettivamente negativa, positiva, oppure ambivalente. Gli studenti si sono in seguito raggruppati per colore e hanno avviato una discussione sulla base di tre domande stimolo:
– Rispetto all'inizio della formazione, provi le stesse emozioni verso la matematica e verso il fatto che la insegnerai?
– Se sono diverse, in che modo sono cambiate? Secondo te, che cosa le ha fatte cambiare?
– Pensi che i corsi e/o la pratica professionale abbiano avuto un impatto su tali emozioni?

È seguita una discussione aperta in cui liberamente ogni studente ha riportato quanto emerso nei gruppi e ha evidenziato se ci fosse stato un cambiamento nelle emozioni o nel proprio rapporto con la disciplina dall'inizio della formazione e, in caso affermativo, a che cosa fosse dovuto.

6.3 Terza fase

Nel questionario finale (Q3, Allegato 2) sono state riprese alcune domande del Q1, per avere una base comune su cui confrontare le risposte, e altre sono state modificate o aggiunte. Nello specifico:
– nella sezione relativa alla *disposizione emozionale*, è stato nuovamente richiesto di specificare l'emozione provata nei confronti della matematica e del suo insegnamento, motivando la propria risposta, nonché di valutare il proprio rapporto con la disciplina. Diversamente dal Q1, invece, è stato chiesto di raccontare due episodi significativi: uno legato all'esperienza vissuta come studenti del DFA, l'altro vissuto come docenti di matematica durante la pratica professionale;
– nella sezione relativa al *senso di autoefficacia*, è stata di nuovo proposta la batteria di 24 item sulle fonti di autoefficacia in matematica del Q1, ma chiedendo di riferirsi alla propria esperienza come studenti del DFA. In aggiunta, è stata proposta una batteria di 9 item riadattati dalla ricerca di Zuya et al. (2016) per indagare il senso di autoefficacia come docenti di matematica;
– nella sezione relativa alla *visione della matematica e del suo insegnamento*, gli studenti dovevano nuovamente indicare una caratteristica positiva e negativa della matematica, argomentando la propria risposta. In più, è stato chiesto quale caratteristica dovesse avere secondo loro un buon docente di matematica.

In questo articolo, faremo riferimento soprattutto all'analisi dei dati in entrata (Q1) e al termine del secondo anno di formazione (Q3), focalizzandoci in particolare sulle dimensioni della *disposizione emozionale* e dell'*autoefficacia*, analizzando le mutue relazioni tra queste dimensioni e tenendo conto, quando presenti, di riferimenti espliciti alla visione della disciplina e del suo insegnamento. A differenza del Q1, nel Q3 sono state indagate tutte e tre le dimensioni dell'atteggiamento sia verso la matematica sia verso il suo insegnamento. Ciò comporta che nell'analisi longitudinale si potranno confrontare i dati relativi alla disposizione emozionale nei confronti sia della matematica sia del suo insegnamento e quelli relativi al senso di autoefficacia in matematica; per l'autoefficacia nell'insegnamento della matematica invece si potranno fare delle considerazioni in prospettiva e formulare delle ipotesi a partire dai dati raccolti nel Q3. Nell'analizzare questi aspetti, e in particolare la loro eventuale evoluzione nel tempo, ci si servirà anche dell'analisi qualitativa delle motivazioni fornite dagli studenti in riferimento alle emozioni dichiarate.

7 Analisi dei dati e discussione dei risultati

Le analisi condotte riguardano la totalità dei questionari raccolti all'inizio della formazione e alla fine del secondo anno.
Degli 80 studenti partecipanti allo studio, 72 hanno risposto al questionario iniziale (Q1) e 46 al questionario finale (Q3); la variazione nella numerosità del campione dipende da diversi fattori, quali ad esempio gli studenti che hanno abbandonato la formazione, che hanno dovuto ripetere il primo anno o che sono subentrati al secondo anno. I due gruppi di studenti che volontariamente hanno risposto al Q1 e al Q3 sono dunque globalmente diversi: alcuni studenti, infatti, hanno risposto al Q1 e non al Q3 e viceversa, e una parte dei rispondenti (37 studenti) al Q1 ha risposto anche al Q3. I due campioni sono dunque non completamente appaiati ma anche non completamente indipendenti. Un confronto puntuale su tutte le risposte non sarebbe quindi corretto per apprezzare la misura del cambiamento, sarà per questo fatto puntualmente solo sui 37 studenti confrontabili. Allo stesso tempo, però, riteniamo utile osservare i dati globali dei due campioni (risposte al Q1 e al Q3), ipotizzando che ogni eventuale differenza di risultati potrebbe essere imputabile a uno o più fattori combinati fra loro, come ad esempio la differenza di età (i rispondenti al Q3 sono più anziani, quindi con un livello di maturazione individuale presumibilmente più elevato), la differenza nelle esperienze professionali compiute (i rispondenti al Q3 hanno potuto svolgere più ore di docenza in aula rispetto ai rispondenti al Q1), o la differenza nel percorso formativo compiuto, in generale e in didattica della matematica (i rispondenti al Q3 si trovano al termine del secondo anno della loro formazione come docenti).
I paragrafi seguenti sono dedicati all'analisi delle emozioni e del senso di autoefficacia espressi rispettivamente nei confronti della matematica (par. 7.1) e nei confronti dell'insegnamento della matematica (par. 7.2). Dopo una panoramica su tutte le risposte ricevute a entrambi i questionari, si approfondisce il confronto longitudinale delle risposte dei 37 studenti che hanno partecipato sia al Q1 sia al Q3 (par. 7.1.1 e par. 7.2.1) accompagnato da un'analisi qualitativa delle motivazioni (par. 7.1.2 e par. 7.2.2) che gli studenti hanno fornito a supporto delle proprie emozioni. Queste ultime sono analizzate secondo le tre componenti dell'atteggiamento – disposizione emozionale, autoefficacia, convinzioni – identificate dal modello di Di Martino e Zan (2011), per capire quale di esse abbia inciso maggiormente sull'emozione dichiarata e sul suo eventuale cambiamento.

Disposizione emozionale. Per quanto riguarda la disposizione emozionale, le emozioni dichiarate dagli studenti sia nel Q1 sia nel Q3 vengono classificate rispetto alle due dimensioni definite nei lavori di Pekrun e dei suoi collaboratori (2007; 2017), tradotte da Raccanello e Brondino (2017), e integrate con le spiegazioni che accompagnavano le risposte degli studenti:

- *positive* o *negative*, individuando anche quelle *ambivalenti* (se nella stessa risposta compaiono emozioni sia positive sia negative, ad esempio ansia e speranza) e *neutre* (nei casi in cui le emozioni provate non siano classificabili né come positive né come negative, anche a seguito della lettura della motivazione fornita dallo studente: un esempio è l'indifferenza);
- *attivanti* o *deattivanti*.

Autoefficacia. Per quanto riguarda l'autoefficacia in matematica, le analisi preliminari di affidabilità della scala di misura delle fonti di autoefficacia sono state condotte sui dati raccolti con il Q1 e hanno

confermato una buona affidabilità dello strumento, mostrando valori di Alpha di Chronbach superiori a 0,70 e indici di correlazione fra gli item con valori da moderati a elevati. Sono state poi condotte analisi descrittive sui questionari raccolti (Q1 e Q3). Inoltre, per confermare l'ipotesi che le differenze osservate fra i due campioni fossero associabili al percorso formativo compiuto in didattica della matematica, è stata condotta un'analisi di confronto fra medie tramite t-test per campioni appaiati sui 37 casi di studenti che hanno risposto a entrambi i questionari.
Per quanto riguarda l'autoefficacia nell'insegnamento della matematica, le analisi di affidabilità della scala di misura dell'autoefficacia nell'insegnamento della matematica sono state condotte sui dati raccolti con il Q3 e hanno confermato una buona affidabilità della scala, con un valore di Alpha di Chronbach uguale a 0,855. Anche in questo caso sono state condotte analisi descrittive sui questionari raccolti (Q3).
Inoltre, per analizzare il rapporto fra il senso di autoefficacia nell'insegnamento della matematica e le emozioni legate all'apprendimento, è stata condotta un'analisi di confronto fra medie tramite t-test per campioni indipendenti, confrontando i valori medi di autoefficacia nell'insegnamento della matematica fra studenti che hanno riportato un'emozione negativa verso la disciplina e studenti che hanno riportato un'emozione positiva verso la disciplina, basandosi sulle emozioni espresse nel Q3.

7.1 Risultati relativi alla disposizione emozionale e all'autoefficacia in matematica

Emozioni verso la matematica. Il quadro iniziale delle emozioni dichiarate nei confronti della matematica da parte degli studenti si presenta eterogeneo, con una prevalenza di emozioni negative (54,2%), in linea con altri risultati riscontrabili in letteratura (si veda il par. 2). La Tabella 4 mostra la categorizzazione risultante dall'analisi delle 72 risposte raccolte con il Q1.

	Frequenza (%)	Attivanti	Deattivanti
Positive	25 (34,7%)	22: piacere, curiosità, speranza, orgoglio, sorpresa in senso positivo, sfida[3] in senso positivo.	3: appagamento, sollievo, calma.
Negative	39 (54,2%)	31: ansia, paura, vergogna, confusione, rabbia, disgusto, frustrazione.	8: affaticamento, sconforto, delusione, noia, tristezza.
Ambivalenti / Neutre	5 (6,9%)	4: piacere/ansia, piacere/vergogna, sorpresa in senso sia positivo sia negativo, sfida in senso neutro.	1: indifferenza.
Non classificabili[4]	3 (4,2%)	Due studenti scrivono «precisione», uno «intrinseco».	

Tabella 4. Emozioni degli studenti nei confronti della matematica all'inizio della formazione.

Le emozioni ambivalenti o neutre verso la matematica risultano poche (6,9%) rispetto a quelle positive (34,7%) o negative (54,2%): gli studenti sembrano esprimere posizioni nette riguardo alla valenza della loro disposizione emozionale verso la disciplina.
Alla fine del secondo anno di formazione, invece, la situazione si presenta più incoraggiante. Nella Tabella 5 sono riportate le categorie di emozioni rilevate dalle 46 risposte raccolte con il Q3.

3. Si noti che, rispetto a quanto riportato in Tabella 1, si è scelto di considerare anche il senso di *sfida*, emerso dall'analisi di diverse risposte, come emozione di natura epistemica con diverse valenze (positiva o negativa) ma sempre attivante.
4. Le risposte "non classificabili" sono quelle non riconducibili a un'emozione specifica.

	Frequenza (%)	Attivanti	Deattivanti
Positive	27 (58,7%)	26: piacere, curiosità, sorpresa, orgoglio, speranza, sfida.	1: calma.
Negative	16 (34,8%)	13: ansia, paura, vergogna, frustrazione.	3: affaticamento, noia.
Ambivalenti / Neutre	1 (2,2%)	1: piacere/sconforto.	0.
Non classificabili[4]	2 (4,3%)	Due studenti scrivono «calcoli» e «praticità».	

Tabella 5. Emozioni degli studenti verso la matematica alla fine del secondo anno di formazione.

Contrariamente a quanto è emerso dal primo questionario, questa volta sono più le emozioni positive (58,7%) rispetto a quelle negative (34,8%) e si registra un'unica emozione ambivalente.
In termini di attivazione, le emozioni sia positive sia negative verso la matematica risultano perlopiù attivanti (nell'83% dei casi nel Q1 e nel 91% dei casi nel Q3), restituendo un quadro complessivamente positivo, considerato che, come rilevato in letteratura, sono le emozioni negative deattivanti a essere le più rischiose in termini di apprendimento, poiché determinano una diminuzione del livello di motivazione (De Beni, Carretti, Moé & Pazzaglia, 2008).

Autoefficacia in matematica. Per quanto riguarda il senso di autoefficacia, osservando i valori medi calcolati sulle risposte degli studenti riportati in Tabella 6, si può notare che la *social persuasion* è la dimensione con il valore medio più basso (M=2,68), seguita dalla *mastery experience* (M=2,88), entrambi inferiori al valore centrale di 3; il valore medio relativo alla dimensione di *physiological state* è invece il più elevato (M=3,57),[5] mentre il valore medio della dimensione di *vicarious experience* coincide con il valore centrale di 3.

	N.	Media	Deviazione standard
Mastery experience	72	2.8796	.93247
Vicarious experience	70	3.0286	.83308
Social persuasion	72	2.6782	1.00052
Physiological state	72	3.5667	.96765

Tabella 6. Statistiche descrittive per le fonti di autoefficacia misurate al Q1.

All'inizio della formazione i valori di autoefficacia in matematica non sono dunque elevati, ad eccezione del valore legato all'attivazione fisiologica, e mostrano margini di miglioramento.
Al termine del secondo anno di formazione, come si può osservare in Tabella 7, il valore medio più

5. Valori elevati di questa dimensione indicano l'assenza di stati psicofisiologici negativi associati alla matematica (stress, tensione), essendo gli item formulati in modalità invertita.

elevato è quello relativo alla *mastery experience* (M=3,75), seguito da quello di *physiological state* (M=3,24). Ad eccezione del valore medio di *social persuasion* (M=2,96), tutti i valori medi sono al di sopra del valore centrale di 3.

	N.	Media	Deviazione standard
Mastery experience	43	3.7488	.86310
Vicarious experience	43	3.0271	.75762
Social persuasion	43	2.9612	.85127
Physiological state	43	3.2403	.77006

Tabella 7. Statistiche descrittive per le fonti di autoefficacia misurate al Q3.

Rispetto a quanto rilevato nel Q1, si osserva una differenza per i valori di *mastery experience* e di *social persuasion*, che risultano più elevati per il gruppo di rispondenti al Q3. Dal mero confronto dei valori riportati dai rispondenti al Q1 e dai rispondenti al Q3, si è quindi portati ad ipotizzare che sia avvenuto un cambiamento in positivo anche per quanto riguarda i valori di autoefficacia in matematica, ipotesi da confermare con l'analisi di confronto puntuale fra le risposte dei soggetti al Q1 e le risposte degli stessi al Q3, che sarà oggetto del prossimo paragrafo.

7.1.1 Disposizione emozionale e autoefficacia in matematica a confronto

Il grafico in Figura 2 mostra l'evoluzione delle emozioni dei 37 studenti che hanno partecipato sia al Q1 sia al Q3.

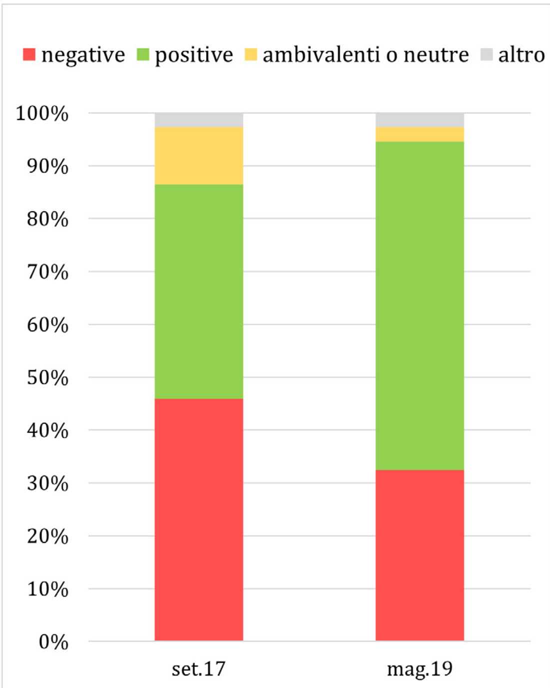


Figura 2. Evoluzione delle emozioni dichiarate dai 37 rispondenti al Q1 e al Q3 verso la matematica.

Dal confronto longitudinale delle emozioni dichiarate verso la matematica emergono:
– 23 casi di emozioni che cambiano in positivo (9) o restano stabili positive (14);
– 12 casi di emozioni che cambiano in negativo (3) o restano stabili negative (9);
– 2 casi non comparabili, perché in uno dei questionari non è stato possibile classificare l’emozione dichiarata.

L’analisi delle motivazioni fornite dagli studenti (si veda il par. 7.1.2) offre interessanti spunti per interpretare le cause di questa evoluzione.

Per quanto riguarda le dimensioni delle fonti di autoefficacia (Tabella 8), si osserva quanto segue:
– un aumento, sebbene contenuto, dei punteggi in tutte le dimensioni nel tempo (i valori medi misurati nel Q3 sono maggiori rispetto a quelli misurati nel Q1);
– una differenza statisticamente significativa per la dimensione di *mastery experience* con una differenza media osservata di 0.74 (su una scala da 1 a 5) ($t=-5.489$, $p<.001$).

	N.	Media	Deviazione standard
Mastery_experience_Q1	35	2.9905	.86880
Mastery_experience_Q3	35	3.7333	.75861
Vicarious_experience_Q1	34	3.0196	.79748
Vicarious_experience_Q3	34	3.0637	.80509
Social_persuasion_Q1	35	2.7714	1.04325
Social_persuasion_Q3	35	3.0571	.82737
Physiological_state_Q1	35	3.7714	.80245
Physiological_state_Q3	35	3.9476	.83115

Tabella 8. Numerosità del campione,[6] media e deviazione standard per ogni dimensione della scala di misura delle fonti di autoefficacia, Q1 e Q3 (dati longitudinali).

Si confermano quindi in parte le differenze osservate nel confronto fra i valori medi riportati dal totale dei rispondenti al Q1 e quelli riportati dal totale dei rispondenti al Q3, ossia un miglioramento nel senso globale di autoefficacia in matematica e in particolare per la dimensione di *mastery experience*: al termine del secondo anno di formazione, gli studenti si sentono quindi più competenti rispetto ai saperi matematici che saranno chiamati a insegnare.

7.1.2 Analisi delle motivazioni a supporto delle emozioni verso la matematica

All’inizio della formazione, le motivazioni con cui i 37 studenti del campione appaiato supportano le emozioni dichiarate verso la matematica richiamano in modo abbastanza omogeneo le tre dimensioni dell’atteggiamento, tutte presenti in misura molto simile sia nel caso di emozioni positive sia nel caso di emozioni negative. La situazione si presenta diversa alla fine del secondo anno della formazione: per le emozioni negative le motivazioni si rifanno primariamente a uno scarso *senso di autoefficacia* (in 9 casi su 12), mentre per le emozioni positive prevalgono giustificazioni legate alla *visione della matematica e del suo insegnamento* (in 15 casi su 23).

6. Due dei 37 studenti del campione appaiato non hanno compilato la parte relativa all’autoefficacia in matematica.

Motivazioni delle emozioni negative. Nelle motivazioni a sostegno delle emozioni negative verso la matematica (17 nel Q1 e 12 nel Q3) si può distinguere la presenza di ciascuna dimensione dell'atteggiamento, come precisato nel seguito.

– *Disposizione emozionale*. Nel Q1, 7 studenti su 17 rafforzano la connotazione negativa attribuita alla loro disposizione emozionale con motivazioni incentrate su uno scarso interesse, un rapporto negativo o esperienze passate negative. Nello specifico, 2 di questi studenti si riferiscono esplicitamente al proprio docente di scuola media o di scuola media superiore come causa esogena di *ansia* perché, come scrive AMI32: «ha portato me e la maggior parte della mia classe a provare ansia nei confronti di una materia che se insegnata bene mi è sempre piaciuta» o di *frustrazione* perché, come afferma AMI69: «mi hanno fatto odiare la materia, in parte perché non la sapevano insegnare in parte perché erano troppo severi». Come vedremo nel seguito, il rapporto di questi due studenti con la matematica è migliorato durante la formazione Bachelor. Nel Q3, 3 studenti su 12 nel motivare l'emozione dichiarata approfondiscono la propria disposizione emozionale negativa, che era già tale nel Q1, riferendosi a un rapporto difficoltoso con la matematica fin dalla scuola media o media superiore, che non è purtroppo migliorato con la formazione. Nel Q3, però, nessuno studente fa più riferimento alla figura dei docenti per motivare emozioni negative.
– *Senso di autoefficacia*. Nel Q1, 7 studenti su 17 motivano la propria emozione negativa con uno scarso senso di autoefficacia in matematica, come accade per AMI74: «*Ansia*. Perché non sono mai in grado di dire se quello che sto facendo sia corretto o meno». Nel Q3, questa dimensione dell'atteggiamento risulta prevalente nelle motivazioni a supporto di emozioni negative, presentandosi in 9 casi su 12. Si tratta di studenti che nel Q1 avevano già dichiarato emozioni negative verso la disciplina e che purtroppo non hanno cambiato il proprio rapporto con essa. Di questi studenti, 4 fanno ancora riferimento a sensazioni provate come allievi alla scuola elementare, media o media superiore, come AMI76: «*Ansia*. Associo questa emozione alla matematica perché mi è capitato spesso di non riuscire a risolvere degli esercizi proposti in classe, come compito o nelle verifiche delle medie o delle superiori. Questo mi procurava molto nervosismo e conseguente ansia per il fallimento». Questo fatto è indicativo perché può significare che tali sensazioni sono così radicate nel vissuto degli studenti che la formazione non è riuscita a scalfirle né ad ammorbidirle. Solo 2 studenti, infine, fanno esplicito riferimento nel Q3 alla formazione ricevuta: entrambi manifestano *paura* per la matematica per il disagio provato durante gli esami o, come scrive AMI09: «di non essere abbastanza pronto sul lato del sapere docente». È in questo gruppo che si ritrovano i 3 studenti le cui emozioni da positive o ambivalenti si sono trasformate in ansia: la loro autoefficacia in matematica, che probabilmente non si è risollevata durante la formazione, ha prevalso sulla visione della disciplina su cui invece si basavano le emozioni positive o ambivalenti iniziali. Questo può essere il caso, ad esempio, di AMI42 che nel Q1 scrive: «*Piacere*. Mi piace molto perché si ha un giusto o sbagliato e mi diverto a fare matematica» e nel Q3 scrive: «*Ansia*. Perché mi sento spesso sotto pressione quando devo risolvere dei calcoli».
– *Visione della matematica e del suo insegnamento*. Nel Q1, in 4 motivazioni riferite alle 17 emozioni negative si ricavano interessanti informazioni sulla visione che gli studenti hanno della matematica all'inizio del loro percorso di formazione: si tratta prevalentemente di una disciplina percepita come complicata, che pone problemi, e proposta con pochi esempi tangibili. Risulta ricorrente nelle risposte degli studenti la sensazione che la matematica sia in qualche modo "cambiata" negli ultimi anni della scuola media o quando hanno iniziato la scuola media superiore, facendo regredire il loro rapporto con la disciplina; 3 di questi studenti attribuiscono tale "cambiamento" al docente o ai suoi metodi di insegnamento. Nel Q3, 1 sola motivazione delle 12 emozioni negative è legata alla visione della matematica, che risulta strumentale come si evince dalle parole di AMI15: «*Ansia*. Ogni esercizio ha una soluzione logica, nulla è interpretativo, quindi se non ricordi una determinata formula o concetto teorico o risoluzione non riesci a risolvere il problema».

Motivazioni delle emozioni positive. Di seguito si precisa, con degli esempi, il riferimento a ciascuna dimensione dell'atteggiamento nelle motivazioni delle emozioni positive verso la matematica (15 nel Q1 e 23 nel Q3).

– *Disposizione emozionale*. Nel Q1, 6 studenti su 15 rafforzano la loro disposizione emozionale positiva verso la matematica facendo riferimento al fascino della disciplina o a interesse e curiosità personali. È questo il caso degli studenti che dichiarano di provare *curiosità* verso la matematica, come AMI08: «Ogni volta che vedo qualcosa di nuovo mi incuriosisco. Con la matematica questo rapporto l'ho avuto fin da piccolo e tutt'ora mi incuriosiscono i vari studi, meccanismi, problemi e operazioni». Motivazioni di questo tipo si ritrovano anche nel Q3 in 7 spiegazioni su 23.
– *Senso di autoefficacia*. Nel Q1, 5 emozioni positive su 15 risultano motivate da un alto senso di autoefficacia in matematica; ciò accade anche nel Q3, seppur con una frequenza più bassa (in 5 casi su 23). Per esempio, è sempre un elevato senso di autoefficacia che porta AMI36 a dichiarare all'inizio della formazione un senso di «*Sfida*. Perché diventa una sfida capire e risolvere le varie situazioni e problemi» e alla fine del secondo anno di formazione «*Piacere*. Perché in genere mi riesce bene svolgere questa materia». Solo uno studente, AMI39, al termine del secondo anno di formazione, fa riferimento alla propria autoefficacia come docente: «*Calma*. Non mi ha mai dato particolari problemi (sia da studente che da docente)».
– *Visione della matematica e del suo insegnamento*. Nel Q1, in 5 casi su 15, le emozioni positive dichiarate sono legate alla visione della matematica come disciplina ludica e divertente perché «si ha un giusto e sbagliato» (AMI42, *piacere*) e piacevole perché «senza ordine e regole non si può fare matematica» (AMI63, *piacere*). Da queste risposte, si deduce che la visione della matematica di questi studenti è di tipo prevalentemente s*trumentale* (nel senso di Skemp, 1976). Anche se ne viene riconosciuta la complessità, la matematica resta una disciplina «complessa ma non impossibile da comprendere» (AMI01, *speranza*). Nel Q3, gli aspetti legati alla visione predominano nelle motivazioni delle emozioni positive verso la matematica (come anticipato, in 15 casi su 23). Ritroviamo in questo gruppo i 9 studenti che all'inizio della formazione provavano un'emozione negativa (7 casi) o ambivalente (2 casi) verso la matematica; dall'analisi delle motivazioni fornite nel Q3 a sostegno della loro nuova emozione positiva verso la matematica, si può notare che per quasi tutti gli studenti (8 su 9), a causare il cambiamento emozionale, è stata una "nuova" visione della matematica e/o del suo insegnamento, che ne esalta gli aspetti più «ludici» e «divertenti». In particolare, 5 di questi studenti affermano che la loro visione della disciplina è cambiata grazie alla formazione, come accade per AMI32: «*Piacere*. Dopo aver cominciato il DFA, la mia concezione della matematica è cambiata, infatti soprattutto pensando alla didattica, mi sono avvicinata molto a questa disciplina» e per AMI69: «*Curiosità*. Perché mi sono accorta che insegnando la matematica scopro sempre più aspetti positivi in questa materia». In relazione a quest'ultimo esempio, può essere interessante osservare che, mentre nel Q1 l'emozione *curiosità* era motivata facendo appello a tratti distintivi della propria indole personale (fascino e interesse), nel Q3 gli studenti che esprimono *curiosità* per la matematica si rifanno più alla visione della disciplina, mettendo in evidenza il carattere epistemico dell'emozione provata. Inoltre, da affermazioni come quelle di AMI32 e AMI69, si evince che lo sviluppo di una visione positiva dell'insegnamento della matematica può innescare efficacemente un cambiamento nella visione della matematica, provocando di conseguenza un'evoluzione nelle emozioni provate dagli studenti nei confronti di questa disciplina.

Motivazioni delle emozioni ambivalenti o neutre. Infine, all'origine delle 4 emozioni ambivalenti nel Q1 e dell'unica emozione ambivalente nel Q3, sembra esservi una disposizione emozionale ambivalente. Ne sono un esempio le motivazioni fornite da AMI44 sia nel Q1: «*Sorpresa*. Scopri di apprezzare alcuni argomenti mentre altri no», sia nel Q3: «*Piacere/sconforto*. Con la matematica è sempre una scoperta, alcune volte mi evoca sentimenti di tranquillità e gioia, altre volte di sconforto». Questo contrasto è dovuto al tipo di compito matematico affrontato, all'argomento trattato o al livello scolastico a cui si fa risalire l'emozione.

7.2 Risultati relativi alla disposizione emozionale e all'autoefficacia nell'insegnamento della matematica

Emozioni. All'inizio della formazione, il quadro delle emozioni dichiarate verso il futuro insegnamento della matematica risulta più positivo (**Tabella 9**) rispetto a quello relativo alla disciplina analizzato nel paragrafo precedente.

	Frequenza (%)	Attivanti	Deattivanti
Positive	47 (65,3%)	44: piacere, speranza, curiosità, orgoglio, sorpresa, sfida.	3: calma.
Negative	5 (6,9%)	5: ansia, paura.	0.
Ambivalenti / Neutre	19 (26,4%)	19: piacere/paura, ansia/piacere, paura/sfida, confusione/piacere, piacere/affaticamento, ansia/sfida, ansia/calma, ansia/speranza, confusione/speranza, confusione/sfida, paura/orgoglio, confusione/piacere; «responsabilità» (neutra).	0.
Non classificabili	1 (1,4%)	Vuota.	

Tabella 9. Emozioni degli studenti verso l'insegnamento della matematica all'inizio della formazione.

Prevalgono le emozioni positive (65,3%) mentre le emozioni negative sono poche (6,9%), ma sono molte quelle ambivalenti (26,4%); cosa che potrebbe essere dovuta al carattere «potenziale» di queste emozioni (Ria & Chalies, 2003), espresse in riferimento a una situazione immaginata, non ancora vissuta, in cui gli studenti si proiettano e che comunque sembra destare nella maggior parte dei casi un misto tra voglia di mettersi in gioco o di riscattarsi e ansia di riuscire a farcela.
Alla fine del secondo anno di formazione, le emozioni positive sono molte di più (76,1%) rispetto a quelle ambivalenti (15,2%) o a quelle negative (8,7%). La **Tabella 10** raccoglie le categorie di emozioni rilevate dalle 46 risposte ottenute con il Q3.

	Frequenza (%)	Attivanti	Deattivanti
Positive	35 (76,1 %)	29: piacere, curiosità, orgoglio, sfida.	6: calma.
Negative	4 (8,7%)	4: ansia.	0.
Ambivalenti / Neutre	7 (15,2%)	5: piacere/ansia, ansia/sfida, paura/sorpresa.	2: indifferenza (neutra).

Tabella 10. Emozioni degli studenti verso l'insegnamento della matematica alla fine del secondo anno.

Si può quindi ipotizzare che la formazione e la pratica professionale abbiano permesso agli studenti di sviluppare competenze e consapevolezza per contrastare l'ansia rispetto all'insegnamento della matematica.
Anche nei confronti dell'insegnamento della matematica prevalgono le emozioni attivanti (nel 94% dei casi nel Q1 e nel 83% dei casi nel Q3) su quelle deattivanti, in particolare lo sono tutte le emozioni

ambivalenti. Inoltre, si noti che l'unica emozione positiva deattivante dichiarata dagli studenti, sia a settembre 2017 sia a maggio 2019, coincide con la *calma*. Risulta interessante analizzarne le diverse motivazioni (si veda il par. 7.2.2).

Autoefficacia. Per quanto riguarda il senso di autoefficacia nell'insegnamento della matematica, che è stato misurato solo nel Q3, i valori rilevati sono, in media, per ogni item della scala e per la scala intera, elevati e superiori al valore centrale 3 (Tabella 11). Gli studenti mostrano quindi una "competenza percepita" (di cui si è parlato nel par. 2) nella rappresentazione di sé stessi come futuri docenti di matematica sufficientemente solida.

	N	Media	Deviazione standard
Troverò continuamente modi migliori per insegnare la matematica.	43	4.51	.703
So come insegnare efficacemente i concetti matematici.	43	3.47	.735
Capisco i concetti matematici sufficientemente bene da sentirmi capace di insegnarli a scuola.	43	3.84	.721
Quando mi troverò ad insegnare la matematica, le domande degli allievi saranno benvenute.	43	4.60	.660
Troverò facile utilizzare strumenti per spiegare agli allievi perché la matematica è utile.	43	4.00	1.024
Credo di avere le competenze necessarie per insegnare la matematica.	43	3.93	.704
Se un allievo ha difficoltà a capire i concetti matematici, credo di poterlo aiutare a capirli meglio.	43	4.05	.688
Ho fiducia nel fatto che posso aiutare gli allievi a padroneggiare nuovi concetti matematici.	43	4.23	.718
Sento che sarò capace di migliorare i risultati degli allievi in matematica attraverso una varietà di metodi di insegnamento.	43	4.05	.688
Autoefficacia (intera scala)	**43**	**4.07**	**.507**

Tabella 11. Numerosità del campione, media e deviazione standard degli item della scala di misura dell'autoefficacia nell'insegnamento della matematica.

7.2.1 Disposizione emozionale verso l'insegnamento della matematica a confronto

Il grafico in Figura 3 mostra l'evoluzione delle emozioni dichiarate dai 37 studenti che hanno risposto sia al Q1 sia al Q3 nei confronti dell'insegnamento della matematica.

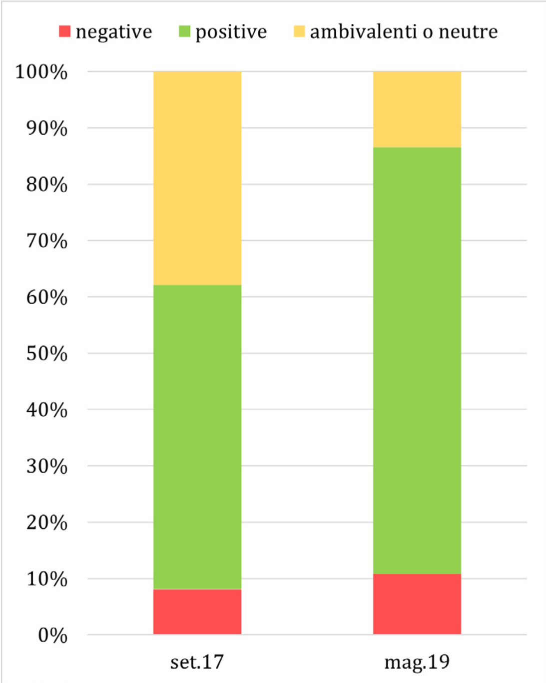


Figura 3. Evoluzione delle emozioni dichiarate dai 37 rispondenti al Q1 e al Q3 verso l'insegnamento della matematica.

Dal confronto longitudinale si riscontrano:
– 29 casi di emozioni che cambiano in positivo (11) o restano stabili positive (18);
– 8 casi di emozioni che cambiano in negativo (4) o restano stabili negative (1) o stabili ambivalenti (3).

L'analisi delle motivazioni fornite dagli studenti (si veda il par. 7.2.2) permette di approfondire le possibili ragioni legate a tale evoluzione.

7.2.2 Analisi delle motivazioni a supporto delle emozioni verso l'insegnamento della matematica

All'inizio della formazione, per motivare le loro emozioni sia positive sia negative gli studenti richiamano e precisano prevalentemente la loro *disposizione emozionale* verso l'insegnamento della matematica. Inoltre, le motivazioni a supporto delle emozioni ambivalenti si riferiscono in modo importante anche al *senso di autoefficacia*. Alla fine del secondo anno, aumentano i riferimenti alla *visione della matematica e del suo insegnamento* soprattutto per le emozioni positive.

Un altro fenomeno interessante che si riscontra nel Q1 è quello della *math-redemption* (Coppola et al., 2013) presente a inizio formazione in 5 studenti su 37, che dichiarano emozioni negative prevalentemente attivanti verso la matematica – quali *ansia, paura, disgusto, sconforto* – ma provano emozioni positive (2 studenti) oppure emozioni ambivalenti (3 studenti), tutte attivanti, verso l'insegnamento della matematica. Nonostante il loro vissuto negativo con la disciplina, questi studenti sperano di riconciliarsi con essa grazie alla formazione, come si evince per esempio dalla motivazione data da AMI07 nel Q1: «*Sfida*. Emozioni contrastanti, quasi di sfida, perché non sono una persona che si scoraggia facilmente. Prenderò questo nuovo percorso come un'opportunità per potermi riappacificare con la materia. Mi piacerebbe poter trovare un nuovo approccio alla materia per potermi divertire». Nell'analisi delle motivazioni presentata in questo paragrafo, risulta particolarmente interessante mostrare come sia evoluta l'emozione di questi 5 studenti nei confronti dell'insegnamento della matematica e, di conseguenza, anche nei confronti della disciplina stessa.

Infine, nelle motivazioni fornite per le emozioni verso l'insegnamento della matematica, gli studenti fanno riferimento sia al proprio atteggiamento sia alle possibili ricadute della propria emozione sull'atteggiamento dei loro futuri allievi, mostrando di possedere una buona consapevolezza su questo aspetto e sensibilità professionale. Ciò accade solo in relazione a emozioni attivanti, indipendentemente dalla loro valenza positiva o negativa, e in particolare quando la motivazione fa riferimento alla disposizione emozionale o all'autoefficacia; quando invece gli studenti richiamano la visione della matematica, si tratta sempre della propria visione e non di quella dei bambini.

Motivazioni delle emozioni negative. Delle 3 emozioni negative verso l'insegnamento della matematica registrate nel Q1, una è motivata da un vissuto poco positivo con la materia, mentre 2 sono giustificate da uno scarso *senso di autoefficacia*, come testimonia AMI61: «*Paura*. Nel senso che non mi sento capace di spiegare a qualcuno qualche nozione di matematica. Non forse per la complessità della materia ma più per il fatto che è difficile dire se si è capito un argomento o meno, finché poi non devi spiegarlo a qualcuno». Nel Q3, per 2 di questi studenti, l'*ansia* e la *paura* si sono trasformate in *calma* e *piacere*. Uno di loro invece è rimasto con un'emozione negativa (*ansia*), aggiungendosi nel Q3 ad altri 3 studenti (si tratta quindi di 4 emozioni negative in tutto per il Q3) che a inizio formazione avevano dichiarato emozioni perlopiù ambivalenti verso l'insegnamento della matematica, con una componente di *ansia* già presente. Quest'ultima ha purtroppo prevalso sulla componente positiva delle loro emozioni: nel Q3 la loro *ansia* viene motivata con la paura di sbagliare e di non riuscire a insegnare adeguatamente determinati concetti matematici. Per questi studenti, evidentemente il senso di autoefficacia come futuri docenti di matematica non è ancora sviluppato su basi solide.

Motivazioni delle emozioni positive. Di seguito si precisa ed esemplifica come ciascuna dimensione dell'atteggiamento sia richiamata nelle motivazioni delle emozioni positive degli studenti verso l'insegnamento della matematica (20 nel Q1 e 28 nel Q3).

– *Disposizione emozionale.* Nel Q1, nella maggior parte delle motivazioni (in 14 casi su 20) gli studenti approfondiscono il carattere positivo attribuito alla propria disposizione emozionale. Nello specifico, 6 di questi studenti sperano di trasmettere il proprio entusiasmo per la disciplina ai loro futuri allievi. Ciò accade anche nel Q3: tra le motivazioni dei 13 studenti sui 28 che fanno appello alla loro disposizione emozionale, 4 si riferiscono alle ricadute sulla disposizione emozionale degli allievi, come AMI76: «*Piacere*. Provo un'emozione positiva proprio perché voglio far appassionare tutti gli allievi a questa materia proponendo attività per loro entusiasmanti che non provochino ansia e nervosismo». Queste parole sono interessanti perché AMI76, e come lei altri 4 studenti, ha provato e prova ancora al termine del secondo anno emozioni negative verso la matematica ancora legate a esperienze vissute alla scuola media e media superiore: anche se il suo rapporto con la matematica è ancora difficoltoso, la formazione sembra essere riuscita ad intervenire sulle sue emozioni verso l'insegnamento della matematica che da ambivalenti nel Q1 sono risultate positive nel Q3. A proposito di riavvicinamento alla disciplina, nei 5 casi di *math-redemption* individuati con il Q1, le emozioni degli studenti verso l'insegnamento della matematica sono rimaste stabili positive o sono passate dall'ambivalente al positivo, rafforzando il senso di sfida che essi vivono come occasione per riappacificarsi con la materia; parallelamente, le loro emozioni verso la matematica sono passate da negative a positive (*sorpresa, speranza* e *piacere*), tranne in un caso in cui è rimasto un senso di *frustrazione* legato all'autoefficacia in matematica (scrive AMI07: «Perché non sono mai riuscita a comprendere a fondo gli argomenti affrontati»).
– *Senso di autoefficacia*. Un alto senso di autoefficacia sembra supportare emozioni positive in 4 studenti su 20 nel Q1 e in 7 studenti su 28 nel Q3. A questo proposito, può essere rilevante osservare che nel Q3 aumentano gli studenti che dichiarano *calma* (l'unica emozione positiva deattivante presente), e lo fanno richiamando prevalentemente (4 studenti su 5) nelle loro motivazioni il senso di autoefficacia nell'insegnamento della matematica. È il caso ad esempio di AMI03 che, facendo riferimento al percorso di formazione, dichiara nel Q3: «*Calma*. Sono riuscita, tra-

mite i corsi proposti, ad approcciarmi positivamente alla materia, ritenendomi maggiormente competente». AMI03 fa parte del gruppo di studenti la cui emozione verso l'insegnamento della matematica ha subito un cambiamento in positivo. Se si analizzano le motivazioni di questi studenti nel Q3, si può notare che il senso di autoefficacia in matematica e nell'insegnamento della matematica gioca un ruolo importante in questa evoluzione.
– *Visione della matematica e del suo insegnamento.* 6 motivazioni su 20 fanno appello alla visione che gli studenti hanno della matematica e del suo insegnamento alla scuola elementare, come una disciplina giocosa, divertente, concreta e al contempo fondamentale per la crescita dei bambini. Ne è un esempio AMI50, che nel Q1 ripone le sue speranze di costruire una visione positiva della matematica nella formazione che sta per iniziare: «*Piacere*. Sono affascinata ed entusiasta, vista la prima lezione di matematica che ho seguito al DFA. Sembra essere un approccio più giocoso e tangibile. Perché sono sempre stata avvolta dal mistero della matematica e spero di poterlo finalmente svelare attraverso il DFA e i bambini»; le aspettative di AMI50 non sono state deluse e anche nel Q3 fa riferimento a una visione della matematica «ludica e divertente» facendo riferimento anche agli «sviluppi con gli allievi nella pratica professionale». Nel Q3, in analogia con quanto riscontrato per le emozioni verso la matematica, sembra incidere molto (per 11 studenti su 28) la visione della matematica e del suo insegnamento che gli studenti dichiarano di aver maturato o cambiato. Per alcuni studenti un aspetto interessante è il riferimento esplicito ai corsi e ai seminari seguiti e alla pratica professionale svolta al DFA, come per AMI07: «*Piacere.* Perché in questi due anni di DFA ho scoperto un nuovo lato della matematica, e cioè che può essere compresa anche in maniera più divertente e ludica» e per AMI42: «*Curiosità*. Perché durante quest'ultimo anno scolastico ho scoperto alcuni aspetti legati al senso della matematica e sono curiosa di scoprirne altri e di poterli presentare anche ai bambini».

Motivazioni delle emozioni ambivalenti o neutre. Segue infine la descrizione, con alcuni esempi, di come ciascuna dimensione dell'atteggiamento sia richiamata dagli studenti nel motivare emozioni ambivalenti o neutre verso l'insegnamento della matematica (14 nel Q1, 5 nel Q3).
– *Disposizione emozionale.* Nel Q1, in 9 delle 14 motivazioni legate a questo tipo di emozione, gli studenti rafforzano il carattere ambivalente della loro disposizione emozionale intrecciandola con le altre dimensioni dell'atteggiamento. Nel Q3, lo stesso accade per 2 motivazioni su 5, come ad esempio quella di AMI41: «*Piacere/ansia*. Sarò confrontata con argomenti e tematiche che ancora non ho veramente avuto modo di approfondire e sperimentare personalmente pertanto sono consapevole che dovrò lavorare molto. In ogni caso sono curiosa di apprendere nuove sfumature dell'insegnamento di questa disciplina».
– *Senso di autoefficacia.* Nel Q1, le emozioni ambivalenti sono riferite al senso di autoefficacia in 9 casi su 14, come per AMI32, che lo richiama a supporto della componente positiva dell'emozione: «*Ansia/sfida*. Sono un po' agitata perché spero di tornarla ad apprezzare come qualche anno fa. Allo stesso tempo sono determinata e convinta che posso farcela! Perché comunque ci tengo ad essere una brava docente […]». 4 di questi studenti si riferiscono inoltre allo sviluppo dell'autoefficacia dei loro futuri allievi. Nel Q3, le emozioni ambivalenti diminuiscono e prevale nelle motivazioni uno scarso senso di autoefficacia a supporto della componente negativa dell'emozione, come testimonia AMI63: «*Ansia/piacere*. Perché nonostante abbia capito i concetti a volte ho paura di sbagliare».
– *Visione della matematica e del suo insegnamento.* Nel Q1, la visione della matematica e del suo insegnamento prevale in 6 motivazioni su 14, e sembra determinare per 4 studenti la componente positiva dell'emozione; è ad esempio il caso di AMI08: «*Piacere/paura*. Entusiasta perché penso che la matematica ci circondi e si possano trovare mille modi per insegnare lo stesso procedimento a diversi bambini, quindi il mio raggio d'azione è presso che infinito. Mentre il timore sorge pensando a come coinvolgere tutti gli allievi e permettere loro di apprezzare la matemati-

ca come faccio io». Nel Q3, ciò accade per 2 motivazioni su 5, di cui una interessante a supporto dell'*indifferenza* (emozione neutra) verso l'insegnamento della matematica: essa viene motivata con una visione della matematica ristretta per quanto concerne la scuola elementare che viene descritta come una «"tipologia" di matematica» (AMI33) fatta di concetti semplici, con cui non si incontrano particolari difficoltà e che, per questo, non spaventa. Queste parole confermano una concezione ricorrente anche in altre spiegazioni, al di là della loro valenza, ossia che la matematica che si insegna e si impara alle elementari sia una "matematica di tipo diverso" rispetto a quella che si apprende alle medie e alle superiori.

8 Conclusioni

In questo studio sono stati indagati gli atteggiamenti dei futuri docenti di scuola elementare del Canton Ticino verso la matematica e verso il suo insegnamento, partendo dalle ipotesi che l'autoefficacia in matematica e nell'insegnamento della matematica siano strettamente legate fra loro nonché alle emozioni provate nei confronti della disciplina e del suo insegnamento, e che su tali aspetti sia possibile lavorare grazie a interventi formativi mirati che considerino, oltre ai saperi disciplinari, didattici e pedagogici, anche gli aspetti affettivi legati alla disciplina.
I risultati hanno messo in evidenza che anche nel contesto ticinese, così come avviene nella maggior parte dei Paesi in cui sono state condotte ricerche simili, l'atteggiamento con cui gli studenti iniziano la formazione per diventare insegnanti di scuola elementare risulta perlopiù negativo nei confronti della matematica: le emozioni iniziali degli studenti sono in gran parte negative e il senso di autoefficacia in matematica generalmente non è elevato. La situazione è invece assai diversa quando gli studenti si riferiscono all'idea di insegnare matematica in futuro: solo pochi manifestano in questo caso emozioni negative, mentre la maggior parte prova emozioni positive o ambivalenti.
Questo risultato è incoraggiante, ma da solo potrebbe non essere sufficiente per sostenere gli studenti nel corso della loro formazione: il percorso dovrebbe essere strutturato in modo da far evolvere gli atteggiamenti positivi dei futuri docenti verso la matematica e verso il suo insegnamento e, di conseguenza, il senso di autoefficacia come futuri insegnanti.
A tale scopo, è risultato efficace progettare interventi che mirassero a sviluppare anche solo una delle tre dimensioni dell'atteggiamento per ottenere effetti positivi sulle altre. Dalle analisi, infatti, è emerso che le emozioni, soprattutto quelle negative, sia verso la matematica sia verso il suo insegnamento, sono legate in maggior misura al senso (scarso, nel caso delle emozioni negative) di autoefficacia in matematica. Per questo motivo, soprattutto nei seminari dei moduli regolari, si è cercato di insistere su questa dimensione di "competenza percepita", invitando ad esempio gli studenti a prendersi il merito della riuscita dei percorsi progettati e implementati, del raggiungimento degli obiettivi prefissati, e aiutandoli a individuare i punti di forza e quelli da migliorare nel lavoro svolto. Peraltro, la capacità di analizzare il proprio operato è uno degli aspetti fondamentali del "Profilo delle competenze"[7] previsto per il Bachelor, indica le competenze ritenute essenziali per iniziare la carriera professionale e che orienta l'impostazione della formazione e il percorso dello studente. Nelle discussioni svolte in classe è stata anche data particolare attenzione al mostrare i diversi processi messi in atto dagli studenti stessi: lo sviluppo di una visione di una matematica che valorizza i processi e le argomentazioni parte anche dalla proposta di attività che permettono strade diverse e dall'enfasi che viene data in fase di discussione a tali strade.

7. Disponibile in: https://www.supsi.ch/dfa/dms/dfa/docs/bachelor/piano-studi-elementare/Introduzione_SE_2017-2018.pdf (consultato il 12.10.2020).

Dal confronto longitudinale sui dati raccolti all'inizio e alla fine della formazione sull'autoefficacia in matematica emergono ulteriori risultati incoraggianti: gli studenti mostrano infatti un accresciuto senso di autoefficacia in matematica, in particolare sulla dimensione di *mastery experience*, che risulta significativamente più elevata alla fine del secondo anno di formazione. Tali risultati sono da interpretare positivamente sia per il valore che ne deriva per la formazione in sé (che quindi sembra essere stata efficace nello stimolare una accresciuta competenza percepita in matematica), sia perché incoraggiano, di nuovo, ad intervenire laddove si hanno maggiori probabilità di miglioramento, per rafforzare anche altri aspetti (nello specifico, le emozioni e il senso di autoefficacia come docenti).
I risultati infatti mostrano un'evoluzione degli atteggiamenti in corso per molti studenti in positivo, ma va anche ricordato che per alcuni studenti tale evoluzione è in negativo; ciò può dipendere dai risultati ottenuti nella formazione o dall'inefficacia della formazione stessa da questo punto di vista. Va infatti tenuto in considerazione che questo progetto ha coinvolto solo alcuni corsi e seminari, e quindi l'azione prevista potrebbe essere approfondita e migliorata. Uno sviluppo futuro di questa ricerca-azione sul piano della formazione potrebbe prevedere di introdurre in tutti i moduli di matematica dei momenti in cui la finalità, in modo ancora più esplicito e strutturato, sia quella di lavorare sull'atteggiamento verso la matematica e il suo insegnamento, in maniera coordinata tra tutti i docenti.
Si sottolinea inoltre che intervenire sul senso di autoefficacia in matematica permette di incidere sul senso di autoefficacia come docenti (e viceversa), e, come dimostrato dalla letteratura, che c'è un legame anche fra l'autoefficacia come docenti e le emozioni verso l'insegnamento della matematica. Le analisi condotte sui dati raccolti hanno infatti consentito di osservare che l'autoefficacia come docenti è diversa negli studenti in funzione dell'emozione associata all'insegnamento della disciplina. Dal confronto condotto sui valori medi di autoefficacia nell'insegnamento della matematica fra studenti che alla fine del percorso di formazione hanno riportato un'emozione negativa o ambivalente in relazione all'insegnamento della matematica, e studenti che hanno riportato un'emozione positiva in relazione all'insegnamento della matematica, è emerso come i primi (studenti con emozioni negative) mostrassero valori mediamente e significativamente ($p<.05$) più bassi ($M=3,65$) degli studenti con emozioni positive ($M=4,21$). Questo test conferma l'esistenza di una relazione significativa fra le disposizioni emozionali verso l'insegnamento della disciplina e la competenza percepita verso sé stessi come futuri insegnanti: per gli studenti che provano emozioni negative verso l'insegnamento della matematica il senso di autoefficacia come docenti è significativamente più basso rispetto agli studenti che provano un'emozione positiva.
Un altro dato interessante che emerge dalla ricerca è che il ruolo della visione della matematica risulta cruciale nelle spiegazioni degli studenti che alla fine del secondo anno di formazione hanno manifestato emozioni positive verso la matematica. Il ruolo di questa dimensione è stato confermato dal confronto longitudinale. La visione della matematica sembra essere così uno dei principali elementi su cui la formazione può intervenire con ampi margini di miglioramento per poter ottenere un effetto indiretto anche sulle emozioni e sull'autoefficacia. A questo scopo, come già osservava Kahle (2008) nella sua ricerca sull'autoefficacia, nei corsi di formazione non è sufficiente proporre approcci concettuali che possano essere riprodotti nelle classi, ma è essenziale aiutare prima di tutto gli studenti a fondare su solide argomentazioni concettuali la loro competenza procedurale in matematica e come docenti. Per fare questo, come sembra essere risultato efficace nel progetto AMI e in linea con altre ricerche (ad esempio, Rolka, Rösken & Liljedahl, 2006), è necessario offrire occasioni di riflessione agli insegnanti in formazione, chiedendo di (ri)costruire regole e formule nella loro dimensione teorica (come teoremi che derivano da altri assunti e che hanno dei "perché"), e di riflettere sulle connessioni tra i diversi concetti ripresi e studiati.
Studi futuri potrebbero approfondire alcuni aspetti toccati da questo progetto. In particolare, sarebbe auspicabile impostare un disegno di ricerca longitudinale che consenta di verificare l'ipotesi che la formazione (generale e specifica) in didattica della matematica abbia un'influenza sul senso di autoefficacia come docenti, ipotesi che il presente studio consente di formulare ma non di confermare.

Inoltre, potrebbe essere interessante identificare i momenti e i dispositivi di formazione più efficaci di altri nello sviluppo o nel consolidamento di dimensioni specifiche dell'atteggiamento verso la matematica e verso il suo insegnamento. Ulteriori ricerche potrebbero rilevare le emozioni legate alla disciplina in modo differenziato rispetto alle condizioni possibili di apprendimento (riuscita, in situazione, epistemiche ecc.). Infine, si dovrebbe mirare a coinvolgere un numero di soggetti più elevato e garantirne il coinvolgimento fino al termine del progetto, attraverso accorgimenti metodologici come, ad esempio, prevedere la compilazione dei questionari durante l'orario di lezione.
Nonostante la ricerca in oggetto non abbia potuto approfondire tutti questi aspetti, riteniamo che il percorso progettato e implementato sia risultato molto significativo per le diverse figure coinvolte: docenti, ricercatori e studenti, in quanto ha consentito di focalizzare l'attenzione su aspetti, solitamente sottovalutati dalla quotidianità didattica, che consentono di considerare la formazione dei docenti di scuola elementare nella sua ricca complessità.

Ringraziamenti
Si ringraziano gli studenti del Bachelor in "Insegnamento per il livello elementare" per la loro partecipazione e per il loro coinvolgimento nel progetto di ricerca.

Bibliografia

Antognazza, D., Di Martino, P., Pellandini, A., & Sbaragli, S. (2016). The flow of emotions in primary school problem solving. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1116-1122). Charles University in Prague, Faculty of Education.

Bandura, A. (1997). S*elf-efficacy: The exercise of control.* New York: Freeman.

Briley, J. S. (2012). The relationships among mathematics teaching efficacy, mathematics self-efficacy, and mathematical beliefs for elementary pre-service teachers. *Issues in the undergraduate mathematics preparation of school teachers, 5*, 1-13.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactiques des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(1), 37-125.

Buehl, M., Alexander, A., & Murphy, P. (2002). Beliefs about schooled knowledge: Domain general or domain specific? *Contemporary Educational Psychology, 27*(3), 415-449.

Bursal, M., & Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics, 106*(4), 173-180.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 709-725). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: a crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 17*(3-4), 101-118.

Coppola, C., Di Martino, P., Mollo, M., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013). Pre-service primary teachers' emotions: the math-redemption phenomenon. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 225-232). Kiel, Germany.

De Beni, R., Carretti, B., Moé, A., & Pazzaglia, F. (2008). *Psicologia della personalità e delle differenze individuali*. Il Mulino.

DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Tratto da ScuolaLab: Disponibile in http://www.pianodistudio.ch (consultato il 09.10.2020).

Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI* (pp. 89 – 105). Tallinn university.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM, 43*(4), 471–482.

Esterly, E. J. (2003). *A multi-method exploration of the Mathematics teaching efficacy and epistemological beliefs of elementary preservice and novice teachers*. Unpublished PhD dissertation in the Graduate School of the Ohio State University.

Evans, J. (2000). *Adults' mathematical thinking and emotions: a study of numerate practices*. London: Routledge Falmer.

Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator, 13*(2), 47–57.

Hannula, M. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics, 49*(1), 25-46.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Roesken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 153 – 156). Seoul: PME.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and instruction, 26*(4), 430-511.

Hodgen, J., & Askew, M. (2011). Emotion, Identity and Teacher Learning: Becoming a Primary Mathematics Teacher. In C. Day & J. C. K. Lee (Eds.), *New understandings of Teacher's Work: Emotions and Educational Change* (pp. 165-183). London: Springer.

Kahle, D. K. (2008). *How elementary school teachers mathematical self-efficacy and mathematics teaching self-efficacy relate to conceptually and procedurally oriented teaching practices* (Doctoral dissertation, The Ohio State University).

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 575–596). New York: MacMillan.

Mihalko, J. C. (1978). The answers to the prophets of doom: mathematics teacher education. In D. B. Aichele (Ed.), *Mathematics teacher education: critical issues and trends* (pp. 36 – 41). Washington: National Education Association.

Op 'T Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2006). Accepting Emotional Complexity: A Socio-Constructivist Perspective on the Role of Emotions in the Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 193-207.

Pajares, F., & Miller, D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: a path analysis. *Journal of Educational Psychology, 86*(2), 193-203.

Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational psychology review, 18*(4), 315-341.

Pekrun, R., Frenzel, A. C., Goetz, T., & Perry, R. P. (2007). The control-value theory of achievement emotions: An integrative approach to emotions in education. In P. A. Schutz & R. Pekrun (Eds.), *Emotion in education* (pp. 13-36). Amsterdam: Academic Press.

Pekrun, R., Vogl, E., Muis, K. R., & Sinatra, G. M. (2017). Measuring emotions during epistemic activities: the Epistemically-Related Emotion Scales. *Cognition and Emotion, 31*(6), 1268–1276.

Raccanello, D., & Brondino, M. (2017). *Achievement Emotions Adjective List (AEAL): User's Manual*. Unpublished manuscript.

Raymond, A. M. (1996). The development of preservice elementary teachers' beliefs about and knowledge of alternative mathematics assessment. *Paper presented at Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Panama City, Florida, 1996.

Ria, L., & Chalies, S. (2003). Dynamique émotionnelle et activité: le cas des enseignants débutants. *Recherche et formation, 42*, 7-19.

Rolka, K., Rösken, B., & Liljedahl, P. (2006). Challenging the mathematical beliefs of preservice elementary school teachers. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 441-448.

Rowe, A. D., & Fitness, J. (2018). Understanding the role of negative emotions in adult learning and achievement: A social functional perspective. *Behavioral sciences, 8*(2), 27.

Russell, J. A. (1980). A circumplex model of affect. *Journal of personality and social psychology, 39*(6), 1161-1178.

Sbaragli, S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 5*(2), 49-76.

Sbaragli, S., Carotenuto, G., & Castelli, L. (2017). *Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze (FliSCo)*. Rapporto interdipartimentale dell'Asse 8. Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana, Locarno.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Beliefs system, social cognition, and metacognition as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*, 329–363.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In A. D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of educational psychology, 94*(2), 344-355.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. In A. D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 127-145). New York: Macmillan Publishing Company.

Usher, E. L., & Pajares, F. (2009). Sources of self-efficacy in mathematics: A validation study. *Contemporary Educational Psychology, 34*, 89-101.

Wood, E. (1987). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us? *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 8–13.

Zuya, H. E., Kwalat, S. K., & Attah, B. G. (2016). Pre-Service Teachers' Mathematics Self-Efficacy and Mathematics Teaching Self-Efficacy. *Journal of Education and Practice, 7*(14), 93-98.

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 79 - 91, DOI: 10.33683/ddm.20.8.4

OPEN ACCESS

Interpretare dati, discutere e riflettere insieme: esperienze didattiche in IV e V primaria

Interpreting data, discussing and reflecting together: teaching-learning experiences in grades 4 and 5

Franca Ferri*, Francesca Martignone•, Elisabetta Robotti° e Cristina Sabena▴
* Insegnante di scuola primaria – Italia
• Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica, Università del Piemonte Orientale – Italia
° Dipartimento di Matematica, Università di Genova – Italia
▴ Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino – Italia

franca.ferri.169@gmail.com, francesca.martignone@uniupo.it, robotti@dima.unige.it, cristina.sabena@unito.it

Sunto / In questo lavoro si presentano e analizzano due esperienze didattiche rivolte alle classi IV e V primaria, incentrate sull'interpretazione di dati e sulle loro rappresentazioni grafiche. Queste esperienze si inseriscono in un percorso più ampio che mira a costruire le basi per educare cittadini consapevoli, capaci di utilizzare strumenti scientifici per interpretare le informazioni a loro disposizione e di prendere, di conseguenza, decisioni fondate su basi solide.
Si tratta di attività contestualizzate nella normale vita di classe dei bambini, che rendono i problemi di indagine fortemente motivanti. Mostreremo come nel contesto scelto l'interpretazione di dati consenta di avviare interessanti discussioni matematiche in cui gli studenti si confrontano, generano ipotesi esplicative e producono argomentazioni.

Parole chiave: interpretazione di dati; rappresentazioni grafiche; argomentare; discussione matematica; generazione di ipotesi.

Abstract / In this work, we present and analyze two didactic experiences realized in grades 4 and 5, focused on data interpretation and their graphic representations. These experiences are part of a wider path aimed at building the basis for educating citizens who are able to interpret the information available to them and to make sound and appropriate decisions.
These activities are contextualized in the normal classroom life of children, which make the problems of investigation strongly motivating. We will show how in the chosen context the interpretation of data allows interesting mathematical discussions in which students confront each other, formulate hypothesis and produce argumentations.

Keywords: data interpretation; graphical representations; argumentation; mathematical discussion; hypothesis generation.

1 Introduzione e riferimenti teorici

La situazione di emergenza che abbiamo vissuto in questo anno di pandemia da COVID-19 (2019-2020) ha reso ancor più evidente la necessità di formare cittadini consapevoli che siano in grado di prendere decisioni opportune interpretando dati e informazioni, spesso forniti con rappresentazioni grafiche e descritti attraverso indici statistici. In questo articolo presentiamo due esperienze didattiche, svolte in una scuola primaria[1] (in IV e successivamente con gli stessi studenti in V), che riguardano la lettura e l'interpretazione di dati come punto di partenza per lo sviluppo di riflessioni e argomentazioni che coinvolgono gli alunni della classe su un problema vicino alla loro esperienza: l'interpretazione dei dati relativi a punteggi ottenuti nelle prove di verifica di matematica.
Nella scuola primaria le esperienze didattiche che riguardano la lettura e l'analisi di dati reali possono diventare dei contesti in cui gli studenti sono chiamati a riflettere per capire meglio il loro mondo. Il contesto, essenziale per la statistica, ha spesso un effetto positivo sulla motivazione e sul coinvolgimento degli studenti (Gattuso & Ottaviani, 2011). Gli studenti che ragionano su dati reali che hanno un senso per il loro vissuto diventano curiosi e spesso vanno al di là di ciò che è stato loro chiesto di fare (Kranendonk, 2006). Infatti, il loro coinvolgimento potrà essere maggiore in attività in cui si sentono in qualche modo vicini e legati ai dati che analizzano.
Nelle *Indicazioni Nazionali*, così come già nel documento UMI *Matematica 2001*, vi sono numerosi riferimenti ai contesti reali dove immergere gli studenti in situazioni complesse:

> «Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola».
> (MIUR, 2012, p. 49)

> «[…] l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, non unicamente come bagaglio di nozioni».
> (U.M.I., 2001, p.7)

In questo modo la matematica presente nell'extrascolastico e la matematica "scolastica" non sono viste come entità separate e non comunicanti, bensì come mondi dialoganti (Gravemeijer, 1999).
L'importanza della probabilità e della statistica all'interno dell'insegnamento della matematica è ormai nota, come sono ormai condivise le singole peculiarità disciplinari e i relativi punti in comune con il pensiero matematico (Ottaviani, 2008; Ben-Zvi, 2014). Educare alla lettura dei dati, così come alla loro interpretazione e utilizzo, è pertanto un obiettivo didattico fondamentale fin dalla scuola primaria. Infatti, uno dei traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria è «L'alunno […] ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici» (MIUR, 2012, p. 49) e negli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria leggiamo:

> «Rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni. Usare le nozioni di frequenza, di moda e di media aritmetica, se adeguata alla tipologia dei dati a disposizione».
> (MIUR, 2018, p. 51)

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

Più recentemente, nei documenti ministeriali è stato evidenziato che la statistica può essere un «efficace "*cavallo di Troia*" per avvicinare gli alunni alla matematica e alla sua potente capacità di spiegare e interpretare il mondo, con spirito critico e con il supporto di dati alle opinioni» (MIUR, 2018, p. 12, enfasi come nell'originale). L'introduzione di riflessioni sui dati e sugli indici statistici può quindi divenire utile veicolo per promuovere spirito critico e competenze argomentative.
Inoltre, l'analisi di dati tratti dalla realtà permette di rivisitare, arricchire di senso e consolidare in contesti concreti e motivanti anche contenuti matematici già noti agli allievi. Ad esempio, nelle esperienze che descriveremo si affronteranno attività in cui è richiesto di riflettere sul calcolo della media aritmetica, concetto già conosciuto dagli studenti coinvolti nell'esperienza. Se pensiamo ai *concetti matematici* come costituiti da situazioni di riferimento, schemi e rappresentazioni (Vergnaud, 1992), in questo caso il concetto di media ha come riferimento i dati relativi a punteggi numerici ottenuti proprio dagli studenti. I dati numerici, che sono anche rappresentati dalla docente in un diagramma a barre, devono poi essere manipolati attraverso schemi relativi al calcolo dei diversi indici statistici, il cui valore sarà oggetto di discussione collettiva per riflettere sul loro significato e sulle informazioni che possono dare. Facciamo qui riferimento alla *discussione matematica* intesa come «una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento» (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995, p. 7). Nella discussione matematica l'insegnante ha un ruolo fondamentale poiché non solo progetta una particolare discussione all'interno delle attività della classe, ma assume il ruolo di guida, quindi può influenzarla con interventi mirati. L'insegnante in questa «polifonia di voci» rappresenta la voce della cultura, e introduce quindi un punto di vista che spesso è diverso da quello degli alunni.
Le discussioni matematiche che presenteremo hanno tra gli obiettivi principali lo sviluppo di competenze di analisi critica dei dati, attraverso la generazione di *ipotesi interpretative*, ossia di ipotesi che danno ragione di un fatto osservato, di *ipotesi progettuali*, ossia di ipotesi sulle azioni da svolgere per arrivare a un certo risultato, di ipotesi euristiche, relative agli esempi scelti (Boero & Ferrero, 1995) e delle loro *giustificazioni*. Si tratta di componenti molto importanti nei *processi argomentativi* in matematica, ma anche nelle scienze e soprattutto nell'ottica dello sviluppo di una cittadinanza attiva e consapevole: infatti ogni persona dovrebbe essere

> «disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti. In particolare l'educazione all'argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare d'informazioni false o incontrollate».
>
> (MIUR, 2018, p. 12)

Un cittadino non solo dovrebbe o sapere o saper riconoscere che qualcosa è vero, ma anche comprendere perché è vero e sostenere il proprio punto di vista con argomenti pertinenti, analizzando criticamente le informazioni in suo possesso. Per quanto riguarda più precipuamente la matematica, questo passaggio presuppone lo sviluppo di un approccio relazionale alla disciplina, piuttosto di uno strumentale (Skemp, 1976). Si può parlare di *approccio strumentale alla matematica* quando nell'insegnamento vengono principalmente proposti esercizi risolvibili con schematismi già preconfezionati e automatismi appresi senza riflessioni e consapevolezza sul perché essi sono efficaci per arrivare alla soluzione. In questo caso quindi è la memoria che ha un ruolo preponderante, non il ragionamento, e i processi risolutivi sono spesso in secondo piano rispetto alla considerazione dei risultati ottenuti. Al contrario si parla di *approccio relazionale alla matematica* quando il focus, durante il processo di insegnamento-apprendimento, si concentra principalmente sui processi attuati per risolvere problemi di cui spesso non si conosce a priori un algoritmo che porti alla soluzione, e in cui comunque si debbano costruire delle strategie risolutive capendo cosa fare e perché, cogliendo le relazioni strutturali tra gli enti in gioco.
Nel seguente paragrafo presenteremo brevemente un percorso didattico, svolto longitudinalmente

su cinque anni, realizzato da una delle autrici (Franca Ferri) in una scuola primaria. Il percorso sviluppa il tema dei dati e del loro trattamento in un approccio relazionale alla matematica che parte dalla classe prima per arrivare sino alla classe quinta. Nei successivi paragrafi, ci soffermeremo più in dettaglio su due specifiche attività sviluppate rispettivamente in classe IV e in classe V, nelle quali le riflessioni su dati e le discussioni collettive hanno lo scopo di arricchire di senso alcuni concetti matematici, analizzare le relazioni tra dati e sviluppare processi di produzione di ipotesi e argomentazioni (Sabena, Ferri, Martignone & Robotti, 2019).

2 Il percorso didattico

La classe, inserita in una scuola a tempo pieno della periferia di Modena, era composta da 23 alunni di cui sei di madrelingua non italiana e un'alunna diversamente abile. Nella classe lavoravano con quantità orarie diverse quattro insegnanti: l'insegnante di italiano, l'insegnante di matematica (sempre la stessa per i cinque anni), l'insegnante di inglese e l'insegnante di sostegno (generalmente non presente durante le ore di matematica). Nella classe, nonostante i vari problemi, vi era un buon clima collaborativo e si lavorava intensamente.
Il percorso didattico è stato realizzato anche con materiali provenienti da siti ufficiali della Società Italiana di Statistica (SIS: http://www.sis-statistica.it) e dell'Istituto Nazionale di Statistica (ISTAT: http://www.istat.it). Per comprendere a pieno il tipo di attività proposte in seguito, e situarle in un contesto didattico ampio e significativo, riportiamo ora una breve descrizione di quanto svolto dalla classe a partire dalla classe prima.
In classe prima si sono attuate semplici attività di statistica raccogliendo e organizzando dati. Il tema di indagine e le modalità di raccolta dei dati erano discussi collettivamente così come la scelta della loro rappresentazione. Il campo d'indagine era quasi sempre la classe di appartenenza o al massimo veniva esteso alle classi parallele. I temi di indagine erano vicini al vissuto degli alunni quali ad esempio l'animale o il cibo preferito, il numero di fratelli o sorelle, i giorni di sole, nuvole, pioggia, nebbia e neve conteggiati in un determinato mese, favorito quest'ultimo dalla registrazione quotidiana su cartellone del tempo meteorologico. Infatti, in un primo tempo i grafici su cartellone erano costruiti con rappresentazioni iconiche dei dati: su un cartoncino si disegnava il simbolo di rappresentazione del tempo atmosferico del giorno e i cartoncini venivano poi incollati sul cartellone come componenti di un diagramma. Successivamente si è passati all'introduzione di diversi simboli per rappresentare i dati. Il significato dei simboli era riportato in apposita legenda (un percorso simile per la classe prima è "L'animale preferito" nel progetto M@t.abel, http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/lanimale-preferito/).
In classe seconda il lavoro si è concentrato sulla costruzione di vari diagrammi a barre e tabelle di frequenza al fine di mostrare diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto (insieme di dati). Per esempio, durante l'intero anno scolastico, e anche negli anni successivi, si sono raccolte e registrate giornalmente le temperature esterne. La raccolta di questi dati abituava così gli alunni all'osservazione di una massa di informazioni (dati) ottenute in condizioni analoghe (alla stessa ora, 8:45, sempre nello stesso luogo e con lo stesso termometro). Dai dati raccolti ogni mese si costruiva poi un grafico sulla base del quale si avviava un confronto e si sviluppavano riflessioni: «Ad ogni giorno corrisponde un pallino che indica i gradi di quel giorno. Ad esempio, l'8 febbraio c'erano -3° C» – «Per quattro giorni ci sono stati -4°C: il 10, l'11, il 12 e il 15 febbraio» – «Febbraio è stato molto più freddo di gennaio perché in gennaio si è andati solo una volta sotto zero».
Poco alla volta, l'attività didattica è passata dalla costruzione dei grafici e diagrammi all'interpretazione di questi. Sono stati quindi presentati agli alunni diversi grafici, anche non legati direttamente al

loro vissuto e con diversi tipi di scale.
In classe terza si sono introdotti gli indici statistici moda e media aritmetica. In particolare, l'introduzione della media è avvenuta attraverso una discussione collettiva: l'insegnante, consegnando ad ogni alunno il diagramma che rappresentava i punteggi ottenuti dagli alunni della classe in una prova di verifica, aveva riportato anche la media dei punteggi e aveva aperto la discussione chiedendo: «Quando vi ho dato il grafico dei vostri punteggi vi ho scritto che la media dei punteggi della classe IIIC era di 8,27. Secondo voi cos'è la media? Come si ottiene?». La domanda, che punta sulla costruzione del significato dello strumento matematico, ha fatto emergere interessanti concezioni basate sulle esperienze quotidiane degli allievi. Fra queste, per esempio:

> «Per me la media è come per le scuole: la scuola media è normale, invece le elementari sono facili e le superiori difficili. È quella cosa che sta in mezzo. Per avere la media devi aggiungere qualcosa a quello che è facile e devi togliere qualcosa a quello che è difficile. Anche con i punteggi: si aggiunge qualcosa a chi ha un punteggio basso e si toglie qualcosa a chi ha un punteggio alto».
> «Per me la media è circa l'equilibrio tra tutti i numeri che abbiamo».
> «La media è circa la metà dei punteggi che abbiamo ottenuto. Si vede bene al computer se fai un grafico e vedi che il punteggio medio è verso la metà».
> «La media è circa la metà. È dove i punteggi è come che si fermino, cioè che sono tutti concentrati lì. Si ottiene facendo circa la metà dei punteggi. Li sommi tutti e poi fai diviso 2».
> «Per me la media si ottiene quando ci sono dei numeri. Se non ci sono dei numeri non puoi parlare di media. È una cosa che riguarda la matematica».

A partire dalle ipotesi interpretative e progettuali emerse nella discussione, non solo si è arrivati a definire il significato di media, ma si è definita anche la corretta procedura per calcolarla. La discussione e la riflessione si è estesa anche agli altri indici statistici.
In classe quarta è stata oggetto di discussione e di definizione la procedura per individuare la mediana e si sono messi in relazione i tre indici statistici in situazioni problema proposte dall'insegnante e con domande stimolo per guidare verso la costruzione del sapere in un approccio relazionale alla matematica.
In classe quinta si è continuato a presentare problemi che richiedevano il calcolo degli indici statistici. Si sono presentate anche attività per sviluppare riflessioni sulle proprietà degli indici e sulle relazioni tra i numeri. Nel corso dell'anno sono state considerate situazioni e contesti diversi, raccogliendo dati dalle diverse discipline quali, ad esempio, la geografia e la storia, al fine di osservare fenomeni economici e sociali e motivare gli alunni alla soluzione dei compiti.

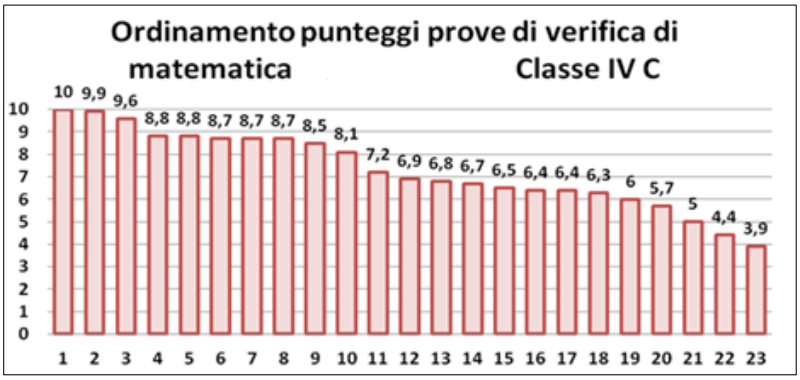
3 Un'esperienza didattica in classe IV

In questo paragrafo presentiamo più in dettaglio alcuni estratti dell'attività svolta in classe IV a partire dai dati numerici ottenuti dagli studenti come punteggi in prove d'ingresso o verifiche quadrimestrali. Il contesto dei punteggi ottenuti in prove di verifica coinvolge gli alunni in prima persona: ciò viene sfruttato dall'insegnante per promuovere riflessioni e confronti sui dati raccolti, attraverso mirate discussioni matematiche. Qui l'insegnante gioca il ruolo chiave di guida verso la costruzione della conoscenza.
La scelta di far lavorare i ragazzi sui punteggi ottenuti nella prova di verifica quadrimestrale - dati, quindi, che li coinvolgono direttamente - è dovuta essenzialmente a due motivazioni di carattere diverso. Un primo motivo riguarda la didattica della statistica: lavorare su dati raccolti dalla classe interpretandoli, porta a una maggiore consapevolezza della necessità di riflettere sui dati per formarsi

delle opinioni. L'altro motivo è di carattere più pedagogico e riguarda la scelta di lavorare "pubblicamente" sui punteggi ottenuti dai ragazzi in una prova. In questo modo il tabù della secretazione del punteggio ottenuto, quasi sempre rigorosamente celato, cade e il punteggio diviene oggetto di confronto, di riflessione e di consapevolezza del proprio risultato e «dei risultati della classe, in una prospettiva in cui la valutazione assume la funzione formativa di accompagnamento dei processi di apprendimento e di stimolo al miglioramento continuo» (MIUR, 2012, p. 13).
Dopo aver corretto, assegnato il punteggio e consegnato la prova di verifica del primo quadrimestre, l'insegnante consegna ad ogni alunno una scheda (**Figura 1**) in cui è riportato un grafico che rappresenta l'ordinamento dei punteggi delle prove di verifica del primo quadrimestre. Ogni colonna del grafico rappresenta uno studente della classe (23 in totale) e la media dei punteggi ottenuti nella verifica quadrimestrale composta da più domande inerenti ai vari nuclei della matematica.

Il punteggio che ho ottenuto nelle prove di verifica quadrimestrali di matematica è di …… su 10.

1. Nel grafico riportato sotto colora la colonna corrispondente al tuo punteggio.



2. Osserva ora questi dati riferiti alla classe e completa le frasi:
   - **Media aritmetica: 7,3**
   - **Mediana: 6,9**
   - **Moda: 8,7**

   Per ottenere la **media aritmetica** io ho

   …………………………………………………………………………………………

   Per individuare la **mediana** io ho

   …………………………………………………………………………………………

   Per individuare la **moda** io ho

   …………………………………………………………………………………………

3. Ora, osservando **media**, **mediana**, **moda e il tuo punteggio**, scrivi alcune osservazioni/considerazioni.

   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………

Figura 1. Scheda consegnata a fine gennaio nella classe IV primaria.

Osserviamo che il *problema d'indagine*, cioè cosa si vuole conoscere in questo compito, così come i dati considerati per l'indagine stessa, sono definiti dall'insegnante e gli alunni non sono direttamente coinvolti in questa scelta. Il contesto specifico del problema però è legato al vissuto degli alunni e le *modalità della rilevazione*, in particolare i dati raccolti cioè i punteggi, e le modalità di tale raccolta derivano dall'osservazione diretta e definiscono le caratteristiche di concretezza che genera motivazione alla soluzione del compito.
In generale, si tratta qui di *interpretare un diagramma* e non di costruirlo (la raccolta dei dati e la rappresentazione è effettuata dall'insegnante). Osserviamo che, nonostante l'aspetto, il diagramma proposto non è un istogramma, perché non rappresenta frequenze, ma riporta il valore assunto da ogni dato. I dati sono quantitativi e pertanto è possibile determinare gli indici statistici, così come fatto dall'insegnante.
In particolare, questo compito prevede più consegne: nella prima consegna l'insegnante richiede che ogni alunno identifichi la colonna del grafico con il punteggio da lui ottenuto allo scopo di avere una prima percezione visiva della posizione del proprio punteggio all'interno di quelli della classe. In questo modo gli allievi iniziano a confrontare in modo percettivo il proprio punteggio con la sua posizione all'interno della classe. In alcuni casi, la visualizzazione nel diagramma della posizione della colonna corrispondente al proprio punteggio induce gli allievi a un confronto con la realtà della classe e a riconsiderare quindi il proprio grado di soddisfazione, come nel caso di An. :«Io, che ho un punteggio di 6,4, pensavo di essere andato abbastanza bene ed ero contento, ma se lo guardo qua vedo che è un punteggio abbastanza bassino e sono meno contento».
Nella seconda consegna l'insegnante fornisce gli indici statistici da lei elaborati e chiede agli alunni di scrivere la procedura che attuerebbero per ottenere quei dati numerici. Si tratta di una consegna che ha lo scopo di identificare incertezze o lacune legate alle procedure di calcolo degli indici per intervenire didatticamente. La consegna, infatti, è caratterizzata dalla richiesta meno usuale di *identificare la procedura a partire da un risultato*. Per spiegare come ottenere la media aritmetica vi è chi descrive esattamente la procedura, specificando anche il ricorso a una calcolatrice, vista la "lunghezza" dell'addizione, come scrive Or.: «…preso una calcolatrice, sennò si impazziva a fare un'addizione così lunga, sommato tutti i punteggi, poi la somma l'hai divisa per 23. Credo sempre con la calcolatrice»; chi, invece, descrive molto sommariamente la procedura lasciando dei dubbi sul reale livello di competenza: «…hai sommato tutti i numeri poi li hai divisi e così ti usciva la media». Osserviamo come le risposte degli alunni identifichino chiaramente l'insegnante come esecutrice della procedura, interpretando quindi la frase della consegna: "Per ottenere la… io ho…" come la richiesta di formulazione di un'ipotesi progettuale per il calcolo degli indici. Soprattutto per quanto riguarda la procedura per individuare la mediana molti allievi hanno scritto semplicemente «… hai preso il valore che sta in mezzo» tralasciando la necessità dell'ordinamento dei punteggi. Questo fatto ha indotto l'insegnante a rivedere insieme agli allievi la procedura per individuare la mediana, anche mediante altri esempi. In questo modo si può osservare come l'insegnante, nel processo di avvio e conduzione della discussione collettiva, guida la revisione della formulazione di ipotesi interpretative e progettuali e, tramite esempi mirati, supporta la giustificazione e la costruzione di senso per le procedure di calcolo adottate.
La terza consegna vuole sollecitare gli allievi a riflessioni di confronto fra il proprio punteggio e gli indici statistici ottenuti. Come sappiamo, infatti, la rappresentazione dei dati sul grafico permette di cogliere visivamente alcuni aspetti del fenomeno in questione (il suo andamento ecc.) ma, per andare al di là della "percezione", occorre tradurre i dati in valori che permettano di valutare rapidamente il fenomeno e, per questo, si usano gli indici statistici e si dà avvio alle riflessioni. Di seguito riportiamo degli esempi che abbiamo selezionato per mostrare alcune riflessioni su aspetti di tipo relazionale:

– riflessioni sul proprio punteggio rispetto agli indici statistici:
  Pi.: «Il mio punteggio è inferiore alla media, alla mediana e alla moda. Sono andato abbastanza bene, anche perché non ho preso meno di 6, che era il mio obiettivo».

Di fatto si osserva un semplice confronto dei valori corrispondenti al punteggio ottenuto, agli indici statistici e al punteggio corrispondente alla sufficienza;

– riflessioni sul proprio punteggio rispetto alla significatività degli indici statistici:
  Fi.: «Il mio punteggio è superiore alla mediana e alla media, ma è inferiore alla moda. La moda secondo me è un po' per caso che è di 8,7, perché poteva anche essere di 6,4 o di 8,8. Sono andato bene, sono contento».
  Si intuisce qui un approccio all'analisi delle frequenze. In un certo senso, infatti, Fi. identifica nel grafico tre classi (8,7, 6,4 e 8,8) con (quasi) la stessa frequenza (2 o 3 occorrenze).
  An.: «Il mio punteggio di 7,2 è vicinissimo alla media e io sono contenta, anche se il punteggio della media in realtà non esiste, perché nessuno di noi ha preso 7,3. Questa per me è una cosa strana».
  Qui si osserva una riflessione sulla relazione fra i valori degli indici (in questo caso, la media) e i dati rilevati (in questo caso, la media dei punteggi per alunno) che non sempre compaiono contemporaneamente nei due insiemi (quello dei valori degli indici e quello dei dati rilevati).
– riflessioni sull'andamento della classe in base agli indici statistici:
  Fe.: «Secondo me la media è quella che dà più l'idea di come è andata la classe. Se qualcuno ti chiede come è andata la verifica di matematica, tu puoi dire abbastanza bene perché la media è di 7». Osserviamo come l'interpretazione degli indici statistici consenta a Fe. di sviluppare un'analisi sull'andamento generale del fenomeno proponendo quindi una visione d'insieme.
  Au.: «La media della classe è 7,3, quindi siamo andati abbastanza bene. La mediana è 6,9, che è vicina al 7, quindi quasi come la media. Possiamo dire che 11 bimbi hanno preso più di 7 e 11 bimbi hanno preso meno di 7».
  Osserviamo come Au., mettendo in relazione media e mediana e la loro vicinanza, intuisce una distribuzione asimmetrica dei dati. Au., infatti, non aggiunge alcuna considerazione sulla moda, forse perché più distante dai precedenti valori. Inoltre, anche in questo caso viene proposta una visione d'insieme: questa considerazione, infatti, lascia intendere come, grazie all'interpretazione del grafico su dati continui (media dei voti dei bambini), Au. riesca a visualizzare un raggruppamento in classi (voto>7; voto<7) che gli consente, appunto, di interpretare l'andamento dei punteggi delle prove di verifica di tutti i compagni. L'analisi dell'andamento generale del fenomeno, e quindi di una visione d'insieme, costituisce un momento di consapevolezza collettiva (come va la classe) che può essere messa in relazione alla consapevolezza individuale (come va il singolo) e che costituisce un utile elemento di avvio alla discussione di classe che può porre le basi anche per lo sviluppo di una valutazione formativa;
– riflessioni che riguardano l'interpretazione del grafico, da cui seguono inferenze:
  Ma.: «Se tu prendi il punteggio massimo che è 10 e quello minimo che è 3,9, poi li dividi per due ottieni 6,9, insomma quasi 7, e anche questo si avvicina alla media vera e allora per farti un'idea di come va, puoi anche prendere il minimo e il massimo e poi dividerli per 2». Anche in questo caso l'analisi dell'andamento del fenomeno è basata sull'analisi dei dati statistici e della loro relazione e si percepisce qui una prima intuizione sugli indici di variabilità. Ancora, la riflessione è centrata sull'andamento generale della classe. Questo è probabilmente il frutto della pratica della discussione collettiva avviata dall'insegnante fin dalla classe prima.

Come abbiamo visto, quindi, il focus di questa attività non è solo la revisione e l'applicazione delle procedure per ottenere gli indici indicati, ma soprattutto la *riflessione sul significato di tali indici e sulle informazioni che essi ci possono dare rispetto al fenomeno da osservare*, secondo un approccio relazionale alla matematica. Non si tratta solo di conoscere e saper applicare delle procedure, ma di comprenderne il significato e il risultato nel contesto in cui queste sono utilizzate. Per questo, la struttura della consegna segue un ordine ben preciso che va dal manipolare i dati all'interpretarli riflettendo sulle informazioni che possono fornire in relazione a scopi, aspettative e conoscenze. Tutto questo ha l'obiettivo di andare oltre il piano delle conoscenze e delle abilità e di favorire lo sviluppo di *competenze* che portino a un saper agire riflessivo e consapevole in situazioni analoghe e di possedere esperienze potenzialmente utili per affrontare problemi aperti, come quello proposto nella seguente attività.

4 Un'esperienza didattica in classe V

Nella stessa classe, l'anno successivo, all'inizio della quinta, dopo la prova d'ingresso di matematica, l'insegnante ha dato la seguente consegna individuale:

> La media aritmetica dei punteggi della classe V C nelle prove d'ingresso è stata di **6,83**. Cosa sarebbe necessario fare per alzare la media di un punto ed avere così un punteggio di **7,83**?

Questa consegna vuole sviluppare riflessioni sulle proprietà della media aritmetica e sulle relazioni tra i numeri, sulle operazioni che portano alla generazione o variazione del valore della media. Qui il focus è sulla generazione di ipotesi sulle possibili azioni che portano a quel risultato, e sulla successiva giustificazione di queste attraverso l'analisi delle relazioni tra i numeri e le operazioni coinvolte nella procedura di produzione della media. Per questo, il problema non richiede solo una conoscenza e un'applicazione di procedure. Si tratta di un primo approccio verso problemi in cui è richiesto di immaginare e di manipolare delle relazioni conoscendo i risultati finali, le operazioni coinvolte nella procedura che li ha generati e i numeri che possono variare in un intervallo definito (anch'esso conosciuto e familiare agli alunni), non conoscendo però la specifica sequenza di numeri.
Il problema può essere affrontato con diverse strategie risolutive, corrette o meno, che saranno poi oggetto di discussione con la classe.
L'insegnante raccoglie le risposte degli allievi e ne seleziona tre da proporre in una discussione collettiva. La scelta di queste tre risposte è rappresentativa di ciò che è emerso nella classe e, per questo, fra le risposte selezionate, potranno essercene alcune errate. La scelta è dovuta anche a esigenze comunicative: infatti, queste risposte possono prestarsi bene a un'analisi da parte degli alunni, essendo espresse in un linguaggio sintetico e chiaro. L'insegnante trascrive alla lavagna le tre risposte scelte e apre la discussione:

1. Mi.: «È sufficiente aggiungere 1 ad un punteggio, ad esempio al mio che è anche basso, e si avrebbe una media più alta».
2. Fe.: «È necessario aggiungere 23 al punteggio totale per avere la media più alta di 1 punto».
3. Ou.: «Basta aggiungere 10, che era il punteggio massimo che si poteva avere, per avere la media più alta».

Di seguito riportiamo gli interventi più salienti della discussione di classe e, per ciascuno di essi, un commento critico.

Ins.: «Analizziamo ora i tre ragionamenti e vediamo chi ha ragione e perché. Vi prego di intervenire dopo aver ben pensato e di motivare i vostri interventi».
La richiesta è esplicita: analizzare le tre diverse risposte e vedere quali sono corrette e quali no. Da come è posta la consegna, è implicito che almeno una di queste sia corretta e che ce ne siano anche di non corrette. L'invito agli allievi è alla riflessione e all'argomentazione, richieste fondamentali nell'approccio didattico seguito dall'insegnante.

Ma.: «Ci puoi dire quanto era il punteggio totale, così possiamo verificare con i conti?»
L'alunno richiede di avere maggiori informazioni (numeriche), verosimilmente per cercare di applicare le procedure conosciute per il calcolo della media al fine di modificarne il valore: conoscendo il numero degli alunni, serve almeno la somma totale dei punteggi per procedere in modo empirico. Si potrebbero infatti calcolare le medie secondo le tre proposte messe in discussione. L'approccio quindi è procedurale e l'allievo sembra non formulare ipotesi.

Ins.: «Credi sia necessario? Hai molta fretta di sapere se le proposte sono corrette? Prova a riflettere. Comunque, la somma di tutti i punteggi era 157,176».
L'insegnante invita l'alunno a non affidarsi esclusivamente ai dati numerici ma a riflettere sulle relazioni che legano tali dati; lo invita inoltre a riflettere sulle soluzioni proposte per capire che si potrebbe procedere anche senza esplicitare questo dato. In altre parole, l'insegnante invita l'alunno a produrre delle ipotesi prima di avviare le procedure di calcolo. Poi però gli fornisce il numero richiesto (decisione motivata da variabili che esulano dal focus dell'articolo).

Fi.: «Si capisce anche senza fare dei conti. Se tu aggiungi 1 non puoi avere un punto in più di media per tutti. 1 lo devi dividere per 23 e il punteggio sarà più alto di 0,0...».
L'alunno produce dapprima un'ipotesi interpretativa descrivendo il perché il risultato non corrisponde alla richiesta (la media non diventa 7,83) e successivamente produce un'ipotesi procedurale descrivendo le operazioni da svolgere per arrivare al risultato auspicato. Cerca di rispondere ragionando sulle operazioni, sulle relazioni numeriche e sui numeri coinvolti senza usare il dato appena richiesto dal compagno: afferma infatti che non sono necessari calcoli per capire che la proposta di Mi. non è corretta poiché aggiungendo 1 alla somma dei punteggi, chiaramente non si avrà un punto in più per tutti perché l'uno andrebbe diviso tra i 23 alunni. Nella formulazione della sua ipotesi procedurale (aggiungere 23 inteso come 23x1) il suo ragionamento è di avvio alla generalizzazione.

Au.: «Infatti la Mi. non dice che aumenta di uno la media, ma che la media diventa più alta. Anche Ou. dice così. E se aggiungi 1 o 10 la media diventa più alta».
In questo caso l'alunno fa un'analisi accurata delle affermazioni in discussione, notando che in effetti le due compagne hanno scritto che la media diventerà più alta, non che aumenterà di un punto, quindi, a suo parere, sono affermazioni corrette. Osserviamo qui come nella discussione matematica giochi un ruolo essenziale sia l'analisi delle ipotesi generate dalle diverse voci, sia il loro confronto.

Fi.: «Sì, ma non di 1».
Fi. ribadisce l'inesattezza delle soluzioni che propongono di aggiungere 1 o 10 perché non conformi alla richiesta: aumentare la media proprio di 1 e non semplicemente aumentarla.

Au.: «Ok, hanno sbagliato, ma non hanno scritto male del tutto. Forse non hanno ben capito cosa ci chiedevi».
Nel suo tentativo di immedesimarsi nelle compagne per capirne il ragionamento, Au. ribadisce la distinzione fra analisi del testo della consegna e correttezza delle affermazioni delle compagne. Si identifica il problema nell'obiettivo della consegna.

Ou.: «Io ho capito cosa ci chiedevi e ho pensato che se aggiungevo 10, che era il massimo del punteggio, forse la media diventava più alta di uno. Più di dieci non potevo aggiungere, perché più di dieci non lo poteva prendere nessuno. Non ho capito perché la Fe. ha aggiunto 23. Il punteggio 23 non esiste».
L'alunna giustifica la scelta di aggiungere 10 con il fatto che 10 è il punteggio massimo ottenibile.

Dichiara infatti, rimanendo nel contesto dei punteggi, di non comprendere il 23 aggiunto dalla compagna, poiché tale numero non fa parte dei possibili valori, che vanno da 0 a 10, utilizzabili per la valutazione degli elaborati degli alunni. Sono assegnati allora due significati ai valori numerici: il valore in quanto valutazione e il dato come entità partecipante della relazione numerica. Sembra mancare la padronanza delle relazioni tra le quantità in gioco: la quantità ottenuta dai valori che partecipano alla somma e riguardano il sistema valutativo dell'insegnante, e i valori che consentono di manipolare la relazione tra le quantità in gioco. Il fatto di usare un numero che non appartiene ai possibili voti non rientra nello schema che definisce la procedura per ottenere la media e quindi è difficile comprendere come usarlo per manipolare la relazione.

Fe.: «Noi siamo in 23 e io ho immaginato che tutti noi avevamo preso un punto in più e allora ho fatto 23x1=23 e l'ho aggiunto e così la media diventava 7,83».
L'allieva argomenta la procedura seguita giustificando la scelta di aggiungere 23: ha immaginato di distribuire un punto in più a tutti i voti dei 23 allievi senza curarsi di quali fossero effettivamente, ma verificando che l'aggiunta di 23 alla somma totale facesse alzare di uno la media. Come lo abbia verificato, però, non è esplicitato. Si intuisce qui l'avvio a un processo di generalizzazione perché il ragionamento è svincolato dai valori numerici associati ai voti e viene centrato sulla relazione di questi alla media. Si può quindi identificare all'interno della procedura descritta da Fe. un'ipotesi euristica legata alla scelta di particolari valori su cui operare, nello specifico aggiungere 1 a tutti i possibili voti.

Ou.: «Sì, ma Chri. e Fa., che hanno preso 10 non possono prendere un punto in più perché 10 era il massimo. Per me hai sbagliato».
L'alunna ribadisce un'informazione importante legata a considerazioni sul contesto reale della classe e dei valori numerici intesi come punteggi di ciascun alunno. La sua affermazione è infatti corretta e vuole mostrare come il ragionamento della compagna porta al risultato giusto, ma con una motivazione che non vale sempre. Qui emergono aspetti legati alla matematica come strumento di generalizzazione dell'evento reale (Fe.) e come strumento per interpretare la realtà (Ou.).

Or.: «Ou. tu non devi pensare ai bambini veri e ai punteggi che abbiamo preso, ma devi ragionare più in generale. Ti faccio un esempio facile. Se il punteggio totale fosse stato 46 e noi siamo in 23, la media sarebbe stata di 2. Se tu a 46 aggiungi 23 ottieni 69 e 69 diviso 23 fa 3 e sarebbe un punto in più di media. Se a 46 aggiungi 10, ti viene 56 e 56 diviso 23 non fa 3. Poi volevo anche dire che la Mi. aggiungendo 1 ha pensato solo a lei e non al problema generale. Lo dice anche».
L'idea di Or. è centrata sul duplice significato dei valori numerici: valore in quanto valutazione/punteggio e valore come dato partecipante della relazione numerica fra punteggi. Questi esempi empirici possono essere letti come controesempi all'interno della sua argomentazione, per far comprendere perché aggiungere 1 o 10 non va bene, in una tensione verso il "ragionare più in generale".

Ma.: «Io con la calcolatrice ho fatto (157,176 + 1):23 e fa 6,87 e non va bene, perché ci sono solo 4 centesimi in più. Poi ho fatto (157,176 + 10):23 e fa 7,26 e anche questo non va bene. Poi ho fatto (157,176 + 23):23 che va bene perché fa 7,83 che è un punto in più di 6,83. La Fe. aveva ragione».
Interviene a questo punto l'alunno che ha chiesto il valore della somma dei punteggi, e che ha verificato la correttezza delle affermazioni delle tre compagne attraverso l'applicazione diretta della procedura per trovare la media (usando cioè una prova empirica). Il calcolo diventa in questo modo una prova per la classe e ha lo scopo di convincere che la proposta di aggiungere 23 sia la soluzione corretta al compito.

Il lavoro di esplorazione e analisi delle proprietà della media aritmetica e delle relazioni tra gli elementi che la definiscono può naturalmente proseguire e, in un'ottica verticale e di costruzione a spirale del sapere, essere ripreso nella scuola secondaria[2] utilizzando formule e trasformazioni algebriche per gestire le relazioni tra le diverse variabili.
Infine, notiamo che oltre alle questioni relative ai concetti matematici in gioco, nell'estratto di discussione riportato si evidenziano le competenze trasversali mostrate dagli alunni nella comunicazione e nel confronto tra pari e con l'insegnante: gli alunni infatti cercano di capire il pensiero altrui, si pongono domande e argomentano sulla verità o meno di affermazioni portando esempi e controesempi, in linea, cioè, con le Indicazioni Nazionali.

5 Riflessioni finali

Le attività proposte nel percorso didattico descritto, oltre a stimolare l'analisi di dati tratti da situazioni reali e ad attivare un generale spirito critico, hanno permesso di arricchire di senso e consolidare diversi contenuti matematici e hanno avviato riflessioni sulla generalizzazione della relazione fra i dati stessi. Per esempio, nell'interpretazione e nello studio del fenomeno legato alla votazione finale delle prove di matematica, è stato chiesto agli alunni di interpretare il grafico e di interpretare anche la scelta di tale grafico e della sua organizzazione (ricordiamo che esso non rappresentava la frequenza dei dati ma ne ha stimolato una lettura e l'interpretazione). Una sorta di meta analisi sull'uso delle rappresentazioni e sul loro ruolo nell'interpretazione dei fenomeni.
L'attività di IV primaria, lasciando libertà nell'interpretazione degli indici statistici agli alunni della classe, consente di attivare diversi approcci di analisi perché ciascun alunno è stimolato da domande di interesse personale diverso. Questo spinge il coinvolgimento e la motivazione dell'alunno al perseguimento della soluzione del compito, il quale diviene un compito non solo agito ma anche partecipato. Come si evince dall'analisi della discussione, essa gioca un ruolo chiave per avviare l'interpretazione dei dati e delle relazioni numeriche tramite la formulazione di ipotesi. Per questo, le ipotesi espresse dagli studenti vanno qui intese come congetture per spiegare i fenomeni mostrati dai dati e dagli indici statistici. La discussione, infatti, consente l'avvio al confronto delle ipotesi sia legate all'interpretazione dei dati (riflessioni sul proprio punteggio rispetto agli indici statistici e riflessioni sul proprio punteggio rispetto alla significatività degli indici statistici), sia allo sviluppo di progetti d'azione (riflessioni sull'andamento della classe in base agli indici statistici). Ciò sembra consolidare la costruzione dei significati degli indici statistici e, quindi, l'apprendimento negli alunni della classe. Infatti, le inferenze che seguono l'interpretazione del grafico portano la riflessione sull'andamento generale della classe spostando quindi il focus di interesse da riflessioni di tipo locale a riflessioni di tipo generale.
Nell'attività proposta in V primaria, osserviamo come le modalità di verifica delle ipotesi prodotte assumano diverse caratteristiche e si sviluppino attraverso verifiche sperimentali ed euristiche (come ad esempio quelle di Ma. e Or.) o l'identificazione di relazioni tra i dati (con prova procedurale come quella proposta da Fe.). L'approccio di generalizzazione per l'interpretazione del fenomeno in termini di analisi dei dati sembra svilupparsi quindi attraverso la generazione delle diverse ipotesi costituendo, di fatto, le componenti essenziali del processo argomentativo.
In sintesi, le esperienze didattiche descritte risultano essere efficaci nel perseguire quegli obiettivi trasversali che vedono gli alunni come cittadini capaci di produrre ipotesi, saper riconoscere ipotesi

2. La scuola secondaria in Italia si divide in scuola secondaria di primo grado, che dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino, e scuola secondaria di secondo grado, che dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

vere e, soprattutto, comprendere perché esse sono vere (o false) sostenendo quindi il proprio punto di vista con argomenti pertinenti e confrontandosi con i punti di vista degli altri (questo emerge dagli interventi degli alunni, si vedano ad esempio quelli di Au.).

Bibliografia

Bartolini Bussi, M., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica*. Modena: CDE.

Ben-Zvi, D. (2014). Data handling and statistics teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 137–140). Dordrecht: Springer.

Boero, P., & Ferrero, E. (1995). Il gioco delle ipotesi nell'insegnamento-apprendimento della matematica nella scuola dell'obbligo: una ricerca in corso. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 18A-18B.

Gattuso, L., & Ottaviani, M. G. (2011). Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school Mathematics. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, (Vol 14, pp. 121–132). Dordrecht, Springer, New Icmi Study Series.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Kranendonk, H. (2006). A statistical study of generations. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance*. NCTM 2006 yearbook (pp. 103–116). Reston, VA: NCTM.

MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. Disponibile in: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf (consultato il 22.09.2020).

MIUR (2018). *Indicazioni nazionali e nuovi scenari*. Disponibile in: http://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/3234ab16-1f1d-4f34-99a3-319d892a40f2 (consultato il 22.09.2020).

Ottaviani, M. G. (2008). Statistica e matematica a scuola: due discipline e un solo insegnamento. *Confronto culturale e opportunità interdisciplinare. Induzioni, 36*, 17–38.

Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria.* Milano: Mondadori.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20–27.

U.M.I. (2001). Matematica 2001- *Materiali per un muovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica*. Disponibile in: http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/ (consultato il 22.09.2020).

Vergnaud, G. (1992). Teoria dei campi concettuali, *La matematica e la sua didattica, 1*, 4–19. (Titolo originale: *La théorie des champs conceptuels* pubblicato nel 1990).

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 92 - 114, DOI: 10.33683/ddm.20.8.5
OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

La geometria dell'origami

The geometry of origami

Achille Maffini
Liceo Scientifico G. Ulivi – Parma, Italia

a.maffini@liceoulivi.it

Sunto / Il presente lavoro illustra il percorso di geometria dell'origami progettato all'interno delle esperienze del Liceo Matematico predisposte dal Liceo Scientifico Ulivi di Parma in collaborazione con l'Università degli Studi di Parma. Il percorso è stato in parte realizzato con un gruppo di alunni delle classi prime nell'a.s. 2018/19 (nell'a.s. 2019/20 non si è riusciti a replicarlo a causa dell'emergenza dovuta al COVID-19) e ha lo scopo di favorire una riflessione sull'assiomatica della geometria e sui suoi risvolti ontologici. Nel presente articolo viene presentato l'intero percorso (pensato sui primi tre anni del liceo scientifico); in particolare si presenteranno le attività svolte commentate (cercando così di far cogliere il senso delle specifiche scelte) e le indicazioni di possibili sviluppi per gli anni successivi.

Parole chiave: geometria; assiomi; origami.

Abstract / This work illustrates the path of origami geometry designed within the experiences of the "Liceo Matematico" planned by Liceo Scientifico Ulivi of Parma in collaboration with the University of Parma (Università degli Studi di Parma). The course was partially carried out with a group of grade 9 students in the s.y. 2018/19 (in the s.y. 2019/20 it was not possible to replicate it due to the emergency due to COVID-19) and has the purpose of promoting a reflection on the axiomatics of geometry and its ontological implications.
This article presents the entire path (thought over the first three years); in particular, each activities carried out are accompanied by a comment (thus trying to make the sense of the specific choices understood) and by indications of possible developments for the following years.

Keywords: geometry; axioms; origami.

1 Introduzione

Nell'a.s. 2018/19 il Liceo Scientifico Ulivi ha aderito, insieme ad altre scuole di Parma, al progetto di Liceo Matematico[1] proposto dal Dipartimento di matematica dell'Università di Parma. Oltre alle attività per gli allievi, nel progetto erano previsti dei momenti di formazione per gli insegnanti tra i quali dei moduli rivolti alle scuole secondarie di secondo grado[2] dal titolo "La geometria dell'origa-

1. Il progetto Liceo Matematico è nato su proposta dell'Università di Salerno nell'a.s. 2015/16 con lo scopo di affiancare alle attività curricolari ore aggiuntive in cui approfondire argomenti di matematica o favorire attività di carattere interdisciplinare. Per maggiori informazioni si rimanda al sito http://www.liceomatematico.it.
2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

mi", proposto dal Prof. Saracco. Ogni scuola poteva poi, se voleva, declinarlo nella propria realtà con specifiche modalità e peculiari obiettivi. Il Liceo Ulivi ha inserito il modulo di "Geometria dell'origami" (di cui l'autore di questo articolo è responsabile, per quanto riguarda sia la progettazione che la proposta didattica) tra i cinque moduli proposti al gruppo di ragazzi delle classi prime che hanno aderito al progetto. A questo proposito sono state coinvolte otto classi prime (tra le nove presenti nell'Istituto) per un totale di 43 alunni divisi in due gruppi.
La scelta di progettare e proporre tale modulo è stata motivata dall'idea di come la geometria dell'origami si presti, attraverso la componente manipolativa che comporta, ad avvicinare gli studenti alla geometria. Come si vedrà, però, lo scopo del percorso proposto va oltre l'ambito pratico in quanto, di fatto, costituisce un pretesto per avvicinare gli studenti ad una riflessione epistemologica (implicita) sugli oggetti geometrici e sul ruolo della loro esistenza in termini di costruibilità, attraverso anche altri strumenti (come GeoGebra). Infine all'interno del modulo è previsto anche un excursus sui modelli di (semplici) teorie formali per avvicinare gli studenti al concetto di sistema assiomatico.
Il modulo di "Geometria dell'origami" si inserisce nel curriculum di geometria euclidea della scuola secondaria di secondo grado con il principale obiettivo di approfondire con altri strumenti e altri registri semiotici gli argomenti in ambito geometrico.
Nella didattica della matematica, il ruolo dell'insegnamento della geometria verte normalmente su due aspetti principali: proporre un esempio di sistema ipotetico deduttivo e, soprattutto all'ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado quando si propongono riflessioni sulle geometrie non euclidee, vedere la struttura assiomatica legata ad un problema di coerenza, sganciandola così da presupposti semantici. Molta meno attenzione, invece, è data agli aspetti ontologici, i quali giocano tuttavia un ruolo fondamentale anche e soprattutto in ambito euclideo: parlare di oggetti geometrici significa, prima di tutto, stabilirne criteri di esistenza e costruibilità.
La geometria dell'origami si inserisce proprio su quest'ultimo campo d'indagine, secondo alcuni approcci che diventeranno la spina dorsale delle attività:

1. approccio manipolativo;
2. approccio epistemologico;
3. approccio contenutistico;
4. approccio dinamico-esplorativo.

La possibilità di fare costruzioni geometriche utilizzando i piegamenti della carta obbliga i ragazzi a confrontarsi con una manualità e una visione spaziale dei problemi di geometria piana che negli anni è sempre meno parte delle loro competenze specifiche. Il fatto stesso di risolvere anche semplici problemi di geometria (piana) dovendo operare in uno spazio tridimensionale comporta il dover rivedere le dimensioni dello spazio in termini diversi: in particolare lo spazio a tre dimensioni si configura come un metacontesto in cui gestire un problema di geometria piana. A questo si deve poi aggiungere come il foglio di carta dovrebbe essere un foglio trasparente, capace cioè di mostrare gli oggetti che si dovranno sovrapporre nelle varie costruzioni (soprattutto punti e rette).[3] Inoltre, il foglio di carta è al tempo stesso artefatto e strumento (con gli assiomi che lo determinano).
Le prime attività proposte nel modulo riguardano problemi di costruzioni risolvibili anche con riga e compasso (ad esempio la costruzione dell'asse di un segmento; del circocentro e baricentro di un triangolo; della bisettrice di un angolo) per mostrare come il nuovo metodo inglobi gli strumenti già presenti nella geometria euclidea. Questa fase, tra l'altro, è l'occasione per analizzare in modo critico gli assiomi euclidei e la loro importanza nella costruzione della *realtà matematica*.
L'aspetto fondamentale di questa prima fase, come detto, è legato al far sentire l'importanza (anche in termini euclidei) dei processi di costruzione degli oggetti geometrici, aspetto che a sua volta si ricollega al problema dell'esistenza degli oggetti geometrici (e matematici in generale). Il successivo

3. Nelle attività si sono utilizzati normalmente comuni fogli di carta, con l'indicazione di segnare i vari oggetti coinvolti (rette, punti) su entrambi i lati, per trattarli come se fossero trasparenti.

approccio ipotetico-deduttivo, proposto soprattutto nell'ordinaria attività didattica, diventa così lo strumento concettuale per giustificare la correttezza del risultato trovato.
Non trascurabile, in questa fase, è la ripresa del concetto di trasformazione geometrica il quale, al di là del suo utilizzo pratico, permette sia di fare collegamenti col concetto di funzione, sia di chiarire come le trasformazioni geometriche risolvano in un contesto statico, come il piano geometrico, aspetti apparentemente dinamici, senza introdurre la grandezza tempo.
Pensare al concetto di esistenza come tratto epistemologico della geometria euclidea permetterà non solo di analizzare gli assiomi euclidei in ottica ontologica, ma anche di valutarne i limiti. Se quindi nella prima fase ci si preoccupa di costruire gli oggetti geometrici con gli strumenti messi a disposizione dall'assiomatica di Euclide, nella seconda fase del modulo ci si concentra soprattutto sulla possibilità di poter rifare le stesse costruzioni effettuate con riga e compasso, ma sfruttando le opportunità offerte dalla nuova impostazione assiomatica, pensando agli assiomi dell'origami come nuovi strumenti messi a disposizione per la costruzione degli oggetti geometrici e, in generale, del sapere. In particolare viene analizzata la risoluzione, attraverso i piegamenti della carta, anche di problemi non risolvibili con riga e compasso (come ad esempio la trisezione dell'angolo o, in ambito algebrico, la costruzione geometrica che porta alla risoluzione delle equazioni di terzo grado e quindi alla duplicazione del cubo). In sostanza, devono cambiare le *regole del gioco* per permettere al gioco stesso di avere altre configurazioni o situazioni possibili. Questa idea del cambiamento delle regole del gioco può indurre quindi una riflessione più attenta e pratica sul concetto di sistema assiomatico.
Il continuo oscillare tra l'idea di gioco (e le sue regole) e la potenza degli strumenti operativi messi a disposizione sarà il filo conduttore di tutto il percorso.

2 Le *regole del gioco*: il sistema assiomatico della carta piegata

Innanzitutto è necessario fare una precisazione sul concetto di piano geometrico e ambiente di lavoro. Contrariamente al piano euclideo (illimitato, continuo e omogeneo) il piano origami è (normalmente) un quadrato; in ogni caso è limitato. Questo modifica il concetto di retta la quale è a sua volta un ente geometrico limitato. Inoltre, la distinzione terminologica tra *retta* e *piega* (riscontrabile nei vari sistemi assiomatici che si sono analizzati) denota non tanto la loro differenza dal punto di vista del risultato finale (alla fine una piega rappresenta una retta), quanto da quello della loro natura: le rette sono oggetti preesistenti, mentre le pieghe sono risultati di processi (di cui rette e punti sono gli elementi a cui è applicato il processo). Allo stesso modo si hanno all'interno della geometria dell'origami (come del resto nel caso della geometria euclidea) due tipi di punti: i punti come oggetti (al limite come costituenti di curve o figure, con un chiaro riferimento insiemistico) e i punti come risultato di processi (ottenuti cioè come intersezione di rette o di pieghe, con chiaro riferimento all'idea euclidea di punto come risultato di intersezione di curve). In questo senso alcune delle attività proposte in questo modulo possono essere utilizzate anche per un'approfondita riflessione sia sugli oggetti geometrici che sul rapporto tra gli stessi e gli oggetti che li individuano, per mostrare, in modo pratico, come un oggetto possa essere visto come reificazione di un processo (Sfard, 1991).
L'assiomatizzazione universalmente riconosciuta alla base della geometria degli origami è quella dei matematici B. Scimemi, H. Huzita (a cui si devono i primi sei assiomi) e K. Hatori (a cui si deve il settimo); d'ora in poi sarà indicata con **HH**. È possibile trovarla formulata in diversi lavori, come ad esempio in Newton (2009). Nelle varie formulazioni, però, sono spesso trascurate alcune condizioni o precisazioni, che approfondiremo nel seguito.

2.1 Gli assiomi HH ed N

Si riportano gli assiomi nella loro forma originale, come presentati in Lang (2015, traduzione dell'autore):

«HH1. Dati due punti p_1 e p_2 c'è una piega che passa per entrambi.
HH2. Dati due punti p_1 e p_2 c'è una piega che porta p_1 su p_2.
HH3. Date due rette l_1 e l_2 c'è una piega che porta l_1 su l_2.
HH4. Dato un punto p_1 e una retta l_1 esiste una piega perpendicolare a l_1 e passante per p_1.
HH5. Dati due punti p_1 e p_2 e una retta l_1 c'è una piega che porta p_1 su l_1 e che passa per p_2.
HH6. Dati due punti p_1 e p_2 e due rette l_1 e l_2 c'è una piega che porta p_1 su l_1 e p_2 su l_2.
HH7. Dato un punto p_1 e due rette l_1 e l_2, c'è una piega perpendicolare a l_2 che porta p_1 su l_1».

L'assiomatizzazione proposta in Newton (2009)[4], indicata d'ora in poi come assiomatizzazione **N**, presenta alcune aggiunte, in termini di esistenza e unicità:

«N1. Dati due punti P e Q c'è un'unica piega che passa per entrambi.
N2. Dati due punti P e Q c'è un'unica piega che porta P su Q.
N3. Date due rette r e s c'è una piega che porta r su s.
N4. Dato un punto P ed una retta r c'è un'unica piega perpendicolare a r passante per P.
N5. Dati due punti P e Q ed una retta r, c'è una piega che porta P su r e passa per Q.
N6. Dati due punti P e Q e due rette r e s, c'è una piega che porta P su r e Q su s.
N7. Dato un punto P e due rette r ed s c'è una piega che porta P su r ed è perpendicolare a s».

Rispetto ad **HH**, in **N** in tutti gli assiomi non solo è garantita l'esistenza di (almeno) una piega, ma in alcuni casi è esplicitata l'unicità. Anche in questa formulazione, però, ci sono diverse imprecisioni; vediamo di evidenziarle.

2.2 Osservazioni sugli assiomi

È facile osservare come in tutti gli assiomi compaia il termine (primitivo) piega. Nella maggior parte di essi, le pieghe si possono configurare come assi di simmetria di (particolari) simmetrie assiali, per cui in generale l'attività della piegatura si configura come un processo riconducibile a trasformazioni. Questa considerazione non è didatticamente trascurabile, poiché è nota la difficoltà degli studenti rispetto a questo concetto (il quale, come detto, permette di sostituire in contesti statici l'idea di movimento sottesa alla possibilità di "spostare" punti o rette).
Per quanto riguarda gli assiomi N1, N2 e N4 si osserva come garantiscano sia l'esistenza che l'unicità della piega (mentre gli originali HH1, HH2 e HH4 solo l'esistenza) per cui sono chiaramente più specifici.
L'assioma 5 è formulato in modo scorretto in entrambe le assiomatizzazioni. Infatti la piega richiesta deve essere perpendicolare al segmento individuato da P e dal suo corrispondente P' su r e deve passare per Q. Il triangolo PQP' è isoscele per cui P' esiste se la circonferenza di centro Q passante per P interseca la retta r; l'assioma dovrebbe quindi essere formulato in questa forma:

N5a. Dati due punti P e Q ed una retta r *tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P*, c'è una piega che porta P su r e passa per Q.

Un altro errore tecnico è presente in entrambe le formulazioni dell'assioma 7. Anche in questo caso l'esistenza della piega non è garantita, com'è facilmente verificabile, se le rette r e s sono parallele.

4. Per una maggiore leggibilità sono stati indicati i punti con le lettere P e Q e le rette con r e s.

Una formulazione più corretta potrebbe essere:

N7a. Dato un punto P *e due rette incidenti* r e s c'è una piega che porta P su r ed è perpendicolare a s.

Va inoltre osservato come in questo assioma il termine *piega* sia usato con entrambe le accezioni: come retta (oggetto) e come asse di simmetria legata al processo di piegatura.

Altre osservazioni riguardano poi direttamente la struttura e la terminologia presente negli assiomi. In particolare, negli altri assiomi in cui è garantita l'esistenza di una piega, ma non l'unicità, un'importante questione da porre sul piano didattico è stabilire quante possono essere nella fattispecie le pieghe possibili che soddisfano le determinate condizioni. Inoltre in entrambe le assiomatizzazioni il termine primitivo *retta* è visto, pensando al foglio di carta (cioè all'ambiente geometrico di riferimento), come segmento (al più prolungabile), ricollegandosi così alla concezione euclidea di retta nell'ottica di un infinito potenziale.
Va inoltre osservato come in entrambe le assiomatizzazioni manchi in modo esplicito l'assioma del compasso (terzo assioma euclideo;[5] il primo assioma euclideo coincide con HH1) e il quinto postulato (delle parallele) a sua volta sostituito dall'assioma HH4 (oppure N4).
Inoltre sia in **HH** che in **N** la condizione di esistenza è errata, in quanto ci sono casi in cui la piega non esiste (vedi Allegato 1).

Come detto, uno degli obiettivi principali che ci si pone è quello di mostrare come la geometria della carta piegata permetta di fare costruzioni non effettuabili con gli strumenti (riga e compasso) della geometria euclidea. Questo significa che devono esserci assiomi della geometria dell'origami non modellizzabili nella geometria euclidea. Come vedremo anche con l'attività con GeoGebra l'assioma più problematico è HH6. È infatti questo assioma che fa la differenza rispetto alla possibilità di costruzioni non fattibili con riga e compasso.

3 Assiomatizzazione OLM

L'assiomatizzazione proposta nel seguito, e che è stata utilizzata per lo sviluppo del modulo "Geometria dell'origami", parte dall'assiomatizzazione **N** con alcune modifiche o variazioni[6]; la chiameremo Assiomatizzazione Origami Liceo Matematico (**OLM**). Per questioni didattiche (che vedremo in seguito) gli assiomi 6 e 7 delle precedenti assiomatizzazioni sono stati invertiti, mentre per comodità di scrittura gli assiomi sono indicati solo dalla lettera A e dal numero corrispondente.
Nelle varie assiomatizzazioni reperibili e riportate in precedenza non sono esplicitati i termini primitivi, aspetto che invece si è ritenuto opportuno riportare esplicitamente nel percorso proposto, in quanto

5. Gli assiomi euclidei proposti sono quelli presenti in Euclide (1970):
I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a un altro punto.
II. E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.
III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.
IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.
V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minore di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.
6. In particolare ce n'è una di carattere terminologico. Alcune formulazioni (come in https://it.wikipedia.org/wiki/Assiomi_di_Huzita-Hatori) parlano di piegatura anziché di piega. Detto diversamente, si fissa più l'attenzione sul processo che sull'oggetto finale (la piega). Come visto, in N si parla di pieghe, mentre in HH si pone più l'attenzione sul processo ("we can fold"). Si è scelto di utilizzare il termine piega anziché piegatura in quanto la piegatura è fatta per ottenere una piega, cioè una retta funzionale alla costruzione. Usare il termine piegatura darebbe invece più enfasi al processo, rischiando di sviare l'attenzione sul vero scopo del processo. Naturalmente anche questa è una scelta e, in quanto tale, discutibile.

si ricollega alla modalità con cui viene presentata normalmente la geometria nelle classi prime; il tentativo, anche in questo caso, è di far percepire i termini primitivi come termini vuoti e la necessità degli assiomi come loro definizioni implicite. In questo modo la geometria dell'origami si presenta strutturalmente, come teoria, allo stesso modo della geometria che già conoscono. Poiché negli assiomi si parla di pieghe e rette occorre premettere un assioma 0 secondo cui, in accordo a quanto detto nel par. 2.2, le pieghe sono rette.

Termini primitivi: punto, retta, piega.
Assiomi:[7]
A0. Ogni piega è una retta.
A1. Dati due punti P e Q, esiste un'unica piega che passa per entrambi.
A2. Dati due punti P e Q, esiste un'unica piega che porta P su Q.
A3. Date due rette r e s, esiste almeno una piega che porta r su s.
A4. Dati un punto P e una retta r, esiste un'unica piega perpendicolare a r che passa per il punto P.
A5. Dati due punti P e Q e una retta r, tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P, esiste almeno una piega passante per Q che porta P su r.
A6. Dati un punto P e due rette incidenti r e s, esiste un'unica piega perpendicolare a s che porta P su r.
A7. Dati due punti P e Q e due rette incidenti r e s, esiste e si può costruire almeno una piega che porta P su r e Q su s.

La formulazione più controversa è quella dell'assioma A7, ma questo proprio perché l'assioma in sé è problematico, in quanto in una formulazione più generale potrebbero non essere garantite né l'esistenza né l'unicità. In particolare, la condizione che le rette siano incidenti di per sé non è vincolante, ma con detta condizione risulta garantita l'esistenza di (almeno) una piega, garanzia che invece non si avrebbe se le rette fossero parallele. Con la formulazione proposta nell'assioma A7 si è quindi operata una scelta che permette di rendere l'assioma sempre operativo; si ritiene però importante una riflessione che permetta di capire la necessità e la portata di questa scelta. Poiché queste disquisizioni esulano dagli obiettivi strettamente didattici del percorso, si è preferito inserirle, per chi fosse interessato, nell'Allegato 1.

4 Le attività con gli studenti

Dal punto di vista didattico, il modulo proposto è suddiviso in tre percorsi:
1. Assiomatizzazioni e costruzioni geometriche di tipo manipolativo.
2. Geometria dinamica ed estensioni algebriche.
3. Sistemi formali.

A sua volta il primo percorso, sviluppato con gli studenti delle classi prime, si suddivide in due fasi: costruzioni con gli assiomi della geometria euclidea e costruzioni con gli assiomi della geometria dell'origami.
I primi due percorsi hanno lo scopo di portare lo studente a percepire limiti e potenzialità dei vari contesti geometrici presentati, mentre il terzo si pone come una riflessione finale sul ruolo dei sistemi formali in ottica strutturale.

7. Salvo diverse indicazioni, in tutti gli assiomi si sottintende che i punti e le rette di cui si parla siano distinti/e.

Per quanto detto, le attività proposte nella fase relativa alla geometria dell'origami hanno come scopo principale quello di prospettare diverse assiomatizzazioni e modellizzazioni degli enti geometrici, sempre in contesto euclideo (se per contesto euclideo intendiamo quello individuato dal quinto postulato, cosa diversa dal contesto *descritto* dagli assiomi euclidei). L'obiettivo principale è far cogliere agli studenti che non si sta facendo un'altra geometria, quanto il fatto che fare geometria significa anche poter costruire gli oggetti utilizzati e questo dipende dagli strumenti a disposizione.
Per far capire la differenza di realtà costruibili con presupposti (assiomatici) diversi vengono utilizzati i termini *gioco* e *regole del gioco*, anche per far cogliere, nei limiti del possibile, il carattere sintattico di una teoria (matematica). Lo scopo è innanzi tutto quello di favorire negli studenti una riflessione sulla geometria euclidea (oltre a fornire loro uno strumento alternativo, ed essenzialmente manipolativo, per la costruzione degli oggetti geometrici), ma anche di far capire come con la geometria degli origami si possano fare costruzioni non realizzabili con riga e compasso. Quest'ultimo però è un obiettivo alto che necessita di alcuni "atti di fede" da parte dello studente, come ad esempio, accettare che la costruzione della trisezione dell'angolo non sia realizzabile con riga e compasso.
Nel dettaglio, le attività previste nel primo percorso (suddiviso, come detto, in due fasi) sono le seguenti:[8]
fase 1

Attività 1 – Costruiamo con le regole del gioco euclideo
Attività 1A – La (prima) gara delle pieghe
Attività 1B – La (seconda) gara delle pieghe

fase 2

Attività 2 – Costruiamo con le regole del gioco origami
Attività 3 – Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo

Per cogliere meglio lo scopo delle attività proposte, sono opportuni alcuni commenti e/o osservazioni che permettono di capire le scelte fatte e le finalità.

4.1 Descrizione e commento delle attività proposte nella prima fase del primo percorso

4.1.1 Costruiamo con le regole del gioco euclideo

Nella prima attività proposta gli studenti lavorano a gruppi e la consegna che viene data loro è articolata in diversi punti (si veda l'Allegato 2 – attività 1): riportare i termini primitivi e gli assiomi della geometria euclidea di cui sono a conoscenza, riportare le definizioni di alcuni enti geometrici (asse di un segmento, circocentro e baricentro di un triangolo, bisettrice di un angolo, retta perpendicolare e retta parallela ad una retta data, ortocentro e incentro di un triangolo, triangolo equilatero), eseguire le costruzioni di questi enti geometrici con riga e compasso, riflettere su quali assiomi siano stati utilizzati e dimostrare che le costruzioni svolte determinano effettivamente gli enti geometrici richiesti.
L'attività ha diversi obiettivi, con difficoltà crescenti. Nel dettaglio:

1. ripassare le nozioni geometriche elementari, permettendo così un collegamento diretto dell'attività con quanto proposto in classe durante le ore curricolari e mettere in particolare rilievo il ruolo dei termini primitivi (come termini vuoti) e degli assiomi come definizioni implicite dei termini primitivi;
2. riflettere sul ruolo degli assiomi come *regole del gioco*, ponendosi quindi in una condizione (pseudo) ludica rispetto alla scoperta geometrica;
3. sottolineare le finalità (e preoccupazioni) ontologiche della geometria euclidea, con particolare riguardo all'idea di esistenza associata alla costruibilità;
4. far cogliere il ruolo degli assiomi non come vincoli quanto come strumenti che permettono di giocare e costruire gli oggetti del gioco; in questo senso quest'attività, come le successive, si

8. Le schede-studente sono state inserite nell'Allegato 2; le risposte o le risoluzioni di alcune attività sono riportate nell'Allegato 3.

pongono come meta-obiettivo quello di far sentire il contesto costruito dagli assiomi come un contesto *sicuro* e *garantito*. Dare rilievo e importanza al ruolo della costruibilità degli oggetti geometrici diventa anche propedeutico a quello che sarà poi sviluppato al terzo anno con la geometria analitica, intesa non tanto come traduzione algebrica di oggetti geometrici, quanto come contesto in cui costruire e gestire con strumenti algebrici gli oggetti geometrici;
5. porre il problema della continuità (implicita) delle curve (in questo caso rette e circonferenze) nella geometria euclidea, ma non garantita dagli assiomi e senza la quale l'individuazione di alcuni punti (come il terzo vertice del triangolo equilatero) non sarebbe scontata. In particolare questa fase può diventare un importante momento per analizzare criticamente l'impostazione assiomatica del libro di testo (nel caso ricalchi l'assiomatizzazione di Hilbert) e quella presente negli Elementi di Euclide;
6. la costruzione della parallela con riga e compasso permette di mostrare come in ambito euclideo l'esistenza della parallela sia garantita dai primi quattro assiomi per cui ciò che afferma (realmente) il quinto postulato è l'unicità.

Molte delle costruzioni proposte sono probabilmente già note agli studenti dalla scuola secondaria di primo grado[9] ma, presumibilmente, senza che abbiano piena consapevolezza del perché tali costruzioni si realizzino effettivamente così.
Per tale ragione il percorso di geometria dell'origami dovrebbe essere proposto quando gli alunni hanno acquisito una buona padronanza dei concetti geometrici (quindi almeno dopo che siano stati introdotte nelle ore curricolari i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi relativi al parallelismo tra rette) in modo da poter richiedere loro anche la giustificazione razionale delle costruzioni. Tra le dimostrazioni richieste alcune sarebbero più semplici se fossero note le proprietà della circonferenza (come ad esempio la giustificazione della costruzione di un'altezza di un triangolo), ma si può operare anche solo con le nozioni che hanno gli studenti del primo anno, eventualmente con l'aiuto dell'insegnante. Due problemi che difficilmente vengono risolti dagli studenti del primo anno e potrebbero rimanere aperti (ma è opportuno tenerli tali, come domande a cui rispondere in futuro, in quanto affrontarli adesso rischia di far perdere di vista l'obiettivo principale di tutto il percorso) sono le dimostrazioni dell'esistenza dell'ortocentro e dell'incentro di un triangolo.
Infine, per quanto riguarda l'analisi del punto 3 dell'attività 1 (Allegato 2), si tratta di un'occasione per far notare agli studenti come gli oggetti[10] utilizzati (riga e compasso) siano la traduzione pratica del primo e terzo assioma euclideo. Questa osservazione è poi propedeutica a far comprendere come il vero strumento non sia l'oggetto fisico, quanto l'assioma, di cui l'oggetto è solo una sua (possibile) esternazione. Si potrà così introdurre già in questa fase la distinzione tra *strumento* e *artefatto*.[11] A questo aspetto si ricollega la riflessione sul ruolo delle rappresentazioni iconiche in geometria, con il noto problema della tendenza a confondere, da parte di molti studenti, gli enti geometrici con la loro rappresentazione.

4.1.2 Le gare delle pieghe

Nelle attività 1A e 1B (vedi Allegato 2) gli studenti sono invece direttamente introdotti al processo di piegatura e alle problematiche relative, rispettivamente, agli assiomi A5 e A7, senza ovviamente no-

9. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
10. Il termine "oggetto" è utilizzato in questo contesto in modo generico. Di fatto, parlare di riga e compasso significa parlare di artefatti, intesi come oggetti prodotti dall'uomo per favorire il processo di conoscenza (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Il termine "strumento", invece si riferisce all'aspetto concettuale sotteso all'artefatto, precisandone di conseguenza gli schemi di utilizzo. Sul piano geometrico, ad esempio, il primo assioma di Euclide ("Per due punti distinti passa una ed una sola retta") sarebbe uno strumento, mentre la riga un artefatto. Qui più propriamente si dovrebbe quindi parlare di artefatto. Si è scelto il termine "oggetto" per non rischiare di perdere di vista il senso complessivo del discorso.
11. Le attività con gli origami e quelle con GeoGebra rappresentano a loro volta l'occasione per introdurre altri artefatti (le piegature per l'origami e i comandi del programma per GeoGebra).

minare tali assiomi. Agli studenti vengono dati dei fogli su cui sono disegnate alcune figure racchiuse da riquadri (vedi Figure 1 e 3) raffiguranti linee e punti in posizioni diverse.
Gli strumenti a loro disposizione sono: forbici, matita, righello e compasso.
Viene chiesto loro di ritagliare i riquadri e di cercare di svolgere le consegne assegnate (fare alcune pieghe con specifiche caratteristiche); in particolare nell'attività 1A si propongono costruzioni relative all'assioma A5, mentre nell'attività 1B si propongono costruzioni relative all'assioma A7.
Le consegne assegnate hanno lo scopo di far cogliere agli studenti condizioni di esistenza, di non esistenza e di unicità delle soluzioni in relazione alle varie configurazioni iniziali.
Le attività sono proposte sotto forma di gara non per creare competizione, ma per dar loro una connotazione ludica, e il loro scopo è quello di far cogliere il senso delle limitazioni che saranno introdotte negli assiomi A5 e A7. Le situazioni più delicate sono le ultime due dell'attività 1A dell'Allegato 2, mostrate nelle Figure 1 e 2 per il caso che porta ad un'unica soluzione e nelle Figure 3 e 4 per il caso che non porta a nessuna soluzione: in particolare la situazione che conduce all'impossibilità della costruzione richiede una giustificazione non banale per gli studenti. A tale proposito può venire in aiuto il compasso e l'insegnante potrebbe, dopo qualche tentativo andato a vuoto, chiedere come mai sia stata richiesta la presenza di quell'artefatto visto che fino ad allora non era stato usato. Tracciando quindi una circonferenza di centro Q e raggio QP gli studenti potrebbero avere qualche aiuto in più per arrivare alla conclusione.

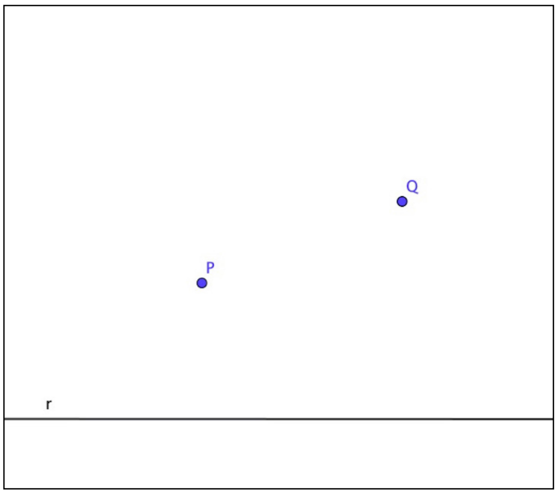


Figura 1. La consegna agli studenti.

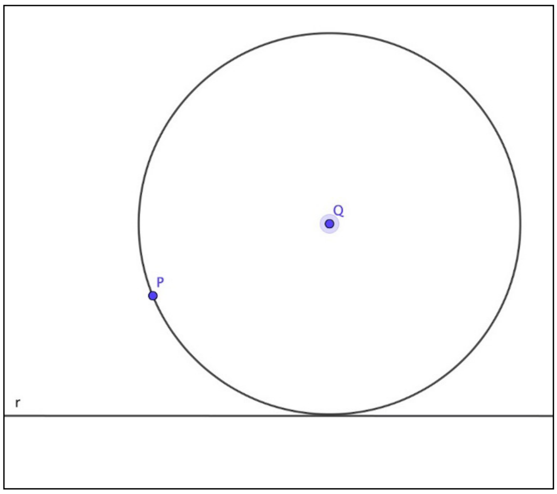


Figura 2. La risposta con l'uso del compasso.

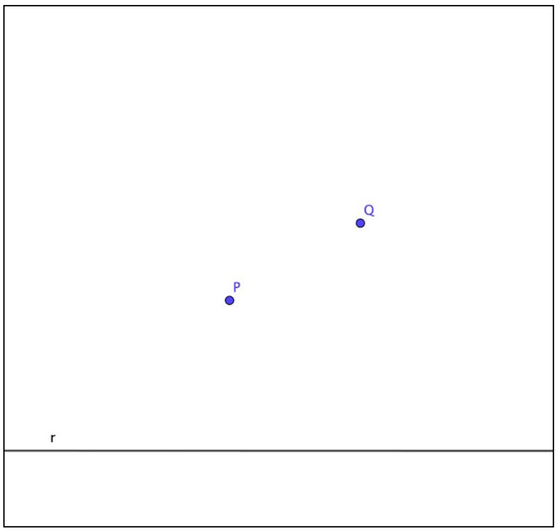


Figura 3. La consegna agli studenti.

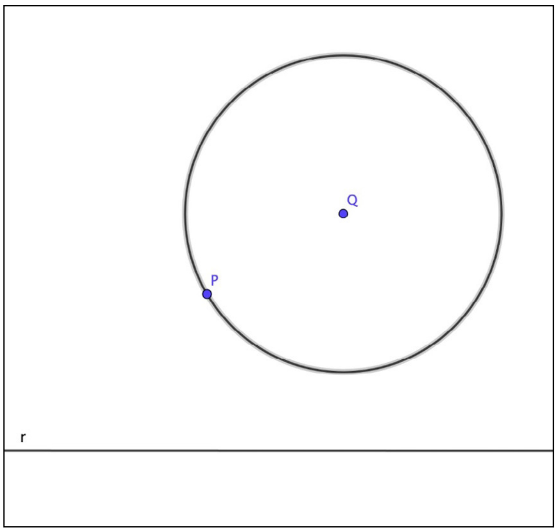


Figura 4. La risposta con l'uso del compasso.

Nel primo caso (Figure 1 e 2) risulta così visivamente evidente come la piega richiesta sia unica: quella passante per Q e che porta P nel punto di tangenza tra la retta e la circonferenza, mentre nel secondo caso non si hanno soluzioni perché non ci sono intersezioni tra retta e circonferenza.
Le condizioni di impossibilità aprirebbero, a questo punto, una riflessione sulla formulazione più opportuna di un assioma in relazione sia alle sue potenzialità che ai suoi limiti, riflessione che permette a sua volta di giustificare agli studenti la scelta fatta per l'assioma A5.

Per quanto riguarda invece l'attività 1B, il suo scopo è quello di introdurre l'assioma A7, mostrandone sia le criticità che le potenzialità. In particolare le situazioni riportate nell'attività (vedi le successive Figure 5, 7 e 9) sono proposte per evidenziare come, nel caso di rette parallele, l'esistenza della piega non sia assicurata (questo, come indicato anche nell'approfondimento dell'Allegato 1, dipende dall'esistenza o meno di tangenti comuni a due parabole distinte). In particolare, le tre situazioni permettono di ottenere due soluzioni (Figura 5 e 6), nessuna soluzione (Figura 7 e 8) e una soluzione (Figura 9 e 10). Questo consente così di giustificare la richiesta che le rette siano incidenti, caso in cui l'esistenza (ma non l'unicità) risulta sempre garantita.

Figura 5. Caso con due soluzioni: consegna.

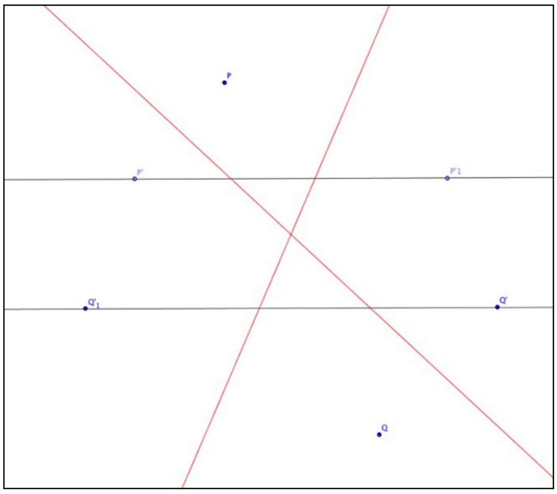


Figura 6. Soluzioni.

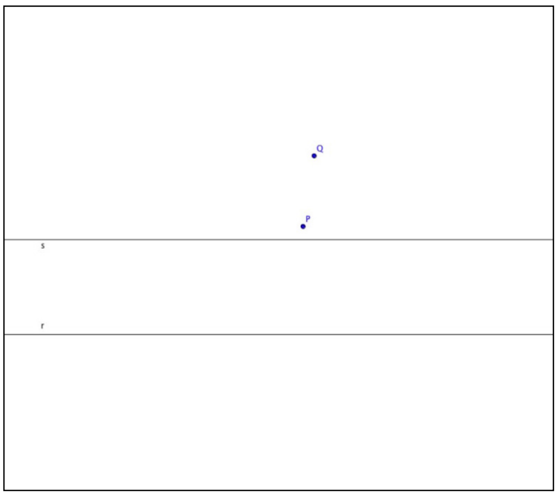


Figura 7. Caso con nessuna soluzione: consegna.

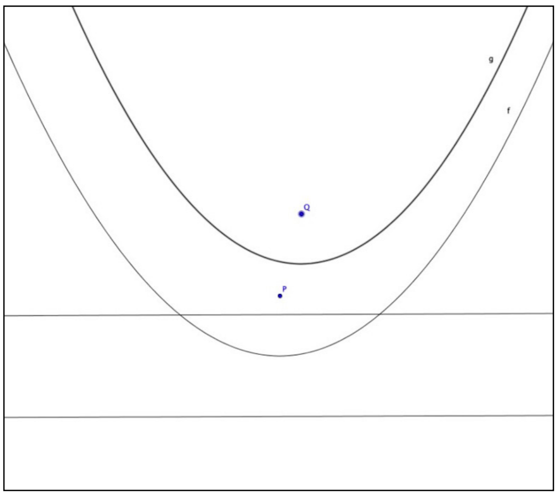


Figura 8. Soluzione.

Figura 9. Caso con una soluzione: consegna.

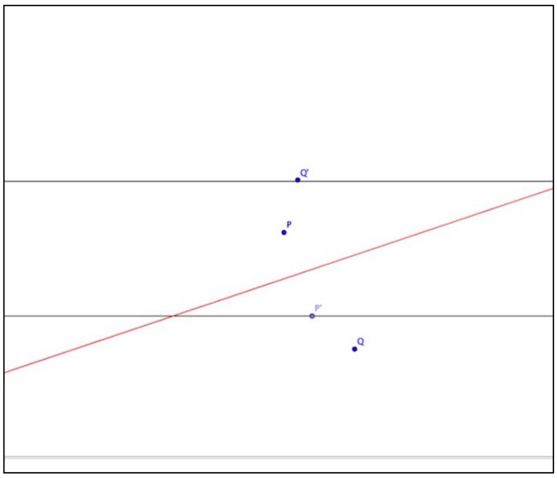


Figura 10. Soluzione.

4.1.3 Costruiamo con le regole del gioco origami

L'attività 2 (vedi Allegato 2) serve per introdurre in modo operativo l'assiomatica dell'origami. Agli studenti vengono presentati gli assiomi OLM e viene chiesto, oltre a un'analisi linguistica dei contenuti, di rifare con gli strumenti dell'origami le stesse costruzioni realizzate con riga e compasso nell'attività 1 e di confrontare le due modalità. Gli studenti lavorano sempre a gruppi, ma l'unico materiale che hanno a disposizione sono fogli di carta quadrati semitrasparenti.
Anche in questo caso lo scopo principale è far percepire gli assiomi come strumenti operativi in grado di fare quanto meno "le stesse cose" che si possono fare con gli assiomi euclidei (una bozza di risoluzione dell'attività è contenuta nell'Allegato 3).
Entrando più nel merito dell'attività, va sottolineato che per effettuare le costruzioni con riga e compasso, previste nell'attività 1 dell'Allegato 2, i ragazzi dovrebbero già avere i prerequisiti necessari che ne facilitino lo svolgimento, mentre con il piegamento della carta potrebbero esserci delle difficoltà sia sul piano operativo/concettuale, sia su quello più strettamente manipolativo. Per questo è necessario che l'insegnante segua in modo più specifico lo svolgimento delle varie operazioni fornendo indicazioni e suggerimenti di lavoro.
Non è però improbabile che alcuni studenti abbiano più dimestichezza e manualità con la carta piegata. Purtroppo non è possibile un parallelo/confronto con le analoghe costruzioni con riga e compasso, poiché, come detto, probabilmente per diversi studenti molte tra le costruzioni proposte erano già note dalla scuola secondaria di primo grado.[12]
Rispetto a quella riportata in OLM nell'assiomatizzazione proposta nell'attività 2 (vedi Allegato 2) manca l'assioma A0. Le richieste al punto 1 dell'attività dovrebbero da una parte far capire le differenze e le analogie tra i termini *piega* e *retta* e dall'altra far cogliere la necessità di dire, da qualche parte, che le pieghe in ultima analisi sono rette. L'obiettivo quindi è quello di far sentire l'assioma A0 come una necessità, per cui al termine della discussione sulle risposte al punto 1 si tratterà di rivedere l'impianto assiomatico con l'aggiunta di tale assioma.
Infine, va osservato come il verbo *portare* sia usato nella formulazione degli assiomi fornita agli alunni in senso intuitivo e dinamico, esplicitando quindi l'aspetto operativo/manipolativo alla base delle attività dell'origami.

12. Non si esclude che anche l'origami sia un'attività già nota ad alcuni studenti, sia in base al proprio percorso di studi che per interesse personale, eventualità che in effetti si è presentata per un paio di ragazzi.

4.1.4 Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo

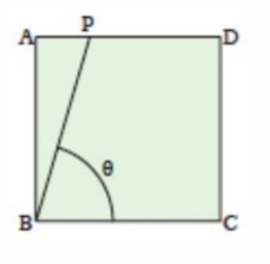
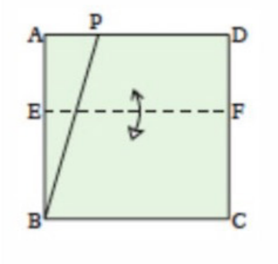
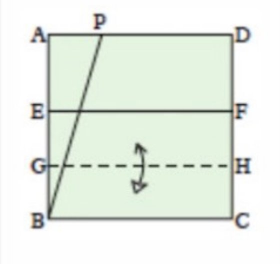
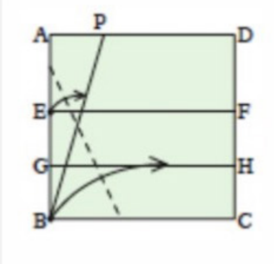
Anche l'attività 3 dell'Allegato 2 si svolge a gruppi ed ha come scopo la costruzione della trisezione di un angolo con gli strumenti (assiomi) dell'origami. L'attività vera e propria è preceduta da una breve illustrazione del problema della trisezione dell'angolo e, più in generale, su cosa significhi che un problema geometrico non sia risolvibile con riga e compasso.

Diversamente dalle altre attività in cui gli studenti dovevano cimentarsi in modo sperimentale nella ricerca della soluzione richiesta, in questa gli studenti, dopo l'introduzione iniziale, devono svolgere la trisezione dell'angolo seguendo le indicazioni fornite dalla scheda, cercando soprattutto di comprenderle e realizzarle correttamente.

I materiali a disposizione sono fogli di carta quadrati, un goniometro (per controllare la correttezza del risultato) ed eventualmente un righello e una matita per segnare l'angolo e le semirette che risolvono il problema.

La costruzione richiesta presuppone diverse congetture (come ad esempio che il prolungamento al punto 7 passi per B) che necessiterebbero di una dimostrazione. Inoltre la verifica finale di per sé non basta per dire che la costruzione ha raggiunto lo scopo: anche in questo caso quindi l'attività dovrebbe concludersi con una dimostrazione. Tale dimostrazione (riportata nell'Allegato 3) non è detto sia alla portata di un ragazzo al primo anno di scuola secondaria di secondo grado, per cui sta all'insegnante decidere se proporla o meno in base al livello del gruppo classe e al periodo scolastico (non necessariamente al primo anno) in cui viene svolta l'attività.

Nella costruzione il passaggio più delicato è senza dubbio il quarto (si veda la **Figura 11**, in cui sono riportati i passaggi della costruzione così come sono proposti agli studenti nell'Attività 3), cioè l'applicazione dell'assioma A7. In questa fase non è improbabile che i ragazzi incontrino diverse difficoltà nel momento in cui devono sovrapporre i punti alle rette. Nel lavoro di gruppo è quindi richiesto ai componenti una stretta collaborazione reciproca per analizzare insieme come fare per ottenere lo scopo.

			
1. Posizione iniziale.	2. Fai una piega EF in modo che sia parallela ai lati del quadrato.	3. Porta BC su EF e sia GH la piega così ottenuta.	4. Porta E su BP e B su GH.

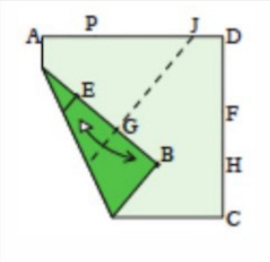
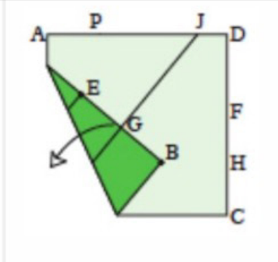
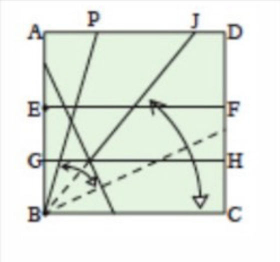
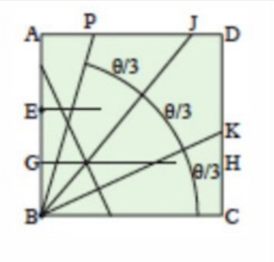
			
5. Porta B su E in modo da continuare la piega che termina in G (piega GJ).	6. Riporta B nella posizione iniziale.	7. Continua la piega che parte da J fino a B. Porta BC su BJ.	8. Verifica con un goniometro che i tre angoli PBJ, JBK e KBC abbiano la stessa ampiezza.

Figura 11. Istruzioni per la trisezione dell'angolo.

5 Il percorso con gli studenti: risultati e criticità

Le attività con gli studenti svolte a gruppi[13] con le modalità descritte nelle schede dell'Allegato 2, sono state proposte tra gennaio e febbraio del 2019 (nelle **Figure 12**, **13** e **14** si possono vedere tre gruppi di studenti mentre svolgono una delle attività proposte).
Per la parte del modulo "Geometria dell'origami" prevista per la classe prima sono stati fissati otto incontri di un'ora ciascuno, visto che per ogni attività erano previsti circa 45 minuti di svolgimento (preceduti da una breve introduzione) e mezz'ora (suddivisi tra quindici minuti al termine dell'incontro e quindici all'inizio dell'incontro successivo) di discussione collettiva sui risultati trovati, discussione che a sua volta avrebbe introdotto la successiva attività.

Figura 12. Studenti al lavoro.

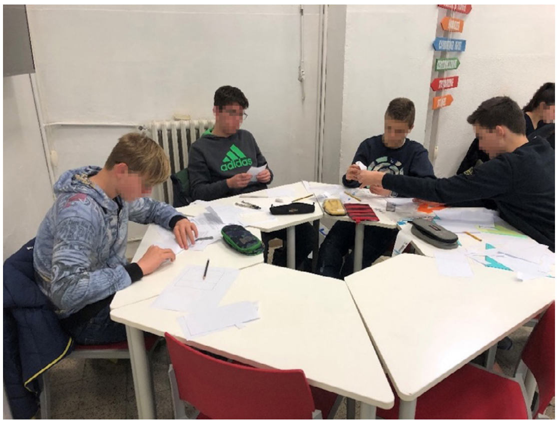


Figura 13. Studenti impegnati nella fase di piegatura.

Figura 14. Studenti impegnati nella fase di controllo dei risultati.

Gli studenti che hanno aderito al potenziamento matematico (circa una quarantina) provenivano da classi diverse e questo ha costituito un primo problema, in quanto i prerequisiti geometrici non erano comuni a tutti e, quando presenti, non era detto fossero stati sviluppati allo stesso modo. Rispetto al percorso progettato è stata quindi necessaria una prima introduzione generale (della durata di circa due ore) sul ruolo degli assiomi in geometria e sugli aspetti costruttivi alla base degli stessi, fase che ha comportato un inevitabile slittamento dei tempi, rendendo così difficile un'analisi critica degli

13. I gruppi erano formati in genere da 4-5 studenti provenienti dalla stessa classe.

assiomi come previsto dal progetto. In generale, comunque, le costruzioni con riga e compasso sono state svolte dai più senza particolari problemi. Quando, in fase di progettazione, si era fissata un'ora per lo svolgimento delle singole attività si era ritenuto il tempo ampiamente sufficiente, pensando di avere anche il tempo per la condivisione dei risultati; invece, alla fase pratica delle attività, sono emerse difficoltà tecniche significative dovute alla scarsa manualità e senso spaziale. Tali difficoltà hanno costretto la maggior parte degli studenti ad occupare con l'attività tutto il tempo messo a disposizione. Ad esempio, le sovrapposizioni sono avvenute non attraverso delle pieghe, ma "per spezzate", nel senso che la carta è stata più stropicciata che piegata. Un'altra tipica difficoltà è stata capire come modificare l'impostazione di una piega per raggiungere lo scopo, non approfittando appieno della possibilità di "far scivolare" il foglio sul foglio stesso prima di marcare la piegatura.
Inoltre, la relativa amalgama tra i gruppi ha reso poco significativo il ruolo della competizione (in senso ludico) con cui alcune attività sono state proposte.
Circa metà degli studenti è riuscito a trovare le motivazioni all'impossibilità delle costruzioni nelle attività 1A e 1B. Per la maggior parte (circa due terzi) degli studenti è stato invece più complesso individuare quali fossero le situazioni con più soluzioni e solo i gruppi più collaborativi sono riusciti a trovarle correttamente.
Tra le varie attività proposte, poi, quelle che hanno creato più difficoltà sono state, come era presumibile, la ricerca di più soluzioni nel caso dell'assioma A7 (in genere una volta trovata una soluzione non veniva colta la necessità o, come è stato verbalizzato dagli studenti, il senso, di cercarne altre) e la trisezione dell'angolo, che risulta indubbiamente l'attività più complessa sul piano tecnico.
In sostanza, oltre agli obiettivi che ci si era posti, le attività con l'origami hanno permesso di evidenziare indirettamente come i ragazzi facciano fatica a relazionarsi con modelli non usuali che richiedono abilità manuali specifiche, le quali a loro volta permettono di avere una più chiara percezione degli oggetti e dei concetti coinvolti. I primi ad arrivare alle conclusioni non sono stati necessariamente "i più bravi", quanto coloro che hanno evidenziato una maggiore abilità pratica, denotando competenze non strettamente sviluppate in ambito scolastico.
Va comunque detto che la maggior parte degli studenti, seppure con tempi diversi, ha portato a termine le richieste e, al termine del percorso, quasi tutti (salvo 5-6 ragazzi) sono riusciti sia a costruire la trisezione dell'angolo (facendo le pieghe richieste) che a completare la scheda indicando quali assiomi erano stati applicati nei vari passaggi.
Ciò che indubbiamente è risultato troppo elevato come obiettivo, almeno per i ragazzi del primo anno, è stata la riflessione epistemologica sui vari aspetti legati agli assiomi e al loro utilizzo.
Alla luce di quanto emerso, sarebbe opportuno, in futuro, proporre questo percorso più avanti nell'anno scolastico e con gruppi più omogenei. Anche in base a queste considerazioni, nell'a.s. 2019/20 si è deciso di formare una classe intera per il potenziamento e proporre il percorso sull'origami in marzo. Purtroppo la chiusura delle scuole in Italia a causa dell'emergenza sanitaria non ha permesso di attivare il modulo.

6 Sviluppi successivi

Al di là dei loro scopi specifici, le attività proposte nelle classi prime, afferenti la prima parte del modulo "Geometria dell'origami", vogliono essere l'inizio di un percorso che porti da una parte ad approfondire e dall'altra a riflettere su questioni epistemologicamente rilevanti della matematica. Per fare questo, come detto all'inizio del par. 4, il percorso illustrato è un segmento del modulo "Geometria dell'origami", il quale proseguirà negli anni successivi per sviluppare e approfondire aspetti relativi a diversi ambiti, sia legati allo specifico percorso iniziato con gli origami, sia (come vedremo nel par. 8) di carattere più generale. In particolare tali approfondimenti saranno di tipo

1. geometrico: utilizzando gli strumenti di geometria dinamica per proporre un altro ambiente di lavoro con nuovi strumenti teorici;
2. algebrico: vedendo l'applicazione di quanto appreso con il metodo del piegamento della carta e con GeoGebra per risolvere (in modo approssimato) equazioni di terzo grado;
3. analitico: studiando le costruzioni e le proprietà della parabola per meglio comprendere e motivare i risultati ottenuti nelle attività riguardanti l'analisi dell'assioma A7 (attività 1B dell'Allegato 2 e attività 2G dell'Allegato 4). In particolare:
   a. parabola, relative proprietà e inviluppo;
   b. problema delle tangenti comuni a due parabole;
   c. punti impropri e coordinate omogenee;
4. sintattico: studiando (semplici) sistemi formali e geometrie finite come applicazioni e approfondimento del metodo assiomatico.

Rispetto ai punti 1, 2 e 4 precedenti, nei prossimi paragrafi sono proposte alcune attività che possono costituire un'ipotesi di lavoro per gli sviluppi di questi percorsi.

7 Dalla carta a GeoGebra

In questo paragrafo viene descritto un possibile approfondimento del percorso di "Geometria dell'origami" che ha lo scopo di proporre il software di geometria dinamica come ulteriore ambiente di lavoro (dopo riga-compasso e origami) per la costruzione di oggetti geometrici.
Come visto in precedenza, nella tecnica del piegamento risulta fondamentale il concetto di trasformazione geometrica. In particolare, molte costruzioni si basano sulla possibilità di sovrapporre punti a punti o di fare in modo che un punto appartenga ad una retta (o che una retta passi per un punto). I software di geometria dinamica si basano naturalmente sull'assiomatizzazione euclidea, ma hanno al loro interno strumenti che permettono di andare oltre e di affidare a qualche sorta di approssimazione la risoluzione di alcuni problemi. Da questo punto di vista, lo strumento principale presente in programmi come GeoGebra che permette di superare l'ambito euclideo è quello che fornisce la possibilità di muovere gli oggetti per imporre passaggi o appartenenze. Questo strumento non resiste alla prova del trascinamento (proprio perché non siamo in contesto riga e compasso). Inoltre, questa modalità di "trascinare i punti" per cercare risultati presenta l'inconveniente di cercare risultati su un continuo lavorando in un ambiente discreto com'è di fatto il piano di GeoGebra: sul piano didattico si tratta quindi di trovare un equilibrio tra la possibilità di trovare un risultato e il grado di approssimazione accettabile per lo stesso.
Un'ulteriore precisazione è che nel piano di GeoGebra le rette ritornano a essere (potenzialmente) illimitate, in quanto non c'è più il vincolo della forma quadrata del foglio. Per ricreare quindi l'ambiente *foglio di carta* sarà opportuno in alcuni casi[14] fare la costruzione all'interno di un quadrato.
A fronte di queste considerazioni, si propone la seguente revisione (AG1-AG7) degli assiomi A1-A7 in ottica GeoGebra.

14. Anche se non indispensabile, si ha l'intenzione di riproporre l'analogo dell'ambiente foglio di carta nell'attività sulla trisezione dell'angolo con GeoGebra.

7.1 Assiomatizzazione GeoGebra (AG)

Termini primitivi: gli stessi della geometria euclidea.

Assiomi:

AG1. Dati due punti P e Q c'è un'unica retta passante per entrambi.
AG2. Dati due punti P e Q c'è un'unica simmetria assiale che trasforma P in Q.
AG3. Date due rette r e s c'è una simmetria assiale che trasforma r in s.[15]
AG4. Dato un punto P e una retta r c'è un'unica retta perpendicolare a r passante per P.
AG5. Dati due punti P e Q e una retta r tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P c'è una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r ed il cui asse di simmetria passa per Q.
AG6. Dato un punto P e due rette incidenti r e s c'è una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r ed il cui asse di simmetria è perpendicolare a s.
AG7. Dati due punti P e Q e due rette incidenti r e s, esiste e si può costruire una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r e il trasformato di Q appartenga a s.

Vale la pena osservare come quasi tutti gli assiomi proposti coinvolgano il concetto di simmetria assiale, individuando nell'asse di simmetria la piega (e quindi la retta) cercata in termini costruttivi. Poiché non è pensabile introdurre la simmetria assiale in modo assiomatico, si tratterebbe di definirla a partire dalle conoscenze intuitive che già gli studenti probabilmente hanno sviluppato nei cicli scolastici precedenti. Questo aspetto, importante sul piano concettuale, rischia però di deviare troppo dal discorso, per cui si ritiene opportuno, per ora, lasciarlo sullo sfondo ipotizzando di riprenderlo per uno sviluppo successivo.[16]

7.2 Attività previste e commenti alle attività

Si riporta nel dettaglio l'elenco delle attività previste (con i relativi commenti) per sviluppare gli aspetti geometrici e algebrici (come riportato nel par. 6). Le schede da consegnare agli studenti per svolgere le attività sono riportate nell'Allegato 4:[17]
Attività 1G – Origami con GeoGebra.
Attività 2G – Dall'Origami a GeoGebra.
Attività 3G – Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo con GeoGebra.
Attività 4G – Risolviamo le equazioni di terzo grado con GeoGebra.

7.2.1 Origami con GeoGebra

Tutte le attività proposte per GeoGebra si avvarranno solo del software GeoGebra e saranno svolte a coppie per favorire la collaborazione e, nel contempo, evitare la dispersione che un gruppo più numeroso potrebbe comportare in un'attività fatta su computer.

15. In un piano illimitato, le simmetrie assiali (nel caso di rette incidenti) sono due.
16. Una possibile definizione di simmetria assiale a cui si può arrivare con gli studenti formalizzandone la loro idea intuitiva è la seguente:
Data una retta a, una simmetria assiale di asse a è una trasformazione del piano in sé tale che
1. se $A \in a$ il suo trasformato è A stesso;
2. se $A \notin a$ il suo trasformato A' è tale che
   a. $A' \neq A$
   b. $AA' \perp a$
   c. Posto $\{H\} = AA' \cap a$, $[AH]$ è congruente ad $[A'H]$.
17. Questo percorso e le relative attività si sarebbero dovute svolgere nelle classi seconde nel periodo marzo-aprile dell'a.s. 2019/20, cosa che non è stata possibile a causa della chiusura delle scuole per l'emergenza sanitaria dovuta al COVID-19.

Nell'attività 1G (vedi Allegato 4) è richiesto agli studenti di rifare le costruzioni già realizzate con riga e compasso e con il piegamento della carta e, successivamente, le costruzioni postulate negli assiomi AG1-AG7.

Come prerequisiti sono richiesti:

1. la conoscenza degli strumenti di base di GeoGebra;
2. la conoscenza, a livello intuitivo o con una definizione di massima, del concetto di simmetria assiale.

Con quest'attività si vuole mostrare come in GeoGebra siano presenti strumenti che permettano di eseguire, oltre a tutte le costruzioni fattibili con riga e compasso, anche altre costruzioni.

Questa attività è al tempo stesso delicata e cruciale. Magari con qualche difficoltà (e opportunamente guidati) gli studenti dovrebbero riuscire ad effettuare le costruzioni relative agli assiomi AG1-AG6 (tali costruzioni sotto riportate nell'Allegato 5), mentre potrebbero incontrare difficoltà ad effettuare la costruzione relativa all'assioma AG7. In tutti i casi va ricordato (o fatto emergere dagli studenti) che l'oggetto cercato è l'asse di simmetria che individua la simmetria assiale.

Con l'assioma AG7, come detto, usciamo dall'ambiente costruito dalla geometria della riga e del compasso.

Lo scopo principale dell'attività, però, è mostrare cosa sia un modello per un sistema assiomatico, ovviamente nei termini in cui questo può essere proposto a ragazzi dei primi due anni del liceo scientifico. Questo è uno dei punti cruciali del percorso[18] e potrà poi essere ripreso al terzo anno proponendo la geometria analitica come modello della geometria euclidea e quando si parlerà (nel caso) di geometrie non euclidee. Al di là quindi degli aspetti tecnici legati alle costruzioni, sarà importante la successiva discussione relativa alle risposte date dai gruppi alle domande 3, 4 5 e 6 dell'attività 1G (vedi Allegato 4, per comodità riportate di seguito):

3. Ci sono posizioni di rette e punti che non permettono le costruzioni? Riesci a farle tutte in modo preciso o alcune hanno bisogno di metodi non rigorosi? Quali?
4. Come interpreti la condizione sulle distanze nell'assioma AG5? Cosa succederebbe se tale condizione non fosse soddisfatta?
5. Dimostra che le costruzioni precedenti sono proprio quelle richieste. Dalle costruzioni che hai fatto sapresti dire quante possono essere (al massimo) le costruzioni che risolvono il problema?
6. Con le costruzioni precedenti hai visto come quasi tutte le regole del gioco dell'origami (riviste in ambiente GeoGebra) siano ricostruibili con gli strumenti euclidei di GeoGebra. Come interpreti questo "quasi tutte"? Cosa significa, secondo te, che delle regole di un gioco siano ottenibili come *mosse* in un altro gioco?

È probabile che alcuni gruppi non solo non riescano a rispondere, ma non riescano neppure a decodificare la domanda (come nel caso della 3 e della 6). L'analisi stessa della richiesta diventerà allora motivo di riflessione sulla differenza tra esistenza e costruibilità (e possibilità).

Infine, va osservato come non ci sia l'equivalente dell'assioma A0 del sistema OLM e questo perché è sparito il termine primitivo piega. Questa considerazione è da sottolineare proprio per evidenziare come un sistema assiomatico possa e debba essere adattato al contesto, cercando di renderlo completo, ma, allo stesso tempo, non ridondante.

7.2.2 Dall'origami a GeoGebra

L'attività 2G (vedi Allegato 4), svolta sempre a coppie, ha l'ovvio scopo da un lato di riproporre le costruzioni fatte nelle attività 1A e 1B dell'Allegato 2 e dall'altro di mostrare quali possono essere le

18. A loro volta le attività proposte in questa fase potranno essere utilizzate come propedeutiche all'acquisizione di questa consapevolezza.

potenzialità di un software di geometria dinamica non solo come strumento di esplorazione, ma anche nell'ottica di ricerca di condizioni di esistenza. L'aspettativa è che gli studenti scoprano più facilmente quando non ci sono soluzioni e quando sono più di una, consolidando così l'interiorizzazione del senso degli assiomi A7 e AG7.

7.2.3 Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo con GeoGebra

Anche l'attività 3G (vedi Allegato 4) si svolge a coppie. Con questa attività si vuole riproporre con altri strumenti una costruzione già realizzata, in particolare la costruzione che porta alla trisezione dell'angolo fatta con la piegatura della carta nell'attività 3 dell'Allegato 2.
Il passaggio dal foglio di carta al piano di GeoGebra permette non solo di prendere dimestichezza con gli strumenti del software e gli assiomi AG1-AG7, ma anche e soprattutto di vedere quali ne sono i limiti. In particolare gli studenti dovrebbero notare come la costruzione così ottenuta non superi la prova del trascinamento, proprio perché l'assioma AG7 non è modellizzabile all'interno dell'ambiente di lavoro definito dagli assiomi di Euclide (e su cui è strutturato anche il programma GeoGebra).
Per quanto riguarda invece la richiesta di trisecare angoli ottusi o angoli concavi, basta osservare che alla fine della costruzione i primi risultano divisi in 6 angoli congruenti di cui due (consecutivi) rappresentano un terzo dell'angolo di partenza, mentre i secondi risulteranno alla fine divisi in 12 angoli congruenti di cui 4 costituiranno un terzo dell'angolo di partenza. In questo caso ciò che è richiesto agli studenti non è tanto la costruzione della trisezione dell'angolo quanto stabilire quali e quante parti dell'angolo risolvono il problema.

7.2.4 Risolviamo le equazioni di terzo grado con GeoGebra

L'attività 4G dell'Allegato 4 si svolge nel piano cartesiano di GeoGebra e si propone di fornire un metodo per trovare le soluzioni (approssimate) di equazioni di terzo grado, sfruttando una costruzione geometrica che si basa sugli assiomi AG1-AG7. Al di là degli aspetti pratici legati alle costruzioni richieste per l'applicazione dell'assioma AG7, uno dei problemi di fondo riguarda i possibili errori dovuti all'approssimazione nei trascinamenti che si riverberano sulle approssimazioni dei risultati.[19]
L'attività è pensata per la classe seconda (o terza) quando si affronta il problema dell'esistenza e della determinazione delle soluzioni di un'equazione algebrica. La proposta è funzionale a fornire un metodo geometrico per la risoluzione delle equazioni di terzo grado e potrebbe essere preceduta da attività analoghe in cui, conformemente alla modalità euclidea proposta nella Proposizione 28 del Libro VI degli Elementi, si risolvono con metodi geometrici le equazioni di secondo grado.
Le successive domande hanno lo scopo non solo di riportare l'attività tra quelle riconducibili all'assiomatica della geometria dell'origami, ma anche e soprattutto di mostrare come il problema della risolubilità o non risolubilità con riga e compasso sia correlato ai problemi risolvibili con equazioni di secondo o di terzo grado. Chiaramente queste domande non sono tutte di semplice interpretazione oltre che di semplice risposta, per cui si tratta, da parte dell'insegnante, di favorire la riflessione a partire dalle intuizioni o dalle proposte degli studenti. In questo caso, diversamente da quanto fatto con le altre attività, si ritiene opportuno entrare più nel dettaglio delle singole richieste poiché (a parte la richiesta 1 in cui si guida lo studente alla costruzione che permetterà di trovare le soluzioni approssimate) in esse sono coinvolte aspetti delicati relativi sia alle equazioni di terzo grado sia agli strumenti e modalità per trovarne le soluzioni.
Nel seguito sono riportate le richieste presenti nell'attività 4G dell'Allegato 4 e i commenti alle stesse dovrebbero servire per coglierne meglio lo spirito.

19. La dimostrazione relativa all'attività 4G è riportata nell'Allegato 5 insieme alla traccia di risoluzione di alcune attività.

Richiesta 2. Quale, tra i passaggi precedenti, determina la (eventuale) possibilità di una soluzione approssimata? In cosa consiste tale approssimazione (rispondi sia a livello geometrico che algebrico)?

Indicato con P' il punto variabile che permetterà di individuare le soluzioni approssimate e con r la retta che deve colpire il punto obiettivo indicato con B (vedi Figura 15), la soluzione si basa sulla possibilità di spostare P' in modo che la retta t passi per B. La natura discreta del piano di GeoGebra non rende agevole questo spostamento, oltre al fatto che la sovrapposizione è approssimativa.
Come visto per l’assioma AG7, questo è il costo da pagare per poter usare strumenti non riconducibili a riga e compasso. A questo si aggiunge un’ulteriore approssimazione nella soluzione numerica in quanto è vero che i numeri di GeoGebra sono numeri razionali con al massimo 15 cifre decimali (più di quelle presenti su una normale calcolatrice), ma il problema del trascinamento comporta la difficoltà nello spostare il punto P' in modo continuo, rendendo così approssimata la condizione di appartenenza di B alla retta t; per questo, al netto dei problemi legati al trascinamento, le soluzioni sono tutte approssimate significativamente alla seconda/terza cifra decimale.

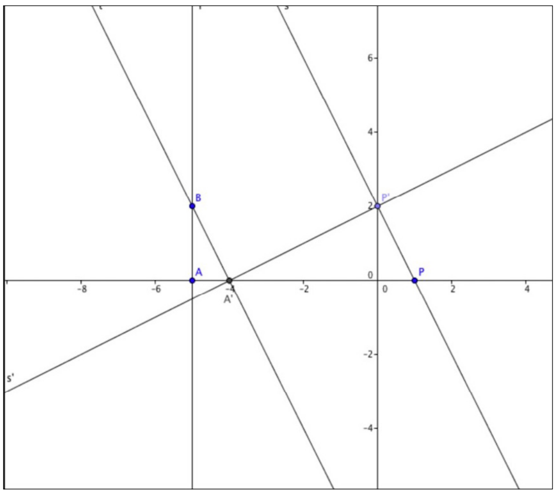


Figura 15. Costruzione per la risoluzione approssimata di equazioni di terzo grado.

Richiesta 3. A partire da particolari equazioni di terzo grado di cui conosci le soluzioni, prova a rifare la costruzione precedente analizzando i casi di una sola soluzione, due soluzioni e tre soluzioni. Riesci a trovare un’equazione di terzo grado per la quale la costruzione proposta non porti a nessuna soluzione?

La richiesta ha lo scopo di indurre lo studente a chiedersi se un’equazione di terzo grado abbia sempre almeno una soluzione; questo apre un ulteriore fronte di indagine sulla motivazione del fatto che un’equazione di terzo grado (come tutte quelle di grado dispari) abbia almeno una soluzione reale. È inoltre importante che gli studenti analizzino equazioni costruite a priori (di cui quindi conoscano già le soluzioni, anche irrazionali) per verificare i vari casi di applicazione del metodo.

Richiesta 4. Sapresti dimostrare perché la costruzione proposta permette di determinare le soluzioni di un’equazione di terzo grado?

È una richiesta difficilmente alla portata di uno studente liceale. Come proposto nell’Allegato 5, l’insegnante potrebbe introdurre la dimostrazione per sommi capi, facendone cogliere i punti critici e lasciarne il completamento agli studenti.

> Richiesta 5. Risolvi l’equazione $x^3+ax^2+bx+c=0$ ponendo $a=0$, $b=0$ e $c=-2$. Che tipo di problema risolve tale equazione?

Può essere interessante vedere come il problema della duplicazione del cubo si leghi per certi aspetti al problema della trisezione dell’angolo e agli strumenti utilizzati per risolverlo. Il valore (approssimato) che si trova con GeoGebra è 1,262725888567698 (vedi **Figura 16**), con un errore minore di 3⁄1000 rispetto al valore corretto.

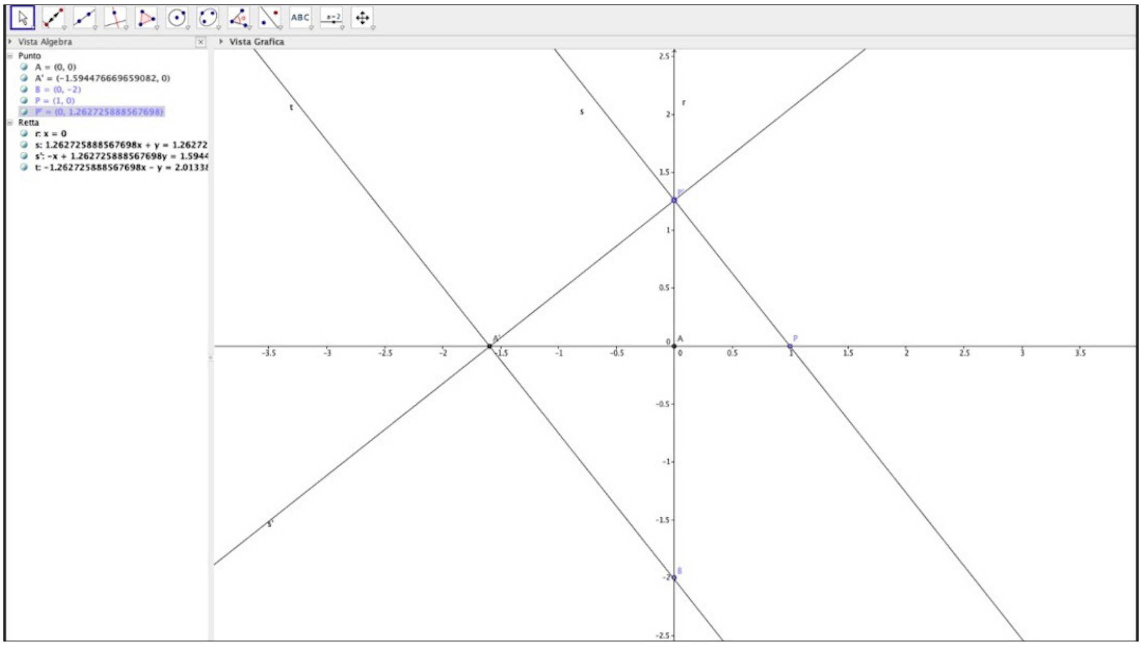


Figura 16. Costruzione per la determinazione approssimata della radice cubica di 2.

8 Una variazione sul tema: sistemi formali, modelli e geometrie finite

La seguente parte (le cui attività sono inserite in dettaglio nell’Allegato 6) può essere proposta come approfondimento degli aspetti precedentemente trattati.
Buona parte dei percorsi relativi al modulo “Geometria dell’origami” si sviluppa, come visto in più circostanze, sul termine *gioco*.[20] Diretta conseguenza di questo approccio è il cruciale rapporto tra i concetti di *termine primitivo* e *assioma*. Far cogliere agli studenti che i termini primitivi sono sostanzialmente termini vuoti (e non, come erroneamente sono spesso presentati, termini di cui tutti noi abbiamo una conoscenza innata a priori)[21] e che gli assiomi costituiscono le definizioni implicite dei

20. Nei giochi è chiara la struttura sintattica del gioco stesso in cui le regole fungono da assiomi così come i vari elementi da termini primitivi; un esempio è dato dal gioco degli scacchi: che un pezzo si chiami “cavallo” non aiuta a giocare, se non si conoscono le “regole” (assiomi) che definiscono implicitamente il pezzo stesso attraverso le relazioni con gli altri pezzi. Parlare di gioco, quindi, significa portare un esempio, facilmente alla portata degli studenti, che sottolinei l’importanza della sintassi come struttura, a prescindere dal contenuto. Giocare quindi significa “seguire le regole” e rimanere coerenti con esse, così come “fare matematica” significa ricavare i risultati (teoremi) permessi dagli assiomi.
21. Dal punto di vista didattico questa idea che i termini primitivi facciano parte della nostra conoscenza innata, costituisce un notevole rischio. Se infatti uno studente (per questioni personali o culturali) non coglie, ad esempio, il concetto di retta, potrebbe pensare che è un problema suo e non un problema epistemologico della disciplina.

termini primitivi non è semplice, ma è un aspetto fondamentale per introdurre e giustificare un approccio ipotetico-deduttivo su aspetti come quelli geometrici (ma non solo) che ai loro occhi risultano spesso garantiti e giustificabili solo sulla base di una presunta evidenza iconica.
A partire da queste considerazioni, un ruolo cardine è svolto dal concetto di modello, il quale permette di passare dal piano sintattico a quello semantico, per cui se si vuole mostrare l'importanza di un modello per un sistema assiomatico, si tratta di far cogliere, oltre a ciò che gli assiomi permettono di fare, anche quali aspetti richiedono strumenti aggiuntivi più potenti. In questo modo gli alunni hanno la possibilità di sperimentare direttamente l'idea di assioma come strumento atto a costruire una realtà matematica di cui loro hanno già avuto una conoscenza (intuitiva) dalla scuola dell'obbligo.
Come ogni insegnante sa, le conoscenze pregresse in ambito geometrico costituiscono spesso veri e propri ostacoli didattici, vista la potenza del linguaggio iconico su cui si regge molta della conoscenza geometrica della scuola primaria[22] e secondaria di primo grado (Sbaragli, 2006, 2007). In questo senso l'impostazione assiomatica rischia di essere percepita dagli studenti come un'inutile complicazione di cui la dimostrazione diventa l'aspetto più eclatante. Procedere con semplici sistemi sintattici e semplici modelli come quelli della geometria finita permette quindi da una parte di far cogliere il senso di modello (anticipando in parte la fondamentale distinzione tra sintassi e semantica, tra coerenza e verità che sottende tutta la matematica liceale), dall'altro di far percepire gli assiomi come necessari nella costruzione e fondazione di un concetto e non come vincoli arbitrari; contestualmente, la speranza è quella di far cogliere come gli oggetti descritti dagli assiomi possono essere anche molto diversi da quelli a cui siamo abituati.
Le attività proposte avranno pertanto lo scopo di avvicinare lo studente alla consapevolezza di un sistema assiomatico e di individuare corrispondenti modelli in modo da passare da un piano sintattico a uno semantico, ponendo così l'accento sulla distinzione tra coerenza e verità.

8.1 Attività proposte e commenti alle attività

Di seguito, si riporta l'elenco delle attività previste (con i relativi commenti) per sviluppare l'aspetto sintattico introdotto nel **par. 6**. Le schede-studente sono riportate nell'Allegato 6.
Attività 1SF – Le flogghe che scorpano
Attività 2SF – Caselle e percorsi.

8.1.1 Le flogghe che scorpano

L'attività 1SF (vedi Allegato 6) si svolge a gruppi. A ciascun componente del gruppo viene fornita la scheda riportata nell'Allegato 6; in essa sono indicate alcune semplici regole sintattiche (equivalenti ad assiomi) per mezzo delle quali si tratta di dedurre delle conclusioni a partire da specifiche premesse. A partire da questo, l'attività, che prende spunto da quanto proposto in Trudeau (1987), si propone di introdurre il concetto di sistema formale e quello di modello, lavorando sul doppio binario sintassi/semantica. L'utilizzo del termine *regola* ha, da questo punto di vista, l'obiettivo di avvicinare gradualmente lo studente all'idea più corretta di assioma, vedendo il cambio di termine strettamente legato al contesto matematico. Per fare questo si procede quindi con l'analisi di un semplice sistema formale per vedere quali risultati si possono dedurre senza basarsi sulla conoscenza o non conoscenza del significato dei termini utilizzati.
La richiesta di sostituire i termini vuoti della teoria con termini noti (di fatto dovrebbero aver compreso che *scorpare* individua una relazione d'ordine totale) introduce all'idea di interpretazione e di modello per una teoria, con l'ulteriore condizione che tale modello (se esiste) non è detto sia unico.

22. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

8.1.2 Caselle e percorsi

Anche questa attività si svolge a gruppi e si pone come completamento del percorso volto a far percepire il concetto di teoria assiomatica e di modello di una teoria assiomatica, mirando altresì a far cogliere che l'idea di un oggetto matematico si costruisce con gli assiomi di riferimento che ne specificano di volta in volta le caratteristiche (potendo così essere molto distante dall'idea che ci si è fatti in modo tradizionale di punto e, soprattutto, di retta) e non sulla base di fantomatiche quanto indefinite idee innate.
Entrando nello specifico nell'attività, per gli studenti non sarà facile riuscire ad individuare tutte le rette presenti nel modello di Young[23] costruibili con i vincoli posti dagli assiomi, per cui ci si attende che su questo punto gli studenti possano incontrare difficoltà che li spingano a mettere in dubbio il significato stesso dell'attività; questa potrebbe essere l'occasione per una riflessione sul ruolo e sull'importanza di strutture formali che non si basino su un'intuizione prevalentemente percettiva. Questa ricerca su basi puramente sintattiche ha però l'indubbio vantaggio di costituire una vera e propria ricerca pseudoformale, senza avere cioè nessun aggancio pratico se non l'obbligo della coerenza con le regole.
Il passaggio poi dall'esistenza del modello alla verità come specchio semantico della coerenza sintattica è indubbiamente un passaggio delicato, la cui esplicitazione non sembra opportuna a questo livello, ma che può aprire la strada ad approfondimenti successivi soprattutto nell'ottica di una riflessione sui fondamenti della matematica.
Un ultimo aspetto che può essere discusso in classe è legato alla non unicità di un modello. È auspicabile che nei gruppi emergano modelli diversi e che si arrivi da parte degli studenti alla consapevolezza che, malgrado le differenze formali, rimanga inalterata la caratteristica dell'informazione fornita, aprendo così ad un successivo passaggio (da sviluppare in anni successivi) sul concetto di isomorfismo (in particolare, in questo caso, d'ordine) come condizione per avere modelli equivalenti della stessa teoria.

9 Conclusioni

Come riportato nel par. 5, le attività sviluppate al primo anno hanno sostanzialmente raggiunto gli obiettivi che ci si è prefissati sul piano tecnico; in particolare:
- la percezione dell'importanza di un sistema assiomatico come potente strumento anche sul piano della costruzione degli oggetti geometrici;
- la possibilità di confrontare sistemi assiomatici diversi trovandone equivalenze e/o estensioni;
- la possibilità di vedere in modo ludico un argomento, come la geometria, solitamente poco apprezzato dagli studenti;
- favorire il confronto tra pari e lo sviluppo di competenze argomentative.

Sul piano, invece, della riflessione epistemologica il percorso non ha dato i risultati sperati e per molti aspetti è da ritenersi ancora in fieri, come in effetti è presumibile data l'età degli studenti.
Anche le capacità argomentative dei ragazzi non sono sempre state all'altezza e questo non solo

23. Il modello di Young è un modello per geometrie finite in cui il piano è formato da nove punti e soddisfa i seguenti quattro assiomi (tre assiomi di appartenenza e l'assioma delle parallele):
1. Dati due punti distinti vi è una ed una sola retta cui appartengono entrambi;
2. Per ogni retta r esiste almeno un punto che non appartiene a r;
3. Ogni retta possiede almeno tre punti;
4. Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, per P passa una ed una sola retta parallela a r.
Si ricorda che un modello soddisfacente questi assiomi è un piano affine.
Un'applicazione didattica del modello di Young è reperibile in Rossi Dell'Acqua e Speranza (1971).

per la difficoltà intrinseca degli argomenti, ma anche per una scarsa abitudine ad argomentare in matematica. Questo quindi è un aspetto su cui in futuro si ritiene opportuno insistere, confidando, per raggiungere l'obiettivo, anche sul fatto di avere un solo gruppo classe. Tutto questo unito alla convinzione che le criticità evidenziate non siano ostacoli quanto opportunità per motivare in modo significativo il successivo percorso tracciato negli sviluppi dei par. 7 e 8 e che, nel progetto del Liceo Ulivi, costituiranno uno dei focus dei prossimi anni.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Disponibile in: https://www.semanticscholar.org/paper/Semiotic-Mediation-in-the-Mathematics-Classroom%3A-a-Bartolini-Mariotti/4a5fbc94359231edbb29ad9dc96cd84f7d010a61 (consultato il 12.06.2020).

Euclide (1970). *Elementi* (edizione a cura di A. Frajese e L. Maccioni). Torino: UTET.

Hull, T. (2013). *Project origami*. New York: CRC Press.

Huzita, H. (1988). L'equazione di terzo grado si può risolvere con il metodo origami. Carta Bianca.

Lang, R. (2015). Huzita-Justin axioms. Disponibile in: https://langorigami.com/article/huzita-justin-axioms/ (consultato il 12.06.2020).

Maffini, A. (1999). Risoluzione (approssimata) delle equazioni di 3° grado con Cabri-Géomètre II. *Bollettino CABRIRRSAE, 22*, 6-11.

Newton, L. (2009), (traduzione di M. Crespi). La geometria degli origami. *MATEpristem*. Disponibile in: http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-geometria-degli-origami (consultato il 12.06.2020).

Rossi Dell'Acqua, A., & Speranza, F. (1971). *Matematica 1*. Bologna: Zanichelli.

Sbaragli, S. (2006). Le misconcezioni in aula. In G. Boselli & M. Seganti (Eds.), *Dal pensare delle scuole: riforme* (pp. 130-139). Roma: Armando Editore. Disponibile in: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/sbaragli/articolo%20Rimini.pdf (consultato il 12.06.2020).

Sbaragli, S. (2007). Le "proposte" degli insegnanti di scuola primaria concernenti l'infinito matematico. In L. Giacardi, M. Mosca & O. Robutti (A cura di), *Conferenze e seminari 2006-2007 dell'Associazione Subalpina Mathesis* (pp. 73-87). Torino: Kim Williams Books. Disponibile in: http://math.unipa.it/~grim/Quad19_suppl_1_Sbaragli_it_09.pdf (consultato il 12.06.2020).

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Trudeau, R. (1987). *La rivoluzione non euclidea*. Torino: Bollati Boringhieri.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 115 - 140, DOI: 10.33683/ddm.20.8.6
OPEN ACCESS

Sviluppare la metacognizione nel problem solving: un percorso di ricerca didattica nella scuola secondaria di primo grado

Development of metacognition in problem solving: a research work in mathematics education for lower secondary school

Daniela Pietrapiana e Stefania Donadio
Scuola secondaria di primo grado Don Milani, Istituto Onnicomprensivo annesso al Convitto Nazionale C. Colombo – Genova, Italia

✉ pietrapiana@donmilani.wikischool.it, stefania.donadio@donmilani.wikischool.it

Sunto / Le difficoltà incontrate dagli studenti nel problem solving (PS) sono da sempre oggetto di studio nella ricerca in didattica della matematica, ma solo recentemente l'attenzione si è focalizzata sulla metacognizione e sul suo ruolo.
In una scuola secondaria di primo grado italiana, è stato realizzato un percorso di apprendimento sul PS rivolto al potenziamento della metacognizione, con uso di strumenti scientificamente validati e fruibili dai docenti senza la mediazione o il supporto di esperti.
Vengono descritte e discusse le attività proposte in tre classi terze (campione di 54 alunni), organizzate prevalentemente in lavori di gruppo di studenti suddivisi per livelli di competenza.
Dalla valutazione conclusiva è emerso un miglioramento nelle capacità metacognitive e negli esiti del PS, sebbene il dato sia apparso meno significativo per gli studenti con bisogni educativi speciali (BES).

Parole chiave: metacognizione; problem solving; test standardizzati; valutazione.

Abstract / Research in mathematics education has always concerned the difficulties encountered by students in problem solving (PS); however, attention has only recently been focused on metacognition and its role.
Three 8th grade classes of an Italian lower secondary school have been subjected to an educational path that was designed with the aim of enhancing metacognition in PS and with the use of scientifically validated tools that can be used by teachers without any specific intervention and support of external experts.
The activities proposed to a sample of 54 students (divided into work groups according to their performance level in PS) are here described and discussed.
The final evaluation revealed an improvement in metacognitive abilities and PS outcomes, though results were less significant for students with special educational needs.

Keywords: metacognition; problem solving; standardized tests; evaluation.

1 Introduzione

Da sempre il problem solving (PS) in matematica è considerato una competenza complessa nella sua struttura e difficile da gestire da parte degli insegnanti, per via delle molteplici componenti che entrano in gioco. Tra queste vi sono aspetti espressamente cognitivi, metacognitivi ed emotivo-motivazionali che hanno un impatto notevole sull'apprendimento (Cornoldi, 1995a, 1995b).
Per quanto sia essenziale sviluppare negli studenti capacità metacognitive, di fatto mancano materiali e strumenti flessibili e adatti ad essere utilizzati in classe nell'attività quotidiana. Diverse metodologie, infatti, rimangono ad uso esperto dei ricercatori e si rivelano perciò di difficile riproducibilità per gli insegnanti.
Partendo da questi presupposti, è stato realizzato un percorso di ricerca didattica nelle classi terze di una scuola secondaria di primo grado[1], interamente progettato da insegnanti di matematica, con l'intento di potenziare la metacognizione, valutare il relativo livello di sviluppo e individuare gli effetti sulla performance degli alunni nel PS.

2 Il concetto di metacognizione

La concettualizzazione di questo costrutto complesso chiamato metacognizione è da sempre difficile e dibattuta, tanto che, a oltre quarant'anni dalla sua introduzione, gli studiosi non sono ancora riusciti ad accordarsi su una definizione univoca. Il termine è stato originariamente coniato da Flavell (1976), per significare tutti quei processi di cognizione sui processi cognitivi, ovvero del *pensiero sul pensiero*. Pochi anni dopo, Brown (Brown, 1978; Brown & DeLoache, 1978) ha arricchito questa definizione con i concetti di monitoraggio e controllo, ovvero con tutti quei processi che regolano l'attività cognitiva mentre essa avviene.
Studi successivi si sono focalizzati sulla ricerca di altri aspetti legati alla metacognizione e hanno dato il via a una proliferazione di termini e di definizioni come *credenza metacognitiva, consapevolezza metacognitiva, esperienza metacognitiva, feeling of knowing, judgment of learning, teoria della mente, metamemoria, autoregolazione* ecc. (un utile approfondimento si trova in Lai, 2011).
Quanto alla sua definizione, risulta complesso anche discriminare i processi che sono esclusivamente cognitivi da quelli che sono puramente metacognitivi: la maggior parte degli studiosi concordano sul fatto che la metacognizione sia una cognizione di grado superiore, un qualcosa che sovrintende, valuta e regola la cognizione: anche se sovrapposti, è possibile quantomeno individuare processi a decisa prevalenza metacognitiva rispetto a quelli meramente cognitivi (Veenman, Van Hout-Wolters & Afflerbach, 2006).
Per quanto riguarda il PS, è interessante la suddivisione dei processi metacognitivi in *online* e *offline*, dove con processi *offline* si intendono quelli che avvengono al di fuori, cioè prima o dopo, del processo risolutivo, ad esempio l'autovalutazione, mentre con processi *online* si considerano quelli messi in atto mentre il processo di risoluzione sta avvenendo, ad esempio il monitoraggio e il controllo (Desoete, Roeyers & De Clercq, 2003; Pintrich, Wolters & Baxter, 2000; Veenman, 2005). Occorre considerare però che i metodi di valutazione *offline* sono considerati meno affidabili di quelli *online* (Veenman & Van Cleef, 2019) e che lavorare per migliorare i processi metacognitivi *offline* a tutto

1. Si tratta della scuola secondaria di primo grado Don Milani di Genova, parte dell'Istituto Onnicomprensivo annesso al Convitto Nazionale C. Colombo. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

tondo comprende interventi ad ampio spettro e di lunga durata che non possono risolversi all'interno di una singola unità didattica (Pietrapiana, 2016). Lavorare per migliorare i processi *online* comprende tipicamente interventi più situati e riferiti a domini maggiormente specifici, come ad esempio quello del PS.

2.1 Il problem solving in matematica, una sua definizione e componenti

Per una definizione di PS in matematica occorre considerare in senso più generale il concetto di competenza e di didattica per competenze, che risulta il contesto di lavoro più appropriato.
Sulla didattica per competenze in tutte le sue fasi, dalla progettazione alla valutazione, troviamo una descrizione completa in Castoldi (2009, 2011, 2013) che, prendendo spunto da diverse ricerche, delinea una definizione del costrutto di competenza e, in particolare, partendo dal lavoro di Schoenfeld (1992), uno dei principali studiosi del PS e metacognizione in matematica, identifica quattro componenti del PS matematico:

1. le risorse cognitive, ovvero le conoscenze e le abilità necessarie alla risoluzione del problema (ad es. concetto di raggio, formule per calcolare il perimetro, abilità nel fare somme ed effettuare sottrazioni);
2. le euristiche, ovvero la capacità di individuare il problema, di metterlo a fuoco, di rappresentarlo;
3. le capacità strategiche, ovvero le modalità con cui progettare la risposta, monitorare la soluzione, valutare la plausibilità del risultato;
4. il sistema di valori del soggetto, con particolare riguardo alla sua idea di matematica e di se stesso in rapporto alla matematica (Castoldi, 2009).

Occorre considerare che non tutti i problemi che troviamo nei capitoli dei libri di matematica attivano la competenza: molti sono i cosiddetti "problemi di routine", ovvero quegli esercizi in cui è sufficiente applicare una procedura conosciuta e scontata per arrivare alla soluzione. Quando ripetere una procedura non è più sufficiente, occorre accedere alla memoria, individuare situazioni simili, creare rappresentazioni e connessioni, tentare delle soluzioni cercando di prevedere la loro efficacia. Solo a seguito di questa mobilitazione di risorse, la competenza si attiva (Schoenfeld, 1992).
In letteratura sono state proposte diverse classificazioni del processo risolutivo, le quali si differenziano essenzialmente per il numero delle fasi che lo compongono; in alcuni modelli due o più fasi possono essere raggruppate in una, ma tutti concordano nell'individuare una fase iniziale di comprensione del problema, una fase di pianificazione, una di risoluzione vera e propria ed una di controllo. In Figura 1 proponiamo, tra le tante, una schematizzazione tratta da un lavoro di Robertson (2016) che ha il pregio di evidenziare la circolarità del processo, il quale può essere percorso e ripercorso più volte in entrambe le direzioni. Lo schema, per quanto ben strutturato, non è però esaustivo, perché non mette in risalto alcuni aspetti abbastanza cruciali come le rappresentazioni e la capacità di previsione che pure giocano un ruolo fondamentale.

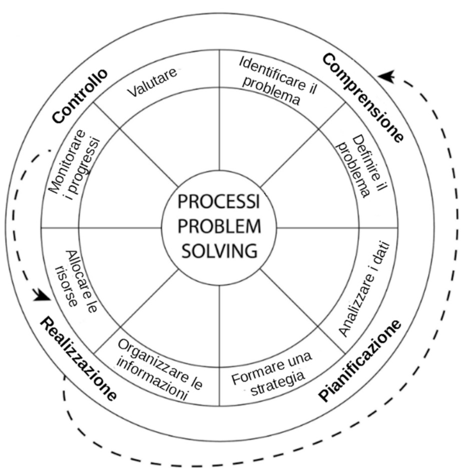


Figura 1. Il problem solving come ciclo, tratto da Robertson (2016, p.18).

Esiste infatti una relazione significativa tra le abilità visuo-spaziali e i risultati in matematica in generale e nel PS in particolare (Battista, 1990; Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Sebbene creare una corretta rappresentazione aiuti ad arrivare alla soluzione, va precisato che non tutti i tipi di rappresentazioni sono però d'aiuto. Sono stati individuati e distinti due tipi di rappresentazioni nel PS: una di tipo pittorico, ovvero raffigurazioni anche dettagliate della situazione come in un quadro o in una fotografia, ed un'altra di tipo schematico che tiene conto delle proprietà e delle relazioni tra gli oggetti che sono in gioco. Solo queste ultime correlano con buone performance nel PS (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

2.2 Le difficoltà nel problem solving e l'importanza della metacognizione

A lungo si è indagato sui motivi che impediscono agli studenti dotati di buone capacità cognitive di ottenere performance altrettanto valide nel PS in matematica.
Nel suo corposo lavoro di indagine, Schoenfeld (1992), individua, tra le cause di insuccesso nel PS, la pratica di insegnanti e ricercatori nel ridurre la didattica esclusivamente agli aspetti cognitivi della performance, quando invece emerge con evidenza la necessità di una più ampia visione di ciò che la competenza comporta e dei fattori che influenzano la performance, tra i quali figura la metacognizione. Infatti, come spiega Schoenfeld (1992), questa include la consapevolezza dei propri punti di forza, dei punti deboli e dei processi ossia il possedere un repertorio di strategie ed azioni e il sapere come queste migliorino i risultati.
Cornoldi, nei suoi lavori (Cornoldi, 1995b; Cornoldi & Lucangeli, 1997), sottolinea l'innovazione concettuale portata dal modello metacognitivo che ha consentito di mettere in luce come il successo in matematica dipenda anche dall'atteggiamento nei confronti della disciplina e come questo riguardi non solo l'alunno, ma anche il sistema scuola-famiglia con cui interagisce.
Negli ultimi decenni, molteplici sono gli studi che hanno messo in relazione la capacità di risolvere problemi matematici con lo sviluppo metacognitivo, in particolare in termini di una stretta correlazione tra i due: maggiori sono le capacità di uno studente di attivare la metacognizione, con l'utilizzo consapevole di strategie nella risoluzione di un problema, maggiore è la capacità di arrivare alla soluzione corretta (Schneider & Artelt, 2010). Numerosi studi di intervento hanno dimostrato che studenti con performance di livello standard oppure con prestazioni matematiche particolarmente basse, traggono un vantaggio sostanziale da procedure di didattica metacognitiva. Infatti, gli alunni con difficoltà di apprendimento sono frequentemente affetti da carenze nella metacognizione che li portano al fallimento in una o più fasi del processo di PS, dalla mancata comprensione del testo del problema, all'identificazione delle informazioni rilevanti, delle operazioni e degli errori, alle difficoltà nella costruzione di una rappresentazione (Hutchinson, 1993; Judd & Bilsky, 1989; Parmar, 1992; Xin, Jitendra & Deatline-Buchman, 2005).
Da questo quadro risulta evidente quanto sia importante raccogliere l'appello degli studiosi rivolto agli insegnanti ad approfondire le proprie conoscenze sull'importanza della metacognizione nel PS al fine di progettare azioni efficaci e mirate allo sviluppo di questa competenza negli studenti.

3 Obiettivi e logica dell'esperienza didattica

L'obiettivo primario del lavoro di ricerca è stato quello di progettare e sperimentare un percorso didattico per migliorare le performance nel PS di studenti del terzo anno della scuola secondaria di primo grado e che fosse particolarmente improntato allo sviluppo degli aspetti metacognitivi, non solo riferiti alla conoscenza metacognitiva ma anche ai processi di regolazione e controllo che vengono messi in atto nella risoluzione di problemi.

Un presupposto di partenza per la progettazione è stata l'osservazione che per sviluppare la metacognizione fosse fondamentale favorire la verbalizzazione dei processi risolutivi tramite il lavoro collaborativo a piccoli gruppi (Schoenfeld, 1989). L'importanza dell'interazione sociale nello sviluppo della metacognizione è assunta a fatto ben noto agli esperti del campo (Flavell, 1979; Schraw, Crippen & Hartley, 2006; Cross & Paris, 1988; Whitebread et al., 2009). Il lavoro collaborativo non è tuttavia garanzia di riuscita di per sé, un ruolo chiave deve essere svolto dall'insegnante che, per garantire il buon funzionamento dei gruppi, interviene con tempi e modalità adeguate (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002).
Altra premessa riguarda l'importanza di fornire agli studenti una base di conoscenze sul processo risolutivo attraverso interventi didattici mirati. L'importanza di una didattica specifica per il PS è una proposta ormai decennale da parte della ricerca anglosassone, nella quale si sono sviluppate diverse tipologie di approccio al PS, come ad esempio la *general-system theory* (GST) (si veda per esempio Skyttner, 2005) o la *schema-based instruction* (SBI) (si veda per esempio Marshall, 2012). Nel nostro caso, abbiamo voluto ispirarci proprio alla GST, la quale comporta il fornire un'istruzione specifica sulle fasi del processo risolutivo (del tipo "comprendi il problema, fai una rappresentazione, pianifica la risoluzione, controlla il risultato"). Per aiutare il processo di categorizzazione del problema, utile alla costruzione di una rappresentazione, la GST prevede anche un'istruzione sui diversi tipi di problemi, classificati di solito in base al tipo di processo risolutivo.
Nella progettazione, inoltre, si è tratta ispirazione in particolar modo dal lavoro di Lester che, sebbene ormai datato, risulta ricco di osservazioni e propone con dovizia di particolari lo sviluppo di tutti questi aspetti con idee originali e ancora attuali (Lester, 1989; Lester, Garofalo & Kroll, 1989). Nel suo progetto su classi di 7° grado, equivalenti alla nostra classe seconda di scuola secondaria di primo grado, egli struttura interventi di istruzione specifica sul PS basati sul lavoro a piccoli gruppi di livello omogeneo in cui l'insegnante svolge diversi ruoli a seconda delle situazioni:
– *osservatore* esterno del processo di risoluzione dei problemi, che non interferisce con il processo stesso, ma ricava informazioni sui propri studenti lasciandoli liberi di confrontarsi senza farli sentire giudicati;
– *facilitatore* (o *tutor*), che orienta lo studente verso il superamento delle situazioni di stallo semplicemente ponendo delle domande al momento giusto, aiutandolo ad avere maggiore consapevolezza delle fasi del processo di risoluzione e delle possibili strategie da selezionare;
– *modello* di buon *problem solver*, il quale risolve problemi alla lavagna pensando ad alta voce, evidenziando la non linearità ovvero la circolarità del processo risolutivo mostrando che è lecito percorrere una strada non corretta e tornare sui propri passi se ci si accorge che non funziona.

Nella selezione dei problemi, inoltre, Lester utilizza una loro suddivisione in tre tipologie principali:
– *a ritroso*, il problema comincia dalla situazione finale e bisogna risalire ad un'informazione iniziale;
– *ricerca di uno schema*, il problema è strutturato secondo una sequenza, uno schema che si ripete, che bisogna individuare per arrivare alla soluzione;
– *per tentativi*, si tentano diverse strade fino ad individuare quella corretta.

Saper individuare la categoria a cui appartiene un problema è un processo tipico della conoscenza metacognitiva poiché richiama intorno alla categoria tutta una serie di processi risolutivi di cui si ha già avuto esperienza e che sono stati immagazzinati in memoria, i quali suggeriscono possibili strategie per raggiungere la soluzione.
Per valutare i progressi nel PS lavorando sulla metacognizione, Lester sottopone agli studenti un test strutturato in entrata ed uno in uscita. Per valutare invece l'evoluzione dei processi metacognitivi *online* si affida al metodo del *think aloud* ampiamente utilizzato in ambito scientifico (Lester, 1989). Tale metodo richiede però molto tempo e risorse, l'intervento di esperti dedicati, lo studio di registrazioni, trascrizioni e l'analisi complessa di dati. Tutto questo rende la procedura di difficile applicazione per la valutazione dello sviluppo metacognitivo da parte degli insegnanti in maniera autonoma senza il supporto di esperti, di fatto riducendo ai docenti la possibilità di sfruttare questi

strumenti scientificamente validati nella pratica didattica.
Fortunatamente nel 2012 Jacobse e Harskamp hanno pubblicato un lavoro in cui dimostrano che un metodo semplice da loro sviluppato e chiamato VisA correla nei suoi risultati con quelli ottenuti dal *think aloud* nell'analisi dei processi *online* di metacognizione nel PS. Il metodo consiste nella somministrazione di un *prediction test* prima della risoluzione, con la richiesta di fare una previsione e di strutturare una rappresentazione del problema; e di un *postdiction test* alla fine del processo risolutivo che richiede di confermare o meno quanto affermato nel test di predizione. La valutazione si ottiene dall'analisi delle rappresentazioni, suddivise in pittoriche, semipittoriche e schematiche, insieme con il confronto tra il pre-test con il post-test (una descrizione più dettagliata del metodo è riportata in seguito, nella sezione sui materiali e metodi).
In aggiunta alla valutazione della metacognizione ottenuta con il VisA test, occorre valutare anche le altre due dimensioni che definiscono la competenza nel suo complesso, in accordo con il modello proposto da Castoldi, cioè quella cognitiva e quella relazionale (Castoldi, 2009).
Seguendo l'esempio di Lester, che nel suo progetto ha utilizzato test di verifica standardizzati su conoscenze e abilità per la valutazione della dimensione cognitiva, abbiamo utilizzato i test strutturati delle prove INVALSI di grado 8. La valutazione della dimensione relazionale è stata invece ottenuta con una rubrica appositamente sviluppata per l'osservazione (si veda in seguito la **Tabella 1**).
Infine, abbiamo ritenuto importante inserire nel progetto attività connotate dai criteri tipici della laboratorialità. La modalità laboratoriale prevede che i ragazzi facciano esperienze di soluzione di problemi reali o comunque derivanti dalla vita quotidiana utilizzando le conoscenze matematiche e collegandole con quelle acquisite in ambiti diversi, dimostrando quindi quali fra di esse siano diventate davvero loro patrimonio personale. La didattica laboratoriale cui facciamo riferimento in maniera specifica è quella del *Problem Based Learning* (PBL) (si veda ad esempio Padmavathy & Mareesh, 2013), in cui la situazione problematica è la base del processo di acquisizione del sapere e, intorno a essa, vengono costruiti gli stimoli e gli strumenti per l'attività di risoluzione. La PBL è quindi una strategia didattica che organizza gli apprendimenti in matematica intorno all'attività di PS favorendo il pensiero critico, la presentazione di idee creative e la comunicazione matematica tra pari. Pertanto l'apprendimento nel PBL non avviene ascoltando, ma facendo, manipolando, ricercando e comunicando.

4 Materiali e metodi

Considerate le premesse e in accordo con il lavoro di Lester (Lester, 1989; Lester, Garofalo & Kroll, 1989), nella progettazione dell'intervento abbiamo operato scelte metodologiche e didattiche, quali:
– lavoro a piccoli gruppi omogenei per livello, alternato a compiti individuali;
– momenti di riflessione nelle fasi precedenti e successive alla risoluzione;
– istruzioni agli studenti sulle fasi del PS e sulle tipologie di problemi;
– approccio laboratoriale;
– interpretazione di diversi ruoli da parte dell'insegnante.

L'intervento è stato condotto nelle tre classi dall'insegnante di matematica con il supporto del docente di tecnologia. Questa configurazione, già presente nel curricolo della scuola che prevede laboratori in compresenza di carattere tecnico-scientifico, è risultata adatta per favorire il confronto. Inoltre il gruppo dei sei docenti coinvolti si è incontrato a cadenza periodica per discutere l'andamento del percorso didattico.
Il campione è costituito dagli alunni di tre classi terze della scuola secondaria di primo grado; dall'analisi sono stati esclusi gli studenti che erano stati assenti il giorno della somministrazione di almeno

una delle prove in entrata o in uscita; gli alunni con disabilità certificate (ma senza la condizione di gravità) hanno ugualmente partecipato al percorso ma i dati a loro relativi non sono stati tenuti in considerazione. L'analisi pertanto è stata effettuata su 54 studenti i quali sono stati così suddivisi in fasce di livello:

- 11 alunni di fascia BES (bisogni educativi speciali) cioè con difficoltà di apprendimento di vario tipo o con disturbi specifici dell'apprendimento (DSA);
- 15 di fascia bassa ovvero studenti che hanno conseguito un punteggio inferiore a 6 decimi nel test cognitivo in entrata;
- 28 di fascia alta ovvero studenti che hanno conseguito una valutazione al test cognitivo in entrata uguale o superiore ai 6 decimi.

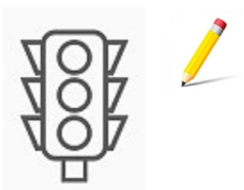
Per definire meglio i gruppi ci siamo riferiti anche alle conoscenze degli insegnanti di classe riguardo alle caratteristiche dei propri alunni, sebbene il test d'entrata sia riuscito ottimamente a discriminare i livelli di performance nel PS noti di ciascun studente. In tale test nessuno degli alunni con BES ha ottenuto una votazione superiore a 6 decimi.
Successivamente, gli alunni sono stati organizzati in gruppi di lavoro omogenei di 4 o 5 persone.
Prima e dopo la risoluzione di un problema è stato somministrato il VisA test, consistente esattamente nella scheda di *prediction* (**Figura 2**) e nella scheda di *postdiction* (**Figura 3**) di Jacobse e Harskamp (2012, p. 141), con l'aggiunta nel post-test di alcune domande tratte dalla scheda di autovalutazione di Lester (1989, p. 32) in cui si chiede di individuare, per ogni problema, la tipologia di appartenenza, di definire il grado di difficoltà e di stimolare la conoscenza metacognitiva ricercando comunanze tra il problema e quelli incontrati in precedenza.
Con riferimento alla **Figura 2**, agli studenti veniva chiesto di colorare il semaforo di verde se pensavano di riuscire a risolvere il problema, di rosso se ritenevano che non sarebbero stati in grado di arrivare alla soluzione, di giallo se non erano in grado di fare una valutazione. Sul retro della scheda veniva poi richiesto di provare a fare una rappresentazione del problema che potesse aiutarli nella risoluzione. Al termine, su un'altra scheda, gli studenti dovevano colorare nuovamente il semaforo a seconda che fossero o meno stati in grado, secondo loro, di arrivare alla soluzione. Di seguito veniva chiesto di rispondere ad altre domande per favorire la riflessione, ma la risposta non influiva sulla valutazione della metacognizione (**Figura 3**).

Classe____________Cognome e nome____

PREDICTION TEST

Problema
Sette ex compagni di classe si trovano insieme per una pizza. Ognuno di loro stringe la mano agli altri sei. Quante strette di mano avvengono in tutto?

Richiesta
Quanto pensi di poter risolvere bene questo problema?



Per favore spiega il perchè
____
____
____

Figura 2. Esempio di scheda con il prediction test, utilizzata per la valutazione della metacognizione.

POSTDICTION TEST

Pensa al problema su cui hai appena lavorato e poi cerchia la risposta che corrisponde a ciò che pensi:

1. Quanto sei sicura/o che la tua soluzione sia corretta?

ASSOLUTAMENTE   ABBASTANZA   NON MOLTO   POCO   PER NIENTE

2. Quanto è stato difficile per te questo problema?

ASSOLUTAMENTE   ABBASTANZA   NON MOLTO   POCO   PER NIENTE

3. Rispondi a questa domanda solo se pensi che la tua risposta sia giusta: perchè questo problema è stato facile per te?

4. Rispondi a questa domanda solo se pensi che la tua risposta sia sbagliata: perchè questo problema è stato difficile per te?

5. Hai mai risolto un problema come questo? Se è così puoi descriverlo?

Figura 3. La scheda per la riflessione metacognitiva (postdiction test) somministrata a risoluzione ultimata, ispirata al lavoro di Lester (1989).

Le conoscenze sul processo di PS e sulla tipologia di problemi sono state fornite tramite spiegazione frontale e discussione.
Per sviluppare il controllo metacognitivo sono state svolte attività che aiutassero ad individuare gli atteggiamenti efficaci o meno del *problem solver*. L'insegnante in alcune occasioni ha svolto il ruolo di modello: mentre risolve un problema pensando ad alta voce, mostra che anche un buon *problem solver* commette errori, li individua e li corregge mettendo continuamente in atto meccanismi di monitoraggio e controllo.
In particolare, è stato proposto un video[2] preparato dagli insegnanti in cui il protagonista risolve un problema commettendo diversi errori: l'utilizzo di un cattivo *problem solver*, esterno alla relazione studente-insegnante, favorisce l'attenzione verso l'errore perché aiuta a percepirlo come un fenomeno intrinseco al processo di risoluzione anziché del soggetto.
Infine, poiché la scuola Don Milani nella sua costituzione sperimentale è promotrice della didattica laboratoriale per l'apprendimento, ci è sembrato coerente con la nostra esperienza l'inserimento nel percorso di una parte espressamente laboratoriale che contemplasse la risoluzione di problemi concreti con la manipolazione di oggetti reali e uso di strumenti di misura (vedi par. 5, descrizione del percorso).

4.1 Monitoraggio e valutazione degli aspetti cognitivi, metacognitivi e relazionali

Per poter apprezzare la valutazione del livello cognitivo e metacognitivo raggiunto dopo l'intervento didattico, si sono utilizzati VisA test e prove standardizzate in ingresso e in uscita e poi confrontate.
Nella scelta del test cognitivo, abbiamo ricercato tra le prove strutturate di riferimento nazionale, una batteria di test standardizzata con indicatori misurabili per la valutazione, che fosse in accordo con le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012). Esercizi o problemi aperti e situati, che attivano la competenza di PS e che sono documentati per permettere l'identificazione dei differenti processi messi in atto, si trovano in un'ampia raccolta

2. Il video è disponibile sul canale YouTube della scuola: https://youtu.be/oVASVpVMZnY.

nelle prove nazionali INVALSI. In particolare, in un utilissimo lavoro di sintesi dei documenti di valutazione delle prove internazionali sugli apprendimenti in matematica, Boero (2015) descrive come l'INVALSI abbia sviluppato un raggruppamento dei processi coinvolti nelle competenze matematiche, alle quali fanno riferimento i traguardi delle Indicazioni Nazionali (INVALSI, 2018b), secondo tre macro-aree denominate: conoscere, risolvere problemi, argomentare. Per quanto i tre processi non si possano attuare in modo indipendente l'uno dagli altri ma risultino intrecciati, nella documentazione INVALSI viene indicato dagli autori il processo prevalente in ogni quesito delle prove (INVALSI, 2015, 2016a).
Per il test cognitivo in entrata abbiamo utilizzato la prova INVALSI di matematica per l'esame della classe terza della scuola secondaria di primo grado del 2015 e come test d'uscita abbiamo utilizzato l'edizione del 2016. La scelta di questi due test tra tutti quelli disponibili (non Computer Based, quindi fino al 2017) è stata casuale.
Per l'analisi abbiamo considerato la suddivisione suggerita da INVALSI separando i quesiti nei quali il processo risolutivo era prevalentemente di PS da quelli focalizzati sulle conoscenze oppure sull'argomentazione. Sono stati esclusi dai test i quesiti riguardanti argomenti non ancora trattati in classe.
Successivamente è stato eseguito un controllo incrociato per verificare la rigorosità delle valutazioni: i quesiti sono stati corretti dalla coppia dei docenti di classe e rivisti da un'altra coppia del gruppo di lavoro.
Nel VisA test per la valutazione della metacognizione, la procedura di calcolo del punteggio è studiata per essere semplice e veloce ed avviene su tre livelli:

1. Giudizio di predizione – se il giudizio di predizione dell'alunno è corretto (ad esempio, gli studenti predicono che risolveranno correttamente il problema e poi lo fanno; oppure che non sono in grado di risolvere il problema e poi sbagliano la risposta) ottengono 1 punto. Se la predizione è incerta (semaforo giallo) o sbagliata (ad esempio, prevedono che risolveranno il problema correttamente e poi non lo fanno; oppure predicono che non sono in grado di risolvere il problema e poi lo risolvono correttamente) ottengono 0 punti.
2. Visualizzazione del problema – gli studenti ottengono 0 punti se hanno fatto una rappresentazione pittorica non utile alla risoluzione del problema; 0,5 punti per rappresentazioni che sono in parte pittoriche ed in parte schematiche o con caratteristiche matematiche; 1 punto per le rappresentazioni schematiche utili alla risoluzione del problema.
3. Giudizio di post-dizione – il punteggio viene dato allo stesso modo del giudizio di predizione: 1 punto quando il giudizio a posteriori è corretto e 0 quando è sbagliato.

Per la valutazione degli aspetti relazionali, l'insegnante ha effettuato attività di osservazione al fine di stimare i livelli di partecipazione e di intervento dei propri studenti, utilizzando la rubrica in **Tabella 1**. Infine, anche il punteggio della metacognizione è stato poi convertito in decimi, in modo che il voto finale potesse essere calcolato facendo una media tra le valutazioni delle dimensioni cognitiva, metacognitiva e relazionale.

Voto	Partecipazione	Interventi
9-10	Ha partecipato sempre attivamente al lavoro di gruppo dando un contributo fondamentale	È intervenuto spesso per fare domande pertinenti o per contribuire alla discussione
7-8	Ha partecipato al lavoro di gruppo con costanza	Ha fatto alcuni interventi pertinenti o ha fatto domande
5-6	Ha partecipato al lavoro di gruppo in modo non costante o in maniera poco attiva	Raramente ha posto domande o fatto interventi
<5	Non ha quasi mai partecipato al lavoro	Non ha mai fatto interventi o posto domande

Tabella 1. Rubrica per l'osservazione semistrutturata della dimensione relazionale nella competenza del PS.

5 Descrizione del percorso

Il percorso si è svolto in 9 incontri da 2 moduli da 55 minuti, sull'arco di circa 2 mesi. Il primo e l'ultimo incontro sono stati dedicati alla somministrazione del test cognitivo strutturato iniziale e finale. La Figura 4 mostra una infografica riassuntiva degli incontri e la Tabella 2 raccoglie le diverse attività su cui si è lavorato.
Ogni risoluzione di problema è stata preceduta dalla lettura ad alta voce del testo da parte dell'insegnante e dalla compilazione del *prediction* test ed è stata seguita dalla compilazione del *postdiction* test, dalla presentazione dei risultati dei gruppi alla classe e dalla discussione collettiva. Inizialmente sono state anche lette e commentate le autovalutazioni degli studenti alla fine degli incontri.
In generale, per il lavoro dei gruppi sono stati preparati problemi supplementari per occupare i gruppi più veloci nell'attesa che anche quelli più lenti completassero i loro elaborati.
Al termine di ogni lezione sono stati assegnati dei problemi da risolvere a casa che sono stati corretti all'inizio della lezione successiva; in queste situazioni, l'insegnante si è proposto inizialmente come modello, risolvendo lui stesso i problemi, mentre successivamente ha lasciato agli studenti a turno la correzione seguendo in definitiva il modello della *cognitive strategy instruction* (Montague, Enders & Dietz, 2011) che prevede l'acquisizione guidata e progressiva dell'autonomia da parte dello studente nell'uso delle strategie di autoregolazione.

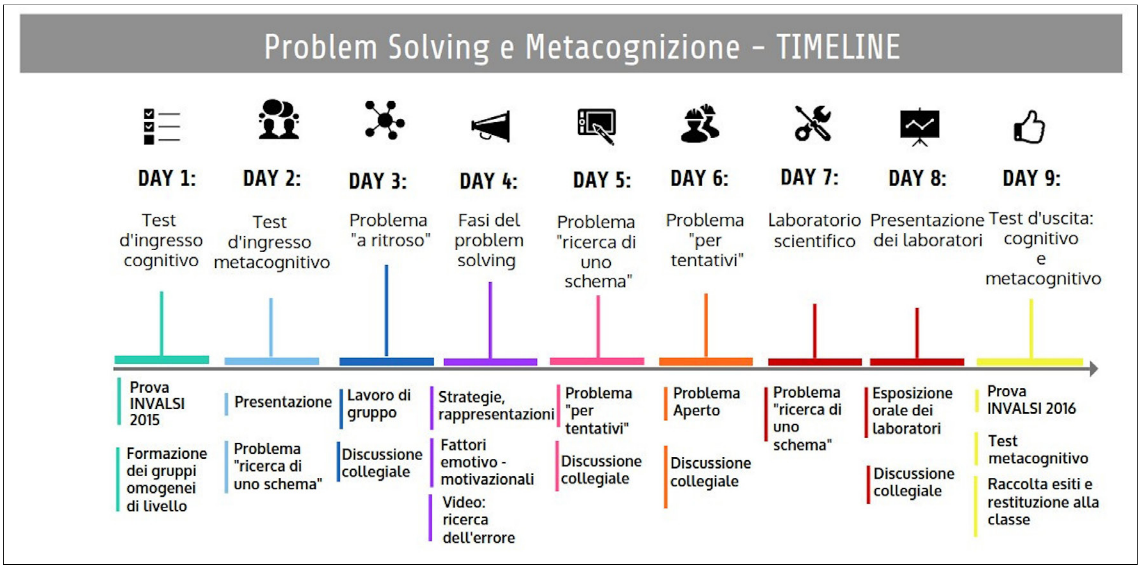


Figura 4. *Timeline* delle attività svolte con indicate le tipologie di problemi.

Attività		Configurazione degli alunni	Ruoli degli insegnanti
1	Test d'ingresso cognitivo	Individuale	Osservatore
2	Test d'ingresso metacognitivo (Figura 2)	Individuale	Osservatore
	Problema n. 1, *Strette di mano*: "Sette ex compagni di classe si ritrovano insieme per una pizza. Ognuno di loro stringe la mano agli altri sei. Quante strette di mano avvengono in tutto?"	Gruppi di livello omogenei	Osservatore Modello
	Problema simile per compito e testo di autovalutazione (Allegato 1)	Individuale	

3	Problema n. 2 (*a ritroso*), *La donna alla fonte*: "Tanto tempo fa nell'antica Cina, un'anziana donna si recava tutti i giorni a prendere l'acqua al pozzo mettendosi sulle spalle un bastone con alle estremità appesi due secchi. Ogni giorno riempiva i secchi con 6 litri d'acqua ciascuno e lentamente tornava a casa. Uno dei due secchi, però, essendo rotto, perdeva 1 dl di acqua ogni 100 m e ogni volta che l'anziana donna tornava a casa trovava il secchio rotto pieno solo a metà. Quanto era distante la casa dal pozzo?"	Gruppi di livello omogenei	Facilitatore
	Problema simile per compito e testo di autovalutazione (Allegato 2)	Individuale	
4	Scheda di pre-visione (Allegato 3)	Individuale	
	Video *No Problem* con il Problema n. 3, *Noleggio auto*: "Nadia affitta una macchina. La sua compagnia di noleggio fa pagare 50 euro al giorno più 0,40 euro a chilometro percorso. Pietro affitta una macchina in un'altra compagnia di noleggio che fa pagare 70 euro al giorno più 0,30 euro a chilometro. Per quanti chilometri dovranno guidare Nadia e Pietro per pagare la stessa cifra?"	Individuale	Facilitatore Osservatore
	Scheda di post-visione (Allegato 3)	Individuale	
	Scheda di autovalutazione (Allegato 4)	Individuale	
5	Problema n. 4 (*per tentativi*), *La catena di anelli:* "Devi ordinare una catenina d'oro su internet per farne un braccialetto a cui agganciare i 6 *charms* che ti sono stati regalati per il compleanno. La catenina è costituita da anellini di 10 mm di diametro che sono spessi 1 mm (come quelli rappresentati in Figura 5) e il suo costo varia a seconda del numero di anelli che la compongono. Supponendo che il vostro polso abbia una circonferenza di 15 cm e considerando che i gancetti per chiuderla sono lunghi in tutto 2 cm, da quanti anellini dovrà essere composta la catenina da ordinare per spendere il meno possibile?  Figura 5. Esempio di catena di anelli.	Individuale	Modello
	Problema n. 5, *La carovana nel deserto:* "Una carovana è bloccata nel deserto a 6 giorni di cammino dalla città, ogni persona può portare con sé rifornimenti per 4 giorni. Qual è il numero minimo di persone che devono partire per arrivare in città e chiamare i soccorsi?"	Gruppi di livello omogenei	Facilitatore
6	Problema n. 6 (*per tentativi*), *10 sacchetti per 10 monete:* "Ho dieci sacchetti contenenti ciascuno dieci monete; in uno di questi sono contenute monete di peso 0,1 g ciascuna, nei rimanenti nove sono contenute monete da 1 g ciascuna. Come possono individuare con una bilancia ad un solo piatto, con una sola pesata e senza l'aiuto di altri fattori in quale sacchetto sono contenute le monete che pesano di meno?"	Gruppi di livello omogenei	Osservatore
7, 8	Laboratorio di modellizzazione matematica di una legge di fisica meccanica (Allegato 5)	Gruppi di livello omogenei	Facilitatore
9	Test d'uscita metacognitivo	Individuale	Osservatore
	Test d'uscita cognitivo	Individuale	Osservatore

Tabella 2. Schema riassuntivo dei ruoli e degli assetti di lavoro in relazione alle attività svolte.

5.1 Primo incontro

Il primo incontro prevede la somministrazione del test di ingresso cognitivo (circa 75 minuti). Dagli esiti delle prove, gli insegnanti individuano gruppi di 4 - 5 alunni omogenei per fasce di livello.

5.2 Secondo incontro

L'insegnante introduce le attività presentando agli studenti le finalità e le tappe essenziali del percorso, rimarcando l'importanza nella risoluzione dei problemi del confronto verbale e della costruzione di rappresentazioni. Per evitare che la suddivisione nei gruppi omogenei possa incidere sull'autostima e l'autoefficacia di alcuni studenti fragili, è consigliabile rimarcare che assumerà particolare rilevanza positiva la propria e personale evoluzione.
L'insegnante consegna il testo del Problema n. 1, *Strette di mano* (Figura 2), senza spiegare e senza dare suggerimenti, quindi somministra il prediction test che questa volta funzionerà anche come test metacognitivo iniziale. Per 10 minuti, in silenzio, ogni alunno cerca una soluzione individuale del problema utilizzando qualunque rappresentazione (pittorica, schematica ecc.). L'insegnante al termine della compilazione ritira i prediction test.
Segue l'attività di PS che per i primi 10 minuti vede gli studenti, suddivisi in gruppi omogenei, affrontare una prima fase detta *pencil down*, in cui, senza poter scrivere, discutono e mettono insieme le idee per capire come risolvere il problema. Solo successivamente scrivono su un foglio e verificano i processi risolutivi ipotizzati dal gruppo.
Viene quindi effettuata la compilazione individuale del postdiction test e segue una discussione di classe e la raccolta dei risultati. Durante la discussione è importante che emerga l'importanza del costruire una rappresentazione del problema che sia effettivamente d'aiuto per arrivare alla soluzione. A questo scopo si possono confrontare le rappresentazioni proposte dai diversi gruppi per trovare quelle più efficaci.
Nella parte rimanente della lezione, ogni gruppo inventa il testo di un problema da sottoporre all'insegnante (completo di esecuzione e svolgimento) allo scopo di confrontare la propria strategia risolutiva con quella dell'insegnante che in questo caso funziona da modello.
Per compito a casa viene assegnata la risoluzione di un problema simile a quello svolto in classe e la redazione di un testo riassuntivo delle attività con autovalutazione (Allegato 1).

5.3 Terzo incontro

Dopo la correzione dei compiti per casa, l'insegnante, che svolge il ruolo di facilitatore, legge il testo del Problema n. 2, *La donna alla fonte*, del tipo *a ritroso* (Tabella 2) quindi consegna il prediction test. Alla fase di *pencil down*, segue la risoluzione del problema completa di rappresentazione. Al termine avviene la compilazione individuale del postdiction test e la condivisione delle soluzioni con la classe con esposizione dei risultati.
Ogni alunno scrive un sommario di ciò che è stato fatto, come compito a casa viene completato il sommario con l'autovalutazione e assegnati problemi *a ritroso* e *trova uno schema* (Allegato 2).

5.4 Quarto incontro

Si presentano agli alunni la classificazione dei tipi di processi risolutivi e le fasi principali del PS con particolare attenzione all'importanza delle rappresentazioni e all'influenza dei fattori emotivo-motivazionali sulla buona riuscita. Segue una discussione guidata dall'insegnante sulle fasi del processo di PS, sui diversi metodi di risoluzione. Alla luce della spiegazione si ripercorrono i problemi svolti suddividendoli nelle diverse categorie in base alle strategie di risoluzione e si rivedono le rappresentazioni fatte classificandole come utili o meno alla risoluzione del problema.

Nella seconda parte della lezione, l'insegnante consegna una scheda con il testo del Problema n. 3, *Noleggio auto*, e la richiesta di leggerlo, provare una rappresentazione grafica e ipotizzare un possibile processo risolutivo (scheda di pre-visione nell'Allegato 3). In seguito, viene proiettato il video *No problem*[3] in cui il protagonista cerca di risolvere un problema commettendo però degli errori che gli alunni dovranno individuare e riportare (scheda di post-visione nell'Allegato 3). Segue il confronto tra il gruppo classe e l'insegnante, e la compilazione di una scheda di autovalutazione (Allegato 4).

5.5 Quinto incontro

L'insegnante si pone come modello esplicitando alla classe le decisioni e le azioni di regolazione per la risoluzione di un problema, permettendo così agli studenti di osservare le strategie di monitoraggio messe in atto da un esperto (processi *online*). A questo scopo viene risolto il Problema n. 4, *La catena di anelli*, del tipo *per tentativi*.
In seguito, l'insegnante chiede alla classe un commento riguardo al comportamento da esperto e dirige la discussione con le osservazioni degli alunni. L'insegnante vuole che gli studenti osservino che un buon *problem solver* non sempre va veloce e diretto alla soluzione, ma si pone domande su quello che sta facendo e pensando. Inoltre dimostra che disegnare degli schizzi e fare ipotesi sono tecniche legittime utilizzate anche da un esperto.
L'insegnante propone il Problema n. 5, *La carovana nel deserto*, del tipo *trova uno schema* chiedendo agli studenti, divisi nei soliti gruppi, di risolverlo ma pensando ad alta voce. Al termine sarà comunque l'insegnante a risolverlo alla lavagna ponendosi nuovamente come modello mentre i ragazzi compilano una scheda individuale di confronto, simile a quella del quarto incontro (Allegato 4).

5.6 Sesto incontro

Nel sesto incontro, gli alunni lavorano in gruppi al Problema n. 6, *10 sacchetti per 10 monete*, del tipo *per tentativi*, durante il quale l'insegnante si dispone come osservatore. Gli studenti hanno a disposizione oggetti materiali da manipolare, anche se il problema nella sua particolare formulazione richiede agli studenti attenzione e cura nella fase di rappresentazione. Come di consueto gli alunni compilano i test di predizione e post-dizione.

5.7 Settimo e ottavo incontro

Nel laboratorio di scienze, gli studenti vengono chiamati a risolvere semplici problemi di modellizzazione di fisica meccanica (Figura 6). Ad ogni gruppo è affidato un set sperimentale (dinamometro con molla elastica, piano inclinato, bilancia a due bracci, modelli di leve) con la richiesta di studiare il comportamento dello strumento fisico al variare di alcune grandezze, di eseguire prove, formulare ipotesi e infine fare una rappresentazione descrittiva delle funzioni che legano le grandezze osservate (Allegato 5). Durante il laboratorio gli insegnanti si pongono come facilitatori, intervenendo solo se necessario. L'incontro successivo prevede il termine delle esperienze di laboratorio, la presentazione e il confronto dei risultati ottenuti dai gruppi alla classe e una discussione.

3. Il video è disponibile sul canale YouTube della scuola: https://youtu.be/oVASVpVMZnY.

Figura 6. Alunni impegnati nelle attività di PS in un laboratorio di modellizzazione matematica su grandezze di fisica meccanica.

5.9 Nono incontro

Nell'ultimo incontro sono stati effettuati i test in uscita metacognitivo e cognitivo (circa 75 minuti).

6 Risultati

L'obiettivo principale dell'unità didattica è stato sperimentare una metodologia di lavoro che permettesse di potenziare o sviluppare negli alunni capacità metacognitive funzionali al miglioramento di performance nel PS matematico.
Durante tutto il percorso è stata via via restituita ai ragazzi l'evoluzione del proprio lavoro, grazie a discussioni di gruppo o individuali ed è stata esplicitata e condivisa la modalità di valutazione. Al termine si è potuto disporre di un modello di valutazione della competenza in modo completo, ovvero comprendente tutte e tre le dimensioni: cognitiva (test INVALSI), metacognitiva (VisA) e relazionale (osservazione semistrutturata); queste sono state inserite in una rubrica riassuntiva da cui, con una semplice operazione di conversione, sono state ricavate le valutazioni in decimi, quindi la valutazione sommativa è stata restituita agli alunni.
Dal confronto tra gli esiti ottenuti dai test in entrata e da quelli in uscita, si è potuta apprezzare una restituzione coerente con i nostri intenti: sul piano cognitivo è emerso un generale miglioramento riferito agli apprendimenti curricolari dei test standardizzati sebbene differenziato nelle varie fasce di livello. Sul piano metacognitivo, il miglioramento è stato più evidente e diffuso.

6.1 Risultati sulla metacognizione

Nella Figura 7, sono riportati tutti i risultati dei punteggi ottenuti dal campione nel test VisA, visualizzati nel grafico a barre con due serie di dati a confronto (iniziale e finale). Dal grafico si nota, con buona evidenza, l'andamento positivo e in miglioramento della capacità metacognitiva dopo aver svolto il percorso progettato.
All'inizio del percorso la maggioranza degli alunni ottiene un punteggio basso, la moda infatti si colloca sullo 0 a dimostrazione di una capacità metacognitiva ancora scarsa. Anche 1 è un risultato molto frequente, mentre i punteggi 2, 2.5 e 3 sono raggiunti da solo un terzo degli alunni (18 su 54).
La situazione finale è ben diversa, la moda si colloca sul 2 e i punteggi alti, dal 2 al 3, sono ottenuti stavolta dal 63% degli alunni (34 su 54).

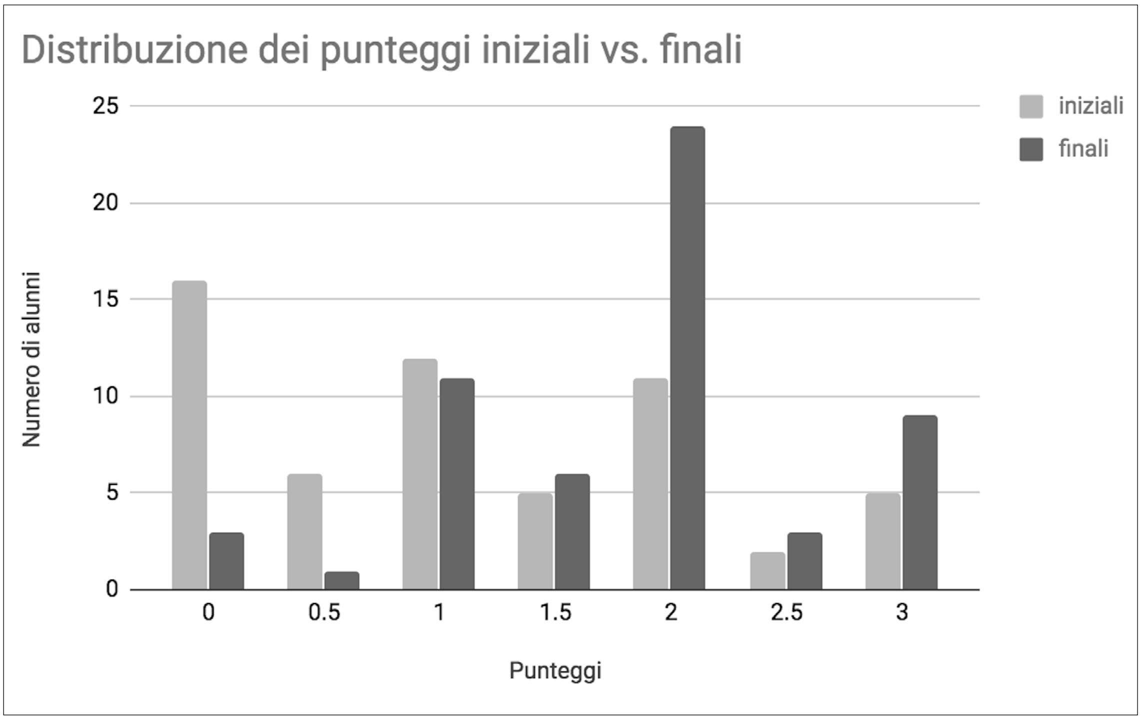


Figura 7. Il diagramma a barre mostra la distribuzione in frequenza dei punteggi ottenuti dagli alunni nel test VisA iniziale (barre in grigio chiaro) e finale (barre in grigio scuro).

Nella Tabella 3, invece, i risultati del test VisA sono suddivisi in base alle fasce di livello, operazione che permette di apprezzare eventuali differenze nei sottogruppi.
Nella prima riga, in evidenza, sono riportati i risultati ottenuti sul totale degli alunni; nelle righe successive, la fascia alta, bassa e gli alunni con BES. Nelle colonne troviamo i punteggi riferiti alla situazione iniziale, finale e poi i dati che esplicitano il confronto con il T-test (terza e quarta colonna). I punti rappresentano la somma di tutti i punteggi ottenuti da tutti gli studenti della fascia considerata nel test iniziale (in entrata) o in quello finale (in uscita). I valori *% sul totale* sono i punteggi ottenuti nel test VisA espressi in percentuale rispetto al punteggio massimo possibile (3 punti a studente). Nella colonna delle *differenze*, i punti sono ottenuti come differenza tra i punti finali e i punti iniziali; e analogamente sono state calcolate le differenze tra le percentuali.

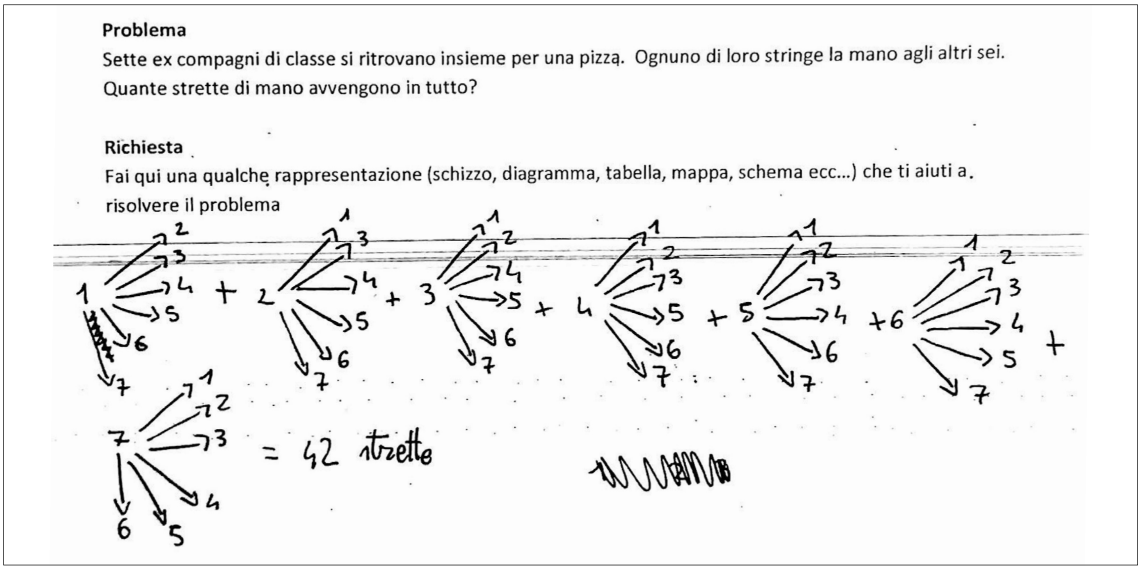
	Iniziale		Finale		Differenze p=0,05		Migliorati %
	Punti	% sul totale	Punti	% sul totale	Punti	% sul totale	
Totale n=54	62,5	38,6 %	96	59,3 %	+33,5 p=0,0003*	+20,7	65,5
Fascia alta n=28	41	48,8 %	60	71,4 %	+19 p=0,004*	+22,6	64,3
Fascia bassa n=15	12	26,7 %	21,5	47,8 %	+9,5 p=0,01*	+21,1	66,7
BES n=11	9,5	28,8 %	14,5	43,9 %	+5 p=0,13	+15,2	54,5

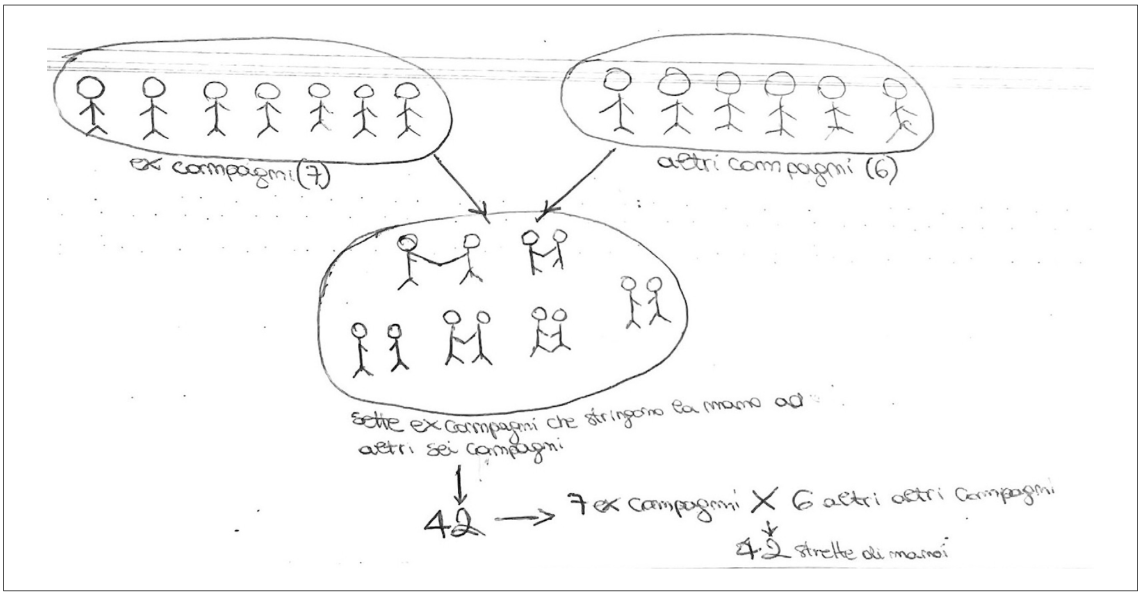
Tabella 3. Confronto tra situazione iniziale e finale del test VisA per la metacognizione.

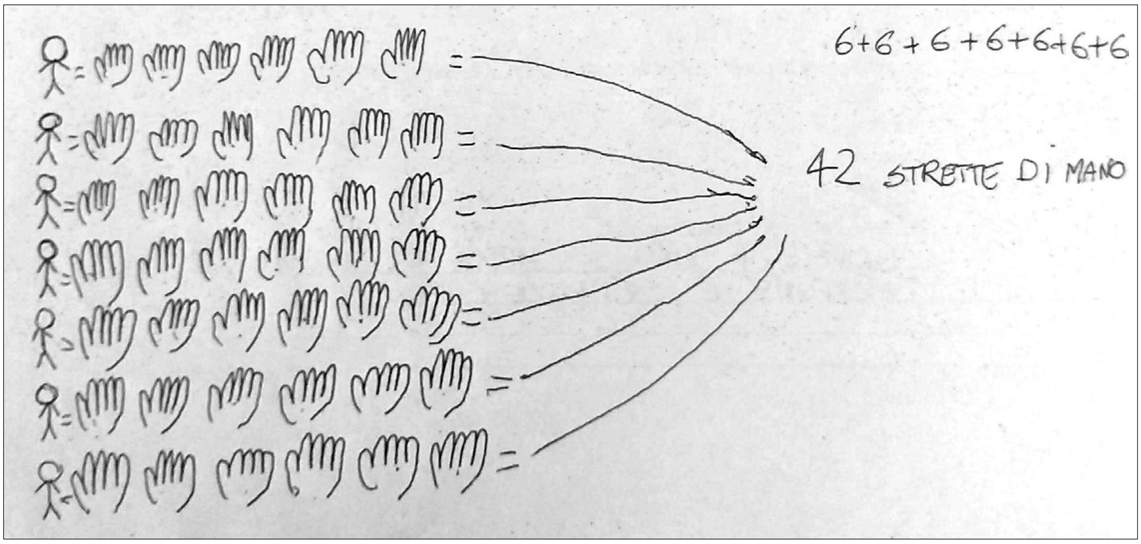
Nella quarta colonna, la *% dei migliorati* si riferisce alla percentuale di alunni che hanno migliorato la propria prestazione rispetto a quella iniziale, cioè coloro per i quali è verificata la seguente diseguaglianza:

(*punteggio VisA finale – punteggio VisA iniziale*) > 0

Le differenze dei punti tra i due campioni sono state analizzate mediante un T-test a una coda con un livello di confidenza del 95%. I dati con asterisco (*) mostrano una differenza significativa.
Dalla valutazione con il VisA test effettuata a fine percorso, gli studenti hanno dimostrato di aver migliorato sensibilmente la loro capacità di previsione della performance, ovvero hanno stimato con maggior confidenza la propria capacità o non capacità di risolvere il problema, anche se permaneva ugualmente una certa percentuale di indecisi (semaforo giallo). Solo in pochi hanno sbagliato la loro previsione (cioè hanno previsto di saper risolvere il problema e poi non l'hanno fatto o viceversa).
Di seguito riportiamo, a titolo di esempio, il problema usato per il test metacognitivo in entrata (VisA test). Come si nota in Figura 8, le rappresentazioni sono molto varie, alcune creative e non stereotipate; le prime tre in particolare, seppur dettagliate, non aiutano a trovare la soluzione che infatti è errata (42 strette di mano). Il problema apparentemente semplice viene sottovalutato, infatti sono state raccolte diverse risposte nel prediction test del tenore «è un problema semplice, si deve fare solo un calcolo e sono in grado di farlo».







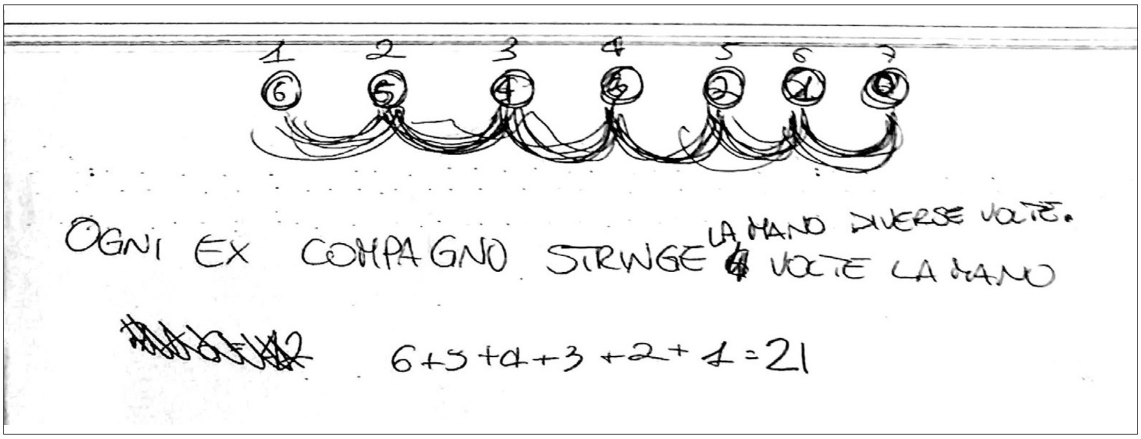


Figura 8a, b, c, d. Il testo del Problema n. 1, *Strette di mano*, con quattro esempi di rappresentazione grafica.

Un esempio di evoluzione nella rappresentazione prodotta dagli alunni è riportato nelle figure seguenti, che raccolgono le soluzioni al Problema n. 2, *La donna alla fonte*, con le tre categorie di rappresentazioni: quelle ingenuamente pittoriche (Figura 9), semi-schematiche (Figura 10) e schematiche (Figura 11). Tutti i ragazzi in grado di produrre spontaneamente una rappresentazione schematica sono arrivati alla soluzione corretta, solo alcuni tra coloro che hanno utilizzato quelle del tipo semi-schematico vi sono riusciti, nessuno tra coloro che hanno utilizzato una rappresentazione pittorica è poi riuscito a risolvere il problema.

Problema

Tanto tempo fa nell'antica Cina, un'anziana donna si recava tutti i giorni a prendere l'acqua al pozzo mettendosi sulle spalle un bastone con alle estremità appesi due secchi. Ogni giorno rempiva i secchi con 6 litri d'acqua ciascuno e lentamente tornava verso casa. Uno dei due secchi, però, essendo rotto, perdeva 1 dl di acqua ogni 100 m e ogni volta che l'anziana donna tornava a casa trovava il secchio rotto pieno solo a metà.
Quanto era distante la casa dal pozzo?

Richiesta

Fai qui una qualche rappresentazione (schizzo, diagramma, tabella, mappa, schema, etc) che ti aiuti a risolvere il problema.

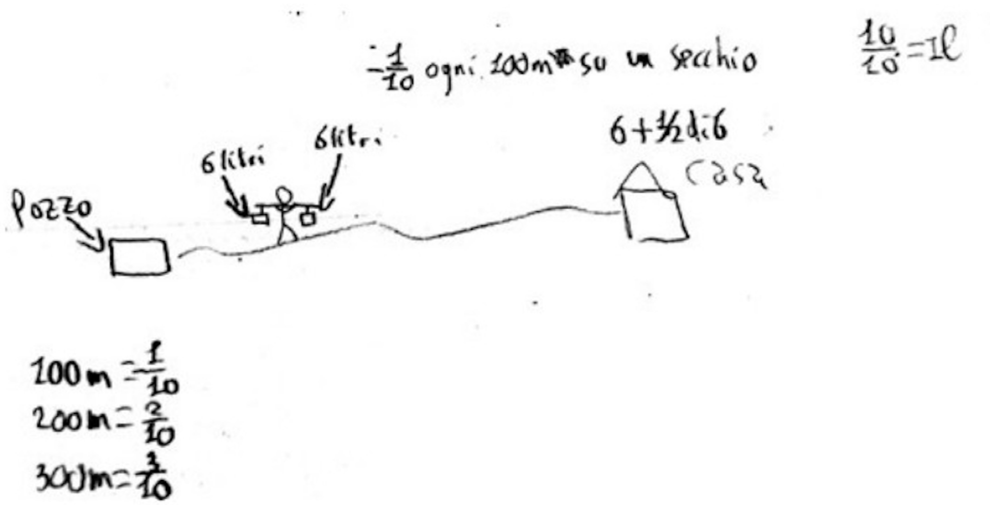


Figura 9. Il Problema n. 2, della tipologia a *ritroso*, con testo della consegna e rappresentazione pittorica.

In Figura 9, si nota come la rappresentazione pittorica non aiuti a schematizzare il problema e sebbene l'alunno tenti anche un approccio di tipo numerico, questo è scollegato dalla rappresentazione e non gli permette di imbastire un procedimento risolutivo.
Le due rappresentazioni riportate in Figura 10 sono di tipo semi-schematico, infatti sebbene siano ancora presenti alcuni elementi pittorici (che probabilmente aiutano a creare una rappresentazione visiva della scena) questi sono disposti in una struttura più schematica; si noti la comparsa di elementi di astrazione come la definizione dell'unità di misura "goccia" e il tentativo di rappresentare la sequenzialità temporale degli eventi.

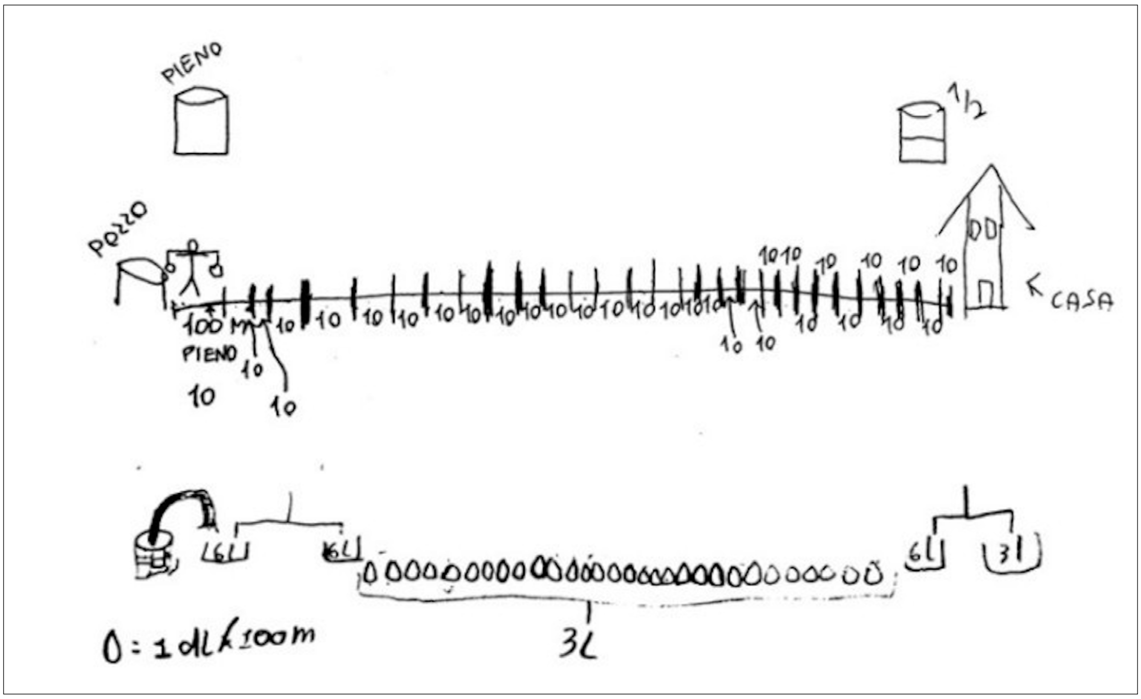


Figura 10. Due diverse rappresentazioni semi-schematiche del Problema n. 2 tentate dagli studenti.

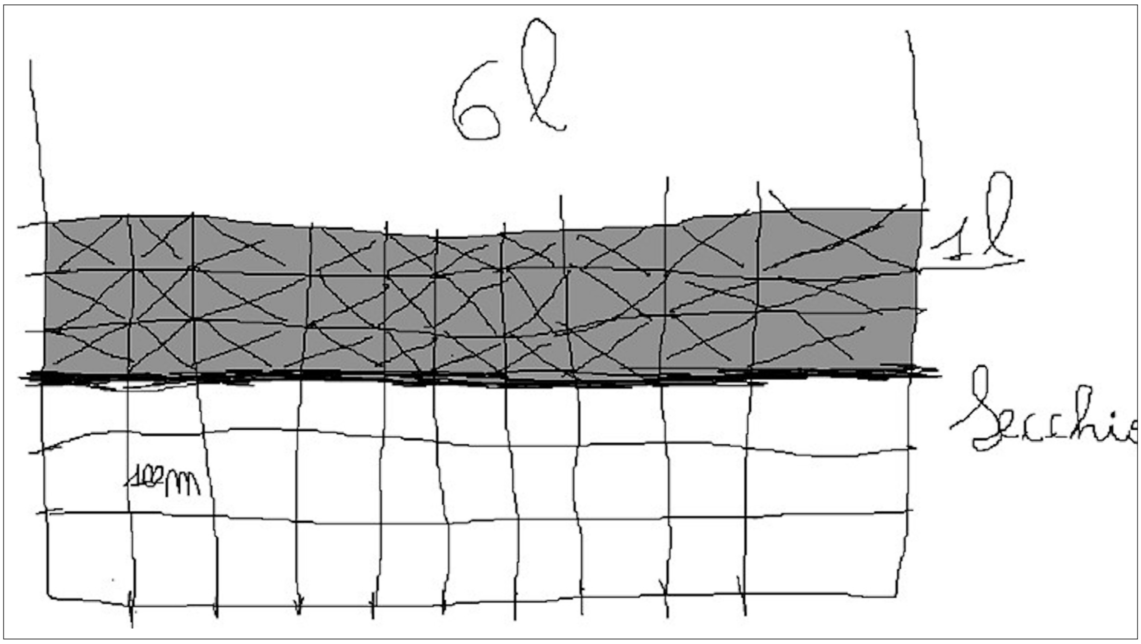
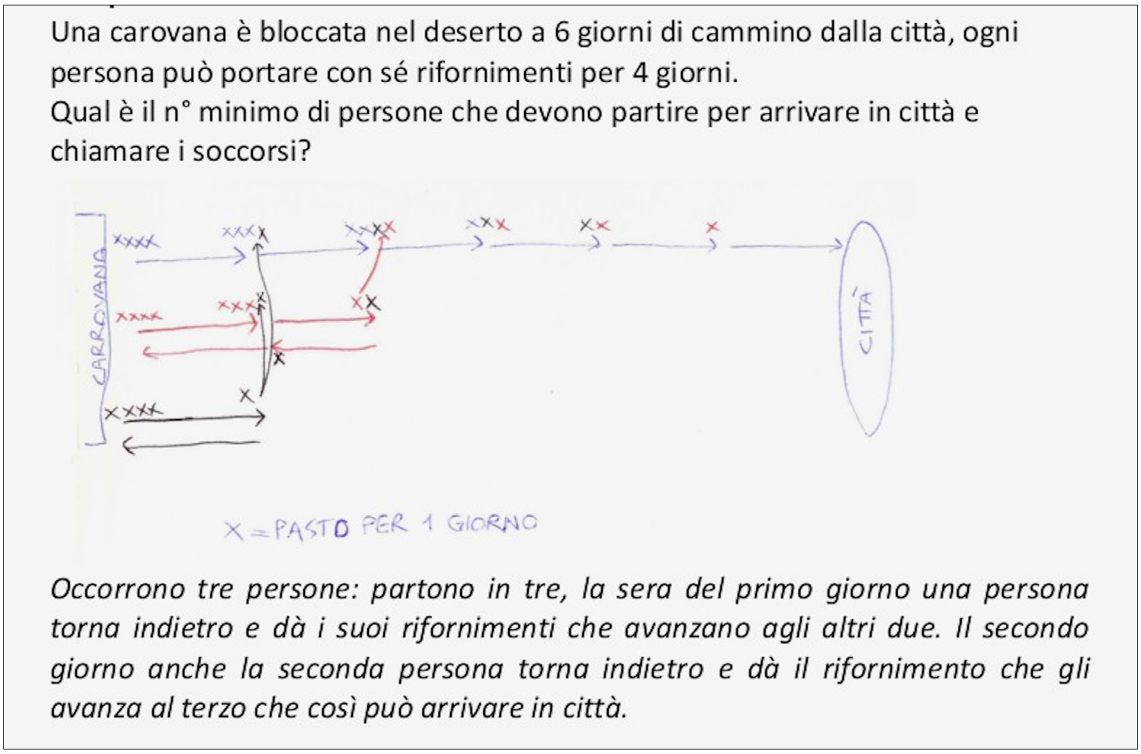


Figura 11. Rappresentazione schematica del Problema n. 2.

La **Figura 11** tralascia tutti gli elementi narrativi della consegna e si concentra sull'elemento centrale del problema (il secchio che si svuota), rappresentandolo in maniera schematica con un modello geometrico. La soluzione corretta è stata raggiunta senza che l'alunno riportasse alcun calcolo numerico, ma è stata resa visibile nel disegno e si è ottenuta dal conteggio dei quadratini barrati (i litri di acqua che sono andati persi lungo la strada).

Nella **Figura 12** si vede una soluzione del Problema n. 5, *La carovana nel deserto*, proposto a metà percorso: l'alunno è il medesimo che aveva utilizzato una rappresentazione pittorica con 42 manine nella Figura 8. In questo caso si nota che ha acquisito familiarità con la tipologia di problemi *trova uno schema*, infatti nella sua rappresentazione riproduce in colori diversi il pattern che ha individuato e cerca altresì di spiegare con cura apprezzabile il ragionamento che l'ha condotto alla soluzione, che è corretta.


Una carovana è bloccata nel deserto a 6 giorni di cammino dalla città, ogni persona può portare con sé rifornimenti per 4 giorni.
Qual è il n° minimo di persone che devono partire per arrivare in città e chiamare i soccorsi?

Occorrono tre persone: partono in tre, la sera del primo giorno una persona torna indietro e dà i suoi rifornimenti che avanzano agli altri due. Il secondo giorno anche la seconda persona torna indietro e dà il rifornimento che gli avanza al terzo che così può arrivare in città.

Figura 12. Testo ed esempio di soluzione del Problema n. 4, *La carovana nel deserto*.

Quello che colpisce nel confronto tra le soluzioni costruite dallo stesso alunno nelle Figure 8 e 12, è il passaggio da una rappresentazione pittorica molto legata alla realtà, quasi pratica, ad una più astratta e schematica.
Infine, nei laboratori di fisica meccanica conclusivi del percorso, tutti i gruppi sono riusciti a effettuare una rappresentazione formale della legge empirica modellizzata con l'utilizzo del piano cartesiano. Nella Figura 13 si vede un esempio di grafico piuttosto accurato, realizzato da un gruppo di alunni di fascia bassa.

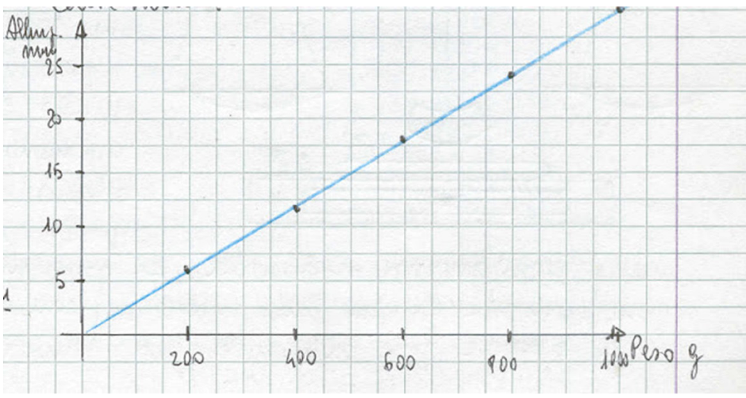


Figura 13. Rappresentazione grafica della soluzione di un problema di modellizzazione matematica di una legge empirica studiata in un laboratorio (allungamento di una molla elastica ottenuta dall'applicazione di masse differenti).

Un alunno del gruppo che ha realizzato il grafico di Figura 13, riporta nella sua relazione:

> «Io ero nel gruppo che doveva sperimentare l'allungamento di una molla elastica in relazione ai pesi che si potevano aggiungere o rimuovere. Dovevamo misurare la lunghezza della molla con i vari pesi e infine ricavare uno schema che dimostrasse la relazione tra allungamento e peso. L'esperimento mi ha permesso di capire che le due grandezze sono direttamente proporzionali».

Al termine del percorso molti più studenti sono riusciti ad utilizzare, nel test metacognitivo individuale in uscita, una rappresentazione schematica o semi-schematica, solo pochi ed in particolare appartenenti al gruppo dei BES hanno scelto una rappresentazione pittorica che non ha permesso loro di arrivare ad una soluzione corretta.
Riportiamo un esempio di restituzione da parte di due alunni ai quali è stata richiesta una considerazione conclusiva sul percorso svolto, il primo studente è di fascia alta e il secondo di fascia bassa: in entrambe emerge una buona consapevolezza di tipo metacognitivo.

> G.: «Questo laboratorio è stato molto interessante e utile perché insegna come risolvere problemi utilizzando la logica. È stata bella anche la scoperta che ci sono diversi tipi di problemi e il fatto che non ci sia un unico metodo di risoluzione ma che ognuno di noi possa scegliere quello che preferisce perché più adatto al proprio modo di vedere le cose».

> A.: «Dopo aver capito l'utilizzo e lo scopo del problem solving, mi sono accorto che molte volte utilizziamo questo tipo di procedura senza rendercene conto, perché, per esempio, nella traduzione dall'inglese all'italiano dobbiamo trovare delle strategie per analizzare la frase. Infatti per tradurre bisogna cercare il verbo, riordinare tutti i pezzi della frase e infine riscriverla in modo che in italiano risulti corretta. Il laboratorio mi è piaciuto perché al posto di affrontare la solita lezione di matematica in classe siamo andati a svolgere un esperimento che ci ha visto utilizzare degli strumenti nuovi chiamati macchine semplici. Mi sono trovato bene perché mi piace lavorare in gruppo».

6.2 Risultati del test cognitivo

Come già detto, per la valutazione della componente cognitiva sono stati utilizzati i test INVALSI, l'edizione del 2015 in entrata e quella del 2016 in uscita, e sono stati analizzati separatamente i quesiti che avevano il PS come dimensione prevalente da quelli focalizzati su conoscere o argomentare.
Nella Figura 14, sono riportati i punteggi ottenuti dal campione sottoposto ai quesiti INVALSI sul PS, suddivisi in base alle fasce di livello (Alta, Bassa e BES) e aggregati su tutto il campione. I punteggi sono rappresentati con due serie di dati che riportano il valore medio ottenuto dal gruppo esaminato con una barra di errore che indica la deviazione standard, in grigio il punteggio in ingresso, in nero il punteggio in uscita. Il confronto evidenzia l'andamento: un miglioramento per la fascia alta, bassa e nei dati complessivi, ma non in quella BES.
Come si vede dal grafico, il miglioramento è più evidente nella fascia bassa degli alunni, con circa un 19% di incremento dei punteggi, è più modesto per gli alunni di fascia alta (circa 6%) e complessivamente si raggiunge il valore intermedio di circa il 12%; nella fascia di alunni BES si osserva un andamento negativo nei risultati del 12%.

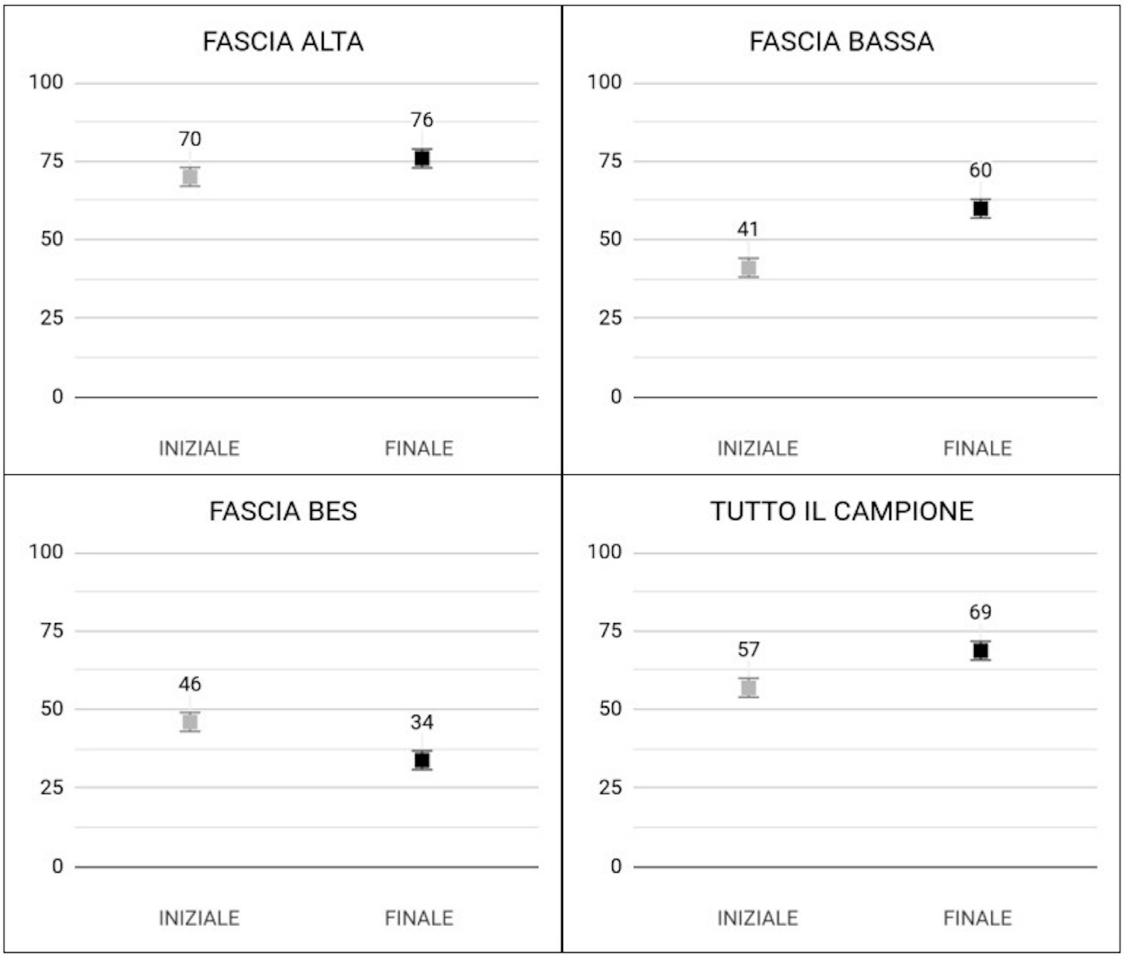


Figura 14. I punteggi medi riportati nei test INVALSI dal campione intero e dai sottogruppi: Fascia alta, Fascia Bassa, Fascia BES.

Nella Tabella 4 sono stati posti a confronto gli esiti dei quesiti con il PS come dimensione prevalente, rispetto a quelli con argomentare o conoscere, che sono stati in questo caso aggregati. Si è voluto così analizzare più in dettaglio se il miglioramento potesse riguardare in generale la competenza matematica oppure situarsi più specificamente nell'area del PS.

	Problem Solving %		Conoscere e argomentare %		Confronto (p=0,05)	
	Iniziale	Finale	Iniziale	Finale	Problem Solving	Conoscere e argomentare
Totale n=54	56,9	68,7	51,1	47,1	+ 11,8 t p=0,1**	- 4 t p=0,25
Fascia alta n=28	70	75,9	60	60	+ 5,9 t p=0,25	0 t p=0,50
Fascia bassa n=15	41,1	59,9	45,3	41,4	+ 18,8 t p=0,025*	- 3,9 t p=0,30
BES n=11	46	33,8	44,4	30	- 12,2 t p=0,09**	- 14,4 t p=0,02*

Tabella 4. Analisi delle differenze tra il test cognitivo in entrata e quello in uscita, suddiviso per le tre fasce di livello e totale (nelle righe) e per dimensione prevalente nei quesiti (nelle colonne). Nella colonna *Confronto* sono riportati gli esiti del T-test a una coda per la ricerca di differenze significative tra i due campioni in ingresso e in uscita.

I valori rappresentano la media delle percentuali dei punteggi ottenuti in ciascun quesito usando la seguente formula:

$$\%PunteggioPerQuesito = \frac{\sum(TotalePuntiQuesito)}{PunteggioMassimoOttenibile} \cdot 100$$

Le differenze tra i due campioni sono state analizzate mediante un T-test a una coda con un livello di confidenza del 95%. I dati con * mostrano una differenza significativa, quelli con ** indicano una differenza significativa al 90% di confidenza.
Al termine del percorso, gli studenti hanno migliorato la propria prestazione nel test INVALSI nei quesiti a prevalenza di PS, mentre non vi sono variazioni significative per le altre tipologie di quesiti, che risultano peggiorare di pochi punti percentuali.
In particolare, gli studenti della fascia bassa, ovvero coloro che non avevano avuto esiti sufficienti nella prova in ingresso, migliorano significativamente la loro prestazione nel test d'uscita (p=0,025). Anche gli studenti della fascia alta migliorano la propria performance, ma in maniera meno significativa, al 90% di confidenza.

7 Considerazioni conclusive

È stato progettato e realizzato un percorso di ricerca didattica che ha avuto l'obiettivo di migliorare le capacità nel PS attraverso un potenziamento della metacognizione.
I docenti hanno potuto realizzare in totale autonomia tutte le fasi previste nel progetto, compresa la valutazione della metacognizione, solitamente considerato un aspetto critico che necessita l'intervento di esperti. Per raggiungere questo obiettivo, è stato indispensabile formare un gruppo di lavoro in cui tutti i docenti coinvolti si potessero confrontare in modo continuo e critico.
Al termine delle attività, è stato osservato un incremento generale e significativo dei processi metacognitivi legati al PS rilevati con il VisA test. I risultati ottenuti dal confronto tra i test cognitivi e metacognitivi in entrata ed in uscita evidenziano come ad un generale miglioramento delle capacità metacognitive abbia di fatto corrisposto quello della performance nel PS anche se non sempre in modo significativo.
La suddivisione in fasce di livello degli studenti ha permesso di mettere in risalto le differenze nell'efficacia del percorso a seconda del livello cognitivo di partenza. Sebbene sia gli studenti di fascia alta che quelli di fascia bassa abbiano mostrato un miglioramento nel PS, solo per questi ultimi l'incremento è stato significativo; ciò potrebbe essere dovuto al tipo di intervento che ha potuto agire su un margine di sviluppo prossimale più ampio per gli studenti di questo gruppo rispetto a coloro che partono già con un buon livello di competenza.
Inoltre, il percorso didattico non ha avuto influenze significative nelle capacità di risoluzione di quei quesiti in cui il PS non era il processo prevalente.
Una considerazione più dettagliata va condotta sulla scelta di prove cognitive di ingresso e di uscita differenti tra loro, che può comportare l'aggiunta di variabili nuove non necessariamente previste. Dall'analisi degli esiti pubblicata da INVALSI (INVALSI, 2018a, 2016b) è emerso che la prova INVALSI 2016 (utilizzata come test d'uscita) è più impegnativa di quella del 2015 (scelta per il test in entrata). Questo può spiegare la presenza di quesiti che hanno allargato la forbice degli esiti tra alunni con BES e senza, ma al tempo stesso ci ha rassicurati sull'efficacia del percorso visti gli esiti positivi degli altri gruppi.
Inoltre nel gruppo dei BES il percorso non sembra aver influito positivamente sulle capacità metacognitive. Questo dato non deve sorprendere per vari motivi: innanzitutto sono rientrati in questo

gruppo studenti eterogenei per tipologia di difficoltà di apprendimento (dislessia, discalculia, problemi di comprensione linguistica ecc.) ma anche per differente strategia personale di compensazione, qualora attivata. Alunni così diversi tra loro necessitano di un tipo di didattica specifica e maggiormente individualizzata. Inoltre il gruppo BES era numericamente troppo piccolo per ottenere risultati maggiormente significativi.
In un ambito di ricerca azione, un miglioramento da apportare al percorso didattico è quello di renderlo maggiormente inclusivo, mediante l'utilizzo di metodologie di dimostrata efficacia per alunni con BES, inserendo ad esempio elementi tipici della *schema-based instruction* ed in generale della *cognitive strategy instruction* (Montague, Enders & Dietz, 2011). Un'osservazione focalizzata sugli studenti con BES, inoltre, sarebbe utile per la pianificazione delle attività, per lo studio delle modalità di personalizzazione delle consegne e per indagare sulle strategie di risoluzione o compensazioni messi in atto.
Il presente lavoro si presta a un possibile sviluppo che preveda le attività di PS pianificate durante tutto l'arco del triennio della scuola secondaria di primo grado, così da permettere una costruzione più strutturata e armonica della metacognizione e un monitoraggio più esteso. Il progetto è in continua revisione e allo stato attuale è stato adattato per poter essere avviato già nelle classi prime.

Bibliografia

Battista, M. (1990). Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 47-60.

Boero, P. (2015). Prove INVALSI: A proposito della definizione delle macro-aree di competenze, *Scuola autori, INVALSI*. Disponibile in: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/autori/Presentazione_Boero.pdf (consultato il 14.05.2020).

Brown, A. L. (1978). Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology 1* (pp. 77–165). Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

Brown, A. L., & DeLoache, J. S. (1978). Skills, plans, and self-regulation. In R. S. Siegel (Ed.), *Children's thinking: What develops?* (pp. 3–35). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Castoldi, M. (2009). *Valutare le competenze, percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze, percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

Castoldi, M. (2013). *Curricolo per competenze, percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

Cornoldi, C. (1995a). *Metacognizione e apprendimento*. Bologna: Il Mulino.

Cornoldi, C. (1995b). *Matematica e metacognizione: atteggiamenti metacognitivi e processi di controllo,* (Vol. 43). Trento: Erickson.

Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (1997). *Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship?. Mathematical cognition, 3*(2), 121-139.

Cross, D. R., & Paris, S. G. (1988). Developmental and instructional analyses of children's metacognition and reading comprehension. *Journal of Educational Psychology, 80*(2), 131-142.

Desoete, A., Roeyers, H., & De Clercq, A. (2003). Can offline metacognition enhance mathematical problem solving?. *Journal of Educational Psychology, 95*(1), 188-200.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906-911.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 193-223.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

Hutchinson, N. L. (1993). Effects of cognitive strategy instruction on algebra problem solving of adolescents with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 16*(1), 34-63.

INVALSI (2015). Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2014/15 Guida alla lettura Prova Nazionale al termine del primo ciclo: Matematica Classe terza – Scuola secondaria di I grado. Disponibile in: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/attach/2015_guida_L08_DICEMBRE.pdf (consultato il 16.06.2020).

INVALSI (2016a). Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2015/16 Guida alla lettura Prova Nazionale al termine del primo ciclo: Matematica Classe terza – Scuola secondaria di I grado. Disponibile in: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2016-GUIDA-L08.pdf (consultato il 16.06.2020).

INVALSI (2016b). Rilevazioni Nazionali degli Apprendimenti 2014/15, rapporto risultati. Disponibile in: https://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2015/034_Rapporto_Prove_INVALSI_2015.pdf (consultato il 14.05.2020).

INVALSI (2018a). Rilevazioni Nazionali degli Apprendimenti 2015/16, rapporto risultati. Disponibile in: https://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2016/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2016.pdf (consultato il 14.05.2020).

INVALSI (2018b). Quadro di riferimento delle prove di INVALSI matematica (ver. 30.08.2018). Disponibile in: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf (consultato il 14.05.2020).

Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2012). Towards efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition and Learning, 7*(2), 133-149.

Judd, T. P., & Bilsky, L. H. (1989). Comprehension and memory in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and nonretarded individuals. *Journal of Educational Psychology, 81*(4), 541-546.

Lai, E. R. (2011). Metacognition: A literature review. *Always learning: Pearson research report, 24*.

Lester, F. K. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: a study of two grade seven classes, a project of the Mathematics Education Development Center*. Indiana University.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 75-88). New York, NY: Springer.

Marshall, S. P. (2012). Schema-Based Instruction. In N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning*. Boston, MA: Springer.

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. Annali della Pubblica Istruzione*, Numero Speciale. Firenze: Le Monnier.

Montague, M., Enders, C., & Dietz, S. (2011). Effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle school students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 34*(4), 262-272.

Padmavathy, R. D., & Mareesh, K. (2013). Effectiveness of problem based learning in mathematics. *International Multidisciplinary e-Journal, 2*(1), 45-51.

Parmar, R. S. (1992). Protocol analysis of strategies used by students with mild disabilities when solving arithmetic word problems. *Diagnostique, 17*(4), 227-243.

Pietrapiana, D. (2016). Developing Metacognition at School: a Learning Integrated Approach. In J. Benson (Ed.), *Metacognition: theory, performance and current research* (pp. 95-121). Hauppauge NY: Nova Science Publishers.

Pintrich, P. R., Wolters, C. A., & Baxter, G. P. (2000). Assessing metacognition and self-regulated learning. In G. Schraw & J. C. Impara (Eds.), *Issues in the Measurement of Metacognition* (pp. 43-97). Lincoln, NE: Buros Institute of Mental Measurements.

Robertson, S. I. (2016). *Problem solving: perspectives from cognition and neuroscience*. (2° ed.) Psychology Press, Londra: Routledge Taylor & Francis.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM, 42*(2), 149-161.

Schoenfeld, A. H. (1989). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environmental and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research, 13*(1), 71-88.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schraw, G., Crippen, K. J., & Hartley, K. (2006). Promoting self-regulation in science education: Metacognition as part of a broader perspective on learning. *Research in science education, 36*(1-2), 111-139.

Skyttner, L. (2005). *General Systems Theory: Problems, Perspectives, Practice*. London: World Scientific.

Veenman, M. V. J. (2005). The assessment of metacognitive skills: What can be learned from multi-method designs? In C. Artelt & B. Moschner (Eds.), *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis* (pp. 75–97). Berlin: Waxmann.

Veenman, M. V. J., Van Hout-Wolters, B. H., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: Conceptual and methodological considerations. *Metacognition and learning, 1*(1), 3-14.

Veenman, M. V. J., & Van Cleef, D. (2019). Measuring metacognitive skills for mathematics: students' self-reports versus on-line assessment methods. *ZDM, 51*(4), 691-701.

Whitebread, D., Coltman, P., Pasternak, D. P., Sangster, C., Grau, V., Bingham, S., Almeqdad, Q., & Demetriou, D. (2009). The development of two observational tools for assessing metacognition and self-regulated learning in young children. *Metacognition and learning, 4*(1), 63-85.

Xin, Y. P., Jitendra, A. K., & Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of mathematical word Problem—Solving instruction on middle school students with learning problems. *The Journal of Special Education, 39*(3), 181-192.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 141 - 163, DOI: 10.33683/ddm.20.8.7

OPEN ACCESS

Un approccio attivo alla geometria piana nella scuola primaria

An active approach to plane geometry in primary school

Ezio Scali
Insegnante-ricercatore scuola primaria – Torino, Italia

✉ ezioscali@inwind.it

"Le immagini parlano, o richiamano parole,
perché non c'è immagine senza linguaggio"
Raymond Duval

Sunto / L'articolo descrive un'esperienza didattica realizzata in una classe quinta della scuola primaria: lo scopo dell'attività era di proporre una modalità di lavoro che permettesse agli alunni di attivare le loro potenzialità cognitive quando affrontavano situazioni geometriche nelle quali era loro richiesto di pianificare come si potessero calcolare le aree non note di figure geometriche. Tali situazioni sono spesso proposte in termini statici, attraverso lezioni frontali in cui il compito degli studenti è la fruizione. Le consegne hanno messo in evidenza quanto sia stretto il rapporto fra il linguaggio e gli aspetti iconici e figurali e come questo possa essere discusso con gli studenti. Mentre la discussione ha evidenziato diversi approcci ai significati coinvolti, confrontarsi con le situazioni proposte e interagire coi pari sembra aver aumentato la consapevolezza degli studenti circa il senso del calcolo delle aree.

Parole chiave: intuizione; visione; linguaggio; consapevolezza; rappresentazione.

Abstract / The article describes a teaching experience, carried out in a 5th grade class of primary school. The aim of the activity was to propose a working method which could enable students to activate their cognitive potentialities when facing geometrical situations in which they were asked to plan how to calculate unknown areas of geometric figures.
Such situations are often proposed in static terms, through frontal lessons in which the students' task is to learn how to use formulas. The proposed tasks highlighted how tight is the relationship between the language and the iconic and figural aspects and how this can be object of discussion with the students. While the discussion highlighted several different approaches to the involved meanings, coping with the proposed situations and interacting with peers seems to have increased the students' awareness about the meaning of areas calculation rules.

Keywords: intuition; vision; language; awareness; representation.

1 Introduzione

Un problema delicato e impegnativo per il lavoro dell'insegnante in ambito matematico è assumere realmente nella propria pratica didattica la complessità della costruzione del pensiero matematico, che è un

> «processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico».
>
> (MIUR, 2012, p. 60)

Riflettere a fondo su questa affermazione delle Indicazioni Nazionali italiane del 2012 può permettere all'insegnante di costruire una progettazione che miri a perseguire per tutti gli allievi quegli aspetti di alfabetizzazione culturale che rappresentano ciò che un futuro cittadino deve possedere per compiere scelte consapevoli.
La matematica è parte di questa progettazione e la qualità dell'apprendimento può determinare la padronanza o meno di strumenti per leggere e interpretare la realtà e per orientarsi in essa. Il tema della costruzione delle competenze ha assunto, in questa prospettiva, un'importanza cruciale, ma si ha l'impressione che si stenti, nella pratica didattica più diffusa, a comprendere i cambiamenti di sguardo che richiede il lavorare in un'ottica di costruzione di competenze: «cambiamenti non sostenuti, almeno in Italia, da un adeguato programma di formazione degli insegnanti» (Baccaglini Frank, Di Martino, Natalini & Rosolini, 2018, pp. 92-93). Si assiste a una difficoltà a pensare che realmente si possa lavorare, in modo non episodico, mettendo al centro problemi «intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola» (MIUR, 2012, p. 62). Un aspetto di questa difficoltà è legato alla poca propensione a considerare la complessità della relazione educativa. La scuola ha sviluppato un notevole lessico rispetto ai "problemi legati alla vita quotidiana": problemi reali, problemi concreti, compiti autentici, compiti di realtà ecc. I libri di testo contengono pagine con questi titoli, ma affinché non restino solamente parole d'ordine alla moda, è necessario che si consideri il tessuto didattico, l'impianto complessivo che costituisce la globalità dell'esperienza scolastica vissuta dagli allievi. La letteratura offre numerosi esempi riguardo all'idea di successo scolastico (soprattutto in matematica) che si forma nella mente di un allievo, e di come questa idea non sia legata a ciò che realmente ha imparato o capito, ma ad altri fattori: al voto assegnato, alla fortuna, alla memoria, alla velocità. Le ricerche di Zan (2007, 2016) offrono molte riflessioni su queste problematiche e possono aiutare gli insegnanti a provare a scardinare pratiche didattiche che seguono per abitudine, senza la necessaria consapevolezza di ciò che si mette realmente in gioco.

2 Uno sguardo alla geometria

In questo articolo si prenderanno in considerazione alcuni aspetti dell'insegnamento della geometria piana nella scuola primaria,[1] partendo dalla constatazione, costruita in molti anni di lavoro in classe, di quanto la geometria degli ultimi anni della scuola primaria possa costituire un serbatoio di appren-

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

dimenti *illusori* per i bambini. Un serbatoio attraente, perché spesso dà agli allievi l'impressione di aver "imparato" le figure geometriche, le loro caratteristiche, e le relative formule per calcolare misure significative; una trappola consolatoria anche per gli insegnanti, perché consente loro di offrire agli allievi un ventaglio di "successi" di gradazione diversa, in relazione al raggiungimento dell'obiettivo «Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure […]» (MIUR, 2012, p. 62): chi si arresta alla prima parte dell'obiettivo, chi si spinge appena più avanti, chi giunge a declinare tutte le formule. Ma le competenze acquisite sono nella sostanza veramente diverse? E che cosa le rende eventualmente diverse?

Viene da chiedersi se il lavoro geometrico sia svolto frequentemente in modo statico e avulso da una relazione con la realtà. Ma forse, prima ancora, tale lavoro non risulta in stretta relazione con il pensiero e con i modi in cui gli allievi *vedono* gli oggetti geometrici. Questa è un'esperienza che può sopprimere la motivazione e determinare un appiattimento del "fare", orientato verso un pensiero applicativo, strutturalmente riproduttivo.

Anche quando l'insegnante (o il libro di testo per lui) presenta agli allievi le formule per calcolare le aree delle figure geometriche, introducendole talvolta con una dimostrazione che tiene conto dei teoremi sottesi, i risultati di apprendimento non sono all'altezza delle attese.

Nel primo capitolo de *Il pensiero produttivo*, dedicato all'area del parallelogramma, Wertheimer (1997) offre una acuta analisi delle implicazioni inerenti alla possibilità per il bambino di giungere ad una comprensione profonda della struttura di quel problema. Allo stesso tempo chiarisce i limiti di un insegnamento che procede per dimostrazioni di teoremi attraverso lezioni frontali: la classe sa ripetere la formula e la dimostrazione che porta ad essa, ma le difficoltà rispetto alla proposta di lavorare sulla stessa figura orientata in modo diverso rende evidente che il problema di come si determina l'area di *un* parallelogramma non sia stato compreso in modo profondo.

L'insegnante descritto all'inizio del capitolo da Wertheimer (1997) è ancora oggi un buon esempio di insegnante soddisfatto del suo approccio all'insegnamento della geometria. Il più delle volte non ha consapevolezza del fatto che si privano gli allievi di interessanti esperienze cognitive e culturali, che solo la scuola può offrire attraverso la mediazione dell'insegnante, in quanto è il luogo dell'incontro di un sapere disciplinare da costruire e del pensiero e del modo di vedere di ciascun allievo. In questo processo di apprendimento il confronto con il pensiero dei pari, cioè con gli altri pensieri e gli altri modi di vedere quel particolare lavoro, costituisce una ricchezza che si rischierebbe di perdere in una prospettiva orientata alla fruizione e all'applicazione.

Il compito dell'insegnante richiede dunque, in modo trasparente e rigoroso, la presa in carico del lavoro cognitivo che viene richiesto all'allievo e gli strumenti che egli ritiene legittimo utilizzare nella risoluzione di un qualsiasi problema, dove per strumenti non si intendono solo gli "attrezzi" del fare didattico, ma anche la possibilità interiore di esplorare, sperimentare, sbagliare. La consapevolezza dunque riguarda un approccio più generale al processo di insegnamento-apprendimento, perché, come sottolinea Pellerey, per la costruzione di competenze occorre «mettere in moto e orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive, volitive e utilizzare le risorse esterne in modo coerente e fecondo» (Pellerey, 2004, p. 12).

Numerosi studi in didattica della matematica (si vedano ad esempio Mariotti, 2005; Fischbein, 1993; Duval, 2018) hanno indagato in modo approfondito su molte problematiche riguardanti aspetti che vengono messi in gioco nelle situazioni didattiche di tipo geometrico: la distanza tra disegno e figura geometrica, il rapporto tra le proprietà figurali e i vincoli concettuali che caratterizzano il piano teorico del fare geometrico, il ruolo del vedere che orienta l'uso euristico delle figure geometriche nelle risoluzioni di problemi, il divario tra geometria e realtà. Alcune di queste problematiche verranno riprese in seguito.

3 Elementi generali di contesto

In letteratura viene richiamata l'attenzione alla distinzione tra realtà e geometria (tra i tanti contributi, Laborde, 1988; Parzysz, 1988). La realtà non è trasferibile immediatamente nelle categorie geometriche. Così, se è indispensabile costruire e sostenere la consapevolezza che la geometria sia uno strumento per interpretare e modellizzare la realtà, nello stesso tempo è fondamentale essere prudenti nell'interpretare, ad esempio, ciò che gli allievi fanno per ragionare sulla forma del cortile della scuola e per trasferirla in una figura sul foglio, assumendo quest'ultimo momento come "geometrico". I problemi di natura epistemologica, psicologica e cognitiva presenti in questo passaggio vanno considerati con estrema attenzione al fine di non confondere i piani del discorso: la maturazione di un pensiero geometrico è un processo lungo e articolato che si fonda sull'acquisizione di una progressiva consapevolezza della relazione tra la visione, la figura, i concetti, il pensiero e la parola.

Da queste considerazioni è nata l'esigenza di mettere in gioco, su un piano didattico, con i bambini della scuola primaria, delle ipotesi di lavoro che, almeno in parte, rendessero dinamico l'approccio alle figure geometriche e la relazione di queste con le formule per determinarne l'area. Determinante, affinché ciò sia possibile, è il contratto didattico che si costruisce con i bambini, relativo a che cosa viene associato al "fare matematico". Questo aspetto è legato alla possibilità per l'allievo di pensare la matematica come un luogo di esperienze di ragionamento e di parola, dove l'accostamento alla disciplina avviene attraverso il progressivo passaggio da *strumento* ad *oggetto* degli elementi che via via si incontrano nel processo di apprendimento, e al successivo passaggio da *oggetti* a *strumenti* quando l'oggetto può divenire risorsa per ulteriori apprendimenti (Douady, 1986). Questo passaggio è reso possibile dall'uso, mediato dall'insegnante, di modalità di rappresentazione del pensiero e dell'azione di cui il bambino acquisisce gradualmente consapevolezza.

Nel progetto in cui si inserisce il lavoro della classe che verrà considerata in questo articolo, fin dall'inizio della scuola primaria viene curata la possibilità per il bambino di esprimere compiutamente il proprio pensiero, a cui viene data dignità di testo scritto attraverso la scelta didattica del *prestamano*: l'insegnante, per tutta la fase che precede la possibilità per il bambino di scrivere autonomamente, offre la sua mano per trascrivere il pensiero dell'allievo, mantenendone la ricchezza, talvolta sostenendone lo "sgrovigliamento", in qualche caso aiutando l'allievo a completare, arredare, definire frammenti di pensiero. Questa scelta ha origine dalla constatazione che, soprattutto per allievi che hanno un pensiero più articolato di quanto una relazione povera e deprivata con il linguaggio permetterebbe loro di esprimere, la mediazione dell'adulto è indispensabile per costruire la convinzione che la parola accompagna ogni azione, mentale e agita. La richiesta di "spiegare il ragionamento", frequente ormai anche nei libri di testo, senza una adeguata azione didattica che costruisca la consapevolezza di cos'è un ragionamento, si traduce sovente in scritture stereotipate e rituali.

La lingua che rende consapevoli ha una stretta relazione con un'altra scelta didattica di questo lavoro, quella di far esplorare i significati delle operazioni aritmetiche per un tempo lungo, all'interno di situazioni problematiche che il bambino possa cogliere come vere o verosimili, per poi giungere alla tecnica di calcolo scritto in un secondo momento, come organizzazione economica delle strategie spontanee, rispondente ai significati del numero fino a quel momento appresi.[2] Questa cornice metodologica risponde anche all'esigenza di valorizzare l'idea che il pensiero matematico non sia soltanto applicazione di tecniche e regole fornite dall'esterno, costruendo in tal modo dei tasselli per lo «sviluppo di un atteggiamento positivo rispetto alla matematica» (MIUR, 2012, p. 61) perché le esperienze vissute hanno fatto intuire all'allievo «come gli strumenti matematici che ha imparato

2. Per eventuali approfondimenti, il riferimento è al Progetto "Bambini, maestri, realtà", DIMA-UniGe (Boero, 1990) e a Boero, Dapueto, Ferrari, Ferrero, Garuti, Lemut, Parenti e Scali (1995).

ad utilizzare siano utili per operare nella realtà» (MIUR, 2012, p. 61). Questa competenza così importante, ma così complessa da pensare nella sua realizzazione nel tempo, appare come una guida ineludibile per il compito dell'insegnante.

4 Il contesto specifico dell'esperienza

L'esperienza che verrà descritta di seguito va contestualizzata, come si è detto in precedenza, in un'abitudine a ragionare sulle situazioni senza avere a disposizione preventivamente le regola, le procedure, le tecniche di calcolo scritte necessarie a risolverle. La costruzione graduale dell'idea che la matematica non è un insieme di nozioni, formule e tecniche da apprendere a memoria richiede che il docente, nel suo contratto didattico con la classe, costruisca anche la legittimità di poter riflettere liberamente sulla situazione oggetto di lavoro. Richiede in sostanza di lavorare sull'errore e sul ruolo che può avere nell'apprendimento e sulla valorizzazione reale del processo di pensiero rispetto alla produzione di un risultato.

Esplicitare, seppur in modo sintetico, la cornice in cui si inseriscono le esperienze presentate è necessario per avere elementi per comprenderne le potenzialità (e per riflettere criticamente anche sui limiti) che esse possono offrire a bambini che sempre di più, nella vita sociale, appaiono fruitori di esperienze, spesso virtuali, più che attori. Tuttavia, l'alunno può assumere un atteggiamento attivo solo se questo è la trama del tessuto quotidiano della pratica didattica.

L'esperienza è stata realizzata in una classe quinta, composta da 21 allievi, di una scuola primaria di Piossasco, un comune della seconda cintura di Torino. Alle attività che vengono di seguito descritte hanno partecipato 20 allievi (un allievo con disabilità grave non ha partecipato al lavoro). Nel corso delle classi terza e quarta era stato svolto un intenso lavoro geometrico a partire dall'osservazione del comportamento della luce del sole dapprima durante la giornata, poi nel corso dei mesi, e delle ombre che essa produceva in diverse situazioni. Gradualmente i bambini erano pervenuti ad utilizzare il punto di vista geometrico come una chiave privilegiata per interpretare i fenomeni osservati: ad esempio il fatto che a mezzogiorno l'ombra risultasse più corta di quanto fosse al mattino o nel pomeriggio, oppure la comprensione della rotazione, sul piano del cortile, della luce del sole passante per un foro praticato in un bastone sistemato in posizione verticale. La riflessione in classe sulle categorie geometriche aveva portato ad istituzionalizzare l'esistenza del "triangolo dell'ombra", cioè di quel triangolo che si forma considerando un oggetto, l'ombra che esso proietta e il raggio di sole che unisce in modo ideale le estremità dell'ombra e dell'oggetto. Questa modellizzazione non era di carattere statico, poiché era legata al movimento apparente del sole nel tempo della giornata e la riflessione che essa consentiva riguardo ai fenomeni studiati ne determinava il carattere di modello interpretativo. I bambini hanno partecipato in modo vivace a questa esperienza di approccio alla relazione tra esperienza fisica, esperienza di osservazione e sviluppo del pensiero argomentato in chiave interpretativa, dove il rapporto tra il *vedere* e il *vedere con la mente* era uno dei fulcri della possibilità di ricostruire mentalmente le relazioni che all'occhio non era dato di cogliere.

Accennare a questa esperienza permette da un lato di identificare passaggi importanti nel sapere costruito in classe a proposito del senso della geometria, e dall'altro di rintracciare le motivazioni della possibilità di far lavorare gli allievi su consegne che richiedevano un approccio di tipo dinamico anche per lo studio delle figure geometriche.

Durante la classe quarta, con i bambini erano state definite le formule riguardanti il perimetro e l'area di triangoli e rettangoli, che divenivano così strumenti per l'accesso alla possibilità di ragionare su nuove figure. Nel corso della prima parte della classe quinta si è deciso perciò di proporre l'esperienza didattica oggetto di questo lavoro: la costruzione delle formule per il calcolo delle aree

dei parallelogrammi, dei rombi e dei trapezi.
Le consegne date richiedevano agli allievi di ragionare sulla figura presentata di volta in volta, disegnata su un foglio, con la possibilità di orientarla soggettivamente. Generalmente gli allievi iniziavano posizionando il disegno della figura in una posizione prototipica, ma sovente il foglio veniva ruotato per esplorare la figura da posizioni diverse. Inoltre, non veniva richiesta né la misurazione, né la scrittura dei calcoli, né il raggiungimento di un risultato numerico che definisse l'area. Per ogni tipo di figura sono state svolte tre lezioni della durata media di un'ora e mezza l'una. Le tre lezioni riguardavano: la risoluzione del problema, la discussione di bilancio delle soluzioni selezionate dall'insegnante, e un'attività di argomentazione e di istituzionalizzazione delle formule costruite. Il percorso complessivo ha avuto la durata di dieci lezioni (compresa quella finale di assegnazione di item INVALSI).
Il presupposto pedagogico era che anche nelle situazioni presentate tradizionalmente in modo statico potesse essere efficace proporre e suscitare uno sguardo attivo ed esplorativo, che consentisse al bambino di mettere in gioco sia gli aspetti figurali della situazione, sia quelli concettuali e che questo richiedesse di separare l'attività mentale sulle figure dalla misura e dal calcolo.
Dal punto di vista dell'insegnante è stato importante monitorare ciò che succedeva per capire come queste consegne raggiungessero gli allievi, tutti gli allievi. Questo ha richiesto di prestare attenzione a molti focus di osservazione.
Un primo focus riguardava *dove* avvenisse il lavoro del bambino, se all'interno della figura o all'esterno, e con quali modalità. Si è trattato di osservare se l'allievo intravedesse la possibilità di manipolare e modificare la figura oppure intendesse mantenerla intatta concentrando il pensiero nella ricerca di forme compensative. Una chiave di lettura è rappresentata dai contributi di Fischbein (1992; 1993), che hanno messo in luce la necessità di pensare ai *concetti figurali*, come sintesi di due aspetti centrali del fare geometrico: l'aspetto figurale e l'aspetto concettuale, non sovrapponibili, ma nello stesso tempo fortemente intrecciati. «Secondo questa prospettiva, quando ci si riferisce alle figure geometriche si possono considerare tre categorie: la definizione, l'immagine (basata sull'esperienza percettiva-sensoriale, come l'immagine di un disegno) e il concetto figurale» (Sabena, Ferri, Martignone & Robotti, 2019, p. 130).
Un secondo aspetto riguardava *se* e *come* il bambino modificasse il proprio atteggiamento nel susseguirsi delle proposte di lavoro oppure se queste venivano affrontate con modalità fisse perché rassicuranti dato che erano già state sperimentate con successo in situazioni precedenti.
Un terzo focus concerneva l'osservazione di come l'*intreccio* tra la cognizione individuale e le modalità di confronto e di ragionamento collettivo (nel piccolo gruppo e nelle discussioni di classe) permettessero la maturazione della possibilità di accedere a un pensiero razionale consapevole sostenuto anche dal piano di lavoro operativo sulle figure.
Infine, si è posta l'attenzione sul ruolo del linguaggio e sulla sua interazione con l'aspetto figurale. Monitorare in classe questo aspetto non è stato semplice e l'osservazione su questo piano è stata necessariamente limitata: in molti casi si sono potute fare solo inferenze sul corso del pensiero del bambino osservando il trattamento della figura e la sua corrispondenza con le tracce scritte del ragionamento seguito.
A questo proposito i contributi di Duval (2018) sulla visione aiutano a penetrare le caratteristiche del "vedere spontaneo" e del "vedere geometrico" e del rapporto di questi con il pensiero verbale. Secondo Duval, due principi governano la visualizzazione nella geometria elementare. Il primo riguarda il fatto che il riconoscimento visuale di forme si fa in opposizione ad altre forme possibili che restano sullo sfondo, secondo le due modalità del riconoscimento per giustapposizione o per sovrapposizione. Il secondo afferma che qualsiasi contorno di una configurazione è scomponibile in diversi contorni chiusi e che questi possono essere ricombinati per ottenere una configurazione diversa da quella originaria. Nella geometria elementare questi «sono i due approcci euristici fondamentali per la risoluzione di problemi» (Duval, 2018, p. 219). C'è uno stretto rapporto cognitivo tra le immagini e il linguaggio, o per meglio dire dello sguardo, del dire e del dire a sé stessi. Continu-

iamo con le parole di Duval:

> «Qualsiasi riconoscimento iconico implica un riconoscimento discorsivo, che abbiamo chiamato verbalizzazione silenziosa. […] In questo senso, il linguaggio non segue l'azione, ma l'accompagna come suo controllo interno. […] Quasi sempre quando parliamo di verbalizzazione, ci riferiamo alla verbalizzazione orale, vale a dire esplicita. Questa verbalizzazione spontanea, che riprende la verbalizzazione silenziosa, come ha mostrato Vygotskij, è tanto per sé stessi quanto per chi ascolta, o per colui al quale sembra rivolgersi. È una verbalizzazione orale après coup, a posteriori, successiva, per nominare, o caratterizzare, nel contesto di uno scambio o di una comunicazione, l'attività che è stata appena compiuta».
>
> (Duval, 2018, p. 226)

Questa lunga citazione da Duval chiarisce bene la complessità dell'attività sul piano iconico e cognitivo contenuta nell'attività che è stata richiesta, ma nello stesso tempo sollecita l'insegnante a non perdere occasioni come quelle di mettere in gioco proprio questo rapporto ricco e fecondo tra l'immagine, il pensiero e la parola orientato ad uno scopo.

5 Prima consegna: l'area del parallelogramma

Ai bambini viene consegnato il disegno di un parallelogramma su un foglio bianco. In precedenza, le caratteristiche relative alla figura (parallelismo e uguaglianza delle misure dei lati opposti) erano state esplorate collettivamente.
La consegna è: «Come si può trovare l'area di questa figura?». L'accento è messo sul *come*, viene ricordato che non si devono eseguire calcoli e non si deve giungere a un risultato. Ai bambini viene chiesto di lavorare individualmente, scrivendo con molta cura tutti i loro pensieri: questa prassi è normale nella classe e in genere i bambini non hanno bisogno che l'insegnante lo ricordi. Negli anni, si è cercato di sviluppare nei bambini il gusto di spiegare, di argomentare il perché delle decisioni ed essi sanno, perché anche questa è abitudine consolidata, che poi verrà effettuato un momento di confronto dei ragionamenti prodotti e una discussione collettiva che permetta di giungere a delle conclusioni concordate e a una sintesi provvisoria.
Un necessario inciso nell'analisi a priori: la funzione della consegna è quella di attivare le conoscenze pregresse in vista di un loro riutilizzo per risolvere un nuovo compito. Le conoscenze pregresse riguardano la possibilità di utilizzare le figure base (triangolo e rettangolo) per scomporre le nuove figure. Tuttavia, la consegna ha un carattere di apertura che può permettere altre strategie non canoniche, a volte meno efficaci ed economiche, ma pur sempre accettabili e corrette. La relazione fra conoscenze pregresse, nuova figura e pensiero del bambino si inserisce in una cornice in cui agiscono il ruolo dell'insegnante (scelta consapevole della consegna), gli aspetti matematici (le conoscenze possedute) e le possibilità del bambino, sul piano cognitivo ed emotivo, di passare dal piano dell'osservare a quello del fare utilizzando consapevolmente il saper fare e, sullo sfondo, il poter fare.

5.1 Risultati della prima consegna

Alcuni allievi scelgono autonomamente di riprodurre la figura anche sul foglio quadrettato.
Tutti i 19 allievi presenti concludono il lavoro giungendo a una soluzione, quattro di essi con la mediazione dell'insegnante. Le soluzioni si possono raggruppare secondo tre diverse modalità, che vengono elencate di seguito:

Soluzione 1A. Tre bambini costruiscono un rettangolo mediante l'aggiunta di altri elementi che eliminino i "disturbi", cioè le parti sporgenti a destra e a sinistra (Figura 1). Uno di essi scrive: «lo trasformo il parallelogramma in un rettangolo aggiungendo due triangoli ai lati per rendere i lati perpendicolari».

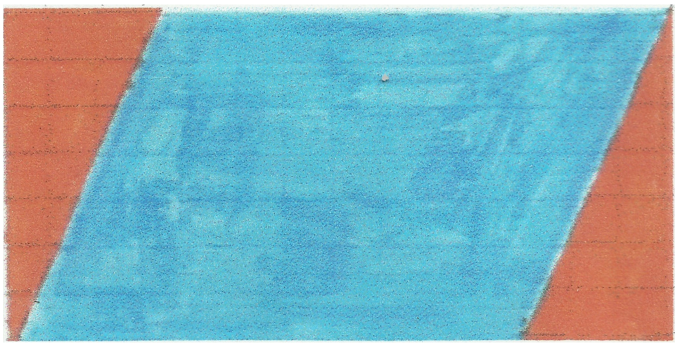


Figura 1. Riproduzione del disegno del parallelogramma realizzato dai bambini.

La figura viene così trasformata in un elemento conosciuto, il rettangolo, agendo dall'esterno forse per regolarizzare la figura presentata, con cui si fa fatica ad interagire così com'è. L'irregolarità sembra essere data dall'assenza di relazioni perpendicolari tra i lati che formano il contorno: da qui la necessità di racchiuderla in un rettangolo. Questi allievi procedono poi con sicurezza: dicono che si dovrà calcolare l'area del rettangolo ottenuto da cui si dovranno togliere le aree dei due triangoli aggiunti.

Soluzione 1B. Quattro allievi procedono per scomposizione interna della figura. Tre di essi tracciano una diagonale e dividono il parallelogramma in due triangoli (Figura 2).

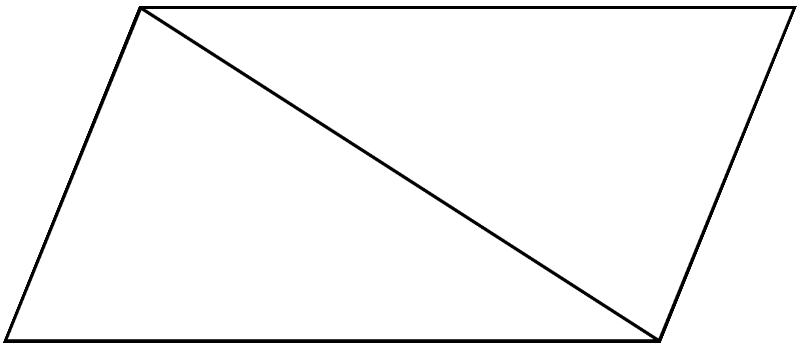


Figura 2. Riproduzione del disegno realizzato dai bambini.

Due di questi allievi ritagliano la figura lungo la diagonale per verificare se i due triangoli sono congruenti attraverso la sovrapposizione. Uno di essi scrive: «Mi sembravano uguali, ma non ero sicuro, perché nella mente li dovevo capovolgere, ma non era facile, mi confondevo. Allora ho tagliato e poi ho girato uno dei triangoli e sono riuscito a metterlo proprio sopra all'altro».[3] Un terzo allievo giunge alla conclusione che sono congruenti per via argomentativa. Il suo protocollo è interessante perché sembra inizialmente distaccarsi dall'aspetto figurale per costruire argomentazioni, su un piano linguistico-concettuale, ritornando poi al figurale come per un bisogno di coerenza tra i due aspetti:

3. Per tutti gli elaborati degli allievi è stato mantenuto il testo originale, errori ortografici e grammaticali compresi.

> «Ho disegnato la diagonale e ho diviso il parallelogramma in due triangoli. Mi sembrano uguali ma a vederli così non so, perché sono in due posizioni diverse. Però ho pensato: hanno un lato in comune, che è la diagonale, poi hanno anche gli altri due lati, sono lunghi uguale. Allora sono due triangoli con i lati uguali. Se immagino di far combaciare questi lati mi sembra di vederli uguali, devono essere uguali!».

La determinazione della congruenza dei triangoli non produce automaticamente delle conseguenze sul piano operativo: solo uno dei tre bambini afferma che si può calcolare l'area di uno dei triangoli e raddoppiarla per trovare l'area del parallelogramma. Nessuno dei tre ricava l'idea che, nel trovare l'area di un triangolo, il prodotto del lato per la relativa altezza possa poi non essere dimezzato, secondo il ragionamento che dividere per due e moltiplicare poi per due (dato che l'area del triangolo andrebbe poi raddoppiata per trovare quella del parallelogramma) sono due operazioni una inversa dell'altra. Sembrerebbe cioè che non necessariamente da intuizioni generate su un piano prevalentemente figurale possa originarsi un pensiero sul piano simbolico e concettuale. Tuttavia, si potrebbe ipotizzare che il piano dell'intuizione possa costituire il terreno fecondo su cui innestare un'elaborazione argomentata.
Una quarta allieva traccia le due diagonali formando quattro triangoli.

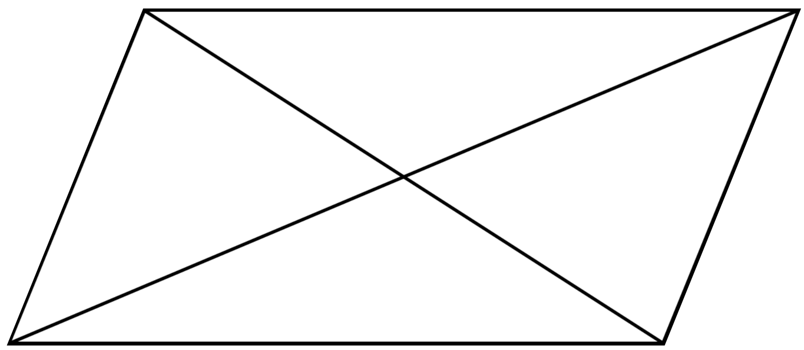


Figura 3. Disegno delle due diagonali con scomposizione del parallelogramma in quattro triangoli.

Non si pone il problema della congruenza a due a due dei triangoli e sostiene di dover calcolare le loro aree e poi sommarle.

Soluzione 1C. Dodici allievi trasformano il parallelogramma in un rettangolo senza modificarne la superficie. Tre di essi utilizzano il disegno mostrando come il triangolo rettangolo ottenuto tracciando l'altezza interna alla figura possa essere traslato e affiancato al lato opposto della figura generando così un rettangolo (Figura 4). Altri sei allievi eseguono lo stesso procedimento attraverso il ritaglio del triangolo e la ricomposizione del rettangolo. Due allievi seguono la stessa strategia di ragionamento esprimendola a parole, senza disegno o ritaglio. Anche in questi casi la soluzione praticata sembrerebbe rispondere al bisogno di eliminare il "disturbo" costituito dalla sporgenza a sinistra per ricreare una situazione di equilibrio.

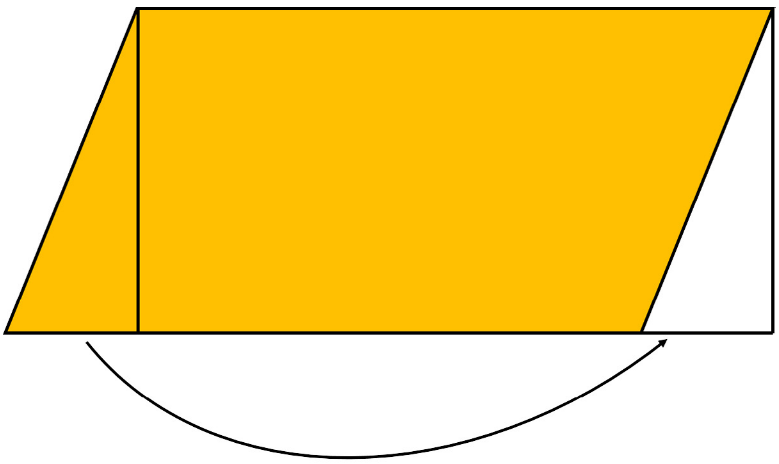


Figura 4. Trasformazione del parallelogramma in un rettangolo.

Un allievo, infine, taglia a metà il parallelogramma con una linea perpendicolare a una coppia di lati paralleli in modo da ottenere due trapezi rettangoli congruenti e ricompone la figura formando anch'egli un rettangolo.

In quest'ultimo gruppo di ragionamenti sembra prevalere uno sguardo che vede la possibilità di manipolare la figura ricorrendo alla somiglianza di caratteristiche con il rettangolo (una bambina, in modo espressivo scrive: «Il parallelogramma mi sembra un rettangolo dove uno si è appogiato e si è storto come è successo a un mobile nella mia cameretta»).

Si potrebbe dire che, in modo intuitivo, questi allievi percepiscono la proprietà di equiestensione tra parallelogramma e rettangolo. A questo proposito Fischbein osserva, facendo riferimento al già citato esempio di Wertheimer sul parallelogramma, che:

> «Un bambino che ha capito che il parallelogramma può essere trasformato in un rettangolo (per esempio, usando le forbici) sembra acquisire una comprensione genuina dell'equiestensione tra le due aree […]. Infatti, non c'è contraddizione tra il capire la soluzione significativa da un punto di vista del comportamento: "togliere a sinistra e aggiungere a destra" e seguire i passi della logica della dimostrazione analitica. Quando raggiunge o impara una dimostrazione formale, l'allievo non deve abbandonare la via strutturale della comprensione».
>
> (Fischbein, 1992, pp. 14-15)

5.2 Riflessioni sulle soluzioni emerse

Situazioni come queste scaturite dalla prima consegna sollecitano riflessioni circa il ruolo e l'importanza dell'intuizione nella costruzione della conoscenza. Ancora Fischbein (1992, p. 7) nota come «l'intuizione è simultaneamente una forma derivata di cognizione – come lo è il pensiero – ed un programma per l'azione – come una percezione». L'intuizione si distingue dalla percezione perché è «soprattutto una forma di "interpretazione", una "soluzione ad un problema"» e nello stesso tempo si distingue dal pensiero perché «non è analitica, non è discorsiva, ma piuttosto una forma compatta di conoscenza» che non richiede una giustificazione estrinseca. Così, «nella sua forma anticipatoria, l'intuizione offre una prospettiva globale di una possibile soluzione del problema e, così, ispira e dirige i passi della ricerca e della costruzione della soluzione» (Fischbein, 1992, p. 7).

L'intuizione non richiede di per sé un linguaggio articolato e argomentato. I bambini che hanno scelto di scomporre il parallelogramma in due triangoli e i bambini che hanno scelto di formare il rettangolo (soluzioni 1B e 1C) hanno imboccato una strada che potrebbe condurre ad un pensiero formale. Ma è necessario dar parola al pensiero, che potrebbe legittimamente restare implicito, per far maturare la zona di sviluppo prossimale degli allievi (nel senso di Vygotskij, 1934/1990) rispetto alla capacità di esprimersi. Questo richiede una mediazione attenta da parte dell'insegnante nel proporre alla classe i passi successivi di meta-riflessione. A titolo di esempio si riporta un breve stralcio della discussione orchestrata dall'insegnante (indicato con I.) sul confronto tra le strategie di tipo 1A e 1C. La discussione collettiva, come altre, è stata registrata perché potesse essere riascoltata successivamente, in un'ottica di analisi a posteriori.

1. M1.: «Sì, tutti fanno un rettangolo, è uguale».
2. F.: «No! Perché… perché i rettangoli non sono uguali».
(…)
5. A.: «Uno è uguale al parallelogramma».
6. M2.: «Ha la stessa area, non è uguale».
7. M1.: «Però i triangoli sono uguali».
8. M2.: «Ma vedi che il rettangolo di S. è più grande di quello di R. perché R. è come se togliesse un pezzo dal rettangolo e poi lo mette dall'altra parte… Non cambia la figura è sempre un rettangolo, ma cambia la sua area…».
(…)
16. I.: «Poco fa M2. diceva che il rettangolo ottenuto da S. ha una superficie maggiore del rettangolo ottenuto da R.…».
17. V.: «Tu vedi che la base del rettangolo di R. è come la base del parallelogramma, solo che un pezzo l'abbiamo spostato…».
18. M2.: «Sì e la base dell'altro rettangolo [quello di S.] è più lunga perché c'è quella del parallelogrammo e poi quelle dei triangoli».
19. M1.: «Ah, mi è venuta un'idea, *ma allora un parallelogramma è uguale a un rettangolo*».
(…)
25. S.: «Sì sì, è un rettangolo e si calcola l'area nello stesso modo… perché… perché anche qui facciamo la base per l'altezza».
26. C.: «Questa volta sì, ho capito… Allora, la base del rettangolo è come la base del parallelogramma, è proprio uguale e anche l'altezza è sempre quella… è la stessa».
27. V.: «Allora non è che tutte le volte facciamo il disegno di R.… questa cosa che anche se disegni un altro parallelogramma diverso, più allungato è la stessa cosa…».
28. G.: «Succede così tutte le volte… cioè quella cosa che ha fatto R. *si può fare sempre, in tutti i parallelogrammi*».
(…)
39. M3.: «Ma allora si vede che abbiamo trovato una specie di regola… l'area del parallelogramma si fa moltiplicando la base per l'altezza…».
40. V.: «Sì. *Il parallelogramma è come un rettangolo, puoi spostare sempre un triangolo per farlo diventare un rettangolo*».

Le parti in *corsivo* indicano come nella discussione i bambini pervengano a livelli di generalità, attraverso un distanziamento dall'esperienza svolta, ma mantenendola come riferimento.
I bambini discutono poi a lungo il ragionamento di tipo 1B (purtroppo, per un disguido tecnico manca la registrazione di questa parte) finché un allievo conclude che anche questo ragionamento permette di trovare la stessa regola per stabilire l'area di un parallelogramma.

6 Seconda consegna: l'area del rombo

Tre settimane dopo viene proposta alla classe la consegna di trovare un modo per determinare l'area del rombo. Viene consegnata ai bambini una scheda su cui è riportata la figura. Anche in questo caso l'attività viene svolta individualmente.

6.1 Risultati della seconda consegna

Anche in questa occasione i bambini ragionano secondo strategie diverse.

Soluzione 2A. G., un bambino che nel caso del parallelogramma aveva risolto il problema con la soluzione 1A, continua a pensare l'area come una cornice che contiene la figura (**Figura 5**). Il riempimento, dall'esterno, mediante il disegno del rettangolo che tocca tutti i vertici del rombo gli offre evidentemente una sicurezza.

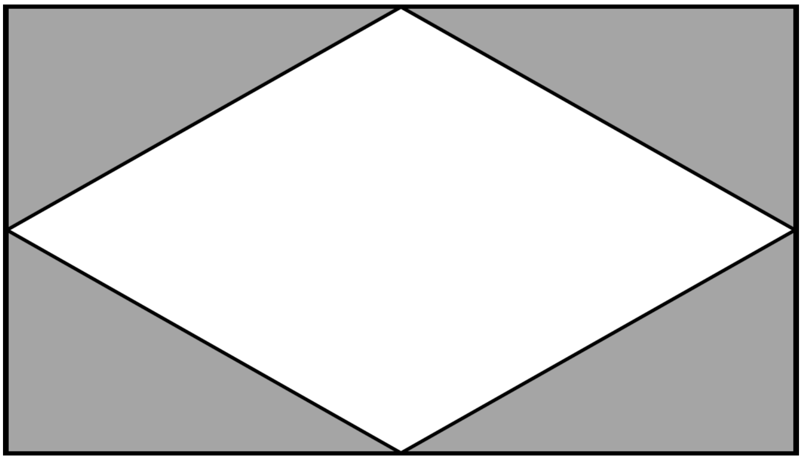


Figura 5. Il rettangolo che "contiene" il rombo.

Nella verbalizzazione di G., si può intravedere la traccia di questo bisogno: «Nel rettangolo così il rombo ci sta tutto, poi posso togliere quello che è fuori del rombo». Sarebbe interessante indagare su un possibile bisogno di contenimento sottostante all'utilizzo ripetuto di strategie come queste, dove l'aspetto chiave, oltre al contenimento, sembra essere la difficoltà a "ritoccare" la figura. La metafora che accompagna questo tipo di atteggiamento, che compare se gli allievi sono legittimati a produrre un pensiero senza il condizionamento del giudizio, è quella dello scultore che dal blocco di materiale grezzo scava e toglie fino a raggiungere la forma progettata. A differenza dello scultore questo allievo progetta la "materia grezza" da togliere, anziché la forma.
Altri due bambini eseguono una strategia simile.

Soluzione 2B. Dodici bambini utilizzano le diagonali per ragionare all'interno del rombo. I loro sguardi, tuttavia, vedono aspetti diversi. A titolo di esempio, analizziamo le due soluzioni proposte da P. e da M2.

> P.: «Divido il rombo in due triangoli con una diagonale e traccio le altezze, posso moltiplicare base per altezza poi dividere il risultato per due. Così trovo l'area di un triangolo, poi l'altro è uguale e unisco le misure» (**Figura 6**).

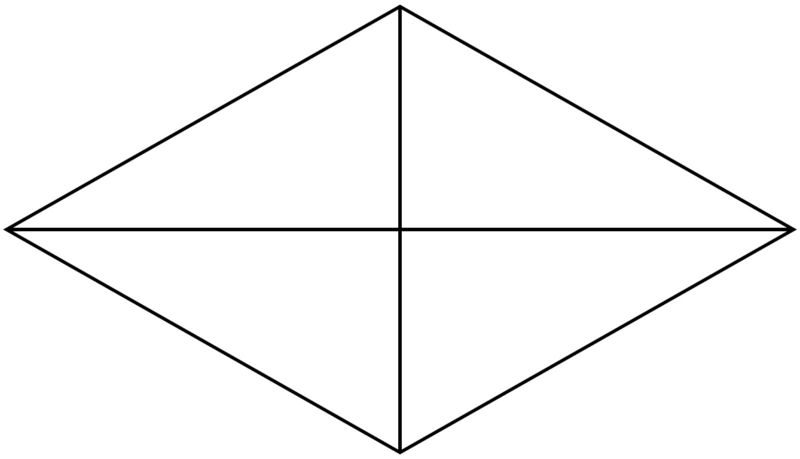


Figura 6. La strategia di P.: dividere il rombo in due triangoli congruenti.

Nella situazione precedente, P. era l'allieva che aveva suddiviso il parallelogramma in quattro triangoli, con l'idea di sommare poi le loro aree (soluzione 1B, Figura 3). Questa volta, tuttavia, percepisce la congruenza dei due triangoli. In entrambe le situazioni utilizza una strategia procedurale, anche questa rassicurante, lavorando *all'interno* della figura, secondo le modalità del piastrellista che "copre" tutta la superficie. Dal punto di vista dell'analisi a posteriori, ci si deve interrogare circa i possibili ostacoli che possono frapporsi all'accesso ad un pensiero analitico, dati dalla staticità (e dall'idea della replicabilità) di procedimenti come questi, in cui gli elementi disciplinari si intrecciano con modalità convergenti e chiuse relative alla risoluzione di problemi.
P., come pure G., la cui soluzione è stata considerata al punto precedente, hanno in comune una storia di acquisizione di consapevolezza a piccoli passi della possibilità di pensarsi capaci di affrontare situazioni problematiche, accettando il rischio di sbagliare. L'approccio attivo costruito trasversalmente in classe rispetto all'esperienza di apprendimento, attraverso una mediazione continua degli insegnanti, li ha aiutati a gestire il tempo interiore, condizione che ha permesso loro di poter recuperare conoscenze e abilità possedute. Il terreno (scolastico) della geometria è un terreno di sfida, perché, a differenza di altri ambiti, come ad esempio la comprensione della lettura, può consentire atteggiamenti riproduttivi se una strategia viene individuata come accettabile in più situazioni.
M2. lavora sulla figura, parlando tra sé. Poi scrive:

> «Devo disegnare la diagonale più corta, poi disegno l'altezza di uno dei due triangoli che vengono fuori. Ho visto che l'altezza è la metà della diagonale più lunga. Poi dovrei calcolare l'area del triangolo, ma non la divido per due perché è come se la metà inutilizzata [del rombo] andasse a formare un rettangolo se la mettiamo insieme al triangolo un po' da una parte e un po' dall'altra. Potrei dire che l'area del rombo si trova moltiplicando la diagonale per la metà dell'altra diagonale» (Figura 7).

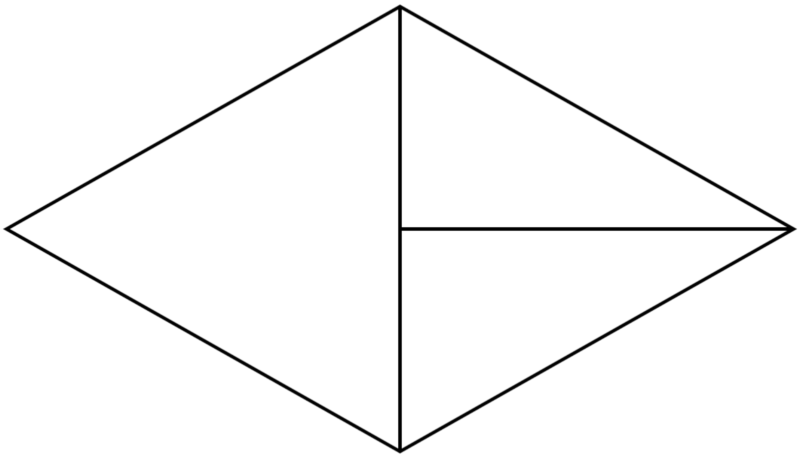


Figura 7. Rappresentazione del ragionamento di M2.

Questo protocollo mostra il passaggio dall'aspetto figurale a quello analitico-concettuale, con il trasferimento del lessico specifico dal rombo al triangolo costruito per poi reinterpretare dal punto di vista del rombo la situazione disegnata.

M3. offre altri due esempi interessanti di riflessioni che intrecciano in modo molto stretto il figurale e il concettuale, giustificando in modo molto convincente, l'idea di concetto figurale.

> «Per trovare l'area del rombo provo a moltiplicare la base per l'altezza, cioè l'altezza sarà la diagonale minore e la base la diagonale maggiore. Sul disegno le traccio, ma la base attraverserà l'altezza, ma è giusto così. Io penso che sia giusto perché è come trovare l'area dei due triangoli e poi sommarle» (**Figura 8**).

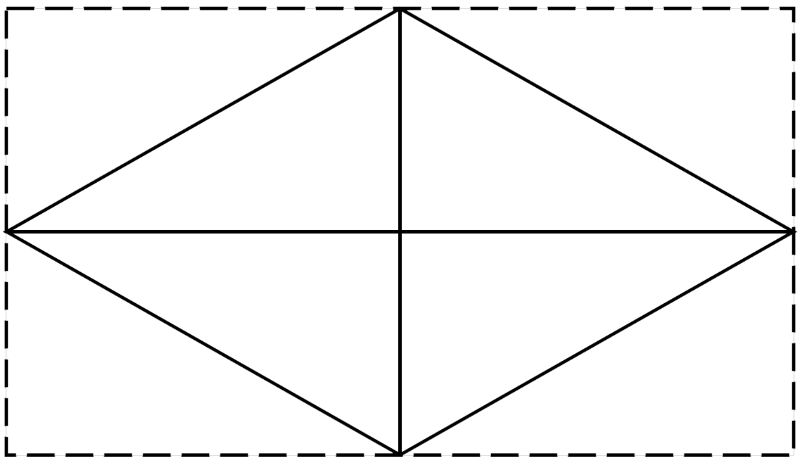


Figura 8. Prima rappresentazione di M3.

M3. sembra aver concluso il suo lavoro, ma non stacca gli occhi dal disegno. Sembra indecisa, prende un foglio e disegna il rombo con le diagonali, lo ritaglia e poi taglia lungo la diagonale minore:

> «Ho provato a trasformare il rombo in un rettangolo, ho diviso a metà un triangolo e capovolgendo i due pezzi dall'altra parte in modo da fare un rettangolo mi sono accorta che il rettangolo che

> viene fuori deve essere la metà di quello che dicevo prima. Se moltiplico diagonale per diagonale formo un rettangolo che a il doppio dell'area del rombo. Allora quell'area la devo dividere a metà. La vera regola è diagonale per diagonale diviso 2» (Figura 9).

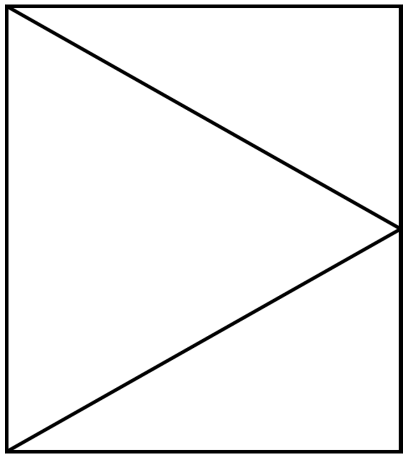


Figura 9. Seconda rappresentazione di M3.

Soluzione 2C. Come M3., anche C. inizia con la rappresentazione in Figura 8. Prende in mano la scheda dove ha eseguito la rappresentazione e la guarda a lungo, la rigira più volte. È molto concentrata, cancella le linee disegnate, prende il righello e la squadretta e traccia una linea.

> «Un'idea che mi è venuta e di prendere questo rombo come se fosse un parallelogramma, tracciandone l'altezza e facendo base per altezza. Però stavo pensando che se semplicemente faccio un'altezza collegando l'angolo ottuso con l'altro angolo ottuso è più semplice».

C. traccia la diagonale seguendo la sua idea (la linea tratteggiata di Figura 10), osserva il disegno, poi riprende la matita e aggiunge: «No seguo l'idea di prima perché questa che stavo facendo non può essere un'altezza non è perpendicolare al lato».
C., come altri quattro compagni, pensa al rombo come un parallelogramma (traccia un'altezza del parallelogramma in Figura 10). La possibilità di orientarne la posizione (data dal foglio non incollato) e, soprattutto, la legittimità (costruita su un piano più generale di quello strettamente geometrico) di poter guardare la figura da più punti di vista agevola l'attivazione di un *vedere* che consente una nuova interpretazione.

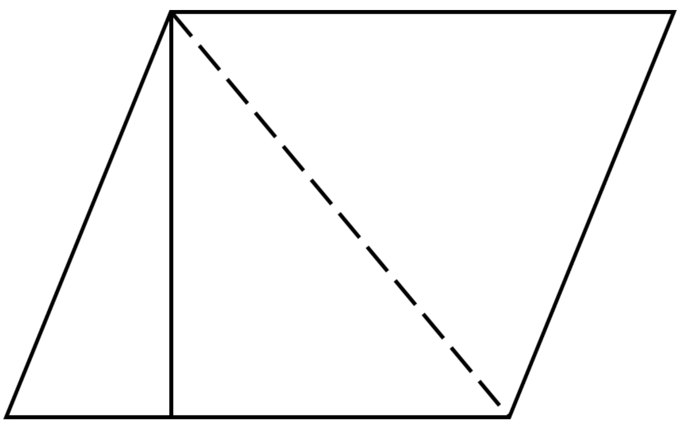


Figura 10. Seconda rappresentazione di C.

6.2 Riflessioni sulle soluzioni emerse

Entrambe le allieve M3. e C. (soluzioni 2B e 2C) compiono almeno due operazioni interessanti rispetto al *gioco delle ipotesi* che esse producono.
La prima è l'andirivieni dal piano figurale a quello riflessivo concettuale: l'ipotesi formulata su un piano principalmente figurale (C. che interpreta il rombo come parallelogramma, recuperandone evidentemente le caratteristiche peculiari di lati opposti paralleli) o concettuale (M3. che interpreta la figura come formata da due triangoli scivolando subito sul piano procedurale del "cosa fare") viene verificata utilizzando l'altro piano (rispettivamente concettuale per C. e figurale per M3.), come per un'esigenza di coerenza tra i due aspetti. Così C. si pone il problema dell'altezza, giustificando attraverso il recupero di ciò che sa – l'altezza deve essere perpendicolare alla base – l'inesattezza del nuovo tentativo e M3. ricostruisce il vero rettangolo formato dal rombo sospendendo il pensiero analitico e operando sul piano figurale attraverso il ritaglio e la ricomposizione della figura.
La seconda operazione è la possibilità di ritornare indietro da una congettura formulata. Questa possibilità non avviene solo sul piano del lavoro geometrico perché si scopre l'inadeguatezza dell'ipotesi, ma prima ancora risiede nella possibilità interiore di vivere l'errore come un elemento naturale mentre si risolve un problema: colpisce il fatto che le due allieve non cancellino con tratti di penna la parte di testo errata, ma usino le parole (ad esempio, C. scrive: «No seguo l'idea di prima…») per completare il pensiero che comprende anche la parte da rigettare. Risulta importante che in situazioni come queste il piano della misura e del calcolo venga separato dalla risoluzione del problema, affinché il piano del ragionamento possa muoversi senza essere ostacolato dalla ricerca del risultato. Questo favorisce la possibilità di intrecciare il vedere la figura con il pensiero sulla figura o il pensiero mentre si opera sulla figura.
Anche questa fase si conclude con la progettazione da parte dell'insegnante di una discussione sul confronto tra le scelte risolutive che erano state riportate su una scheda. La riflessione giunge ad ammettere l'esistenza di due regole per calcolare l'area del rombo, a seconda che lo si trasformi in un rettangolo o che lo si pensi come un parallelogramma.

7 Terza consegna: l'area del trapezio

Qualche settimana dopo viene proposto alla classe il problema di trovare un modo per calcolare l'area del trapezio. La figura era stata oggetto di esplorazione nei giorni precedenti e, come nelle precedenti consegne, viene data agli allievi una scheda su cui è riportato il disegno di un trapezio scaleno.
In termini di analisi a priori ci si potrebbe attendere che il ragionamento di scomposizione interna della figura prevalga in accordo con la possibilità di vedere la forma come la giustapposizione di rettangoli e triangoli in conseguenza delle conclusioni emerse dalle attività precedenti.

7.1 Risultati della terza consegna

In effetti, tutti gli allievi, tranne uno (due allievi sono assenti), procedono per scomposizione.

Soluzione 3A. Dodici allievi individuano un rettangolo e due triangoli, con due soluzioni differenti riguardo a questi ultimi: alcuni uniscono i due triangoli laterali formando un unico triangolo, sulla base dell'identità della loro altezza (Figura 11a), altri mantengono i due triangoli rettangoli separati (Figura 11b). In entrambe le soluzioni si tratta di sommare le aree delle figure individuate.

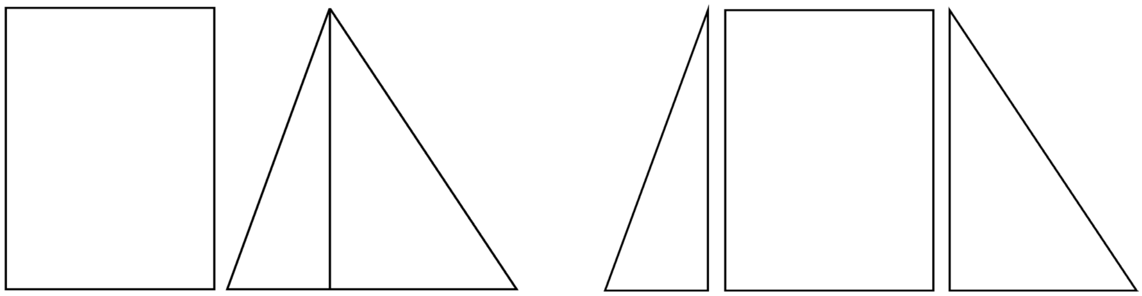


Figura 11a, b. Rappresentazione della scomposizione del trapezio in un rettangolo e in triangoli.

Soluzione 3B. Altri cinque bambini suddividono il trapezio in triangoli, anche in questo caso con due soluzioni diverse (Figure 12a e 12b).

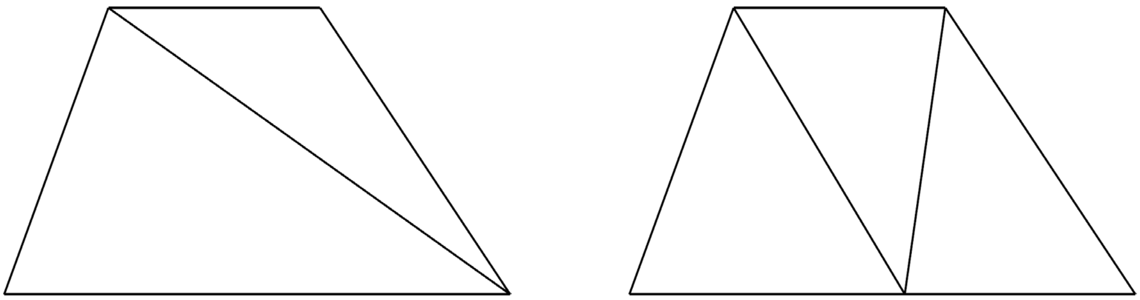


Figura 12a, b. Rappresentazione della scomposizione del trapezio in triangoli.

M2. argomenta così la sua scomposizione (Figura 12a):

> «Io ho pensato di dividere il trapezio con la diagonale così formo due triangoli, uno è appogiato sulla base del trapezio, l'altro è capovolto. Se giro il trapezio lo vedo normale, ma non vedo bene l'altezza abbiamo imparato che non va a finire sulla base perché è troppo corta allora devo allungarla oppure la base è la diagonale».

M2. manifesta un disagio che non è relativo al riconoscimento della forma triangolare in una posizione non standard, ma riguarda il punto di vista con cui vedere il triangolo relativamente alla base da prendere in considerazione per tracciare l'altezza.
C. invece pensa a una scomposizione in tre triangoli tipica di una tassellazione (Figura 12b).

Soluzione 3C. Un altro allievo, B., scrive: «Traccio le due diagonali, mi sembrano perpendicolari, assomiglia a un rombo allora posso fare come abbiamo imparato a fare per il rombo, le moltiplico e poi divido per due». L'insegnante gli propone di verificare l'impressione di somiglianza tra il trapezio e il rombo utilizzando le conoscenze relative alle due figure. A questo punto B. riconsidera ciò che aveva pensato. Anche lui divide il trapezio in due triangoli (Figura 12a). Questo protocollo richiama l'attenzione su quanto il vedere, separato dal pensiero, possa condurre a fenomeni di cortocircuito: il bambino autore del testo è un allievo generalmente molto acuto, ma che spesso fa troppo affidamento ad argomentazioni di tipo numerico.

7.2 Riflessioni sulle soluzioni emerse

Tutti i bambini sembrano essere giunti a una soluzione del problema. La quasi totalità degli allievi perviene ad un lavoro interno alla figura, quello che Duval chiama la *decostruzione dimensionale* delle figure, che è un modo di vedere le figure che si possono costruire su carta che è specifico della geometria.
Duval osserva che:

> «la decostruzione dimensionale ignora totalmente le dimensioni delle unità figurali. Nel modo matematico di vedere le figure, le misure di grandezza non contano. Detto in altro modo, la visualizzazione geometrica non ha alcun legame con la geometria empirica nella quale il primo gesto è il gesto concreto di misurare lunghezze per fare calcoli utilizzando le formule […] la vera domanda per un'introduzione della geometria alla primaria non è sapere quali oggetti geometrici scegliere o quali attività di costruzione di figure far fare, ma *come prendere coscienza del modo matematico di vedere le figure* [...] fin dall'inizio gli studenti devono acquisire la capacità di "uscire dalla figura data" estendendo i lati disegnati e la capacità di aggiungere linee tracciate all'interno della figura per dividerla. […] Queste attività di ricostruzione sono dei veri problemi da risolvere con strumenti non graduati».
>
> (Duval, 2018, pp. 230-231, corsivo aggiunto dall'autore)

L'attività sul trapezio si è conclusa con un lavoro a gruppi e una discussione. Nel lavoro a gruppi i bambini erano stati divisi per affinità di soluzione e il compito assegnato era di pervenire ad una regola per calcolare l'area del trapezio a partire dalla configurazione realizzata. Questo momento di discussione tra pari in alcuni gruppi è stato molto vivace, soprattutto per la difficoltà di passare dal piano operativo a un piano linguistico geometrico efficace per comunicare una regola. Dal punto di vista del senso del lavoro geometrico, ha dato modo agli allievi di comprendere la genesi di una formula e il suo collegamento con una modalità di vedere la situazione. Anche nel caso del trapezio sono state costruite due formule, dando luogo all'idea che la formula utilizzata (quella che essi trovano sui libri) è una delle possibili, come ha affermato un'allieva probabilmente «quella che è stata giudicata dai matematici più breve, più economica».
Ecco due esempi di conclusioni del lavoro dei gruppi.
Uno dei gruppi che ha lavorato sulle soluzioni 3A (**Figura 11a**) scrive:

> «La regola potrebbe essere base minore del trapezio x altezza + base maggiore – base minore x altezza : 2. Abbiamo ipotizzato che la regola possa essere base minore per altezza, perché la base del rettangolo corrisponde sempre alla base minore del trapezio, x altezza perché l'altezza del rettangolo corrisponde all'altezza del trapezio, poi base maggiore – base minore perché in tutti i casi quando sottrai la base minore dalla base maggiore ti viene la base del triangolo che otteniamo, x altezza perché l'altezza del triangolo corrisponde all'altezza del trapezio, : 2 perché dato che stiamo calcolando l'area del triangolo bisogna sempre dividere per 2».

Il lavoro di questo gruppo riformula con un linguaggio aderente agli elementi del trapezio la strategia che era stata seguita da quegli alunni. Più complessa è la conclusione di uno dei gruppi che ha lavorato sulle soluzioni 3B (**Figura 12a**):

> «La regola che abbiamo trovato e quella di sommare la base maggiore alla base minore, poi moltiplicare il risultato per l'altezza del trapezio. La base maggiore e minore del trapezio sono le basi dei triangoli e l'altezza del trapezio è uguale all'altezza dei triangoli. È come se facessimo un triangolo solo. Poi però visto che otteniamo un rettangolo che è il doppio del trapezio dobbiamo dividere il risultato in due».

Questo gruppo costruisce la rappresentazione tagliando il trapezio lungo la diagonale e ribaltando un triangolo (Figura 13, disegno originale), col principale scopo di capire il proprio ragionamento, che era partito dal pensare l'area del trapezio come la somma delle aree dei triangoli. Questa volta l'idea di allineare i triangoli dopo il ritaglio provoca la sofferta difficoltà di far coincidere la nuova configurazione con la congettura formulata a causa dell'altezza del triangolo ottusangolo. Nasce una proficua discussione nel gruppo che intreccia l'idea di formulare una regola unica (cioè non la somma di due regole, come la conclusione a cui è giunto il gruppo precedente) e il dover "parlare con le parole del trapezio" pur guardando due triangoli. Questo andare e venire dall'aspetto iconico alla verbalizzazione che seleziona e chiarisce permette loro di giungere alla definizione di un pensiero che vede nella configurazione ottenuta il trapezio originale e il proprio doppio.

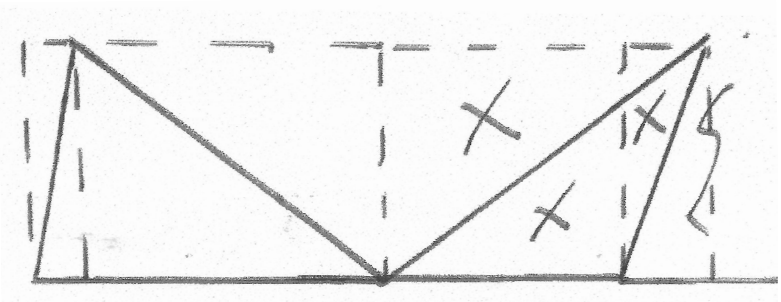


Figura 13. Rappresentazione originale prodotta dal gruppo: è evidente lo sforzo di giungere a capire che l'area del rettangolo avente come base la somma delle basi del trapezio è il doppio di quella del trapezio.

Per un altro gruppo di allievi, che ha lavorato sulle strategie di tipo 3B, partendo dalle soluzioni evidenziate nella Figura 12b, la possibilità di allineare i tre triangoli (Figura 14) ha reso più agevole la comprensione della regola, come riportato dal loro scritto:

> «Se mettiamo i tre triangoli uno accanto all'altro e immaginiamo di trovare l'area del trapezio, è come se ogni triangolo fosse la metà di un rettangolo. Tutti e tre insieme sono la metà di un rettangolo che li tiene tutti dentro, Quel rettangolo ha la base che è la somma delle due basi del trapezio e l'altezza uguale a quella del trapezio, solo che il trapezio è rappresentato dai tre triangoli, quindi la sua area sarà la metà di quella del rettangolo e l'altezza del trapezio è uguale all'altezza dei triangoli».

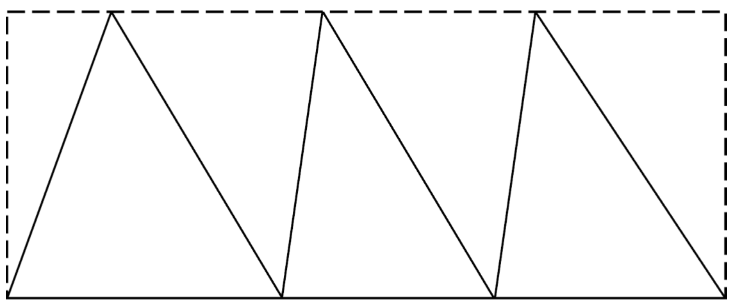


Figura 14. L'area del trapezio è metà dell'area del rettangolo che lo contiene.

8 Le prove INVALSI

Nel secondo quadrimestre della classe quinta sono stati proposti agli allievi alcuni item delle prove INVALSI somministrate negli anni precedenti riguardanti aspetti geometrici, per avere degli elementi di valutazione su base più ampia. I risultati ottenuti nella classe, confrontati con quelli su scala nazionale, sono risultati sempre più alti.
Riportiamo qui alcuni esempi.
Nella prova di grado 5 del 2016 l'item D19 chiedeva di confrontare due configurazioni indicando se avessero la medesima area (Figura 15). La domanda, a risposta chiusa, prevedeva due opzioni per ciascuna risposta, da scegliere in base alla motivazione dichiarata. L'item era di una certa difficoltà, a causa della funzione dei distrattori: l'opzione A coglie un livello di accostamento unicamente basato sulla percezione; l'opzione C individua chi mette in relazione la lunghezza del perimetro con la dimensione dell'area; l'opzione D, che afferma che le due aree sono uguali, porta una motivazione in sé corretta, ma non pertinente alla domanda. Per scegliere la risposta corretta (B) occorre riconoscere le figure interne disegnate anche in posizioni non standard.
Dai dati INVALSI risulta che su scala nazionale solo il 41,4% degli allievi ha scelto la risposta corretta e che circa il 50% degli alunni ha detto che le due configurazioni non avevano la stessa area, scegliendo le risposte A e C.
La percentuale di risposte corrette nella classe oggetto di questa sperimentazione è stata del 77,2%, tenendo conto di tutti gli alunni, compresi i tre allievi con certificazione di disabilità e i due bambini con DSA che l'INVALSI non include nelle percentuali presentate. Nonostante il risultato possa essere interpretato come globalmente positivo, è da rilevare che 3 allievi hanno scelto l'opzione A e 1 allievo l'opzione C.

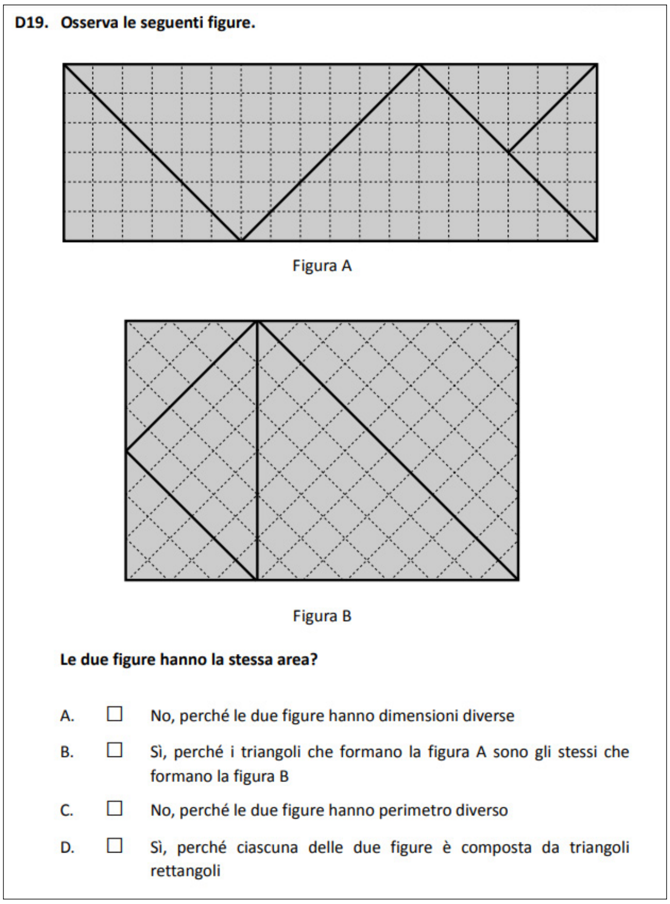

D19. Osserva le seguenti figure.

Figura A

Figura B

Le due figure hanno la stessa area?

A. ☐ No, perché le due figure hanno dimensioni diverse

B. ☐ Sì, perché i triangoli che formano la figura A sono gli stessi che formano la figura B

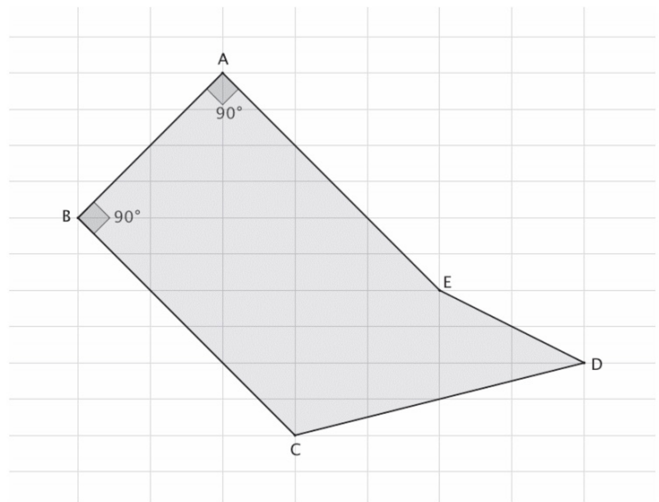
C. ☐ No, perché le due figure hanno perimetro diverso

D. ☐ Sì, perché ciascuna delle due figure è composta da triangoli rettangoli

Figura 15. Domanda D19 della prova INVALSI di matematica di grado 5 del 2016.

L'item seguente (Figura 16), invece, è tratto dalla prova svolta dalla classe stessa a maggio, prova svolta in modo rigoroso con un insegnante esterno al team e all'ambito matematico. L'item entra nel merito delle problematiche della visualizzazione, anche se si presenta come una situazione abbastanza semplice. Il dato nazionale è particolarmente alto: 81,2% di risposte corrette. La classe ha risposto positivamente al 100%: sul piano della relazione con la visione anticipativa il lavoro svolto durante l'anno sembra aver costruito le abilità di base in tutti i bambini (anche in questo dato sono compresi i bambini con difficoltà di apprendimento).

D15. Osserva la figura ABCDE.



Traccia un segmento sulla figura per scomporla in modo da ottenere un rettangolo e un triangolo.

Figura 16. Domanda D15 della prova INVALSI di matematica di grado 5 del 2018.

Nella seconda metà dell'anno, inoltre, la classe ha effettuato, all'interno del progetto di tesi di una studentessa di Scienze della Formazione Primaria, un'esperienza di geometria dinamica su GeoGebra, in cui è stato richiesta, in un ambiente diverso, la messa in gioco di atteggiamenti esplorativi non lontani da quelli descritti in questo articolo (si veda Soldano, Sabena & Scali, 2018).

9 Conclusioni

Nell'esperienza condotta si è cercato di progettare delle occasioni di lavoro geometrico nel senso indicato da Duval (2018).
I risultati non sono stati raccolti da un punto di vista quantitativo, ma nel corso dell'articolo sono stati indicati diversi aspetti qualitativi utili all'insegnante per monitorare in itinere il lavoro svolto. Il momento della discussione, inteso come discussione su un oggetto matematico orchestrata dall'insegnante ha costituito la possibilità per molti bambini da un lato, di prendere coscienza di aspetti di cui erano inconsapevoli riguardanti la propria soluzione, dall'altro di poter fare esperienza di modi diversi di visualizzare le configurazioni, dall'altro ancora di poter essere esposti a processi di andata-ritorno

tra le figure e gli aspetti analitico-concettuali.
Molti allievi hanno mostrato un significativo cambiamento nelle proprie strategie, in una direzione di maggior maturità nell'accostamento ad un *modo geometrico* di pensare alle figure. Tutti hanno partecipato in modo attivo ai momenti di lavoro collettivo, che si sono prolungati spesso oltre i tempi prefissati. Come inciso, va detto che alcuni dei testi e degli interventi riportati nel corso dell'articolo sono stati prodotti da allievi con bisogni educativi speciali:[4] il fatto che sia difficile distinguere le loro produzioni tra tutte quelle proposte mostra come il lavoro svolto con attenzione allo sviluppo delle capacità di verbalizzazione degli allievi sia stato efficace negli anni e abbia supportato adeguatamente anche questa esperienza didattica.
È parsa significativa, in particolare, la possibilità di verbalizzare ciò che la visualizzazione suggeriva: in questo senso ogni figura parla e la verbalizzazione chiarisce e dà voce al pensiero generato dal vedere la figura. Questo ha comportato, ad esempio, la necessità di adattare il vocabolario geometrico alle diverse configurazioni realizzate, accostando di volta in volta il termine che designava ciò che si stava vedendo: nel caso del rombo, ad esempio, la base di uno dei triangoli in cui era stato scomposto corrispondeva alla *diagonale* del rombo.
Talvolta, tuttavia, la figura, per qualche allievo, rimane silenziosa e sembra che nella mente si sovrappongano altri pensieri, da cui hanno origine dei cortocircuiti. Succede anche in presenza di una didattica attenta a non valorizzare i risultati a scapito dei processi.
Questo, tuttavia, anziché demotivare, incentiva il docente a proseguire nella ricerca di modalità sempre più efficaci di costruzione di abilità e competenze geometriche.

Bibliografia

Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica*, Mondadori.

Bussi, M. B., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, rapporto tecnico N 21–Nucleo di ricerca in Storia e Didattica della Matematica Pura ed Applicata*. Università degli Studi di Modena, Centro Documentazione Educativa Comune di Modena–Settore Istruzione, 11-13.

Boero, P. (1990). L'insegnamento della matematica nel progetto "Bambini, Maestri, Realtà". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 13*, 7-43.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., & Scali, E. (1995). Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. *PME conference proceedings Recife*, Brasil, 151-166.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

Duval, R. (2018). Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica, 26*(2), 211-245.

Fischbein, E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In B. D'Amore (A cura di), *Matematica a scuola* (pp. 1-24). Bologna: Pitagora.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

4. Hanno lavorato su questa esperienza due allievi con una certificazione di un lieve ritardo mentale e un terzo con serie problematiche nella sfera emotiva, e un allievo con la diagnosi di funzionamento cognitivo al limite.

Laborde, C. (1988). *L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 337-364.

Mariotti, A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e l'apprendimento della geometria.* Bologna: Pitagora.

MIUR (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero speciale*. Firenze: Le Monnier.

Parzysz, B. (1988) *Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79-92.

Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. Milano: La Nuova Italia.

Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). I*nsegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Mondadori Università.

Soldano, C., Sabena, C., & Scali, E. (2018). L'area dei quadrilateri: attività di gioco e indagine geometrica con GeoGebra, *XXXV Convegno UMI-CIIM*, Cagliari, 4-6 ottobre 2018.

Vygotskij, L. S. (1990). Pensiero e linguaggio, a cura di L. Mecacci, Bari: Laterza (Titolo originale *Myšlenie i reč: Psicholodičeskie issledovanija* pubblicato nel 1934).

Wertheimer, M. (1997). *Il pensiero produttivo*. Milano: Giunti.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan, R, (2016). *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci Faber.

Recensioni[1]

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia. Dal XVIII al XXI secolo*. Bari: Edizioni Dedalo.

Fate caso al titolo: non è "Storia della matematica"; la protagonista è la matematica, e la storia è intesa come un aiuto a comprenderla meglio e soprattutto a insegnarla. Gli autori dichiarano fin dalle prime righe di essere interessati alla didattica (il loro campo di ricerca scientifica) e alla divulgazione e di non essere storici di professione. Il loro obiettivo è ben compreso e apprezzato nelle prefazioni di quattro esperti di lusso: Umberto Bottazzini, Paolo Freguglia, Luigi Pepe e Gabriele Lolli. Ma si può comunque perseguire questo scopo in quasi 1600 pagine con la pretesa di coprire le origini, il "miracolo" greco e il suo tramonto, il medioevo, il rinascimento, l'illuminismo, fino agli ultimi due secoli, che da soli starebbero stretti in quattro volumi? No, e questo è chiaro ai due autori; perciò impostano in modo più o meno esplicito dei fili conduttori: l'interazione con l'arte, l'influsso degli eventi storici, le storie personali (ma senza cadere nell'aneddotica) e uno, secondo me quello principale, che per il momento non svelo.
Segnalo i continui riferimenti al lavoro di storici professionisti, la ricchissima bibliografia e le utili liste di nomi con date di nascita e morte. Trovo azzeccate le digressioni piazzate in paragrafi, appendici o interi capitoli; le mie preferite sono: curve non costruibili con riga e compasso, la storia dello zero, le macchine da calcolo.
Del primo volume apprezzo molto il rispetto manifestato per le origini: il pensiero greco, "uno dei misteri più inspiegabili e grandiosi della storia dell'umanità", compare solo a pag. 121. Il libro mette in luce il legame strettissimo della comprensione della natura con lo studio autoreferenziale del pensiero, con i misteri dell'infinito e infine con il metodo ipotetico-deduttivo. Si passa da Talete alla scuola pitagorica e alla scuola eleatica intercalando punti prettamente matematici con aspetti filosoficamente sconvolgenti come l'incommensurabilità e i paradossi. Numerose e ben commentate sono

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

le citazioni di Platone e Aristotele. Con quest'ultimo naturalmente fa la sua comparsa la logica, che giocherà un ruolo rilevante nei volumi seguenti. Ovviamente grande spazio è concesso agli *Elementi* di Euclide. Gli autori non nascondono, poi, la loro ammirazione per Archimede coi suoi metodi meccanici e con i suoi presagi di calcolo infinitesimale.
Ero molto curioso di leggere il secondo volume, non conoscendo niente della matematica medievale. Il raccordo col volume precedente è offerto da Apollonio, Tolomeo, Pappo e Diofanto; con quest'ultimo si studiano i problemi aritmetici con soluzioni intere e si affronta l'importantissimo progetto di una notazione simbolica, un altro "basso continuo" di tutta l'opera. Dopo una rapida disamina della matematica etrusca e latina ci si avvicina al medioevo ma c'è uno stacco importante e dovuto: la matematica in India, in Cina, nelle Americhe. Dalla matematica del mondo arabo si torna con naturalezza nel nostro ambito culturale. Gli eventi matematici sono inquadrati nei grandi mutamenti della società; s'intrecciano matematica, logica e filosofia. Ci aspettavamo Fibonacci, ma troviamo anche Tommaso, Bacone, Lullo, Ockham e tanti altri. Troviamo la complessa interazione con la Chiesa e la nascita delle università; troviamo Dante. L'impatto della notazione posizionale è comunque la parte che mi ha affascinato di più.
Naturalmente il volume che copre il periodo dal rinascimento al XVIII secolo è pirotecnico: idee e personaggi si alternano senza un attimo di respiro. Cominciamo col fermento attorno alle equazioni di terzo grado, che vede protagonisti (ma non unici attori) Tartaglia e Cardano, poi Ferrari, con cui si risolverà il problema del quarto grado; e già ci lanciamo verso uno dei punti cardine del prossimo volume. Necessariamente sono nati i numeri complessi; spuntano i logaritmi. Nasce la prospettiva, con cui gli artisti/matematici rinascimentali superano di netto i loro modelli dell'antichità. Leonardo disegna le illustrazioni del "De divina proportione" di Pacioli e gravita attorno alla matematica con alterne fortune. Da teoremi e formule enunciati a parole si passa a un simbolismo sempre più accurato. Arriva la rivoluzione scientifica di Galileo; conosciamo la sua scuola e la sua modernissima vocazione divulgativa. Descartes (preceduto da un contributo di Fermat qui citato) crea la geometria analitica all'interno di un suo progetto generale di studio della realtà. Questa novità tecnica rivoluziona in effetti il modo stesso di concepire gli enti geometrici e si accompagna ad uno sviluppo della notazione algebrica, argomenti a cui gli autori prestano molta attenzione nel corso di tutta l'opera. L'intreccio tra filosofia e matematica compare naturalmente anche in Pascal. Il genio poliedrico di questi personaggi sembra non conoscere confini e abbraccia geometria, fisica, probabilità, logica e, in particolare con Fermat, riprende ed estende lo studio dei numeri naturali e dà l'avvio all'analisi infinitesimale. Si arriva a Leonhard Euler, uno dei miei idoli, e qua ogni lista riassuntiva del suo lavoro sarebbe gravemente riduttiva. Parlavamo dell'analisi? Ecco Newton e Leibniz e la controversa paternità di uno degli strumenti più innovativi e potenti dell'umanità. Di nuovo ecco l'interazione con la filosofia, di nuovo un progresso nella notazione matematica.
Ero dubbioso, aprendo il quarto volume. D'Amore e Sbaragli hanno saputo gestire l'effervescenza del rinascimento, ma come potranno presentarci le esplosioni nucleari degli ultimi due secoli in poco più di cinquecento pagine? Come giustificheranno le inevitabili scelte e inevitabili rinunce? La loro soluzione è furba ed elegante: si affidano a quello che secondo me è il loro principale filo conduttore. Cosa interessa di più a due studiosi di didattica della matematica? (Intendo la **vera** didattica, non quella da fast food per maestri frettolosi). Secondo me il primo interesse è la comprensione profonda degli strumenti matematici, più che il loro uso. In effetti, rileggendo le introduzioni e molti passi dei volumi, questo appare come un progetto esplicito degli autori.
Cos'è l'infinito? Cos'è il numero? Cos'è una struttura matematica? Cos'è una dimostrazione? Questi temi, presenti fin dall'inizio dell'opera, diventano la struttura portante del quarto volume. Si comincia con il devastante teorema di Ruffini-Abel-Galois: la non esistenza di una formula per le equazioni di quinto grado e oltre, che si affianchi a quelle dei gradi precedenti. Si concretizza la necessità dello studio delle strutture algebriche in quanto tali: che cosa materialmente sia rappresentato dai numeri in gioco passa in secondo piano. Un altro problema rimasto in sospeso è quello relativo al postulato

delle parallele; il passaggio da Saccheri a Gauss, Lobačevskij, Bolyai e Riemann è in gran parte un passaggio concettuale: si passa da "che cosa è vero in geometria" a "che cosa è indipendente dal punto di vista logico".

E i problemi risolubili con riga e compasso? Ecco che le nuove tecniche algebriche permettono di capire cosa è possibile e cosa no in termini di numeri algebrici e trascendenti. Lo sviluppo travolgente dell'analisi richiede un approfondimento del concetto di infinito e inevitabilmente del concetto stesso di numero, su cui si cimentano Bolzano, Weierstrass, Cauchy, Dedekind, Méray, Peano fino alle incredibili scoperte di Cantor. La teoria degli insiemi nasce e subito va in crisi con la lettera di Russell a Frege. Nel frattempo nasce e prospera la topologia, dove emergono nomi noti come Möbius e Poincaré. La logica trabocca dal dominio della filosofia e diventa logica matematica. Intanto la scienza è costretta a farsi filosofia e a interrogarsi sulla sua stessa natura. Hilbert si chiede se verità e dimostrabilità coincidono; risponde Gödel, con risultati indiscutibili e sconvolgenti. L'intuizionismo rifiuta procedimenti dimostrativi consolidati. Si dimostra che l'assioma di scelta è indipendente, seguendo lo stesso schema delle geometrie non euclidee. Lo studio delle strutture si spinge fino alla teoria delle categorie.

Insomma, la lente privilegiata con cui gli autori osservano XIX e XX secolo è un grandangolo che abbraccia e spiega molto del travolgente progresso ancora in corso. Non vengono trascurati gli ambiti culturali in cui questo processo matura: la scuola di Göttingen, il circolo di Vienna, Bourbaki. In un capitolo finale si riassumono rapidamente molti temi più lontani dalla critica dei fondamenti, cara agli autori.

Affascinante, però mi sarebbe piaciuto, anzi mi piacerebbe sentire dalla loro voce la storia delle equazioni differenziali, del rapporto fra dominio e frontiera, delle trasformate, dell'impatto sull'elettromagnetismo; il groviglio dei problemi NP-completi, pronto a collassare su di noi o forse no; il giallo, pieno di colpi di scena e non completamente risolto, della classificazione topologica delle varietà; e tante, tante altre storie di idee e di persone dal 1800 a oggi. Insomma, da emiliano-romagnolo a due conterranei dico: grazie per questo antipasto, è proprio di quelli nostri, monumentale e saporito. Una pausa ci sta, ma poi mi aspetto primo, secondo e dolce.

Massimo Ferri
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna, Italia

Maierù, L., & Florio, E. (2018). ***Le costruzioni geometriche. Un percorso storico-didattico tra i matematici arabi dei secc. IX-XIII.*** **Parte prima. Roma: Aracne.**

Luigi Maierù ed Emilia Florio sono due ben noti storici della matematica che da sempre pubblicano testi di estremo interesse sia per chi è appassionato di storia della matematica, sia per chi si occupa di didattica della matematica. Il fatto è che sempre più i didatti, ma anche i docenti delle scuole, specie secondarie, si sono convinti a usare eventi storici e personaggi della storia per raccontare non solo i risultati originali della ricerca matematica, ma anche la loro evoluzione e per presentare i protagonisti di questa grande avventura. Talvolta ci si dimentica che stiamo parlando di esseri umani e non di nomi vuoti, spesso decontestualizzati sia dal tempo sia dallo spazio, esseri umani che talvolta non si sanno collocare nell'evoluzione temporale, né nei luoghi.

Ora, che le vicende degli studi arabi su questioni di geometria così avvincenti fossero densi di significati e risultati eleganti e preziosi, è ben noto a tutti; ma, onestamente, questa dovizia di particolari e di eccellenza sorprende.

In questo bel libro, molto ben scritto e riccamente documentato, si incontrano personaggi assai noti anche al vasto pubblico, come Al-Khwārizmī e Na'īm ibn Mūsā, ma anche altri che (almeno a me) erano meno noti; ma ora, grazie a Luigi e a Emilia, sono felice di aver fatto la loro conoscenza.

Certo, il tema delle costruzioni geometriche, così caro alla Grecia classica, viene ripreso con ricchezza di mezzi e di particolari a dir poco stupendi, con perizia e creatività, sia fini a sé stessi, sia come strumento algebrico, per esempio per risolvere le equazioni di II grado, come fa per esempio Al-Khwārizmī (ma anche molti altri). D'altra parte, l'uso delle costruzioni geometriche per affrontare problemi di carattere algebrico è molto diffuso, com'è ben noto, e lo sarà ancora anche nelle successive tradizioni in tutta l'Europa mediterranea, Italia compresa.

A volte la costruzione geometrica ha il senso di una dimostrazione, come nel caso dell'enunciato-problema: «L'area di un poligono circoscritto a un cerchio è uguale al prodotto del raggio del cerchio per il semiperimetro del poligono». A volte sono strumenti per la ricerca, come nel caso della seguente sfida: «Trovare due grandezze tra due grandezze date in modo che le quattro grandezze si succedano secondo un medesimo rapporto».

Trovo fantastici alcuni problemi posti sulla parabola (più in generale sulle coniche); per un moderno, l'idea di dover rinunciare alla geometria analitica (ancora ben lungi dall'essere anche solo immaginata) sembra una folle eresia; ma siamo di fronte a metodi e ad astuzie che hanno dell'incredibile.

Molto interessanti le costruzioni di poligoni regolari e la risoluzione di problemi di geometria tridimensionale; in entrambi l'immaginazione messa in campo da questi matematici colpisce un moderno.
Certo, a questi grandi creatori non mancavano preziosi testi di ispirazione geometrica, come molti famosi dei matematici greci; ma questi matematici arabi non sono da meno, sanno dominare una geometria potente e preziosa, sanno inventare, creare.
Una cosa che mi ha colpito molto è stato lo studio sugli specchi ustori di Ibn Sahl, dato che, nei primi anni '80, mi dedicai allo studio dello stesso tema così com'è affrontato da Bonaventura Cavalieri, alcuni secoli dopo. Anche in questo caso, il riferimento alla leggenda archimedea è solo una scusa per uno studio dettagliato delle proprietà delle coniche.
Tutti i problemi della Ellade classica sono presenti, anche la trisezione dell'angolo generico negli scritti di Al-Qūhī.
Che strumento didattico potrebbe costituire questo libro (e, in genere, questo genere di libri) nelle mani di un docente di scuola secondaria di II grado, fonte di ispirazione, forse capace di aumentare l'interesse e la curiosità degli studenti.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Maierù, L. (2020). *Parlare di … matematica è possibile*. Roma: Aracne.

Mi trovo di fronte a un libro formidabile, la cui lettura consiglio vivamente a tutti, matematici, docenti, allievi, curiosi. Si tratta non solo di una lunga, corposa, approfondita storia della matematica, ma di una lettura dotta, piacevole, ricca di sorprese colte.

I temi trattati sono solo apparentemente classici e tradizionali, hanno sempre qualcosa in più, temi di riflessione, e non solo dettagli:

– gli *Elementi* di Euclide e la loro influenza sugli studi relativi ai fondamenti della geometria, da Platone al Novecento, con riferimenti alla problematica dell'insegnamento della geometria;
– una rivisitazione dotta e profonda, ricca di spunti critici, dell'opera di Archimede, con una precisa cronologia delle traduzioni medievali e rinascimentali di tale opera;
– un'analisi dettagliata di parte dell'opera di Apollonio e la sua influenza nel mondo arabo (particolarmente dotta e ricca di spunti eccezionali) e fino al XVIII secolo;
– una narrazione fitta di citazioni interessanti e profonde dei lavori di Diofanto, Pappo, Sereno, Eutocio, mai vista in passato così completa e documentata;
– le relazioni fra geometria e algebra, il *metodo analitico*, dedicato alle posizioni (tutte perfettamente documentate), a partire dal mondo arabo e latino fino al XVI secolo e poi Viète, Descartes e Fermat, con la storia precisa della diffusione di queste conoscenze fino al XVIII secolo;
– un esempio concreto di quel che significa "parlare di matematica", avendo come esempio edificante la storia della costruzione dell'eptagono regolare, ricca di sorprese;
– un excursus storico sulla *mathesis universalis*, a partire da Wallis, fino alla costruzione dei numeri reali, dunque fine XIX secolo, ma con sconfinamento ai giorni nostri.

Lo scopo dichiarato dal nostro autore è quello di mostrare che è possibile parlare di matematica, non solo raccontarla, ma farla vivere da parte di chi legge, mostrandone anche la bellezza. Non è una novità, questo scopo, dato che ricordo perfettamente un altro libro dello stesso autore del 2017 il cui titolo è esplicito assai: *Della bellezza della matematica. Le tracce di un percorso di ricerca e di vita*.

Tutti argomenti già noti (dirà, potrebbe dire, qualcuno), già letti in altri libri di storia; sì, forse, quei nomi, quei fatti, quelle opere, quelle date sono già stati citati e trattati dallo stesso autore e da tanti altri, storici o divulgatori. Ma questo libro è diverso, coinvolgente, dotto, pieno di citazioni precise e riferimenti storici completi, traduzioni perfette anche di testi i cui autori tutti citiamo ma sui quali, realmente, spesso sorvoliamo, senza assumerci la responsabilità di ricerche precise e documentate,

fidandoci di quel che è già stato detto. Qui sono davvero presenti, citati e chiosati, a volte creando anche qualche (dotta) sorpresa. Confesso di aver letto alcune citazioni precise di autori arabi del medioevo solo qui in maniera così esplicita e completa. E poi accostamenti arditi fra personaggi e tematiche che solo il gusto dello storico di classe, che vuole proporre una narrazione più che un saggio critico scientifico, può offrire. Il che stupisce il lettore, specie se non digiuno appunto di questi temi, di questi nomi, di questi autori, più d'un motivo di sorpresa, gradevole e ben accetta.
Appassionato come sono anch'io della narrazione matematica, delle sue sfaccettature sottili, delle relazioni interpersonali fra questi creatori matematici, della chiosa magica su relazioni sottili fra opere di autori e periodi diversi, che si richiamano non sempre in modo esplicito, ma i cui rinvii devi capire da solo, confesso che ho molto apprezzato la costruzione, l'architettura narrativa, il gusto per la sorpresa e la voglia di stupire. E confesso di aver più volte ammirato il fatto che l'autore facesse di tutto per far capire (anche solo implicitamente) quel famoso anelito di libertà intrinseco alla matematica al quale diversi autori fanno cenno parlando della nostra disciplina, come Georg Cantor e Imre Toth.
Chi e come deve/può leggere questa narrazione?
Per esempio chi s'è trovato talvolta a dover spiegare a qualcuno (scettico) che la matematica è interessante, ha una storia appassionante, che il suo sviluppo assomiglia molto, come modalità, a quello di discipline considerate di tutt'altro genere come l'arte figurativa, per esempio; qui costui troverà esempi a non finire, più di 600 pagine di esempi. A meno che, come fece André Weil rispondendo a una lettera della sorella Simone, non si limiti a dire: «[…] tanto varrebbe spiegare una sinfonia a dei sordi».
Un insegnante, per esempio, che vuol convincere i suoi studenti che la creazione della matematica è una storia senza fine fatta da esseri umani, non il prodotto della natura o di un demiurgo, ma il prodotto di pensieri profondi, legati a motivi che possono avere le derivazioni più diverse.
Un altro lettore che molto apprezzerà questa lettura è chi sa già abbastanza storia della matematica e l'apprezza, ma vuol sapere, almeno su alcuni temi e alcuni personaggi, dettagli precisi, citazioni esatte, riferimenti colti, relazioni fra matematici in quanto esseri umani; troverà di certo dettagli che mai aveva avuto occasione di conoscere prima, precisi, circostanziati, profondi.
Per lo studente generico di scuola, la lettura è forse troppo impegnativa; ma molti studenti universitari di matematica dovrebbero gustare la modalità narrativa, la sottile ironia che di tanto in tanto fa capolino, lo spirito colto e raffinato dell'evoluzione, così legata al dettaglio.
Auguro a questo volume il successo più pieno.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

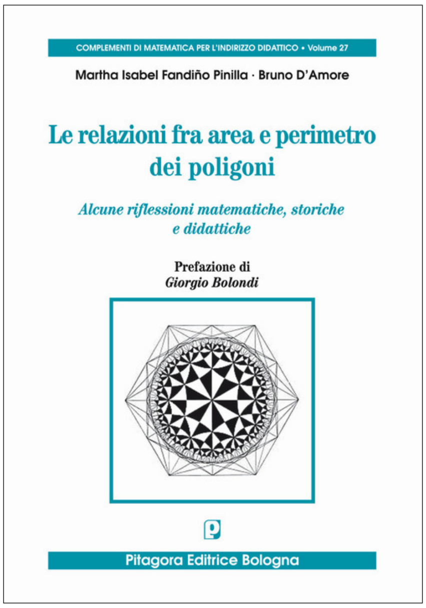
Toffalori, C. (2019). *L'equazione degli alef*. Bologna: il Mulino.

Carlo Toffalori è un logico matematico molto stimato in Italia e nel mondo, ex presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni (AILA), ordinario di Logica matematica a Camerino. Ma è noto anche al vasto pubblico dei non specialisti a causa del suo interesse e del suo impegno nella divulgazione della Matematica e in primo luogo della Logica. Fautore di varie iniziative in questo senso, è anche lui stesso impegnato in prima persona in questa opera di alta divulgazione; alcuni suoi libri sono vere e proprie ghiottonerie per gli appassionati non specialisti della logica.
Ovviamente, citare gli alef in una collana che si chiama "Formule per leggere il mondo" non è che un modo per richiamare lo straordinario lavoro che fece Cantor in questo campo. Si tratta della creazione di una nuova categoria di numeri; partendo dal numerabile **n** (che è il cardinale dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, dell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi, dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali, dell'insieme degli irrazionali algebrici) e proseguendo con **c** (che è il cardinale dell'insieme dei numeri irrazionali trascendenti e dunque dei reali) e ammettendo che abbia senso scrivere che $2^{\mathbf{n}}=\mathbf{c}$; ipotizzato poi che non ci siano insiemi di cardinalità maggiore di **n** e minore di **c** (ipotesi del continuo) e che dunque in qualche modo **c** segua **n** ($\mathbf{n}<\mathbf{c}$), si è di fronte a una nuova generazione di numeri (transfiniti) che richiedono nuove lettere per essere indicati, gli aleph, appunto. Con $\aleph_0$ indichiamo **n**, con $\aleph_1$ il suo successivo **c**, dunque $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Ma, ammessa questa scrittura, si può generalizzare il tutto, anche l'ipotesi del continuo, e giungere alla formulazione $\aleph_{n+1}=2^{\aleph_n}$. Sembra solo una questione di simbolismi appropriati (e quanto lo sono!), ma è invece un nuovo mondo, una nuova categoria di oggetti che mette tutta la matematica in discussione, aprendo fronti di ricerca e di studio unici e di una bellezza formale elegante e ineccepibile, il famoso Paradiso che, secondo Hilbert, Cantor aveva costruito per noi. E che spiega la famosa frase di Cantor: «La matematica merita [...] il nome di libera [...] l'essenza della matematica, infatti, sta proprio nella sua libertà».
Certo, la presentazione di tutto ciò e delle notevolissime conseguenze che ciò comporta nella logica, nell'intelligenza artificiale, nella vita di tutti i giorni, nel modo di guardare la matematica è incredibilmente ben descritta da Toffalori, con argomentazioni eleganti e acute, una sorta di narrazione e di analisi che spinge alla curiosità e che sorprende per la sua immediatezza, con un linguaggio attraente e convincente. Tante le sue citazioni, colte e profonde, sempre sul filo dell'equilibrio fra racconto, logica, formalismi e specifiche spiegazioni.
Ovviamente questa argomentazione ha comportato varie prese di posizione per quanto concerne la

teoria degli insiemi e le sue varie assiomatizzazioni, tema che ha costituito per quasi un secolo un argomento di discussione in taluni momenti addirittura violenta e che ha costretto a rivedere daccapo la fondazione stessa della matematica.
L'autore ci conduce anche attraverso questo impervio ma affascinante tema, dandoci tutte le nozioni che sono necessarie per capire il problema, teoremi e metateoremi che costituiscono l'ossatura di questa costruzione che offre una affascinante prospettiva su quel che è oggi la logica.
Trovo affascinanti e perfino divertenti certi riferimenti a questioni concrete attuali, come il debito pubblico e lo spread.
Questo libro è destinato al più ampio pubblico possibile costituito da persone colte, anche non specialisti; ma io penso che un grande vantaggio da questa lettura ne avrebbero gli insegnanti di matematica, se grazie a questa lettura potessero trarre vantaggio culturale personale e poi, chissà, almeno con gli allievi più curiosi, potessero tentare un ingresso nel mondo misterioso degli aleph…

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2019). *Le relazioni fra area e perimetro dei poligoni. Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Bologna: Pitagora.

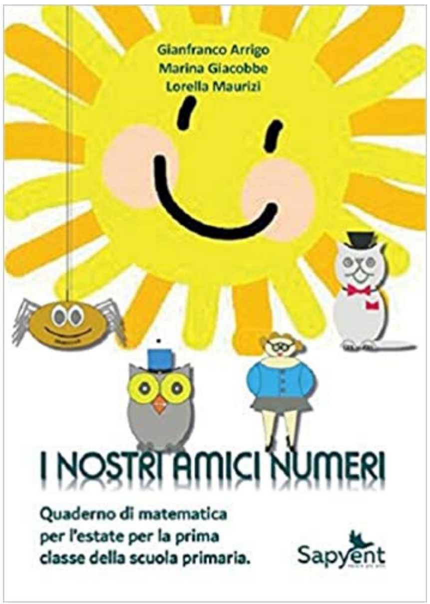


Il libro costituisce un'importante risorsa per insegnanti e ricercatori nell'ambito didattico. Nel volume gli autori riorganizzano, sistematizzano e ampliano i risultati di alcune ricerche realizzate all'inizio degli anni duemila, già pubblicate in un volume del 2006, ora riviste e arricchite di nuove riflessioni. I contenuti matematici oggetto della ricerca sono semplici all'apparenza e costituiscono temi essenziali dell'insegnamento della matematica nella scuola elementare, con innumerevoli applicazioni e sviluppi nei percorsi scolastici successivi, fino all'università: l'area e il perimetro. Può sorprendere che temi come questi siano al centro di un intero volume e che a ricerche didattiche su questi temi di base siano state dedicate così tante risorse ed energie: cosa c'è da indagare da un punto di vista didattico su argomenti così semplici? Eppure, di fronte ai risultati di tali ricerche, presentati in modo meticoloso e dettagliato sia dal punto di vista teorico che empirico, si è costretti a cambiare idea. Non solo sul tema specifico, ma sulla complessità dell'apprendimento della matematica in generale, e sulla necessità di una ricerca didattica e una formazione che, in maniera decisa, porti i docenti a riflettere a fondo sul sapere matematico di base e sulle criticità che da sempre accompagnano l'insegnamento di questa disciplina.
L'impatto del sapere e delle convinzioni degli insegnanti sui processi di apprendimento dei loro studenti è infatti notevole, per ovvie ragioni, ed è stato documentato in numerose ricerche condotte anche dagli autori stessi. Questa assunzione è fondamentale nella lettura del testo, che identifica nella variabile "insegnante" la fonte principale delle difficoltà di apprendimento degli studenti relative a queste tematiche: numerosi ostacoli didattici, dovuti a un sapere che non supera di tanto l'oggetto dell'insegnamento stesso, si aggiungono infatti agli ostacoli epistemologici che caratterizzano area e perimetro, che contribuiscono a loro volta a minare e rendere fragile e incerto il sapere dei docenti.
Prima ancora di ragionare sulle difficoltà, nel libro vengono discusse alcune abitudini dell'insegnamento della geometria attraverso i libri di testo e vengono riesaminati i contenuti matematici, come si suol dire, "da un punto di vista superiore", riproposti dagli autori in maniera precisa ma anche accattivante e originale, con l'aiuto della riflessione storica sull'origine e lo sviluppo di questi saperi.
In seguito gli autori guidano i lettori, con riflessioni ed esempi presi dalla letteratura nazionale e internazionale, alla scoperta dei fattori che possono stare alla base delle difficoltà degli studenti e dei futuri insegnanti; difficoltà che, secondo gli autori, sembrano essere addirittura in forte aumento negli ultimi anni, a tutti i livelli di istruzione.
Andando a indagare con pazienza, curiosità e competenza le convinzioni e le immagini mentali che

si formano spontaneamente su area e perimetro nei processi di apprendimento, al di là di ciò che è oggetto di insegnamento esplicito, e che rimangono parte del bagaglio di molti docenti, gli autori ci mostrano concezioni spontanee e inattesi collegamenti tra le due nozioni, che emergono in situazioni che si discostano, seppur di poco, da quelle "da libro di testo". La prospettiva e gli strumenti teorici della ricerca didattica aiutano a identificare e comprendere le difficoltà e prospettare soluzioni, e a interpretare associazioni apparentemente insensate e inspiegabili tra i due concetti dal punto di vista della matematica, intesa come rigoroso corpus di conoscenze storicizzate e formalizzate, che assumono invece senso cambiando il punto di vista sulla pratica d'aula e analizzando i processi di costruzione della conoscenza.
Tra i risultati più interessanti delle ricerche condotte dagli autori si trovano, ad esempio, alcune relazioni tra area e perimetro che vengono interiorizzate dagli studenti in casi particolari e generalizzate spontaneamente e inconsapevolmente, diventando proprietà che caratterizzano i due concetti e finiscono per diventare i veri criteri usati dagli studenti per rispondere alle domande nei quesiti di matematica o nella risoluzione di problemi.
Per quanto la scuola dell'infanzia e la scuola elementare siano maggiormente, e più direttamente, coinvolte da questa riflessione, le concezioni e i modelli intuitivi emersi dalla ricerca degli autori possono rimanere immutati anche in studenti di scuola media e scuola media superiore, fungendo da modelli parassiti che ostacolano l'apprendimento di altri concetti o influenzano gli studenti nei processi di risoluzione di problemi. Anche se ai docenti sembra che gli studenti dimentichino continuamente e con grande facilità e superficialità quanto sembravano aver appreso anche solo poche settimane prima, ci sono apprendimenti molto profondi, spesso difficili da far emergere, che lasciano traccia quasi indelebile nella mente degli studenti e modelli intuitivi che continuano ad "agire" ed essere riattivati anche molti anni dopo la loro formazione. Per tale ragione è molto importante che anche i docenti di scuola media e media superiore siano al corrente dei risultati di tali ricerche; è infatti su questi saperi di base che dovranno far costruire ai loro studenti nuovo sapere e nuova competenza matematica. I modelli intuitivi che si sono rafforzati nel corso degli anni continueranno a ripresentarsi rendendo difficile da parte dei docenti un intervento "correttivo", soprattutto se il docente non è al corrente della natura di tali concetti e delle convinzioni degli studenti, quasi mai esplicitate.
Gli studenti di oggi sono gli adulti di domani, e tra loro, naturalmente, troviamo, senza sapere chi saranno, i futuri insegnanti di matematica, di ogni ordine e grado. Senza una riflessione mirata, chi non ha avuto occasione di mettere a fuoco nel suo percorso scolastico alcune complessità dei concetti di area e perimetro, si ritroverà nel suo lavoro di docente a confrontarsi con esse nel momento più critico, cioè quello in cui esse si manifestano in alcune domande inattese degli studenti, o nella risoluzione di un problema diverso da quelli più standard. Richiamando le parole degli autori: "Per esempio, decidere se ci sono relazioni tra perimetro e area di una figura, supera le competenze di molti studenti, soprattutto perché, come abbiamo verificato, supera quelle di parecchi insegnanti; se poi questa figura fa parte di una successione di figure in trasformazione, allora la competenza quasi si annulla…". Come sottolineano gli autori, le ricerche presentate offrono spunti notevoli soprattutto per la formazione degli insegnanti, grazie a riflessioni dei docenti stessi e a resoconti dettagliati delle attività di formazione. Per tale ragione questo volume costituisce una risorsa importante anche per i ricercatori che si occupano di formazione degli insegnanti, oltre che per i docenti stessi, che possono ripensare al loro sapere e riflettere sulle loro concezioni, a partire dalle riflessioni di altri docenti.
Gli autori riescono a rivolgersi a un pubblico molto eterogeneo, con la loro consueta capacità di coinvolgere ed essere al tempo stesso meticolosi e precisi. La lettura di questo testo è in grado sia di stimolare riflessioni generali sull'apprendimento, che possono incontrare i gusti un vasto pubblico, sia fornire strumenti operativi utili per la professione docente e per i formatori.

Laura Branchetti
Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università di Parma, Italia

Arrigo, G., Giacobbe, M., & Maurizi, L. (2019). *I nostri amici numeri.* Bologna: Sapyent.



Ho di fronte a me cinque volumi ciascuno dei quali si chiama "Quaderno didattico" di ampie dimensioni, più una guida per l'insegnante. Il primo quaderno è destinato alla prima e seconda elementare; il secondo alla terza; il terzo alla quarta e quinta; il quarto è un quaderno per l'estate destinato alla prima; il quinto, sempre per l'estate, destinato alla seconda. La guida è di piccole dimensioni, destinata all'insegnante.
Quel che colpisce subito è l'eleganza del disegno, la sobrietà della disposizione dei testi, la ricchezza delle figure destinate a completare la descrizione dei problemi proposti e a decorare con allegria le singole pagine.
La guida è particolarmente significativa. Il complesso editoriale tratta non tutta la matematica, ma solo l'aritmetica, con quella dovizia di particolari e di allegri e divertenti "trucchi" che da molti anni il collega Arrigo descrive oralmente nei suoi molteplici e fortunati corsi.
Le proprietà delle operazioni, per esempio, non costituiscono il solito banale stereotipato elenco di definizioni con esempi, ma vere e proprie attività da far svolgere in aula, scoperte da fare e non apprendimenti ripetitivi.
La guida è particolarmente ricca di riferimenti anche teorici in didattica della matematica, quasi a voler dire che un buon testo per studenti, anche se si tratta di una raccolta di esercizi da far svolgere e problemi da far risolvere. deve avere una base culturale didattica, basata sulla teoria, che mai verrà detta al bambino, ovviamente, ma che garantisce l'insegnante che la usa. Non si tratta insomma di indottrinare con suggerimenti del tipo "fa così e così e vedrai che …", ma di delineare una strategia, un percorso culturale, una strada intelligente da proporre.
In prima, per esempio, si inizia con corte favole nelle quali un numero ha un ruolo specifico, contando raggruppamenti di oggetti, introducendo le cifre da 1 a 9, introducendo la cifra 0 per indicare il numero che ci insegna a gestire formalmente situazioni nelle quali la risposta è "nessuno". Appaiono vari personaggi simpatici che catturano l'attenzione dei bambini; vengono sempre proposti giochi idonei, sempre alla portata dei nostri piccoli lettori…
E così via, in seconda i giochi si fanno più interessanti, in terza stuzzicano la fantasia, in quarta sono sfide, in quinta…già si sente odore di scuola media… In terza, la fantasia dei nostri autori galoppa e, creando situazioni simpatiche e idonee, sfida quasi la voglia di matematica degli allievi con giochi, attività e racconti che non possono lasciare indifferente nessun bambino…

Ogni tanto ci sono passaggi per così dire teorici nei quali si stabilisce che una certa proprietà, scoperta giocando e lavorando, vale in generale e dunque si può applicare sempre. Ma senza prosopopea, senza essere pedanti, come spesso capita nei libri di matematica. In quarta e quinta la sfida diventa più significativa, si entra in argomenti più profondi e precisi, ma sempre con quell'aria di gioco e di scoperta che entusiasma i bambini dato che li fa sentire esploratori protagonisti dell'aritmetica.
Tutti i volumi sono ricchi di personaggi che si alternano nella narrazione, nelle sfide, nell'essere protagonisti di giochi e attività diverse. Fra queste, molto indovinata la palestra matematica che costituisce un polo di forte attrazione motivazionale per fare un deciso passo avanti nella costruzione di conoscenza matematica (in palestra, appunto, dunque provando sé stessi!).
Auguriamo ai nostri tre autori e alla casa editrice che ha creduto in loro un totale successo dell'opera, specie nelle mani di quei docenti di scuola elementare di matematica che sono stanchi di attività ripetitive e stereotipate e che vogliono sì insegnare e fare in modo che i bambini imparino, ma senza annoiarli e offrendo loro attività giocose, intelligenti e creative.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Cerasoli, A. (2015). *Tutti in festa con pi greco*. Firenze: Editoriale Scienza.

Nella usuale notazione anglosassone, la data del 14 marzo presenta in successione le cifre 3, 1 e 4. Esatto: le prime tre cifre del pi greco! Questa singolare coincidenza è stata notata solo alla fine degli anni'80, ma da allora il 14 marzo è diventato il giorno in cui si festeggia il pi greco in tutto il mondo: è il Pi Day!

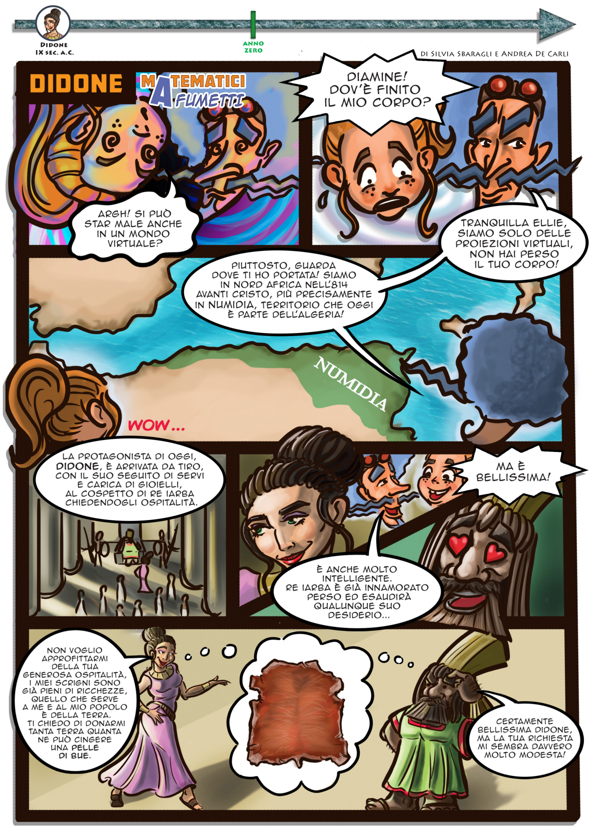
Che esagerazione: dedicare a un numero un intero giorno all'anno. Sembra una di quelle ossessioni da scienziati un po' troppo devoti. Eppure, a ben guardare, il pi greco è non solo uno dei numeri più importanti della storia della matematica, e forse della storia della scienza in generale, ma rappresenta un nodo fondamentale nell'evoluzione del pensiero dell'uomo. Lo sa bene anche Anna Cerasoli, autrice del libro *Tutti in festa con pi greco*, nel quale la scrittrice ed ex insegnante di matematica narra in modo accattivante e preciso diverse vicende, umane e scientifiche, che ruotano attorno a questo numero, riuscendo a descriverne la significatività in termini matematici, storici, culturali ecc.

Il risultato è un libro prezioso: a partire dalla presentazione di Archimede di Siracusa, vero genio e "padre" del pi greco, vengono affrontati in modo accessibile temi complessi. Ad esempio, viene descritto il procedimento di calcolo infinitesimale utilizzato per determinare approssimazioni sempre più accurate del pi greco. Approssimazioni, certo, perché il pi greco è un numero irrazionale (e anche trascendente), cioè un numero che non può essere scritto come rapporto fra due numeri interi e la cui rappresentazione, qualunque sia la base considerata, non termina mai e non forma una sequenza periodica. Certo si dirà: "Esistono infiniti numeri fatti in questo modo, perché il pi greco è così famoso?" Beh, è sufficiente dire che grazie al pi greco possiamo calcolare l'area di un cerchio, e il cerchio è la figura che a parità di perimetro racchiude l'area massima. Questo risultato è utilizzato in modo spontaneo dagli animali a fini di una maggiore protezione dagli attacchi, dagli essere umani per risparmiare risorse nella costruzione delle mura di difesa di una città…e persino dalla leggendaria Didone, fondatrice di Cartagine!

Insomma, il pi greco ha fatto la storia della matematica fin dai tempi antichi, e ancora oggi continua a far parlare di sé. Come questo libro, edito nel 2015, che mantiene stretti fra loro il potere di una narrazione coinvolgente e contenuti matematici curiosi e rigorosi. Un testo per tutti: appassionati e non, studenti e, soprattutto, insegnanti della scuola obbligatoria.

Michele Canducci
Dipartimento Formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Sbaragli, S., & De Carli, A. (2020-2021). ***Storie di matematici.***
Disponibile in: https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/didone/



All'interno del progetto *Communicating Mathematics Education*, finanziato dal Fondo Nazionale Svizzero Agora per la divulgazione scientifica, una delle iniziative previste per l'a.a. 2020/21 è la creazione e diffusione di una serie di fumetti "Storie di matematici" su personaggi e aneddoti matematici, in un'ottica di intreccio interdisciplinare di aspetti matematici, storici e geografici.
I fumetti sono incentrati sull'incontro della giovane Ellie, ragazzina non interessata al mondo della matematica, con vari personaggi della storia della matematica che vivono aneddoti riguardanti contenuti matematici di base. L'intento è di fare appassionare i lettori, anche i più scettici, alla matematica e alla sua storia e far comprendere che la matematica è un'espressione della cultura umana, fatta dall'uomo per l'uomo.
L'incontro tra Ellie e questi personaggi avviene attraverso gli occhiali virtuali costruiti in laboratorio dal geniale zio Angelo, che consentiranno di viaggiare nel tempo dall'800 a.C. fino ai giorni nostri. La lettura dei fumetti consente dunque di toccare, oltre ad aspetti matematici, anche elementi storici, geografici e caratteristici dei personaggi.
I primi due episodi sono già disponibili: nel primo si fa la conoscenza della protagonista, Ellie, e dello zio Angelo, che la guiderà nel suo percorso di scoperta; nel secondo vengono narrate le vicende, matematiche e storiche, che ruotano attorno alla leggendaria figura di Didone. Gli episodi che seguiranno copriranno più di due millenni di storia, da Didone e i matematici greci fino a Möbius e Turing, passando per i grandi personaggi della matematica medievale.
Insomma, questo insolito binomio: fumetti e matematica sarà utile per avvicinare un pubblico spesso scettico a questa disciplina, essendo il fumetto uno strumento di comunicazione diretta, rivolto a un

pubblico di massa. Ma potrà essere efficacemente utilizzato anche da docenti di scuola: perché non introdurre, ad esempio, i temi dell'area e del perimetro attraverso il racconto della leggenda di Didone? Oppure approfittare del fumetto su Pitagora per lavorare in ottica laboratoriale e interdisciplinare sulle relazioni fra matematica e musica?
Insomma, questi fumetti sono pensati per essere un modo leggero e divertente di narrare la matematica, ma chi dice che con la leggerezza non si possa fare della buona didattica? È questo l'auspicio sottointeso dagli autori, due che di didattica se ne intendono: Silvia Sbaragli, professoressa in didattica della matematica e autrice di numerosi volumi didattici e divulgativi, e Andrea De Carli, docente di visiva delle scuole medie ticinesi, illustratore e fondatore della Scuola di Disegno di Locarno. Decisamente un bel binomio!

Michele Canducci
Dipartimento Formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera