Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 10

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Impaginazione:
Luca Belfiore

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
matematica

10

Novembre 2021

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), I - II, DOI: 10.33683/ddm.21.10.0 OPEN ACCESS

Editoriale

Siamo giunti al decimo numero della rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*: un risultato davvero importante per i membri del comitato redazionale e del comitato scientifico che con impegno, passione e dedizione portano avanti da sei anni questo ambizioso progetto. Il fine è sempre lo stesso: condividere significativi contributi di ricerca ed efficaci esperienze didattiche.
È in questo contesto che sono nati proficui contatti e scambi tra ricercatori e docenti, contribuendo così ad avvicinare il mondo della ricerca al mondo scolastico e a tenere unita una comunità interessata ad approfondire il complesso e delicato processo di insegnamento/apprendimento della matematica.

Come di consueto, nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli. Il primo si focalizza sull'importanza dell'attività di risoluzione di problemi in ambito matematico. A partire dalla necessità, nel fare matematica, di manipolare l'astratto, i simboli e la logica, l'articolo propone esempi di "situazioni didattiche di problem solving" nell'ottica di Brousseau (1986), con il fine di mostrare come i problemi possano essere motori per un apprendimento davvero significativo della matematica. Il secondo contributo si inserisce all'interno dei lavori del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico* finanziato dal Fondo Nazionale Svizzero per la ricerca scientifica. L'articolo presenta uno studio strettamente interdisciplinare, a cavallo tra la didattica della matematica e gli studi di argomentazione, nel quale vengono applicate le categorie di tipo retorico classico (*inventio*, *dispositio*, *elocutio*) all'analisi di porzioni argomentative di libri di testo di geometria, mettendo in particolare in evidenza la grande varietà di scelte comunicative possibili, le quali possono avere effetti sui lettori/studenti. Il terzo contributo pone invece l'attenzione sull'introduzione del paradigma relazionale nella scuola secondaria di primo grado in Italia;[1] a partire da alcune considerazioni riguardanti l'importanza di rappresentazioni grafiche che possano supportare gli studenti nel primo approccio all'algebra. Gli autori propongono un esempio di sequenza didattica, e ne valutano l'efficacia usando uno strumento di valutazione che comprende tutte e cinque le componenti dell'apprendimento della matematica di Fandiño Pinilla (2008), notando una particolare efficacia in termini di apprendimento strategico e comunicativo.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Il primo contributo riguarda un'indagine effettuata in una classe terza di scuola primaria italiana,[2] avente come focus di interesse l'analisi delle competenze argomentative durante la risoluzione di problemi, con il fine di valutarne l'incidenza a livello didattico nei processi partecipativi e motivazionali degli studenti. I risultati della sperimentazione si allineano con gli studi e le ricerche recenti riguardanti lo sviluppo della competenza argomentativa in campo matematico. Nel secondo contributo viene descritto un itinerario didattico realizzato in una scuola dell'infanzia in Canton Ticino, incentrato sul rapporto interdisciplinare fra matematica ed educazione visiva. Nell'articolo vengono chiarite le fasi didattiche che, a partire da un'indagine statistica proposta agli allievi, li hanno condotti a esplorare la creazione di pittogrammi utili a rappresentare significativamente concetti e relazioni matematiche. Il terzo contributo propone un'esperienza didattica svolta in alcune classi di scuola secondaria di secondo grado

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

in Italia[3] per introdurre le peculiarità della modellizzazione matematica, attraverso la presa in esame di un problema basato su un gioco competitivo. Dopo un'introduzione teorica sull'importanza di sviluppare competenze di modellizzazione descrittiva che utilizzino anche il simbolismo matematico, vengono descritte in modo puntuale le fasi del percorso e vengono fornite utili coordinate grazie alle quali poter adattare e ampliare l'esperienza didattica a seconda del proprio contesto didattico. Anche l'ultimo contributo si occupa di matematizzazione e modellizzazione matematica: vengono presentate due esperienze didattiche di modellizzazione emergente, la prima riferita alla scuola primaria, la seconda alla scuola secondaria di secondo grado in Italia. Dopo aver inquadrato dal punto di vista teorico e didattico i percorsi sperimentati, vengono descritte e analizzate le fasi degli stessi, in termini di processi di matematizzazione; si giunge infine a ribadire l'importanza di supportare gli allievi in un processo di re-invenzione (Freudenthal, 1991) di concetti matematici a partire dalle loro informali strategie risolutive.

Nel ringraziare tutti gli autori e i revisori che con il loro impegno, la loro dedizione e la loro pazienza, hanno scritto gli articoli presenti in questo numero, auguriamo a tutti i lettori di poter cogliere riflessioni e spunti utili per la propria professione.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Bibliografia

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Erickson.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. China lectures. Kluwer.

3. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), III - IV, DOI: 10.33683/ddm.21.10.0 OPEN ACCESS

Editorial

We have reached the tenth issue of the journal *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*: an important result for the members of the editorial team and the scientific committee who, with commitment, passion and dedication, have been carrying on this ambitious project for six years. The goal is always the same: to share significant research contributions and effective didactic experiences.
It is in this context that fruitful contacts and exchanges between researchers and teachers were born, thus contributing to bring the world of research closer to the scholastic world and to keep together a community interested in deepening the complex and delicate teaching/learning process of mathematics.

As usual, there are three articles in the section *Riflessione e ricerca*. The first one focuses on the importance of problem-solving activities in mathematics. Starting from the necessity in mathematics to manipulate the abstract, symbols and logic, the article proposes examples of "didactic situations of problem solving" in the perspective of Brousseau (1986), with the aim of showing how problems can stimulate a meaningful learning of mathematics. The second contribution is part of the project *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico* funded by the Swiss National Science Foundation. The paper presents a strictly interdisciplinary study over mathematical didactics and argumentation studies, in which the classical rhetorical categories (*inventio*, *dispositio*, *elocutio*) are applied to the analysis of argumentative portions of geometry textbooks, highlighting in particular the great variety of possible communicative choices, which may have effects on the readers/students. The third contribution focuses instead on the introduction of the relational paradigm in the Italian lower secondary school;[1] starting from some considerations concerning the importance of graphical representations that can support students in their first approach to algebra. The authors propose an example of a teaching sequence, and evaluate its effectiveness using an assessment tool that includes all five components of mathematical learning following Fandiño Pinilla (2008), noting a particular effectiveness in terms of strategic and communicative learning.

In the section *Esperienze didattiche* there are four articles. The first contribution concerns an investigation carried out in a third-year class of an Italian primary school,[2] having as focus of interest the analysis of argumentative skills during problem solving, with the aim of assessing its impact at the educational level in the participatory and motivational processes of the students. The results of the experimentation agree with recent studies and researches concerning the development of argumentative competence in mathematics. The second contribution describes a didactic itinerary carried out in a kindergarten in Canton Ticino, focused on the interdisciplinary relationship between mathematics and visual education. The article clarifies the didactic steps, which, starting from a statistical survey proposed to the pupils, led them to explore the creation of pictograms useful to meaningfully represent mathematical concepts and relations. The third contribution proposes a didactic experience carried out in some classes of upper secondary school in Italy[3] to introduce the peculiarities of

1. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.
2. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.
3. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.

mathematical modelling, through the examination of a problem based on a competitive game. After a theoretical introduction on the importance of developing descriptive modeling skills that also use mathematical symbolism, the phases of the experience are described in a punctual way and useful coordinates are provided, thanks to which it is possible to adapt and expand the didactic experience according to the didactic context. The last contribution also deals with mathematization and mathematical modelling: two didactic experiences of emerging modelling are presented, the first referred to the primary school, the second to the upper secondary school in Italy. After describing the theoretical and didactic point of view of the experiments, the phases of the experiments are described and analyzed, in terms of the mathematical processes; finally, the importance of supporting students in a process of re-invention (Freudenthal, 1991) of mathematical concepts starting from their informal solving strategies is reaffirmed.

We thank all the authors and reviewers who, with their commitment, dedication and patience, have written the articles in this issue, and we hope that all readers will be able to grasp useful viewpoints and insights for their profession.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Bibliografia

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Erickson.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. China lectures. Kluwer.

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 9 - 28, DOI: 10.33683/ddm.21.10.1

OPEN ACCESS

Quanto è importante risolvere e far risolvere problemi?

How important is to solve problems and to give problems to be solved?

Gilles Aldon
S2HEP, Université Lyon 1 Claude Bernard – Lione, Francia

gilles.aldon@ens-lyon.fr

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA ORIGINALE

«Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit».
(Bachelard, 1967)

Sunto / Fare matematica implica tre livelli di manipolazione: manipolare l'astratto, manipolare i simboli e manipolare la logica. L'insegnamento della matematica passa quindi attraverso la proposta da parte del docente di situazioni in cui gli studenti possano esplorare una piccola parte della matematica attraverso queste manipolazioni. In questo modo, gli alunni lavorano sia sull'euristica che permette loro di confrontarsi con una vera e propria ricerca matematica sia sulle conoscenze in costruzione. Attraverso esempi di situazioni didattiche di problem solving, questo articolo intende mostrare come i problemi possano essere motori dell'apprendimento della matematica.

Parole chiave: problem solving; esperimenti; epistemologia; situazione didattica; apprendimento della matematica.

Abstract / Doing mathematics implies three levels of manipulation: manipulating the abstract, manipulating symbols and manipulating logic. Teaching mathematics therefore involves the teacher proposing situations in which pupils can explore a small part of mathematics through these manipulations. In doing so, the pupils work on both the heuristics enabling them to confront themselves with a real mathematical research and knowledge in construction. Through examples of didactic situations of problem solving, this article aims to show how problems can be drivers of mathematics learning.

Keywords: problem solving; experiences; epistemology; didactical situation; mathematics learning.

1 Introduzione

Che cosa significa fare matematica? Questa domanda, all'apparenza semplice, apre un universo di quesiti di ordine filosofico, epistemologico e didattico. Stando alle definizioni date dal *Trésor de la Langue Française informatisé*,[1] il verbo "fare" utilizzato in questa domanda, ma anche utilizzato nel contesto più ampio del mondo dell'educazione matematica, suppone che il soggetto "darà origine alla", oppure "sarà l'autore della" matematica con la quale è confrontato. In questa prospettiva, "fare matematica" significa crearla. Tale risposta apparentemente semplice nasconde tuttavia temi centrali della filosofia della matematica, che hanno alimentato dibattiti fin dalla notte dei tempi: quando facciamo matematica stiamo scoprendo un mondo già esistente, come sostiene la filosofia di Platone, oppure stiamo costruendo la matematica affidandoci alla nostra intuizione di spazio e di tempo, come suggerisce Kant? Può anche darsi che queste riflessioni esulino dal quadro dell'insegnamento della matematica e abbiano senso unicamente per la ricerca, la creazione (o la scoperta!) matematica. Personalmente non lo credo. E questo articolo di riflessione tenterà di dimostrare che gli studenti, quando sono confrontati a dei problemi di matematica, diventano dei creatori di matematica, poiché manipolano dei concetti a priori: «i pensieri senza contenuto sono vuoti, le intuizioni senza concetti sono cieche» (Kant, 1781/1905, p. 91, *Introduzione alla Logica trascendentale*, traduzione dell'autore). Anche se da molto tempo le direttive istituzionali hanno messo l'accento sull'importanza dei problemi nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica,[2] l'imprecisione sui fondamenti epistemologici di tali direttive diventa un freno per la diffusione su grande scala di un insegnamento fondato sulla risoluzione dei problemi. In effetti, numerosi manuali o siti pedagogici si riferiscono a queste indicazioni per presentare una visione "scolastica" della risoluzione di problemi, appoggiandosi in particolare sulle ipotesi comportamentiste della costruzione delle conoscenze. Di conseguenza, per esempio, la risoluzione di un problema matematico a priori interessante e fecondo potrebbe essere ridotto al rispondere a una successione di domande collegate fra loro, il cui senso globale non potrà essere compreso se non attraverso uno sforzo supplementare di sintesi, sforzo richiesto molto raramente. A titolo d'esempio, si consideri un problema ampiamente studiato (Aldon et al., 2017); ecco riportati due possibili enunciati che si riferiscono alla stessa situazione matematica:

1. Siano A e B due punti situati nello stesso semipiano delimitato da una retta d. Dove occorre posizionare un punto M su d, in modo tale che la distanza $AM + MB$ sia la minore possibile?
2. Siano A e B due punti situati nello stesso semipiano delimitato da una retta d. Sia M un punto di d.
   a. Costruire il punto A', simmetrico al punto A rispetto a d.
   b. Dimostrare che $AM + MB = A'M + MB$.
   c. Dedurre la posizione di M su d in modo che la distanza $AM + MB$ sia la minore possibile.

Il primo enunciato lascia *aperta* la scelta della strategia da adottare: il metodo non è esplicitato e i mezzi di risoluzione sono quindi lasciati alla responsabilità degli allievi. Nel secondo enunciato, invece, la scelta del metodo, il quadro e gli strumenti da utilizzare sono imposti. Nonostante ciò, entrambi gli enunciati possono essere considerati come "problemi", a condizione che siano proposti a studenti per i quali rispondere all'enunciato non consista nello svolgere un esercizio d'applicazione, ma in una vera e propria ricerca e mobilitazione delle conoscenze pregresse da richiamare e riutilizzare. In parti-

1. http://atilf.atilf.fr/
2. Mi riferisco in particolare al sistema educativo francese, i cui programmi scolastici sono disponibili in: https://www.ac-strasbourg.fr/fileadmin/pedagogie/mathematiques/Lycee/Programmes/programmes_Maths2019.pdf

colare, il primo enunciato è quello che in didattica della matematica si definisce un "problema aperto" per gli allievi (Arsac et al., 1991), in analogia con i famosi sette "problemi del millennio", sei dei quali sono questioni ancora aperte che ancora non hanno trovato soluzione da parte dei matematici.

Le riflessioni proposte dal presente contributo evidenziano come la risoluzione di problemi permetta agli allievi di costruire e consolidare le loro conoscenze matematiche. Tali riflessioni, emerse durante l'implementazione in classe di quelle che chiameremo "situazioni didattiche di problem solving", poggiano sul lavoro di ricerca dell'equipe DREAM (*Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques*) e sui risultati di una sperimentazione condotta nel quadro della *Maison des Mathématiques et de l'Informatique* (MMI) di Lione. Come verrà dettagliato in seguito, il lavoro dell'équipe DREAM si basa sull'insieme degli studi sviluppati attorno al tema del "problema aperto" in seno all'IREM di Lione[3] da più di trent'anni, nonché sulle ricerche condotte all'interno dell'Università di Lione (Aldon et al., 2010; Arsac et al., 1991). Una delle peculiarità del gruppo di lavoro è la sua composizione: ricercatori e docenti di ogni livello scolastico progettano e propongono delle sperimentazioni, riflettendo insieme sui loro risultati.
Nella prima parte di questo articolo, si delineano le ipotesi di lavoro dell'equipe DREAM attraverso alcune riflessioni preliminari che derivano dalla filosofia della matematica, che serviranno per precisare i fondamenti epistemologici alla base delle sperimentazioni presentate nella seconda parte. Tramite due esempi tratti dalle sperimentazioni svolte nel quadro di questa ricerca, mostrerò quali analisi sono possibili basando il lavoro in aula su queste ipotesi.

2 Modellizzazione e matematizzazione

Giuseppe Longo (2020) ci ricorda che «la matematica è astratta, simbolica e rigorosa… al di là degli assiomi, dietro gli assiomi» (p. 3, traduzione dell'autore). È proprio riprendendo queste tre direzioni di pensiero (astratta, simbolica, logica) che presenterò la posizione dell'equipe DREAM sul tema dei problemi nell'insegnamento della matematica (Aldon et al., 2017; Front, 2015; Gardes, 2013).

2.1 Che cos'è un problema?

Da un punto di vista etimologico, la parola "problema" deriva dal greco *Πρόβλημα*, il cui verbo di riferimento è *προβάλλειν*, ossia "lanciare in avanti": si tratta quindi di "proiettarsi in avanti", di dirigersi verso il futuro, dunque di tentare di utilizzare le conoscenze per risolvere una questione, utilizzando dei metodi riconosciuti dalla società, dalla disciplina o più generalmente dall'istituzione nella quale evolviamo. In particolare, in questo articolo, si assume la prospettiva di Brousseau secondo il quale:

> «Tutto ciò rende non solo vero, ma anche interessante un teorema e, insieme a questo, ciò che Gonseth chiamava il carattere idoneo di una conoscenza matematica, ossia ciò che fa sì che questa conoscenza esista come soluzione ottimale [...] [è] una soluzione a un problema».
> (Brousseau, 1976, p. 103, traduzione dell'autore)

Così, all'interno della matematica, ossia nel processo di matematizzazione verticale (Treffers, 1987) su cui è focalizzato questo articolo, un problema è una domanda che conduce a un risultato matematico, un teorema, che amplierà il campo delle conoscenze della disciplina. Risolvere un problema

3. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lyon: http://math.univ-lyon1.fr/irem/

implica quindi l'utilizzo di ragionamenti riconosciuti come validi all'interno della disciplina. Questo ci conduce evidentemente a una prima domanda: quali sono questi ragionamenti validi? Domanda, questa, che ci riporta all'apprendimento di questi ragionamenti e delle conoscenze necessarie per arrivare alla soluzione del problema con il quale siamo confrontati. Queste conoscenze sono in effetti una condizione necessaria per far sì che il problema possa essere affrontato. Schoenfeld (1998) mostra come sia necessario attivare, nella risoluzione di problemi, sia conoscenze dichiarative (1 e 2) sia conoscenze procedurali (3), che consistono in:

1. le conoscenze informali, che possono essere associate alle cosiddette *intuizioni pure* di Kant, perché si fondano sulle forme di sensibilità dello spazio e del tempo;
2. i fatti e le definizioni, che permetteranno di nominare e manipolare gli oggetti matematici in gioco nel problema;
3. le procedure, che si riferiscono sia alle regole di calcolo sia ai ragionamenti e alle routine che permettono di manipolare gli oggetti e di alimentare e rafforzare così la deduzione e la validazione dei risultati.

Sotto queste ipotesi, risolvere un problema di matematica consiste nel manipolare simultaneamente l'*astratto*, i *simboli* e la *logica*, come sottolineato da Bonnay e Dubucs (2011): «[possiamo] dare una rappresentazione fedele e cognitivamente plausibile dei tre elementi che sono al cuore della matematica: primo, gli oggetti a cui il matematico si riferisce, secondo, le formule che usa, e terzo, la sua attività mentale» (pp. 17-18, traduzione dell'autore).

2.2 Manipolare l'astratto

Il titolo di questo paragrafo potrebbe sembrare contraddittorio, soprattutto se si considera che una "manipolazione" consiste nel tenere "in mano" l'oggetto che vogliamo trasformare o comprendere. È proprio qui che si pone tutta la questione dell'"esistenza" degli oggetti matematici. Se adottiamo un punto di vista platonico, il mondo matematico esiste indipendentemente dall'uomo; si tratta di scoprire le proprietà di oggetti che esistono a priori. Ma questo realismo si riferisce a oggetti matematici che esistono indipendentemente dall'uomo o alla verità degli enunciati matematici?

Stiamo parlando di quello che Petitot (1986) definisce «la differenza ontologica tra fenomeno e oggetto», per cui la definizione di oggetto diventa «il semplice operatore di traducibilità dei fatti empirici e/o dei dati numerici in un linguaggio formale» (p. 3, traduzione dell'autore). È quindi sulla base di questa differenza ontologica che il rapporto tra matematica e realtà oggettiva può essere descritto in termini dialettici: «è in una prospettiva trascendentale che è possibile interpretare al meglio questo investimento dell'astratto nella genesi del concreto» (Lautman, 1935-1939, citato da Petitot, 1986, p. 14, traduzione dell'autore); così la matematica si situa all'incrocio tra l'esperienza dei fenomeni e il mondo delle idee. È ciò che permette questa manipolazione degli oggetti a condurre alla creazione fruttuosa di concetti matematici. A questo punto occorre essere prudenti e non confondere l'esperienza primitiva, che consiste in una manipolazione non finalizzata alla costruzione di conoscenza, e l'esperienza scientifica, che ha senso solo quando vi è una riflessione sui risultati dell'esperienza. La verità scientifica emerge allora come il risultato di un doppio movimento: l'*inter*-azione con il concreto e la *trans*-azione nel costruire l'esperienza e nell'interpretare i suoi risultati. I due movimenti partecipano dialetticamente all'elaborazione dei fatti.

2.3 Manipolare i simboli

La sintassi matematica è essenziale per la costruzione del ragionamento, ma la sistematizzazione del formalismo matematico conduce inevitabilmente ad allontanarsi dal senso e, quindi, dal rapporto con le esperienze fenomenologiche. Le tesi di Frege e Russel, che nel XIX e XX secolo hanno tentato di ridurre la matematica alla logica, si sono scontrate con il senso e con le realtà dei fenomeni: «L'astratto

non può rivendicare un'esistenza autonoma: questo è sufficiente per confutare l'idea secondo la quale gli assiomi rappresentano delle convenzioni poste liberamente dalla mente» (Gonseth, 1936/1974, p. 92, traduzione dell'autore).
D'altro canto, fare matematica implica l'utilizzo del simbolismo logico e dei sistemi di segni che permettono di costruire e comunicare la matematica. È proprio una problematica dell'insegnamento quella di potere padroneggiare i diversi sistemi di segni e di potere comunicare passando dall'uno all'altro (Duval, 1991, 1995). Gli oggetti matematici sono infatti manipolati attraverso le loro rappresentazioni all'interno di molteplici sistemi di segni, dove tutto il problema consiste nel comprendere che l'oggetto stesso sarà caratterizzato dall'insieme delle sue rappresentazioni; in questo modo, un oggetto matematico può essere definito come la classe di equivalenza di tutte le sue rappresentazioni. Questo fatto pone due conseguenze essenziali:
1. un oggetto matematico può essere intellegibile in un contesto e sconosciuto o difficile in un altro;
2. la conversione da un registro di rappresentazione ad un altro è essenziale per concepire un oggetto matematico, cosa che richiede un lavoro di traduzione che talvolta fa perdere degli elementi di significato e altre volte ne aggiunge di nuovi; modificando il significante, cioè la maniera di designare l'oggetto, si modifica, si arricchisce e si completa il significato, ossia l'oggetto designato.

Per illustrare il primo punto, consideriamo ad esempio questa moltiplicazione:

$$2375 \times 7 = 16625.$$

Abbiamo numerosi modi per valutare la correttezza, o quantomeno la plausibilità, di questo risultato: l'ordine di grandezza (2500 moltiplicato per 7 dà come risultato 17500, l'ordine di grandezza è rispettato), la cifra delle unità ($7 \times 5 = 35$ e il risultato deve terminare con 5), e inoltre la moltiplicazione in sé non è difficile e la verifica può essere svolta facilmente. Consideriamo ora questa moltiplicazione:

$$2375 \times 7 = 21353.$$

Il nostro primo riflesso potrebbe essere quello di dire che il risultato è falso, utilizzando gli stessi criteri di verifica mobilitati per la prima operazione. Tuttavia, se cambiamo contesto di partenza e consideriamo che la moltiplicazione è fatta in base 8, ecco che improvvisamente ci sentiamo smarriti, e la verifica della validità del risultato non è così scontata: le tabelline della moltiplicazione in base 8 non ci sono familiari e $7 \times 5 = 43$ non suona bene al nostro orecchio! Eppure, stiamo manipolando sempre dei numeri naturali, solo attraverso un'altra loro rappresentazione.
La seconda osservazione riguarda la semiotica e ha numerose conseguenze didattiche che sono state ampiamente studiate in letteratura (si vedano, ad esempio, Arzarello et al., 2009; Bartolini Bussi et al., 2005; Duval, 1991, 1995; Hitt, 2004; Presmeg et al., 2018; Sabena, 2018). A questo proposito, Duval sottolinea che: «Le rappresentazioni semiotiche sono delle produzioni costituite da segni appartenenti ad un sistema di rappresentazione che possiede i propri vincoli di significato e di funzionamento» (Duval, 1991, p. 234, traduzione dell'autore). In seguito, Duval (1993) insiste sul legame tra le conversioni di registri e l'apprendimento: «Non ci può essere un vero apprendimento finché le situazioni e i compiti proposti non prendono in conto la necessità di diversi registri di rappresentazione, per il funzionamento cognitivo del pensiero e la centralità dell'attività di conversione» (p. 64, traduzione dell'autore).

Il rapporto dialettico tra *noésis* (comprensione concettuale di un oggetto) e *sémiosis* (comprensione delle rappresentazioni semiotiche di un oggetto) è al centro della comprensione degli oggetti della matematica e partecipa all'«implicazione dell'astratto nella genesi del concreto» di cui parla Lautman (1977, p. 205, traduzione dell'autore).
In quest'ottica, anche la manipolazione dei simboli, essenziale in ogni pratica matematica, contribuisce in questo modo alla comprensione dell'oggetto manipolato in un rapporto dialettico la cui importanza in termini didattici è spesso minimizzata, in particolare lasciando intendere che un oggetto sia intimamente legato a una delle sue rappresentazioni. L'esempio precedente illustra come nel campo numerico questa difficoltà sia presente e, anche se un obiettivo essenziale della scuola primaria è la

padronanza del sistema di numerazione decimale e posizionale, è illusorio e talvolta pericoloso lasciare intendere che un numero sia equivalente alla sua rappresentazione in questo sistema di segni.

2.4 Manipolare la logica

Una delle prime osservazioni di Polya (1945/1957) è la seguente: «se non riesci a risolvere il problema proposto, prova a risolvere prima i problemi ad esso correlati» (p. XVII, traduzione dell'autore); un consiglio essenziale per invitare gli allievi ad osare, proponendo dei "piccoli frammenti di matematica" che potranno forse non condurre a una soluzione generale, ma che, ad ogni modo, parteciperanno alla costruzione delle conoscenze matematiche dell'allievo.

2.4.1 Il ruolo della logica nell'interpretazione di un'esperienza

Quando noi risolviamo un problema – dove il "noi" rappresenta ogni persona confrontata con un problema matematico (sia esso un matematico o una matematica, un allievo o un professore) – tutti i mezzi sono consentiti. È esattamente in questa fase che la creatività e l'aiuto dell'intuizione permettono di mettere in evidenza degli elementi essenziali per la risoluzione. In questo senso, la risoluzione di un problema è il luogo in cui poter realizzare delle esperienze matematiche. A proposito di esperienza, soffermiamoci un momento sul senso che diamo a questo termine in matematica: seguendo quanto espresso da Dias (2008), «l'andirivieni tra teoria ed esperienza è precisamente quello che caratterizza una pratica di tipo sperimentale» (p. 27, traduzione dell'autore); la sperimentazione ha senso unicamente quando si articolano la formulazione di ipotesi e la (o le) loro validazione(i) che può (o possono) intendersi come una verifica empirica o una dimostrazione nel senso matematico del termine (tornerò sulla nozione di validazione nel prossimo paragrafo). Nella sperimentazione si suppone che il soggetto possa manipolare degli oggetti concreti o sufficientemente familiari perché possano apparire come tali. Di conseguenza, un allievo di scuola media potrà manipolare i numeri naturali e le operazioni elementari su questi numeri come se si trattasse di oggetti reali. L'espressione "come se" rimanda a delle posizioni epistemologiche forti, che ritroviamo per esempio nel modo in cui Poincaré (1902/1968) utilizza il concetto di etere, ripreso in seguito da Mizony:

> «[…] un etere è la reificazione (la cosificazione) di uno spazio matematico utilizzato per studiare un campo di fenomeni. E se il campo di fenomeni è unico, vi è una molteplicità di spazi matematici in grado di esprimere un campo della fisica (quello che Poincaré definisce come il pluralismo teorico), e quindi una molteplicità di eteri possibili se reifichiamo questi spazi matematici».
>
> (Mizony, 2006, p. 92, traduzione dell'autore)

L'esperienza può essere realizzata anche senza utilizzare le logiche della matematica. Tuttavia, vi è un momento in cui se si intende trasmettere i concetti compresi o intuiti attraverso l'esperienza occorre passare attraverso le regole ammesse dalla logica matematica che sono al centro dell'enunciato di una frase matematica. È passando al vaglio della logica le frasi così prodotte che possono essere validati o rigettati i risultati dell'esperienza empirica. In effetti, la deduzione logica esiste eccome in matematica e fonda i ragionamenti "ipotetico-deduttivi", ma il senso della matematica dimora nella sua relazione con il reale. Per esempio, la retta euclidea senza spessore è una pura astrazione e fonda tutta la geometria che si applica intuitivamente al mondo che ci circonda.
Se dunque da un lato l'esperienza fonda la scoperta della matematica, dall'altro questa scoperta deve tenere conto della struttura logica intrinseca all'esperienza: «L'attività matematica è un'attività sperimentale, in altre parole è un sistema di atti legalizzati da regole e sottomesso a delle condizioni che non dipendono da esse» (Petitot, 1987, p. 98, traduzione dell'autore) citando la posizione di Cavaillès nel dibattito del 4 febbraio 1939 alla Società Francese di Filosofia (Cavaillès & Lautman, 1945). O, come direbbe Lautman, la matematica opera dialetticamente un passaggio dell'essenza all'esistenza:

> «Passiamo in maniera impercettibile dalla comprensione di un problema dialettico alla genesi di un universo di nozioni matematiche. È al riconoscimento di questo momento, in cui l'Idea dà origine al reale che deve, a mio avviso, mirare alla Filosofia matematica».
>
> (Lautman, 1977, p. 147, traduzione dell'autore)

2.4.2 La fase di validazione

Come abbiamo detto pocanzi, la validazione è un momento fondamentale della risoluzione di un problema, che permette l'andirivieni tra esperienza, teoria e riflessione sui risultati dell'esperienza. La risoluzione di un problema può essere concepita come una situazione didattica (Brousseau, 1986) che deve essere devoluta agli allievi. In una situazione, Brousseau (1986) classifica le interazioni dell'alunno con il *milieu* (ovvero, in senso ampio, l'ambiente di apprendimento) in tre grandi categorie, che corrispondono a tre fasi:

– *fase di azione*, nella quale avvengono scambi di informazioni non codificate in un linguaggio, che corrispondono a delle azioni che i protagonisti fanno direttamente sul milieu e sugli altri protagonisti della situazione, interpretandone le retroazioni e attivando le proprie conoscenze e i teoremi-in-atto di cui dispongono;
– *fase di formulazione*, nella quale avvengono scambi di informazioni codificate in un linguaggio;
– *fase di validazione*, nella quale avvengono scambi di giudizi.

Nella fase di validazione avviene la messa in relazione tra i risultati dell'esperienza sul milieu e le conoscenze dei protagonisti; è in questa fase che le regole della logica differiscono dalle regole instaurate dalla logica classica, che sottintendono il ragionamento ipotetico-deduttivo della matematica. Brousseau scrive:

> «Le dimostrazioni e le validazioni esplicite dovrebbero appoggiarsi le une sulle altre fino a giungere all'evidenza, ma la loro articolazione non è per forza automatica. I saperi e le conoscenze si attualizzano in un'attività di ricerca o di prova secondo le modalità che l'euristica cerca di scoprire e che l'intelligenza artificiale tenta di riprodurre».
>
> (Brousseau, 1986, p. 348, traduzione dell'autore)

In questa fase si tratta allora di costruire un messaggio matematico preciso, "vero" nel senso matematico del termine, in una dimensione dialogica il cui oggetto verte prevalentemente sulla veridicità delle asserzioni.

Ora, in questo andirivieni tra l'esperienza e la teoria matematica che dovrebbe modellizzarla, il senso degli oggetti manipolati è primordiale. In una fase di validazione si tratta quindi di decidere da una parte sulla verità semantica degli enunciati, dall'altra sulla verità pragmatica mettendo in gioco il linguaggio naturale. Per garantire la veridicità degli enunciati e permettere l'avanzamento della risoluzione di un problema, i protagonisti devono fare affidamento su una logica, diversa dalla logica matematica delle proposizioni, ma sufficientemente esplicita perché possa permettere di fare avanzare la trasformazione dei confronti avuti con il *milieu* verso una traduzione formale, matematicamente valida nel linguaggio formale della matematica, e alla quale è possibile attribuire il valore di verità "vero" nella logica delle proposizioni. Per essere più precisi, occorre distinguere tra il credere che un'asserzione sia vera ("*véracité*") e l'accordo tra i protagonisti della situazione circa il fatto che l'asserzione è vera ("*véridicité*", intesa come accordo sulla "*véracité*" di una asserzione) (Vernant, 2004, 2008).

La modellizzazione della logica dialogica è allora costruita su un'articolazione tra *véridicité* e verità, vale a dire una coerenza di dialogo che possa essere giudicata internamente dai protagonisti, e un risultato che possa essere confrontato con un giudizio esterno. La verità può allora intendersi, come proposto da Tarski, come relativa a un meta-linguaggio nel quale la verità è definita da:

P è vera se e solamente se *p*, dove *p* è la proposizione espressa da *P*.

Questa definizione semantica della verità concede delle interpretazioni diverse e da un punto di vista filosofico è neutra:

> «Infatti, la definizione semantica della verità non implica nulla riguardo alle condizioni per le quali un enunciato come "la neve è bianca" possa essere dichiarato. Implica solamente che ogni volta che asseriamo o rifiutiamo questo enunciato, dobbiamo essere pronti ad asserire o a rifiutare l'enunciato correlato: "L'enunciato 'la neve è bianca' è vero"».
>
> (Tarski, 1972, p. 295, traduzione dell'autore)

Così, la fase di validazione proposta da Brousseau può essere modellizzata in questa prospettiva, come sottolineato da Durand-Guerrier:

> «Diciamo che l'apparato logico di cui abbiamo bisogno per trattare la questione dell'apprendimento della dimostrazione e del ragionamento nella prospettiva, in particolare, della teoria delle situazioni didattiche, deve essere più consapevole dell'attività effettiva del matematico, e pensiamo abbiano dato delle prove di fecondità, per questo, i concetti e i metodi della teoria dei modelli di Tarski».
>
> (Durand-Guerrier, 2005, p. 23, traduzione dell'autore)

L'insieme di queste considerazioni filosofiche e logiche costituiscono un fondamento per l'analisi delle situazioni didattiche di problem solving proposte dall'equipe DREAM. L'originalità di queste situazioni consiste nel lasciare agli allievi la scelta di decidere le esperienze da realizzare, i tipi di ragionamento da attivare e le teorie matematiche alle quali attingere. Nella seconda parte dell'articolo utilizzeremo le considerazioni appena fatte in questo paragrafo per analizzare il lavoro di allievi confrontati a due situazioni di questo tipo.

3 Due esempi di situazioni didattiche di problem solving

Gli esempi che seguono sono tratti dalle osservazioni condotte dall'equipe DREAM e nel contesto di una sperimentazione condotta alla MMI in una scuola superiore e in alcune scuole elementari e medie della regione di Lione (Aldon & Garreau, 2017). Il primo esempio esposto verterà sull'analisi dei comportamenti di allievi di Première, ovvero, in Francia, del secondo anno di liceo (grado 11). Il secondo esempio illustra i comportamenti di allievi di *Cours Moyen 2* (ultimo anno di scuola elementare, grado 5) e di *Sixième* (primo anno di scuola media, grado 6).

3.1 Primo esempio: le frazioni egizie

3.1.1 Contesto

Oltre che sul problema aperto, i lavori dell'equipe DREAM si basano anche sugli studi sviluppati attorno all'articolazione tra logica e ragionamento matematico (Durand-Guerrier, 2005), e le tesi di Marie-Line Gardes (2013) e di Mathias Front (2015). La metodologia di ricerca si basa sul paradigma della *design-based research* per la quale la ricerca è fondata su una necessità epistemologica per i ricercatori di agire con gli insegnanti (Monod-Ansaldi et al., 2019; Nizet et al., 2019). In questo approccio, partendo da situazioni matematiche ricche, l'equipe analizza dal punto di vista matematico, didattico e pragmatico il potenziale di queste situazioni al fine di trasformarle in situazioni didattiche di problem solving. Oltre che ai lavori accademici (master e tesi di dottorato), le pubblicazioni dell'equipe di ricerca (si vedano per esempio: Aldon et al., 2010; Aldon et al., 2012; Front, 2012; Front

& Gardes, 2015) mettono in evidenza gli apprendimenti degli allievi confrontati a delle situazioni didattiche di problem solving. Ognuno dei problemi analizzati viene sperimentato in alcune classi, ed è proprio sull'analisi di tali osservazioni che si costruisce il prossimo paragrafo. Il problema presentato nel seguito è stato proposto a differenti livelli scolastici, ma nell'articolo mi riferirò unicamente all'osservazione svolta in una classe *Première* (grado 11).

3.1.2 Metodologia

L'obiettivo del lavoro dell'equipe DREAM è quello di proporre agli insegnanti di matematica degli approcci per utilizzare i problemi nel loro insegnamento. Le seguenti domande sono al centro della ricerca:

– Quali sono le conoscenze, le competenze trasversali e meta-matematiche che è possibile valutare in una pratica di problem solving? E quali sono gli indicatori che possono essere messi in atto?
– La creatività e l'inventiva matematica sviluppate nelle situazioni didattiche di problem solving modificano l'immagine che hanno gli studenti della matematica (e il loro desiderio di fare matematica)? E per gli insegnanti?
– Le situazioni didattiche di problem solving che sviluppano una forma di acquisizione della conoscenza aiutano gli studenti a progredire in altre aree dell'attività matematica? Come gli studenti reinvestono in altri contesti le competenze e le conoscenze sviluppate?

Per rispondere a queste domande, stiamo realizzando nelle classi degli insegnanti coinvolti nel progetto delle sperimentazioni che vengono osservate e analizzate alla luce delle ipotesi di ricerca basate sulle nostre posizioni epistemologiche descritte nella prima parte di questo articolo (par. 2). Le osservazioni si sono svolte in aula con un osservatore per gruppo che ha registrato i dialoghi degli allievi.

3.1.3 Il problema

Così, è stata organizzata una sperimentazione in una classe di liceo con l'obiettivo di raccogliere elementi di risposta alle domande precedenti, in particolare per quanto riguarda la creatività e l'invenzione matematica sviluppata da questo tipo di problemi negli studenti di una classe *Première* di liceo scientifico. L'analisi seguente si concentra sull'adeguatezza delle nostre ipotesi epistemologiche e didattiche confrontate con la realtà di una situazione didattica di problem solving in aula. In questo esempio, i dialoghi degli studenti che hanno lavorato in gruppi formati dall'insegnante sono stati registrati e l'analisi si concentra sia sul problema in sé – il suo potenziale per sviluppare la creatività e l'apprendimento, e il suo legame con le conoscenze matematiche degli studenti –, sia sul confronto tra le basi epistemologiche del nostro studio e il lavoro effettivo degli studenti.
Questo esempio è stato scelto per evidenziare due aspetti sviluppati nel par. 2:

– da un lato, la manipolazione dei simboli senza la comprensione del fenomeno in questione porta all'impossibilità di concludere;
– d'altra parte, il tentativo di una costruzione di una verità matematica si fa attraverso la ricerca di un accordo tra i partecipanti alle tappe del ragionamento.

L'enunciato che è stato proposto dall'insegnante in questa classe *Première* è il seguente:

1. Riesci a trovare due numeri interi naturali a e b distinti, in modo tale che: $1 = 1/a + 1/b$?
2. Riesci a trovare tre numeri interi naturali a, b e c distinti in modo tale che: $1 = 1/a + 1/b + 1/c$?
3. Riesci a trovare quattro numeri interi naturali a, b, c e d distinti in modo tale che:
   $1 = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d$?

Continua…

Da un punto di vista matematico, alla prima domanda si può rispondere negativamente considerando diverse strategie, tra cui per esempio sfruttando la decrescita della funzione inversa su $\mathbb{N}$:
possiamo supporre che $2 \leq a < b$ e quindi $1/b < 1/a \leq 1/2$ di conseguenza $1/a + 1/b < 1$.

La seconda domanda può essere affrontata trovando un metodo generale per determinare una scomposizione in n frazioni dell'unità. Per esempio, partendo dalle uguaglianze 1 = 1/2 + 1/2 e 1/2 = 1/3 + 1/6, possiamo dedurre che 1 = 1/2 + 1/3 + 1/6.
Possiamo individuare il generarsi di una soluzione di ordine superiore, per esempio osservando che qualsiasi sia $n > 0$, $1/n = 1/(n + 1) + 1/n \cdot (n + 1)$; da questo segue per esempio che:

1 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 scomponendo 1/6 in 1/7 + 1/42. E così via.

La lezione si è svolta in un'ora, gli allievi sono stati raggruppati in sette gruppi ciascuno dei quali è stato osservato e registrato da osservatori esterni. L'insegnante ha esplicitato dall'inizio che gli allievi avevano diritto di passare alla seconda domanda anche se non avevano risolto la prima. L'esperienza dimostra in effetti che la prima domanda può essere difficile per degli allievi a causa della risposta negativa: non esistono due interi naturali a e b distinti tale che $1 = 1/a + 1/b$! Questa risposta negativa da un lato può entrare in contrasto con il contratto abituale della classe (quando una domanda è posta, vi è sempre una soluzione), dall'altro si scontra con il fatto che la risposta negativa implica una dimostrazione *universale*: per ogni coppia di numeri interi a e b distinti, $1 \neq 1/a + 1/b$, mentre una risposta positiva implicherebbe una dimostrazione *esistenziale*: esistono due numeri interi naturali a e b distinti tali che: $1 = 1/a + 1/b$.
La consegna data dall'insegnante è quella di risolvere in gruppo il problema e di prendere nota su un cartellone, prima della fine dell'ora, dei risultati trovati da ciascun gruppo. La richiesta da parte dell'insegnante di scrivere un resoconto sul cartellone ha lo scopo di stimolare la validazione dei ragionamenti, di permettere in un primo tempo agli allievi di capirsi tra loro e, conseguentemente, di andare verso una verità semantica espressa nel cartellone.
Non mi soffermerò nel dettagliare l'insieme delle produzioni degli allievi, ma mi attarderò piuttosto su alcuni momenti e dialoghi significativi in termini di manipolazione e di validazione all'interno dei gruppi.

3.1.4 Osservazione e discussione

Esaminiamo in particolare questo dialogo tenutosi in un gruppo di quattro allievi (A1, B1, C1 e D1). Dopo un piccolo momento di riflessione individuale, il dialogo inizia così.

1. A1: «Hai risolto la domanda 2?»
2. D1: «Sì».
3. A1: «Una sola soluzione? E se moltiplichi tutto per due? Prova con i multipli».

[…]

4. A1: «Bisogna trovare un numero intero che divida 1 e che sia inferiore a b. Bisognerebbe avere $a < b$ oppure $b < a$».
5. B1: «Non puoi scegliere».
6. A1: «È una questione di multipli».
7. B1: «Di multipli?»

[…]

8. D1: «La frazione più piccola con dei numeri interi è 1/2; non puoi avere una frazione di interi più piccola [Mima con le mani l'unità, poi la metà e mostra che resta una metà che non potrà essere colmata da una delle frazioni egizie successive]».
9. C1: «Ah sì, hai ragione».
10. D1: «La domanda 1 non è possibile, la frazione più piccola è ½».
11. B1: «Puoi spiegarti?»
12. D1: «Per la domanda 2, la soluzione è: $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$; e per il 3 è: $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$, $d = 18$».
13. A1: «Perché la domanda 1 non è possibile?»
14. D1: «[Si lancia allora nella determinazione di somme di 4, 5 frazioni egizie che costruisce scomponendo l'ultimo termine in due frazioni egizie e che spiega nel modo seguente

ai suoi compagni]: Ne sono sicuro. Ho preso la cifra più piccola senza arrivare a 1. È il trucco delle frazioni egizie: 1 - 1/2 = 1/2, 1/2 - 1/3 = 1/6, ho preso il numero sopra: 1/6 - 1/9 = 1/18. Si può continuare mettendo al posto del 18…».

15. A1: «Perché la prima domanda è impossibile?»

Questo estratto è particolarmente interessante per via di un'incomprensione nata tra i protagonisti. D1, all'inizio silenzioso, entra nella discussione avendo capito perfettamente l'impossibilità di scomporre 1 nella somma di due frazioni egizie distinte. La giustificazione che propone si basa sulla manipolazione delle grandezze (intervento 8); il suo gesto mostra chiaramente la sua comprensione profonda del fenomeno, che l'allievo traduce in maniera più confusa oralmente: «la frazione più piccola con due numeri interi è 1/2»; i suoi compagni, che non si trovano nel suo stesso registro di grandezze ma si situano piuttosto nel registro algebrico, come si vede in seguito, ritengono che questa spiegazione orale non sia convincente, poiché con dei numeri interi maggiori di 2 tutte le frazioni egizie sono più piccole di 1/2. La confusione nel discorso di D1 tra «il più piccolo numero intero positivo che possiamo considerare è 2» e «la frazione più piccola è 1/2» (intervento 10), non gli permette di comunicare efficacemente il suo ragionamento ai compagni, come testimoniato dalle domande di B1 (intervento 11) e di A1 (intervento 15). Il «Ah sì, hai ragione!» di C1 (intervento 9) potrebbe farci supporre che D1 sia riuscito almeno a convincere C1. Tuttavia, quando si tratta di riassumere la loro ricerca sul cartellone, C1 scrive:

1)∘ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ donc $\frac{1b + 1a}{ab} = 1$

$\frac{a+b}{ab} = 1$ donc $a+b = ab$

¡IMPOSSIBLE!

Figura 1. Giustificazione per la prima domanda da parte di C1.

C1 ritorna quindi a un ragionamento algebrico in cui l'ultimo passaggio (cfr. «*Impossible*» in Figura 1) non è giustificato. Per C1, la manipolazione dei simboli nel campo algebrico è consolidata, ma il suo confronto con D1 (interventi 8-10) non si trasforma in una traduzione formale, perché risultano diversi i domini in cui lavorano D1 da una parte e C1 dall'altra (insieme anche a A1 e B1).
Il secondo aspetto interessante di questo estratto consiste invece nella manipolazione dei registri di rappresentazione che D1 effettua, traduce e trasforma in scrittura formale. Tutto si svolge come se il fatto di avere compreso e gestito la situazione di due frazioni egizie gli permettesse di cambiare registro e di tradurre nel registro aritmetico e in scrittura formale adeguata i risultati per trovare finalmente una maniera di generare delle serie di frazioni egizie, lunghe quanto desidera, di somma 1. È quello che D1 detta a C1 nella seconda parte del cartellone (anche se mentre ricopia C1 commette un errore scrivendo al punto 2 in Figura 2, 1 - 1/3 = 1/6 al posto di 1/2 - 1/3 = 1/6).

2)∘ $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$

3). $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1.$

Figura 2.Generazione di una serie di frazioni egizie di somma 1.

Riassumendo, in questo gruppo vediamo bene che le manipolazioni dell'astratto, dei simboli e della logica dipendono fortemente dal registro utilizzato; il passaggio dall'uno all'altro non può avvenire senza un riferimento al campo fenomenologico che soggiace a questo registro.

Esaminiamo ora il comportamento di un secondo gruppo nel quale, dopo diversi tipi di manipolazione, le esperienze successive sfociano in una dimostrazione formale quasi completa. In un primo momento il gruppo di quattro allievi, che chiameremo A2, B2, C2 e D2, si situano in un registro algebrico e deducono che se $1 = 1/a + 1/b$ allora $a = b - 1/a$ e $b = a - 1/b$. In seguito, rimpiazzando a con il suo valore nella seconda uguaglianza, trovano 1 = 1, che non sanno bene come interpretare. Di conseguenza cambiano strategia e sperimentano con i numeri.

1. C2: «1 = 1/2 + 1/2 dunque è possibile, ma $a = b$. E poi c'è confusione».
2. A2: «Dev'esserci un algoritmo per passare dalla prima domanda alla seconda, bisogna quindi risolvere la prima».

[Malgrado una discussione sulle frazioni, non arrivano a convincersi dell'impossibilità della domanda 1].

3. A2: «Una soluzione c'è, ma non so come spiegartela!»

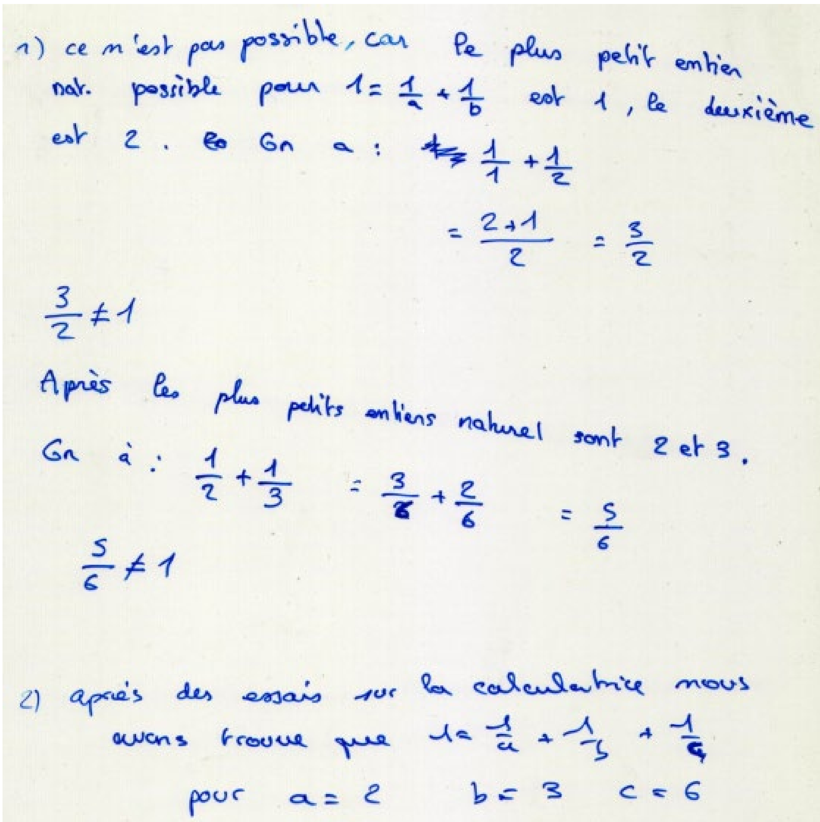
[Dopo essere passato alla seconda domanda, ritorna sulla prima].

4. A2: «1/2 + 1/3, poi 1/3 + 1/4, ci si allontana da 1».
5. C2: «Ma non stiamo facendo le osservazioni di scienze della vita e della Terra!»
6. A2: «Sì, serve vedere».

[…]

7. A2: «Io ho provato che più è grande più ci si allontana».

Infine, scrivono il loro ragionamento sul cartellone in Figura 3.


1) ce n'est pas possible, car le plus petit entier nat. possible pour $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est 1, le deuxième est 2. ~~Es~~ On a : $\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

$= \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} \neq 1$

Après les plus petits entiers naturel sont 2 et 3.

On à : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{5}{6} \neq 1$

2) après des essais sur la calculatrice nous avons trouvé que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

pour $a = 2$ $b = 3$ $c = 6$

Figura 3. Il cartellone completo del secondo gruppo.

In questo caso, anche se la scrittura formale non è completamente raggiunta, il ragionamento seguito dal gruppo conduce effettivamente a una dimostrazione dell'impossibilità di scomporre 1 in una somma di due frazioni egizie distinte. È proprio attraverso un dialogo che verte sulla veridicità delle asserzioni che viene elaborata la costruzione matematica del ragionamento.
In questo gruppo il passaggio da una verità pragmatica, fondata sulla manipolazione di esempi, a una verità semantica espressa nel cartellone, si traduce nel confronto tra l'orale e lo scritto. Il risultato ottenuto dal gruppo va a smontare l'ipotesi iniziale formulata da A2: «Deve esserci un algoritmo per passare dalla prima domanda alla seconda, bisogna quindi risolvere la prima» (intervento 2). Da notare anche che, nonostante le sollecitazioni dell'insegnante, questa ipotesi resta presente, a dimostrazione di quanto sia difficile scardinare alcune clausole del contratto didattico. Dopo avere trovato una terna in risposta alla seconda domanda gli allievi ritornano sulla prima, ma questa volta lo fanno per confutare la congettura iniziale e dimostrarne l'impossibilità utilizzando in maniera pragmatica la decrescita della funzione $x \to 1/x$ («Io ho provato che più [il denominatore] è grande, più ci si allontana [da 1]», dice A2).
Inoltre, è interessante il breve dialogo tra A2 e C2 sull'esperienza in matematica a confronto con quella condotta nella disciplina scienze della vita e della Terra: «Sì, serve vedere» dice A2, situando in questo modo l'esperienza e la manipolazione dell'astratto matematico rispetto all'esperienza su oggetti concreti effettuata nelle scienze sperimentali.
In generale, le osservazioni di tutti i gruppi mettono in evidenza la difficoltà di uscire da un'investigazione algebrica, che è indotta dall'enunciato dato sotto questa forma. Un numero importante di allievi si lancia in tentativi di dimostrazione utilizzando il calcolo algebrico, in generale senza successo. Da ciò, potremmo ipotizzare una confusione tra l'utilizzo delle lettere e l'algebra, provocata senza dubbio dall'insegnamento dell'algebra sovente presentata come calcolo "con le lettere". Il problema che si pone qui è un problema di aritmetica e una risoluzione della prima domanda potrebbe essere espressa dal seguente ragionamento per assurdo:

Supponiamo che esistano a e b tali che $1/a + 1/b = 1$
ne deduciamo allora che $a + b = ab$
quindi a divide $a + b$ e quindi a divide b e allo stesso modo b divide $a + b$ e quindi b divide a.
$a = kb = kk'a$ quindi $kk' = 1$ e quindi $k = k' = 1$, da cui $a = b$, cosa che contraddice l'ipotesi. Quindi si può concludere che non esistono due numeri naturali a e b distinti tali che $1/a + 1/b = 1$.

Ma questo ragionamento suppone che la congettura sia inizialmente prodotta, spostando peraltro il problema in un dominio poco lavorato in classe.

3.2 Secondo esempio: Il problema del foglio di carta

3.2.1 Contesto

La *Maison des Mathématiques et de l'Informatique* (MMI) è un luogo «di mediazione dei saperi dedicato alle scienze matematiche e informatiche attraverso un approccio vivo, ludico e pluridisciplinare» (https://www.mmi-lyon.fr/, traduzione dell'autore). Si tratta anche di un centro di risorse pedagogiche il cui obiettivo è quello di accompagnare gli insegnanti e i loro allievi nella diffusione di metodi d'insegnamento e apprendimento, mettendo in evidenza l'attività e la scoperta degli allievi. Nel contesto delle attività della MMI, ho partecipato alla formazione di insegnanti di scuola elementare e di scuola media con l'obiettivo di sensibilizzarli all'utilizzo di problemi matematici nel loro insegnamento. In questo quadro, e in relazione con gli istituti, ho proposto una ricerca collaborativa che si è svolta per diversi anni consecutivi, raggruppando allievi di *CM2* (grado 5, ultimo anno di scuola elementare) e allievi di *Sixième* (grado 6, primo anno di scuola media). La finalità di questo dispositivo era duplice: da una parte si voleva coinvolgere gli insegnanti in un procedimento in cui i problemi di matematica fossero al cuore del loro insegnamento, dall'altra si voleva dare la possibilità agli allievi di vivere una situazione matematica non scolastica, invitandoli a condurre una riflessione sulle proprie procedure di risoluzione. Si è cercato di coinvolgere gli allievi in un lavoro che conducesse alla ricerca di modalità risolutive partendo da un problema sufficientemente complesso perché la ricerca potesse svilupparsi nel tempo, arricchendo le lezioni di matematica sia da un punto di vista delle procedure utilizzate che dei concetti matematici manipolati. Ho così proposto a tutte le classi di risolvere il seguente problema. Tutto parte da un foglio di carta che taglieremo in più pezzi.

> Immaginiamo di tagliarlo in due, poi di prendere uno dei due pezzi e di tagliarlo in due, poi di prendere uno dei pezzetti e di tagliarlo in due e così di seguito. Quante volte devo svolgere questa operazione per ottenere 2016 pezzi di carta?
> Ora, lo taglio in tre, poi prendo uno dei tre pezzi e lo taglio in tre, poi prendo uno dei pezzetti e lo taglio in tre e così di seguito. Potrei riuscire ad ottenere 2016 pezzi?[4]
> E se facessi la stessa operazione, però tagliando il foglio in quattro pezzi? E in cinque?... Più in generale, quanti sono i tagli che mi permetteranno di ottenere 2016 pezzi? E se volessi ottenerne 2017? E 2018?

Da un punto di vista matematico, modellizzando la situazione, un numero p sarà raggiunto tagliando ogni volta un pezzo in n parti se e solo se n-1 è un divisore di p-1. Le nozioni di divisore, numero primo, scomposizione di un numero in un prodotto di fattori primi ecc. sono centrali per la risoluzione di questo problema.

3.2.2 Metodologia

Le osservazioni del lavoro in classe realizzate in questo caso differiscono dalle osservazioni realizzate nella prima sperimentazione descritta nel par. 3.1. In questo caso, infatti, le osservazioni vertono sulla continuità del lavoro e si appoggiano sulle produzioni degli allievi, talvolta scritte, altre volte orali, durante la presentazione dei loro lavori.
La sperimentazione si è svolta come segue: sono state coinvolte otto classi, quattro *CM2* e quattro *Sixième*. All'inizio, ho presentato il problema alle classi tutte raccolte in un anfiteatro e gli alunni hanno potuto realizzare la loro ricerca iniziale in questo quadro. In un secondo tempo, gli insegnanti si sono messi in gioco nel supervisionare le ricerche degli allievi durante i due mesi della sperimentazione, organizzando nelle loro classi dei momenti di ricerca delle soluzioni al problema chiedendo agli alunni di fare periodicamente una valutazione della loro ricerca. Nella terza fase, ho fatto visita alle otto classi in modo che gli studenti potessero presentarmi le loro ricerche. Questi momenti di lavoro sono stati l'occasione per me di ascoltare gli alunni, prendere nota delle loro relazioni e rilanciare la ricerca. Infine, il quarto momento ha visto un raggruppamento delle otto classi durante il quale gli alunni hanno presentato gli uni agli altri lo stato delle loro ricerche che avevano accuratamente riassunto su dei cartelloni. L'analisi di questo lavoro si basa quindi sulle varie tracce raccolte durante il processo di ricerca e sulle interviste condotte con gli insegnanti. Questo esempio è stato scelto per evidenziare la relazione tra la manipolazione di oggetti concreti (in questo caso, pezzi di carta) e la manipolazione di oggetti astratti (numeri) che porta alla manipolazione di regole logiche attraverso la costruzione e la manipolazione delle rappresentazioni simboliche dei concetti coinvolti. Così, le tre manipolazioni descritte nel par. 2 contribuiscono alla comprensione del problema e alla sua risoluzione, almeno parzialmente.

4. Questo problema è stato sperimentato nel 2016! Fatto interessante anche da un punto di vista matematico poiché i divisori di 2015 sono {1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015} e quindi i valori di n che permettono di ottenere 2016 sono: {2, 6, 14, 66, 156, 404, 2016}!

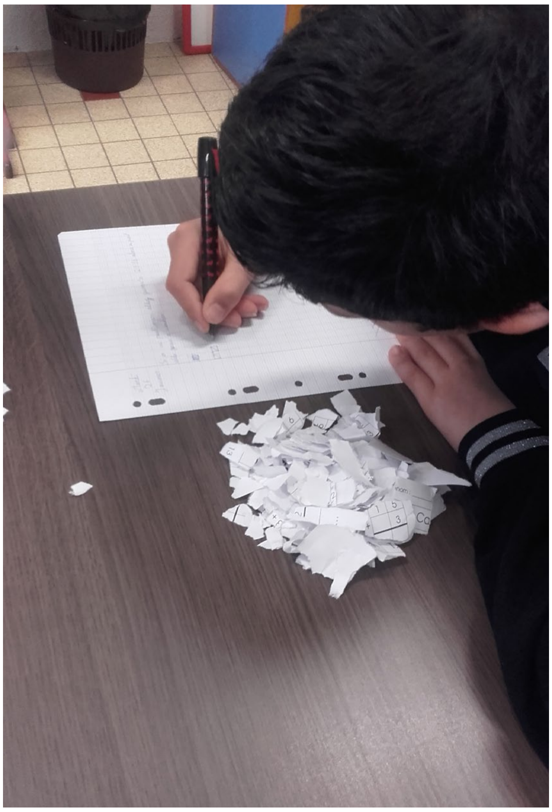
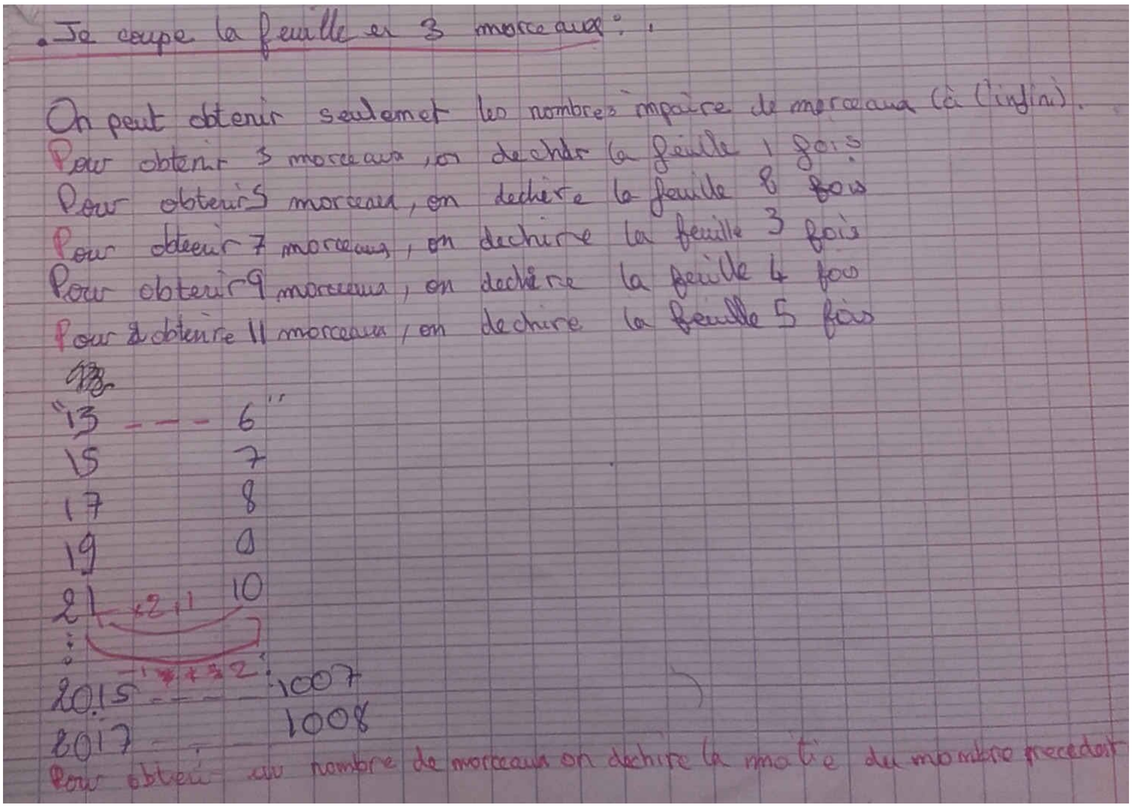


Figura 4. Il passaggio dall'esperienza alla riflessione sull'esperienza.

Chiaramente, le esperienze concrete hanno costituito la prima fase della ricerca di soluzione al problema e la prima domanda (tagliare in due parti) è stata risolta empiricamente: all'inizio c'è un foglio, quindi un pezzo di carta; poi due, poi tre e via di seguito. Tutti i numeri sono raggiunti e, in particolare, 2016 sarà raggiunto alla duemilasedicesima tappa.[5] Questa prima esperienza è semplice e contribuisce così alla devoluzione del problema. Numerosi insegnanti mi hanno riferito come questa tappa fosse stata particolarmente importante per molti allievi, in particolare per coloro che presentavano delle difficoltà matematiche; il problema si lascia affrontare! Ma le difficoltà iniziano quando il problema diventa più complesso, ed è in questo momento che l'andirivieni tra l'esperienza e i concetti soggiacenti struttura la comprensione del fenomeno, permettendo di rinforzare le conoscenze. Accade proprio questo quando il numero di ritagli del foglio aumenta! Fare l'esperienza concreta diventa presto impossibile e la scelta di chiedere se 2016 (o comunque un numero sufficientemente grande) sia raggiungibile obbliga l'allievo ad abbandonare l'esperienza concreta per passare a manipolare gli oggetti matematici che permettono di modellizzare l'esperienza (**Figura 4**). Di conseguenza, il passaggio alla riflessione, che è una condizione necessaria per operare un distacco da oggetti concreti verso il trattamento di oggetti matematici, è una tappa fondamentale per il processo sperimentale in matematica.

In tal modo, nel procedimento di risoluzione di questo problema, gli allievi hanno progressivamente costruito la formalizzazione del problema, come attestato da questo riassunto (**Figura 5**) di un allievo di *Sixième* (grado 6).

5. Per maggiori informazioni sulle analisi matematiche e didattiche di questo problema si rimanda a questo link: https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/40942


• Je coupe la feuille en 3 morceaux :

On peut obtenir seulemet les nombres impaire de morceaux (à l'infini).

Pour obtenir 3 morceaux, on dechire la feuille 1 fois

Pour obtenir 5 morceaux, on dechire la feuille 2 fois

Pour obtenir 7 morceaux, on dechire la feuille 3 fois

Pour obtenir 9 morceaux, on dechire la feuille 4 fois

Pour obtenir 11 morceaux, on dechire la feuille 5 fois

13 --- 6

15 7

17 8

19 9

21 ×2+1 10

2015 -1 ÷2 1007

2017 1008

Pour obtenir un nombre de morceaux on dechire la moitié du nombre precedent

Figura 5. Evoluzione dell'esperienza su oggetti concreti e poi astratti.

Si nota in un primo momento una ricerca empirica, quando si taglia il foglio in tre pezzi ottenendo il risultato «Possiamo ottenere solamente numeri dispari di pezzi (all'infinito)» (seconda riga in **Figura 5**). In seguito, questa esperienza è riportata parola per parola fino a «Per ottenere 11 pezzi…» (settima riga). In seguito, inizia la formalizzazione matematica: non si parla più di pezzi di carta e di numeri di tagli, ma si fa una corrispondenza tra numeri:

13 — 6

15 — 7 ecc. fino a:

2017 — 1008.

Infine, questa manipolazione degli oggetti matematici astratti sfocia in un'esplicitazione delle operazioni che legano le due colonne di numeri: 10 × 2 + 1 = 21 (esempio generico che si applica a tutti i numeri) e nell'altro senso: -1 + : 2, che mostra ancora una difficoltà nel formalizzare la divisione euclidea, dando però il metodo che viene applicato per 2015 e 2017.

Questo esempio è rappresentativo del comportamento degli allievi confrontati a un problema di questo tipo e mostra bene le tre diverse manipolazioni di cui abbiamo parlato precedentemente: manipolazione dell'astratto che arriva progressivamente attraverso un graduale abbandono dell'esperienza concreta che serve a descriverla, come possiamo anche vedere in **Figura 6**; manipolazione dei simboli che permettono di esprimere le osservazioni emerse dall'esperienza, in particolare il modo di far corrispondere le colonne (**Figura 5**) e un tentativo di definizione per ricorrenza dei numeri della seconda colonna, utilizzando le differenze finite (**Figura 6**); manipolazione della logica, quando la validazione dei risultati emersi dalle manipolazioni sugli oggetti astratti si mette a confronto con i risultati dell'esperienza concreta (**Figura 4**).

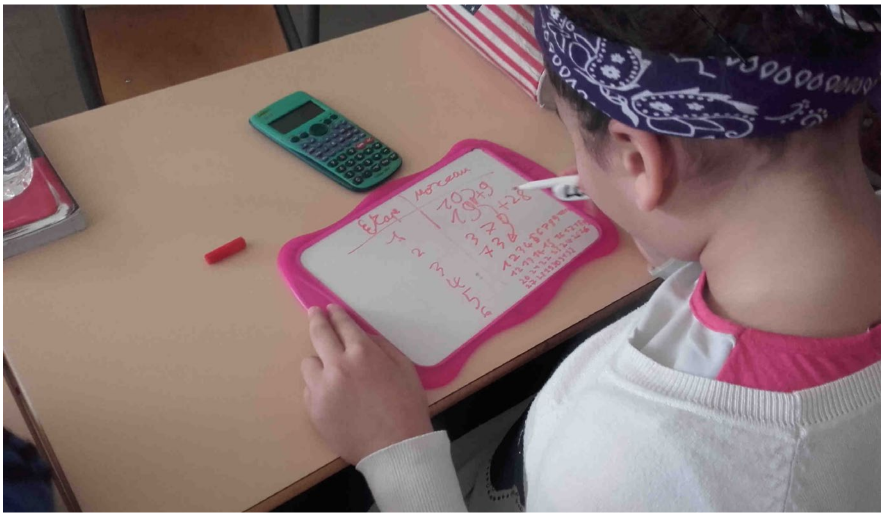


Figura 6. Passaggio a una manipolazione dell'astratto.

4 Conclusioni

La negoziazione di un contratto didattico nel quale gli allievi accettano che si possa apprendere la matematica, confrontandosi con dei problemi matematici,[6] non è per nulla scontata. Si tratta di un compito complesso che passa da una fase nella quale si stabilisce una cultura di ricerca all'interno della classe, attraverso dei quesiti, delle sfide, dei piccoli problemi, delle routine che possono allettare la curiosità e coinvolgere gli allievi in una nuova voglia di capire. Se la risoluzione di problemi diviene parte integrante del metodo di insegnamento e si fonda sulle manipolazioni (intese come descritte in questo articolo), essa diventa non solo un vettore di apprendimento di euristiche e di metodi di dimostrazione (competenze meta-matematiche) ma anche un modo di introdurre o di consolidare le conoscenze di oggetti matematici in legame con i piani di studio delle classi interessate. Gli esempi presentati in questo articolo mettono in evidenza gli apporti di questo approccio per gli apprendimenti matematici, mostrando l'importanza di differenti manipolazioni che sono necessarie per stabilire dei risultati matematici. Lungi dal contrapporre l'allenamento delle tecniche e la ricerca del senso, questi esempi mostrano bene come la costruzione dialettica della conoscenza matematica si appoggi invece sull'equilibrio tra manipolazione di oggetti astratti, manipolazione di simboli inseriti in un registro di rappresentazione dato, e manipolazione della logica (o delle logiche). Come esplicitato da Michèle Artigue a proposito del calcolo:

> «Ciò che costituisce la potenza della matematica, infine, non è solamente il fatto che essa si appropri di oggetti calcolabili e di sistemi di rappresentazione che sostengono efficacemente il calcolo, ma è anche il fatto che questo calcolo possa diventare algoritmo e automatizzarsi. Il calcolo è di conseguenza preso in un movimento altro, più potente, quello della sua meccanizzazione che, quando è riuscita, permette di svolgerlo senza pensare, riducendolo a una successione automatizzata di gesti. Questa meccanizzazione è necessaria per la progressione della conoscenza e vi è quindi, nella maggior parte dei calcoli, una sottile alchimia tra pensiero e routine».
>
> (Artigue, 2005, p. 4, traduzione dell'autore)

6. Con l'espressione "problemi matematici" si intende ricordare che in questo articolo il focus è stato messo sul processo di matematizzazione verticale attivato dagli allievi, ossia sul lavoro da essi svolto all'interno del mondo della matematica per risolvere i problemi proposti.

Le questioni che emergono sono dunque di ordine pedagogico e didattico e le si affronta attraverso sperimentazioni di un insegnamento basato sulla risoluzione di problemi, in cui la progressione annuale non sarà scandita in conoscenze da acquisire, ma piuttosto in problemi o in situazioni didattiche di problem solving. Tali situazioni lasciano la possibilità agli allievi di mobilitare le loro conoscenze e le loro competenze matematiche per fare emergere dei nuovi concetti o consolidare delle nozioni già presenti. L'ambizione dell'attuale lavoro dell'equipe DREAM è quella di esplorare su grande scala e in un contesto ordinario le condizioni e i vincoli per un insegnamento efficace della matematica, incentrato sul processo "manipolare – verbalizzare – astrarre" attraverso la risoluzione di problemi. I primi risultati mostrano da una parte la fattibilità di tale processo di insegnamento nelle classi "ordinarie" e dall'altra gli apporti in termini di apprendimento della matematica per gli allievi.

Ringraziamenti
Si ringraziano Chiara Zuretti e Monica Panero per l'aiuto nella traduzione del lavoro dal francese all'italiano e viceversa.

Bibliografia

Aldon, G., Cahuet, P., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., & Tardy, C. (2010). EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'Ecole. *Cérédom*. INRP, IREM de Lyon.

Aldon, G., Front, M., & Gardes, M.-L. (2017). Entre élaboration et usage, comment poser la question de la cohérence des ressources ? *Education & didactique*, *11*(3), 9–30.

Aldon, G., & Garreau, O. (2017). Un dispositif de recherche de problèmes de mathématiques au cycle 3, *Repères IREM*, *108*, 26–40.

Aldon, G., Meunier, M., Roblin, M., Royot, A.-S., Terrenoire, A., Vilas-Boas, H., & Vilas-Boas, J. (2012). Narrations de recherche en mathématiques. Ecrire pour comprendre, écrire pour apprendre. *Cérédom*. IREM de Lyon.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problèmes ouverts et situations problème*. IREM de Lyon.

Artigue, M. (2005). L'intelligence du calcul. *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour*. https://gpc-maths.org/data/documents/artiguecalcul.pdf

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109.

Bachelard, G. (1967). *La formation de l'esprit scientifique* (5e éd.). Librairie philosophique J. VRIN.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in the primary school. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign* (pp. 77–90). Springer.

Bonnay, D., & Dubucs, J. (2011). *La philosophie des mathématiques*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00617305

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain la Neuve.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Cavaillès, J., & Lautman, A. (1945). Discussion sur la pensée mathématique. *Société française de Philosophie*, séance du 4 février 1939, vol. 40.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques: un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (2005). Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski, *Actes du colloque «Didactiques : quelles références épistémologiques?»* (Bordeaux, 25-27 maggio 2005). https://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme2-complet/cours-Durand-Guerrier-complet/docs-preparatoires/Durand-guerrier-Actes-Bordeaux-2005pdf.pdf

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233–261.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Front, M. (2012). Pavages archimédiens du plan : une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM*, *89*, 5–37.

Front, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan*. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1.

Front, M., & Gardes, M.-L. (2015). Un projet d'enseignement fondé sur les situations de recherche. In G. Aldon (Ed.), *Actes de la 66ème CIEAEM Mathématiques et réalités* (pp. 132–138). Lyon, 21-25 luglio 2014. http://math.unipa.it/~grim/quaderno24_suppl_1.htm

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1.

Gonseth, F. (1974). *Les mathématiques et la réalité*. Blanchard. (edizione originale del 1936).

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 329–354.

Kant, E. (1905). *Critique de la raison pure. Félix Alcan édition*. (Titolo originale: *Kritik der reinen Vernunft* pubblicato nel 1781).

Lautman, A. (1977). *Essai sur l'Unité des Mathématiques et divers écrits, 1935-1939*. Christian Bourgeois.

Longo, G. (2020). Le jeu difficile entre rigueur et sens. In T. Paul & M. Schmidt (Eds.), *La rigueur* (pp. 21–38). Spartacus IDH. https://www.di.ens.fr/users/longo/files/jeu-rigueur-sens.pdf

Mizony, M. (2006). L'héritage de Poincaré: de l'éther à la modélisation. *Repères IREM*, *64*, 91–111.

Monod-Ansaldi, R., Aldon, G., & Vincent, C. (2019). Objets frontières et *brokering* dans les négociations en recherche orientée par la conception. *Education & didactique*, *13*(2), 61–84.

Nizet, I., Monod-Ansaldi, R., Aldon, G., Prieur, M., & Criquet, A. (2019). L'analyse de valuations dans une démarche collaborative de recherche. *La Revue LEeE*, *1*, 1–20. https://revue.leee.online/index.php/info/article/view/47

Petitot, J. (1986). Mathématiques et ontologie. *Séminaire de philosophie et mathématiques*, *3*, 1–19. http://www.numdam.org/article/SPHM_1986___3_A1_0.pdf

Petitot, J. (1987). Refaire le « Timée »: Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman. *Revue d'histoire des sciences*, *40*(1), 79–115.

Poincaré, H. (1968). *La science et l'hypothèse*. Flammarion. (edizione originale del 1902).

Polya, G. (1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press. (edizione originale del 1945).

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Springer Nature.

Sabena, C. (2018). Multimodality and the Semiotic Bundle lens: A constructive resonance with the Theory of Objectification. *PNA*, *12*(4), 185–208.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, *4*(1), 1–94.

Tarski, A. (1972). *Logique, sémantique, métamathématique, 1923-1944* (traduction de G.G. Granger). Armand-Colin.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction-the Wiskobas project*. Reidel Publishing.

Vernant, D. (2004). Pour une logique dialogique de la véridicité. *Cahiers de linguistique française*, *26*, 87–111.

Vernant, D. (2008). Définition stratifiée de la véridicité, *Travaux de logique*, *19*, 205–238.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 29 - 52, DOI: 10.33683/ddm.21.10.2

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Inventio, *dispositio*, *elocutio*: tre lenti per l'analisi di argomentazioni nei libri di testo di geometria

Inventio, *dispositio*, *elocutio*: three lenses for analysing argumentation in geometry textbooks

Michele Canducci•°, Andrea Rocci•° e Silvia Sbaragli•
• Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI – Locarno, Svizzera
° Facoltà di comunicazione, cultura e società, USI – Lugano, Svizzera

michele.canducci@supsi.ch, andrea.rocci@usi.ch, silvia.sbaragli@supsi.ch

Sunto / A partire dal corpus del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* del Fondo nazionale svizzero, viene presentata un'analisi di esempi tratti dai libri di testo di geometria in lingua italiana della scuola primaria e secondaria di primo grado. L'analisi si basa sull'applicazione delle categorie di tipo retorico classico: *inventio*, *dispositio* ed *elocutio*, oggi afferenti ai domini degli studi linguistici, in particolare delle teorie dell'argomentazione. Attraverso l'analisi condotta, vengono evidenziate da un lato la profondità delle riflessioni che queste lenti teoriche consentono di raggiungere nello sviscerare un testo argomentativo di matematica, dall'altro la grande varietà di scelte possibili adottate dai libri di testo, che possono avere un effetto comunicativo sul lettore-studente.

Parole chiave: inventio; dispositio; elocutio; argomentazioni; libri di testo di geometria.

Abstract / Starting from the corpus of the project *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* of the Swiss National Science Foundation, an analysis of examples from Italian-language geometry textbooks of primary and secondary schools is presented. The analysis is based on the application of classical rhetorical categories: *inventio*, *dispositio* and *elocutio*, which are nowadays related to the domains of linguistic studies, in particular theories of argumentation. Through the analysis, we highlight on one hand the depth of the reflections that these theoretical lenses allow us to reach in dissecting an argumentative text in mathematics, on the other hand, we show the great variety of possible choices adopted by textbooks, which can have a communicative effect on the reader-student.

Keywords: inventio; dispositio; elocutio; argumentation; geometry textbooks.

«Physica ista ipsa et mathematica et quae paulo ante ceterarum artium propria posuisti, scientiae sunt eorum, qui illa profitentur; illustrare autem oratione si quis istas ipsas artes velit, ad oratoris ei confugiendum est facultatem».
(*Cicerone, De oratore, I, 61*)

«È chiaro che la fisica, la matematica o le altre scienze sono proprie di coloro che le professano, ma se vogliamo che esse siano illustrate in un discorso chiaro ed efficace, bisogna rivolgersi all'abilità specifica dell'oratore».
(*Cicerone, De oratore, I, 61*)

1 Introduzione

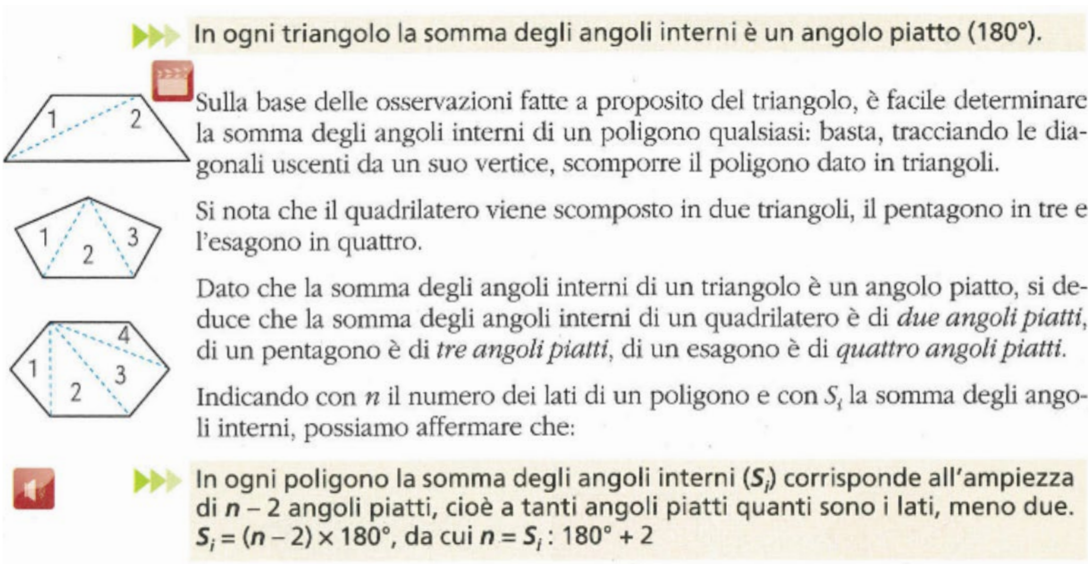
Questo contributo si inserisce all'interno del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico*.[1] Il progetto ha come obiettivo l'individuazione, la raccolta e l'analisi, dal punto di vista linguistico e matematico, di un corpus di libri di testo scolastici di matematica in lingua italiana della scuola primaria[2] e secondaria di primo grado,[3] al fine di delinearne le caratteristiche e i possibili ostacoli per la comprensione degli alunni. Si è concentrata l'attenzione sull'ambito geometrico; in particolare, il tema indagato è quello dei poligoni. Poiché tale argomento viene proposto con continuità dalla seconda primaria alla terza secondaria di primo grado, in accordo con l'idea di percorso a spirale per la costruzione di competenze matematiche, abbiamo potuto contare su un bacino di libri di testo riferito a sette anni di scolarità. In questo modo si è composto un corpus, denominato DFA-Italmatica,[4] sul quale è stato possibile effettuare analisi a diversi livelli, focalizzate su aspetti differenti e facenti uso di una grande varietà di approcci qualitativi e quantitativi (Sbaragli & Demartini, 2021). Queste analisi sono state condotte da un team interdisciplinare di ricercatori in didattica della matematica e in linguistica, e hanno messo in luce un panorama complesso, dal quale emerge chiaramente come le diverse scelte di tipo linguistico e testuale, effettuate dai *costruttori di senso* di un libro di testo (Bezemer & Kress, 2010), possono influenzare il lettore in fase di apprendimento della matematica.[5]
In questo contributo intendiamo condurre un ulteriore passo verso una visione sempre più integrata fra la dimensione linguistica e l'apprendimento della matematica, proponendo l'analisi di argomentazioni realizzata attraverso le categorie retoriche dell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio*.
In particolare, ci si chiede se la lettura delle porzioni argomentative presenti nei libri di testo tramite queste categorie di analisi possa mettere in luce aspetti significativi per la didattica della matematica, che tipicamente non riescono a emergere attraverso altri tipi di analisi condotte abitualmente in que-

1. Progetto 176339 del Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica.
2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
4. I testi del corpus sono stati raccolti tra quelli editi in Italia e nei cantoni italofoni della Svizzera (Canton Ticino e Canton Grigioni), arrivando a comporre un corpus di 142 titoli. Tra questi, 129 provengono dal variegato e ampio contesto editoriale italiano; 13 libri dal contesto svizzero, di cui 7 provengono dal Canton Ticino e 6 dal Canton Grigioni. La minore presenza di libri di testo svizzeri è dovuta al fatto che, soprattutto in Canton Ticino, l'utilizzo del libro di testo in ambito didattico non è diffuso. Per un approfondimento dei criteri con i quali è stato costruito il corpus, si veda Sbaragli e Demartini (2021).
5. Tra le tematiche trattate citiamo: gli aspetti strutturali di architettura testuale dei manuali (Demartini, Sbaragli & A. Ferrari, 2020); gli aspetti lessicali e morfosintattici dei manuali (Canducci, 2020; Canducci et al., 2019a, 2019b; Canducci, Demartini & Sbaragli, 2021; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Demartini & Sbaragli, 2019); gli aspetti legati al rapporto multimodale fra testo e figure nei manuali (Canducci, 2019; Canducci, Rocci & Sbaragli, 2021); gli aspetti legati alle diverse modalità con le quali vengono proposti movimenti testuali di tipo argomentativo (Sbaragli, Canducci & Demartini, 2021).

sto ambito di ricerca. Nel fare questo, proporremo dunque un quadro teorico derivante dal mondo della linguistica, in particolare riferito a studi di teoria dell'argomentazione, con il fine da un lato di poter dare un contributo nuovo e originale all'attuale e ampia ricerca che viene fatta oggi in didattica della matematica sul tema dell'argomentazione,[6] dall'altro di rendere conto della grande varietà di scelte comunicative che possono essere effettuate nei libri di testo, e che potrebbero avere un certo effetto sui lettori-studenti.
Per affrontare questo compito, esporremo dapprima i motivi che ci hanno condotto a considerare alcune porzioni di libri di testo come argomentazioni, calandoli all'interno di un caso di studio (par. 2); chiariremo poi alcuni aspetti relativi alle categorie di analisi che utilizzeremo (par. 3), focalizzandoci sugli elementi che saranno utili per analizzare le porzioni argomentative dei libri di testo di matematica; analizzeremo poi in profondità tramite queste lenti di analisi il caso di studio (par. 4) per metterlo a confronto con altre scelte presenti nei libri di testo del corpus DFA-Italmatica (par. 5), arrivando così a trarre alcune considerazioni.

2 Un caso di studio: la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono

Presentiamo una porzione di un libro di testo italiano di matematica rivolto a studenti di prima secondaria di primo grado nel quale si accompagna il lettore a riconoscere che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a $(n - 2) \cdot 180°$ (Figura 1).



In ogni triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto (180°).

Sulla base delle osservazioni fatte a proposito del triangolo, è facile determinare la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi: basta, tracciando le diagonali uscenti da un suo vertice, scomporre il poligono dato in triangoli.

Si nota che il quadrilatero viene scomposto in due triangoli, il pentagono in tre e l'esagono in quattro.

Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, si deduce che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è di *due angoli piatti*, di un pentagono è di *tre angoli piatti*, di un esagono è di *quattro angoli piatti*.

Indicando con n il numero dei lati di un poligono e con S_i la somma degli angoli interni, possiamo affermare che:

In ogni poligono la somma degli angoli interni (S_i) corrisponde all'ampiezza di $n - 2$ angoli piatti, cioè a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due. $S_i = (n - 2) \times 180°$, da cui $n = S_i : 180° + 2$

Figura 1. Porzione di libro di testo italiano di prima scuola secondaria di primo grado (libro 2_6 del corpus, p. 176).

Dal punto di vista matematico, la strategia con la quale si giunge al risultato sfrutta l'idea di scomporre un poligono generico di n lati in n - 2 triangoli attraverso una triangolazione che consiste nel

6. Non approfondiremo in questo contributo il tema dell'argomentazione trattato nell'ambito della ricerca in didattica della matematica, in quanto focalizzato prevalentemente su un *discorso* che si sviluppa nella pratica didattica matematica delle classi, mentre qui ci occupiamo di porzioni testuali presenti nei libri di testo di matematica, rigidi dal punto di vista dell'interazione comunicativa con lo studente-lettore. Tuttavia queste interessanti discussioni proseguono da decenni e hanno prodotto una vasta letteratura a cui rimandiamo (si veda ad esempio http://www.lettredelapreuve.org/).

tracciare tutte le diagonali che hanno come estremo un vertice fissato. Sapendo poi che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari all'ampiezza di un angolo piatto, si inferisce che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a n - 2 angoli piatti.
Ci domandiamo: di che tipo di discorso si tratta? Può essere considerata una dimostrazione matematica? Pur avendo assunto nel corso dei secoli forme diverse, le dimostrazioni matematiche posseggono una comune struttura che può essere riassunta con le parole di Balacheff:

> «Una dimostrazione è una successione di enunciati tale che ciascun enunciato o è un'ipotesi, o è un enunciato la cui validità è addirittura già stabilita (teorema), o ammessa (assioma), o è dedotto da enunciati che lo precedono secondo una regola esplicita e condivisa».[7]
>
> (Balacheff, 2001, p. 4)

Seguendo questa definizione, la successione di enunciati presenti nell'esempio non può essere considerata una dimostrazione, perché se da un lato è evidente che in questa porzione di testo sia presentato un discorso che dà delle ragioni a sostegno della proposizione finale, dall'altro bisogna ammettere che si utilizzano inferenze di tipo diverso: alcune di queste sono di tipo deduttivo, come nel caso del passaggio nel terzo blocco testuale introdotto dal "dato che"; invece, lo schema globale del ragionamento proposto nello stralcio di testo segue un altro tipo di inferenza, solitamente chiamata con il termine *induzione*.[8] Questo metodo consiste nell'inferire dal particolare al generale: dopo aver verificato che una certa proprietà è valida per un certo numero di elementi appartenenti a una classe, si afferma che tale proprietà è valida per la totalità degli elementi della classe.[9] Nel nostro caso di studio, appare evidente l'utilizzo di tale metodo: in tre casi di poligoni vale la proprietà che la somma delle ampiezze dei loro angoli interni corrisponde all'ampiezza di tanti angoli piatti quanti sono il numero dei lati del poligono considerato diminuito di 2 (che corrisponde al numero di triangoli che si ottengono secondo la logica di triangolazione scelta); da ciò si inferisce induttivamente che tale proprietà vale per tutti i poligoni.
Ora, se si considera che, in generale, un'*argomentazione* può essere definita come un «processo che "aiuta" l'interlocutore a riconoscere qualcosa fornendo (direttamente o indirettamente) una opportuna giustificazione» (Rigotti & Greco, 2009, p. 4, traduzione degli autori), essa può essere interpretata dal punto di vista epistemologico come iperonimo di dimostrazione:[10] in altre parole, l'insieme delle dimostrazioni rappresenta un sottoinsieme dell'insieme delle argomentazioni, il quale sarebbe dunque formato dai due sottoinsiemi delle *argomentazioni dimostrative* e delle *argomentazioni non dimostrative*. Se nelle argomentazioni dimostrative possono comparire solo passaggi deduttivi, nelle argomentazioni non dimostrative possono comparire processi inferenziali diversi, quali, ad esempio, quelli di tipo induttivo (o abduttivo).
In definitiva, possiamo interpretare la porzione di testo qui presentata come argomentazione, in particolare come argomentazione non dimostrativa, sviluppata attraverso passaggi inferenziali non solo deduttivi, tenendo anche conto che l'intento di ogni argomentazione è in generale di convincere un uditorio riguardo alla plausibilità di una certa tesi. Da questo punto di vista, ci sembra infatti che, laddove i limiti dovuti ad esempio (ma non solo) alla giovane età dei discenti non consentano un approccio pedagogico di tipo esclusivamente dimostrativo ai risultati matematici, tra gli intenti di

7. Questo approccio alla dimostrazione non è l'unico. Ad esempio, nell'approccio di Tarski, basato sulla semantica, un enunciato segue dai precedenti se è soddisfatto in tutte le interpretazioni che soddisfano i medesimi (e non in base a una o più regole). Per un approfondimento di questa impostazione, e delle possibili conseguenze sul piano logico e filosofico, si veda Novaes (2020).
8. Da non confondere con il principio di induzione matematica, che è invece un assioma dell'aritmetica di Peano con il quale si possono dimostrare, ad esempio, numerosi teoremi di aritmetica elementare.
9. Ovviamente, questo procedimento non dà la certezza che l'affermazione finale sia vera: al più si può concludere come sia *verosimile* che la suddetta proprietà valga nella totalità dei casi in oggetto.
10. Il termine "iperonimo" indica un'unità lessicale di significato più generico ed esteso rispetto a una o più unità lessicali che sono in essa incluse. Ad esempio, "fiore" è un iperonimo di "garofano".

un libro di testo di matematica per questi livelli scolastici possa (anzi forse debba) rientrare anche il convincere[11] il lettore riguardo alla plausibilità di alcuni fatti matematici, tramite argomentazioni più o meno dimostrative.
Fatta questa premessa, rivolgiamo ora l'attenzione al chiarire alcuni aspetti teorici relativi alle categorie di analisi che utilizzeremo. Nel farlo, ci porremo in una prospettiva contemporaneamente diacronica e sincronica, nella quale intrecceremo le riflessioni degli studi classici di retorica con quelle relative ai moderni studi della *teoria dell'argomentazione* e di altre discipline del linguaggio.

3 L'argomentazione come discorso di ragione e persuasione

Dal punto di vista dei contenuti e delle problematiche a cui si rivolge, la teoria dell'argomentazione è una disciplina antica, che trae origine nella pratica sofistica, nella dialettica socratico-platonica, nell'opera di Aristotele, e in seguito negli studi retorici dell'epoca romana. Imprescindibile per gli sviluppi fino alla modernità è la distinzione tra dialettica e retorica, operata principalmente da Aristotele: la *dialettica* si occupa del ragionamento attorno al verosimile,[12] di tesi cui per forza di cose si può solo aderire con intensità variabile, ed è concepita dallo stesso Aristotele «come l'arte di ragionare partendo da opinioni generalmente accettate» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 7); la *retorica*, complementare alla dialettica, ha come oggetto il discorso persuasivo nei confronti di un uditorio, e insegna

> «Come si deve dire qualcosa – secondo quali schemi, seguendo quali criteri, con quali cautele – perché ciò che viene detto risulti un mezzo efficace per consentire il fine del nostro dire-fare, cioè la produzione di determinati effetti sull'uditore (convincerlo circa la credibilità di un'opinione, indurlo a compiere o ad astenersi dal compiere una data azione, portarlo a modificare certi suoi atteggiamenti, sentimenti ecc.)».
>
> (Cattani, 1994, p. 166)

Si semplifica la questione, ma non si sbaglia di molto, affermando dunque che se la dialettica è maggiormente focalizzata sugli aspetti di ragionevolezza del discorso, la retorica è più spostata sull'efficacia persuasiva dello stesso. Questa caratterizzazione è sostanzialmente rimasta tale per duemila anni, fino all'avvento di quella che oggi è conosciuta come *teoria dell'argomentazione*, espressione con la quale si indica un filone di riflessioni nato a metà del XX secolo, e che si distingue dagli studi classici principalmente per il tentativo di guardare all'argomentazione da un punto di vista organico, nel quale convergono tanto la tradizione retorica quanto quella dialettica.[13] Ecco il perché dell'espressione *La nuova retorica*, sottotitolo del celebre *Trattato dell'argomentazione* del 1958 di Perelman e Olbrechts-Tyteca: con questo titolo gli autori volevano intendere che ogni argomentazione, anche quella apparentemente più impersonale, è di tipo retorico, perché si sviluppa in funzione di un effetto sulla realtà (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 8). Con questo approccio è possibile guardare alle pratiche e ai discorsi argomentativi attraverso una lente pragmatica (van Eemeren, 2015)

11. In generale, e soprattutto per livelli scolastici più alti rispetto a quelli qui considerati, l'intento di un libro di testo a uso didattico sembra essere maggiormente legato, più che al convincere, al mettere in luce legami fra proprietà matematiche diverse, o illustrare schemi di ragionamento tipici di un'area tematica. Questo nell'ottica in cui l'esplicitazione delle relazioni di coerenza, relazioni che l'uditorio a cui ci si riferisce potrà valutare in modo autonomo, costituisca il punto fondamentale di ogni argomentazione (Mercier & Sperber, 2017).
12. La dialettica è quindi diversa dall'analitica, nella quale si mettono in luce i meccanismi della deduzione che parte da premesse vere per giungere a conclusioni logicamente fondate e necessariamente vere.
13. Ricostruire storicamente i passaggi, tutt'altro che banali, che hanno portato dalla visione tradizionale legata alla dialettica e retorica classica alla moderna *teoria dell'argomentazione*, è un'impresa che esula dagli scopi di questo contributo. Per chi avesse intenzione di approfondire, rimandiamo a van Eemeren (2013) e Rigotti e Greco (2019).

che accompagna alla imprescindibile dimensione di ragionevolezza quella di efficacia persuasiva, arrivando a parlare di «ragionevolezza dell'impegno persuasivo» (Rocci, 2017), cioè di una posizione in cui si recupera «l'idea che la persuasività sia un reale contributo alla ragionevolezza, sia necessaria ad una comunicazione pienamente ragionevole», in cui chi argomenta «non ritiene solo che sia possibile essere ragionevoli e persuasivi, ma anche che non sia possibile essere pienamente ragionevoli senza un impegno persuasivo, un impegno ad aver cura delle circostanze che favoriscono nel mio interlocutore l'uso della ragione» (Rocci, 2017, pp. 102-103).
In altre parole, chi argomenta, sia esso un politico, un giornalista, un avvocato, un insegnante o, come nel nostro caso, un libro di testo di geometria, dovrebbe saper utilizzare gli strumenti retorici non per manipolare, ma per rendere la propria argomentazione davvero pragmaticamente ragionevole, cioè passibile di essere accolta pienamente da un interlocutore invitato a coglierne la *ratio*. I moderni studi di comunicazione e di argomentazione si focalizzano proprio su questo punto, cioè sul rapporto che c'è tra la dimensione di correttezza dialettica[14] e la dimensione dell'efficacia comunicativa di un discorso. È in questa delicata sinergia che entrano in gioco alcune delle categorie della retorica classica e moderna quali sono l'*inventio*, la *dispositio* e l'*elocutio*, delle quali parleremo, per forza di cose in modo esplorativo, non enciclopedico,[15] nel prossimo paragrafo, cercando poi di applicarle alle porzioni di libri di testo di geometria.

3.1 *Inventio*, *dispositio*, *elocutio*

La tradizione retorica latina,[16] che molto deve agli studi retorici greci precedenti, suddivide l'arte dei discorsi oratori in cinque parti: *inventio*, *dispositio*, *elocutio*, *memoria* e *actio*. Se ancora oggi, nei nuovi studi di retorica, si utilizzano sostanzialmente queste etichette applicate all'organizzazione del discorso argomentativo e ai suoi componenti su vari livelli (tematico, stilistico, sintattico, prosodico ecc.), resistendo dunque all'indebolimento delle impalcature su cui poggiava l'intero sistema classificatorio, è perché «evidentemente tali etichette servono ancora a designare fatti che oggi si analizzano con strumenti del tutto diversi da quelli che un tempo erano serviti per la costruzione delle impalcature» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 80).
Nella *Rhetorica ad Herennium* le cinque sezioni dell'arte del dire sono definite come segue:

> «L'invenzione [*inventio*] è la capacità di trovare argomenti veri o verosimili che rendano la causa convincente.
> La disposizione [*dispositio*] è l'ordinamento e la distribuzione degli argomenti; essa indica il luogo che ciascuno di essi deve occupare.
> L'eloquio [*elocutio*] è l'uso delle parole e delle frasi opportune in modo da adattarsi all'inventio.
> La memoria [*memoria*] è la tenace presenza nel pensiero degli argomenti, delle parole e della loro disposizione.
> La dizione [actio] è la capacità di regolare in modo gradito la voce, l'aspetto, il gesto».
> (Cornificio, Rhetorica ad Herennium, I, 2, 3)

Nel momento in cui il discorso non è presentato nella variazione diamesica dell'oralità, bensì dello scritto, le sezioni della retorica si riducono sostanzialmente alle prime tre, perché la *memoria* e l'*actio* «riguardano l'esecuzione orale di discorsi scritti per essere recitati (memorizzati o anche letti)» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 84), e vengono dunque trascurate nelle trattazioni dedicate alla com-

14. La correttezza dialettica di un'argomentazione si sviluppa sul piano logico, ovviamente, ma anche extralogico, se si pensa ad esempio al fatto che alcuni argomenti possono essere ammessi o non ammessi a seconda del contesto in cui vengono presentati.
15. Per chi intendesse approfondire questi aspetti consigliamo Mortara Garavelli (1988/2020).
16. Questa tradizione si rifà principalmente all'opera di Cicerone (il *De Inventione* e il *De Oratore*), Cornificio (*Rethorica ad Herennium*) e Quintiliano (*Institutio Oratoria*).

posizione scritta. In termini attuali, gli ambiti di interesse delle tre categorie dell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio* non si discostano molto da quelli individuati dagli antichi. Nei prossimi paragrafi cercheremo di approfondirle, individuandone le caratteristiche utili ai nostri scopi e fornendo, laddove sarà opportuno, alcuni esempi di declinazione in ambito matematico.

*3.1.1 L'*inventio*: il reperimento degli argomenti*

L'*inventio* riguarda la progettazione del discorso persuasivo: si occupa cioè di reperire e scegliere tipologie di prove e argomenti che rendano convincente la tesi cui si vuol giungere.
Da un punto di vista tanto classico quanto moderno, in questa sezione si affrontano i tipi di ragionamento e la tematica dei *tòpoi* (*loci* in latino, *luoghi* in italiano). Nella sistemazione aristotelica dell'*inventio*, ci si sofferma in particolare sulle strutture tipiche dell'argomentazione quali sono l'esempio e l'entimema.
Per Aristotele, l'*esempio* «rappresenta l'analogo retorico dell'induzione […] poiché consiste nel dimostrare, sulla base di molti casi simili, che le cose stanno in un certo modo» (Piazza, 2015, p. 115). Nella rielaborazione moderna dell'*esempio*, Perelman e Olbrechts-Tyteca (1958/2013) lo considerano come uno dei tre tipi di argomenti che si basano sul "caso particolare", insieme all'*illustrazione* e al *modello*: la descrizione di un fatto è un *esempio* quando serve a dare fondamento a una regola; assume il carattere di un'*illustrazione* quando rafforza «l'adesione a una regola riconosciuta e ammessa, fornendo dei casi particolari che chiariscono l'enunciato generale» (Perelman & Olbrechs-Tyteca, 1958/2013, p. 389); il *modello*, invece, corrisponde all'esempio e all'illustrazione nell'ambito dell'agire pratico, essendo «l'insieme dei comportamenti (o degli attributi di un ente qualsiasi) su cui si può fondare o coi quali si può illustrare una regola generale di condotta» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 108). Materia dell'*inventio* riferita al "caso particolare" è, com'è naturale, anche la scelta di quali e quanti esempi proporre all'uditorio: infatti da un lato si tratterà di scegliere la tipologia di esempio più opportuna in funzione dell'uditorio cui ci si riferisce, dall'altro di decidere quanti esempi proporre a sostegno di una tesi, non dimenticando che dal punto di vista della retorica classica «il giusto mezzo tra i due opposti eccessi, che sono il dire troppo o troppo poco, si otterrà con l'esporre "quanto bisogna" e "quanto basta": il necessario e sufficiente» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 95), e questo vale in generale per tutte le parti del discorso persuasivo.
Per quanto riguarda l'*entimema*, invece, Aristotele lo definisce in questo modo: «esso è quando, date certe premesse, risulta per mezzo di esse qualcosa di altro e di ulteriore per il fatto che esse sono tali o universalmente o per lo più» (Aristotele, Retorica, I, 2, 1356b). L'*entimema* è l'analogo retorico del sillogismo logico: se quest'ultimo, partendo da premesse necessariamente vere, dà come risultato una verità inconfutabile, l'entimema giunge a conclusioni probabili e confutabili, poiché si basa su premesse verosimili, ma non necessariamente vere. Così come i sillogismi, gli entimemi sono strutturati secondo la terna *premessa maggiore*, *premessa minore* e *tesi*. Ora, generalmente, quando si vuole convincere circa la validità di un'affermazione, l'indagine volta al reperimento delle proposizioni già accettate o accettabili per l'uditorio, che possano essere pertinentemente invocate come premesse, costituisce il cuore dell'*inventio*. Per facilitare questo sforzo, per aiutare cioè chi deve argomentare nella ricerca di premesse utili a sostenere la tesi conclusiva, tutti gli studi retorici da Aristotele in poi hanno cercato di raggruppare, suddividendolo in categorie, il materiale utile poter trovare più facilmente argomenti in caso di bisogno. Queste categorie, già citate in precedenza, definite da Cicerone e Quintiliano come magazzini di argomenti, vengono chiamate in greco *tòpoi*, in latino *loci*, in italiano *luoghi*. In altre parole, i luoghi sono

> «Le fonti a partire […] dalle quali l'oratore costruisce le sue argomentazioni. Si tratta di schemi argomentativi, e non di argomenti già compiutamente formulati, che vengono applicati ai casi specifici e ai quali possono venire ricondotti i singoli entimemi».
>
> (Piazza, 2015, p. 65)

Un esempio classico di luogo è quello che Aristotele chiama "del più e del meno": «se non si può attribuire un predicato alla cosa a cui più apparterrebbe, è evidente che non lo si può attribuire alla cosa a cui meno apparterrebbe»; da questo luogo egli ricava l'entimema «se neppure gli dei sanno tutte le cose, ancor più difficilmente le sapranno gli uomini» (Aristotele, Retorica, II, 23, 1397b). Altri esempi classici di luoghi sono quelli che rientrano nella categoria "del genere e della specie", di cui un esempio è la seguente affermazione di carattere induttivo: «se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P, allora probabilmente P è una proprietà del genere G»; da questo luogo si possono ricavare numerosi entimemi; esso è utilizzato, come vedremo, nell'argomentazione matematica.
Nei secoli di storia della retorica, sono state prodotte numerose possibili classificazioni dei luoghi. Non è questa la sede per trattare le varie catalogazioni e distinzioni presenti nei diversi periodi storici,[17] non solo perché l'impresa richiederebbe da sola sforzi che esulano dai fini del presente contributo, ma anche perché un elenco completo di tutti i luoghi utilizzabili in un'argomentazione è difficilmente realizzabile (Perelman & Olbrecths-Tyteca, 1958/2013, p. 93). In questo lavoro segnaliamo il tentativo di organizzazione proposto in Rigotti e Greco (2019), che presenta il vantaggio di tentare un equilibrio tra la specificità e la precisione, ma anche l'eccessiva lunghezza, delle liste di luoghi proposte da alcuni studiosi (ad esempio Walton et al., 2008), e la sintesi e duttilità, ma anche la spesso estrema condensazione, di altre (ad esempio Whately, 1828/1963).[18]

3.1.2 La **dispositio***: l'organizzazione del discorso*

La *dispositio* riguarda l'organizzazione del discorso persuasivo; essa si occupa dei vari modi con cui disporre gli argomenti in maniera che il discorso risulti efficace e persuasivo.
Nella retorica tradizionale la *dispositio* riguardava tre livelli:

1. la partizione dell'intero discorso e di singole sezioni;
2. l'ordinamento dei contenuti all'interno di ciascuna parte;
3. l'ordine delle parole nella formulazione delle idee.

Per quanto riguarda il primo livello, classicamente la divisione persuasiva del discorso pubblico era composta da quattro parti: *esordio* (l'inizio, il preambolo del discorso, nel quale può venire anche esposta la *quaestio*, cioè l'argomento specifico da trattare), *narrazione* (l'esposizione dei fatti), *argomentazione* (il cuore del discorso persuasivo, in cui si adducono le prove), *epilogo* (la conclusione del discorso). Questa suddivisione è semplificata dallo stesso Aristotele, il quale afferma che «le parti del discorso sono due: è infatti necessario esporre il fatto di cui si parla e il dimostrarlo» (Aristotele, Retorica, III, 13, 1414a). Anche Perelman e Olbrechts-Tyteca (1958/2013, p. 533) fanno notare che, in un discorso espositivo-dimostrativo, quale è ad esempio quello dei trattati di geometria, le parti del discorso si riducono solitamente alla prima e la terza (eventualmente anche con ordine invertito).
Per quanto riguarda il secondo livello, Piazza fa notare che per Aristotele

> «[...] l'ordine con cui si espongono gli entimemi ha […] un peso nella persuasività complessiva del discorso e lo stesso vale, precisa Aristotele, per la quantità. Un eccesso di sillogismi non solo indebolirà l'impatto emotivo ma andrà anche a scapito sia della chiarezza sia della stessa credibilità dell'oratore».
>
> (Piazza, 2015, pp. 161-162)

17. Per un interessante approfondimento riguardante le varie strutturazioni di luoghi avvenute nel corso della storia, rimandiamo a Rigotti e Greco (2019).
18. Le riflessioni e le proposte presenti in Rigotti e Greco (2019) fanno riferimento a un metodo di analisi dell'argomentazione – *Argumentum Model of Topics* (AMT) – sviluppato all'interno dell'Istituto di argomentazione, linguistica e semiotica (IALS) dell'Università della Svizzera Italiana di Lugano. Tale modello consente di portare alla luce le varie componenti che entrano in gioco in una qualsiasi inferenza argomentativa; molto affascinante è vedere come questo modello possa essere applicato anche per analizzare dimostrazioni matematiche, come mostrato in Bellucci e Blotti (2017) e Maggi (2017).

Nella visione retorica classica si riteneva che, nel caso di argomentazioni multiple, non concatenate,[19] fossero tre i modelli possibili di disposizione dei contenuti: *ordine crescente*, nel quale si incomincia dagli argomenti deboli per lasciare in ultima posizione quelli più forti, con il rischio però che gli ascoltatori siano sfavorevolmente disposti fin dall'inizio; *ordine decrescente*, nel quale si procede all'opposto presentando per primi gli argomenti più forti e mettendo quelli meno convincenti in secondo piano, con il rischio però che si produca nell'ascoltatore un'impressione sfavorevole a causa del fatto che le ultime cose ascoltate siano le sole a rimanere a mente; *ordine omerico* o *nestoriano*, il più raccomandato, nel quale si pongono gli argomenti più solidi all'inizio e alla fine, distribuendo nel mezzo le ragioni meno forti. Al di fuori di questi tre modelli, che riguardano la disposizione degli entimemi in un discorso persuasivo, Aristotele tratta gli esempi, affermando che occorra

> «[...] qualora se ne posseggano, servirsi di essi come testimonianze, usandoli come epilogo per gli entimemi: infatti se sono anteposti danno l'impressione di un'induzione, e per i discorsi retorici l'induzione non è appropriata se non in pochi casi, se sono detti a conclusione invece fungono da testimonianze, e la testimonianza è in ogni caso persuasiva».
>
> (Aristotele, Retorica, II, 20, 1394a)

Nella sistemazione in "casi particolari" di Perelman e Olbrechts-Tyteca (1958/2013), questo condurrebbe ad affermare che, nei discorsi persuasivi, l'illustrazione è più efficace dell'esempio; in realtà, se si considera che l'approccio moderno alle varie tecniche argomentative si rifiuta di considerare l'argomentazione come un discorso che trova in sé stesso la sua struttura ideale (l'efficacia infatti dipende dal particolare uditorio a cui ci si rivolge) allora occorre concludere che «devono essere le esigenze dell'adattamento all'uditorio a guidare nello studio dell'ordine del discorso» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 547).

Quanto all'ultimo punto, infine, quello relativo cioè alla disposizione delle parole nella formulazione delle idee, esso presenta forti intrecci con la fase dell'*elocutio*, ma può essere interessante ricordare brevemente che esistono forme "non marcate" e forme "marcate" di disporre le parole. In breve, una forma "non marcata" rappresenta uno standard linguistico, un uso comune della disposizione delle parole che non presenta elementi che catturano particolarmente l'attenzione di chi legge o ascolta, risultando per certi versi neutrale e appropriato alla maggior parte dei contesti. Una forma "marcata" è al contrario caratterizzata da una scelta non di default, che presuppone un'intenzione di enfatizzazione da parte di chi la usa, e che risulta meno scontata e non neutrale. Ad esempio, in Rocci (1996) si fa notare che nel sintagma nominale italiano gli aggettivi possono tanto precedere quanto seguire il nome, ma l'ordine "non marcato" prevede tipicamente che l'aggettivo venga dopo il nome (la frase "la penna rossa!" è generalmente più neutrale e "non marcata" di "la rossa penna!").

*3.1.3 L'***elocutio***: scelta della forma linguistica del discorso*

L'*elocutio* riguarda il modo, lo stile con il quale viene presentato il discorso argomentativo: si occupa di dare forma linguistica alle idee in modo che risultino il più efficaci possibile.

Tradizionalmente, il materiale linguistico oggetto di elaborazione nell'*elocutio* è suddiviso in *parole singole* e *connessioni di parole*; per ciascuno di questi due gruppi vengono esercitate le quattro qualità (virtus in latino) dello stile oratorio: l'*aptum*, ovvero l'appropriatezza, che corrisponde al requisito di un discorso di essere conforme, che si convenga cioè alle specifiche circostanze e agli scopi nel quale viene prodotto; la *puritas*, ovvero la correttezza lessicale e grammaticale, che si fonda sul rispetto di un'ideale di integrità della lingua; la *perpiscuitas*, ovvero la chiarezza, la nitidezza del discorso, neces-

19. Le argomentazioni multiple sono argomentazioni che prevedono più argomenti coordinati e direttamente operativi a sostegno di una stessa opinione.

saria affinché esso sia comprensibile; infine l'*ornatus*, ovvero l'eleganza, la bellezza derivante dall'uso opportunamente regolato di mezzi e ornamenti linguistici rappresentati dalle figure retoriche.
Per i nostri scopi è utile approfondire, seppur in modo non esaustivo, il tema della chiarezza espositiva nell'*elocutio*, cioè la *perspicuitas* latina. In primo luogo occorre osservare che l'essere chiaro e comprensibile è una qualità soggetta alla valutazione del particolare uditorio cui il discorso si riferisce. In effetti, come osserva Mortara Garavelli

> «[...] diversamente dalla *puritas*, per cui esisteva una base grammaticale obiettiva per riconoscere ciò che era vietato e ciò che era permesso, la *perspicuitas* e i suoi contrari venivano definiti, dalla precettistica dell'arte oratoria, in base al criterio principe dell'adattamento all'uditorio».
> (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 192)

Il massimo difetto di chiarezza si ha quando il discorso risulta totalmente oscuro e incomprensibile, ad esempio perché composto in una lingua ignota all'uditorio. Se ci mettiamo nell'ottica dell'apprendimento della matematica, apprendimento che è costituito anche dall'imparare termini ed espressioni del suo linguaggio specialistico (Lavinio, 2004), può ad esempio accadere, soprattutto nei livelli iniziali di scolarità, che l'alunno senta un discorso o un testo come oscuro a causa della non conoscenza di alcune delle parole che vengono usate. Al di là di questo estremo, le oscurità parziali del discorso possono riguardare la presenza di passaggi impliciti, oppure le due categorie dell'ambiguità semantica e dell'ambiguità sintattica. La prima riguarda la presenza di termini o di costrutti grammaticali che possono essere interpretati in modi diversi, qual è il caso delle parole polisemiche[20] come "angolo", usato in matematica per indicare un ente geometrico, nella lingua comune per indicare, ad esempio, il punto di incontro di due o più spigoli di una parete. La seconda riguarda quelle frasi passibili di più interpretazioni e nasce dalle relazioni tra le parole e le componenti sintattiche di una frase; ad esempio, la frase «I poligoni regolari hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali», presenta un'ambiguità sintattica, perché la parola "uguali" posta alla fine potrebbe essere intesa nel senso di "lati e angoli uguali fra loro", cosa che tra l'altro potrebbe generare confusione nella mente di chi legge, considerando che non ha senso mettere in relazione di uguaglianza due entità diverse quali sono i lati e gli angoli di un poligono.
Quanto all'eccesso opposto, ovvero alla ricerca esagerata di chiarezza, essa è variabile e sostanzialmente dipende dai tipi di discorso: un buon esempio è quando il discorso risulta pedante a causa di precisazioni superflue, perché l'uditorio è già esperto del tema di cui si sta trattando.

3.2 Breve digressione multimodale

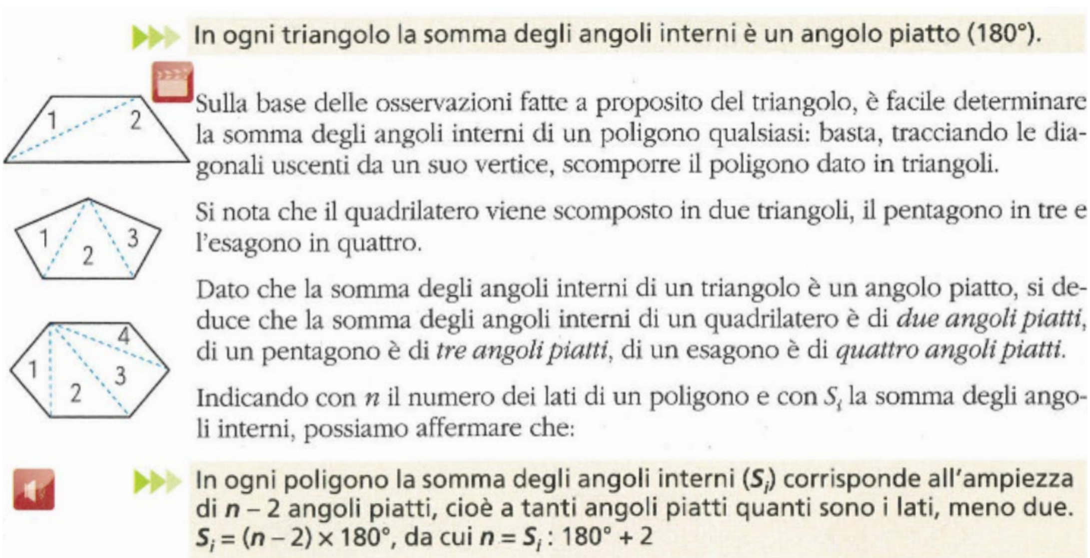
Un ultimo punto da dover trattare prima di addentrarci nell'analisi, vista la natura dei testi di cui ci occuperemo, riguarda il fatto che le sopra esposte categorie dello studio di un discorso possano essere applicate nel caso di testi multimodali, nei quali cioè sono presenti differenti *modi semiotici*, non solo di tipo linguistico: immagini, scritture, simboli, elementi grafici di varia natura. Oggigiorno, infatti, il testo è raramente presentato nella sua purezza; anzi, tipicamente è solo parte di un dispositivo che contiene al suo interno altri elementi formattati insieme, in un tutto organico. Anche il libro di testo scolastico è oggi scritto e presentato con la dovuta formattazione grafica; questo accade a maggior ragione con la matematica, e soprattutto con la geometria, che prevede inevitabilmente al suo interno, accanto a quella linguistica, anche una dimensione figurale e grafica caratteristica.[21] La prospetti-

20. Uno studio di questi aspetti è presentato in Demartini, Fornara e Sbaragli (2020), in cui si sono messe in luce le problematiche didattiche relative alla presenza di parole polisemiche nell'apprendimento di concetti matematici.
21. È riconosciuto dalla ricerca in didattica che il linguaggio della matematica sia un sistema semiotico *multimodale* che include testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali, e *multivariato*, che include un ampio spettro di registri (P. L. Ferrari, 2021).

va di analizzare le argomentazioni prodotte in ambito multimodale è relativamente recente (si veda ad esempio Kjeldsen, 2015; Pollaroli & Rocci, 2015; Rocci, 2017; Rocci & Pollaroli, 2018) e sfrutta strumenti provenienti tanto dalla tradizione degli studi linguistici e di argomentazione, quanto le attuali scienze della comunicazione relative all'uso delle immagini e degli espedienti grafici. Come vedremo meglio nei prossimi paragrafi, per i nostri scopi è sufficiente riconoscere che, all'interno di discorsi argomentativi, l'uso di elementi e strategie semiotiche non linguistiche, quali sono ad esempio le figure geometriche, l'uso di frecce o del colore, l'organizzazione del layout di una pagina, può assolvere a diverse funzioni che rientrano nelle materie dell'*inventio, dispositio* ed *elocutio*.[22] Ad esempio, la scelta di rappresentare uno specifico poligono invece che un altro, oppure di rappresentarne più di uno, può essere interpretata in termini di scelta degli argomenti che sostengono in modo più o meno efficace la tesi conclusiva all'interno dell'argomentazione, rientrando dunque nell'*inventio* del discorso; la scelta di disporre le figure e il testo all'interno della pagina in un modo piuttosto che in un altro può dar luogo a risultati comunicativi più o meno efficaci, rientrando dunque nella *dispositio* del discorso; infine la scelta stessa di rappresentare una data procedura o fatto geometrico secondo due modi semiotici diversi, quello linguistico e quello figurale, può essere intesa relativa al modo e alla forma con le quali presentare il discorso per far sì che esso risulti più comprensibile per l'uditorio, rientrando dunque nel tipo di scelte interne all'*elocutio*.

4 Analisi delle scelte di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio* riscontrate nel caso di studio

In questo paragrafo riprendiamo il caso di studio presentato nel par. 2, relativo a un libro di testo italiano del primo anno di scuola secondaria di primo grado, e lo interpretiamo con le chiavi di lettura dell'*inventio*, della *dispositio* e dell'*elocutio*. Per comodità ne riportiamo nuovamente l'immagine.


In ogni triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto (180°).

Sulla base delle osservazioni fatte a proposito del triangolo, è facile determinare la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi: basta, tracciando le diagonali uscenti da un suo vertice, scomporre il poligono dato in triangoli.

Si nota che il quadrilatero viene scomposto in due triangoli, il pentagono in tre e l'esagono in quattro.

Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, si deduce che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è di ***due angoli piatti***, di un pentagono è di ***tre angoli piatti***, di un esagono è di ***quattro angoli piatti***.

Indicando con n il numero dei lati di un poligono e con S_i la somma degli angoli interni, possiamo affermare che:

In ogni poligono la somma degli angoli interni (S_i) corrisponde all'ampiezza di $n - 2$ angoli piatti, cioè a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due.
$S_i = (n - 2) \times 180°$, da cui $n = S_i : 180° + 2$

22. Non solo: in Canducci, Rocci e Sbaragli (2021), si mostra come l'utilizzo più o meno efficace delle strategie semiotiche multimodali nei libri di testo di geometria possa portare a problematiche significative per il lettore-allievo, ad esempio quando tali strategie sono utilizzate per favorire il processo di conversione semiotica tra rappresentazioni espresse in registri diversi (Duval, 1993).

4.1 L'*inventio* nel caso di studio

Un primo livello di *inventio* riscontrato in questa porzione di testo riguarda la tipologia di costruzione geometrica scelta come base della strategia argomentativa, che si basa sulla triangolazione del poligono effettuata tracciando tutte le diagonali che hanno come estremo un unico vertice fissato (*inventio I1*). Attraverso questa costruzione, la strategia argomentativa consiste nel mostrare che un poligono di n lati viene scomposto in n - 2 triangoli, per poi inferire che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono è data dalla moltiplicazione tra n - 2 e 180°, giungendo così alla tesi conclusiva.
A livello di tipo di ragionamento proposto, l'estratto rientra nella tipologia di *inventio* induttiva basata sull'esempio individuato da Aristotele: per dare fondamento al fatto che, triangolando in questo modo, un poligono di n lati viene suddiviso in n - 2 triangoli, vengono forniti esempi in cui ciò accade. In primo luogo notiamo, a livello quantitativo, che il testo sceglie di fornire tre esempi: questa scelta è importante perché, banalmente, può essere vista come relativa alla quantità di premesse su cui basare l'argomentazione: ci si potrebbe chiedere se l'argomentazione sarebbe stata più o meno efficace se fosse stato presentato su un numero maggiore o minore di esempi. Anche la scelta di quali esempi fornire rientra nella materia dell'*inventio*: in questo caso si è scelto di riferirsi a un quadrilatero, un pentagono e un esagono, ossia ai tre poligoni che seguono il triangolo nella successione dei tipi di poligoni in base ai lati, scelta basata sulla speranza di favorire una generalizzazione che non sarebbe stata facilitata scegliendo, ad esempio, un ettagono, un dodecagono e un icosagono. La successione dei tipi dei poligoni sembra infatti ricalcare un processo di ricerca di una regola, di uno schema, che valga in generale e che prevede, almeno inizialmente, di esplorare casi in qualche modo vicini tra loro, con il fine di rinforzare una convinzione che si sta costruendo in modo empirico.
Parlando di generalizzazione, sempre a livello di *inventio*, notiamo che sono presenti almeno tre *luoghi* principali. Un primo *luogo*, utilizzato qui in senso induttivo, rientra nella categoria "del genere e della specie", già citato nel par. 3.1.1: "se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P, allora probabilmente P è una proprietà del genere G"; questo *luogo* viene utilizzato per generalizzare a un poligono generico tre proprietà: la proprietà relativa al tipo di triangolazione, quella relativa al numero di triangoli che si ottengono con tale triangolazione e quella relativa al fatto che il numero di triangoli così ottenuti sia pari al numero dei lati del poligono meno due.
Un secondo luogo rientra all'interno della categoria "della specie e dell'individuo", ed è invece utilizzato in modo deduttivo: "Se per la specie S vale una proprietà P, allora per ogni individuo della specie S vale la proprietà P", ed è utilizzato quando si applica il teorema relativo alla somma degli angoli interni di un triangolo generico ai triangoli ottenuti dalla costruzione. Un terzo *luogo* rientra invece nella categoria "parte e tutto": "se un tutto è composto dal numero X di parti P uguali rispetto alla grandezza Q, allora il valore di Q per il tutto corrisponderà a X volte P", ed è utilizzato per calcolare la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono come n - 2 volte la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo. Osserviamo in generale che l'eterogeneità e la quantità di elementi di *inventio* qui richiamati rendono conto di una complessità che ci sembra non evidente a una lettura limitata, che non prevede l'impostazione qui adottata: lo sguardo proposto si aggiunge dunque a quello abituale in didattica della matematica, arricchendolo.

4.2 La *dispositio* e l'*elocutio* nel caso di studio

Guardiamo ora a come è composto l'estratto a livello di *dispositio*, inserendo all'interno del commento anche riflessioni riguardo allo stile e alla forma linguistica con la quale essa viene realizzata – cioè all'*elocutio*. In prima battuta facciamo notare che, dal punto di vista matematico, la tesi è posta in fondo alla pagina e che, dal punto di vista dell'organizzazione del discorso trattata nel par. 3.1.2, l'estratto può essere suddiviso nelle tre parti: *esordio*, *argomentazione*, *epilogo*. Notiamo che non è presente la parte della *narrazione*, che tipicamente si riferisce a discorsi in cui è necessario esporre eventi e avvenimenti riguardanti personaggi ed episodi significativi ai fini dello sviluppo dell'argomentazione.

Esordio. L'esordio è composto dal primo enunciato del primo blocco testuale: vengono richiamate premesse che verranno utilizzate nell'argomentazione (le "osservazioni fatte a proposito del triangolo"); viene inoltre manifestata la *quaestio*, cioè il tema su cui verterà l'argomentazione ("determinare la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi") spingendosi a dichiarare la semplicità della sua risoluzione ("è facile") con l'intento, forse, di disporre benevolmente il lettore.

Argomentazione. Il ragionamento argomentativo inizia nel primo blocco subito dopo la manifestazione della *quaestio*, alla quale si collega attraverso il segno di interpunzione forte ":". I *due punti* hanno qui una funzione esplicativa, e sono eloquentemente seguiti dal predicato verbale "basta", il cui significato da un lato rafforza in chi legge l'impressione relativa alla facilità di quanto si andrà a trattare, dall'altro ha la funzione di introdurre la costruzione alla base della strategia di *inventio I1* ("tracciando le diagonali uscenti da un suo vertice, scomporre il poligono dato in triangoli").
Il testo prosegue, nel secondo blocco testuale, esemplificando la costruzione appena enunciata: il ragionamento, proposto sulla base di tre esempi riguardanti "il quadrilatero", "il pentagono" e "l'esagono", è introdotto dal sintagma "si nota che", e viene accompagnato da tre rappresentazioni figurali poste a sinistra. L'enunciato afferma che "il quadrilatero viene scomposto in due triangoli, il pentagono in tre e l'esagono in quattro", affermazione sostenuta, a livello di *elocutio multimodale*, anche dalla scelta di rappresentare all'interno delle figure la notazione indo-araba del numero dei triangoli che si ottiene in ciascuno dei tre casi. È interessante richiamare che le scelte di *dispositio* operate in questo blocco seguono un ordine sequenziale rispetto al numero di lati. Questo è significativo perché, a differenza dell'induzione matematica in cui occorre mostrare la relazione tra il caso n-esimo e il caso (n + 1)-esimo, il procedimento argomentativo di tipo induttivo in sé non necessita di una gradualità nell'ordine degli esempi che vengono proposti; questa scelta appare dunque tanto di tipo retorico quanto didattico-matematica: chi ha scritto questo estratto ha giustamente ritenuto più convincente presentare gli esempi in ordine crescente rispetto al numero dei lati, facendo corrispondere all'induzione argomentativa quella matematica. Dal punto di vista figurale, facciamo inoltre notare che il quadrilatero, il pentagono e l'esagono non sono generici: il primo è un trapezio isoscele; gli altri due, pur non essendo regolari, presentano simmetrie assiali. Se si considera che nella parte linguistica si parla genericamente di quadrilatero, pentagono ed esagono (introdotti dall'articolo con valore generico "il"), questa scelta di *elocutio* multimodale potrebbe essere da un certo punto di vista interpretata come scelta di tipo estetico, legata cioè all'*ornatus*, ma dal punto di vista pedagogico appare discutibile, perché il lettore potrebbe implicitamente assumere che la triangolazione proposta sia valida solo quando i poligoni presentano particolari caratteristiche geometriche. Sempre in questo blocco testuale, infine, non si può trascurare il fatto che, a livello di *elocutio*, esso presenti elementi di oscurità parziale dati dalla scelta di mantenere impliciti sia la relazione fra numero di lati e numero di triangoli che si ottengono dalla triangolazione per i tre esempi (4 lati - 2 triangoli; 5 lati - 3 triangoli; 6 lati - 4 triangoli), sia la generalizzazione al poligono generico dell'uguaglianza: "numero di triangoli = numero dei lati meno due". Questa scelta di *elocutio* appare ovviamente problematica non solo ai fini di una chiarezza espositiva ma anche ai fini di un accompagnamento del lettore alla comprensione dell'argomentazione proposta. Ipotizziamo che tale scelta di de-enfatizzazione nasconda una certa ritrosia, da parte del libro di testo, nell'esplicitare che quanto si sta proponendo non sia una vera e propria dimostrazione rigorosa, ma presenta un carattere induttivo che, forse, agli occhi del lettore, potrebbe risultare meno convincente. La scelta di lasciare impliciti i passi induttivi sembra in qualche modo mascherare la strategia argomentativa adottata, ma allo stesso tempo potrebbe condurre il lettore-allievo a considerarla come dimostrazione vera e propria. Se così fosse, l'allievo potrebbe perdere un'occasione per rendere cosciente a sé stesso l'esistenza di *prove* di natura diversa da quel-

le deduttive, formalmente non accettate in matematica, ma molto utili nella dimensione didattica dell'apprendimento della disciplina.[23] D'altra parte, se è vero che in un'argomentazione è opportuno dire né troppo né troppo poco, ci troviamo davanti a un dilemma tipico della *perspicuitas* retorica: quanto esplicitare, quanto dire, perché il discorso risulti chiaro e allo stesso tempo non pedante o eccessivamente complesso per l'uditorio?

Il terzo blocco testuale presenta l'argomento, di carattere deduttivo, con il quale si applica il teorema della somma degli angoli interni di un triangolo per dedurre la somma degli angoli interni di un quadrilatero, di un pentagono e di un esagono. Richiamiamo l'attenzione sul fatto che in questo blocco, e solo in questo, viene utilizzato il corsivo nei sintagmi "*due angoli piatti*", "*tre angoli piatti*", "*quattro angoli piatti*", cioè il numero di angoli piatti cui corrisponde la somma degli angoli interni del quadrilatero, del pentagono e dell'esagono. Questa scelta di enfatizzazione rientra tipicamente nel tipo di scelte di *elocutio* che possono essere effettuate in un testo scritto, anche se in questo caso la sua efficacia può essere messa in dubbio: perché richiamare l'attenzione visiva solo sui risultati, e non sulla relazione tra poligono specifico e numero di angoli piatti, ad esempio utilizzando un colore per la coppia quadrilatero-due angoli piatti, un altro per la coppia pentagono-tre angoli piatti, un altro ancora per la coppia esagono-quattro angoli piatti?

Il quarto e penultimo blocco testuale rientra ancora nella parte argomentativa del discorso; interessante è notare che viene esplicitato per la prima volta il simbolismo matematico (n e S_i) che consentirà di esprimere la tesi in termini di un'uguaglianza simbolica; questa scelta di *dispositio* non è l'unica possibile, perché si potrebbe scegliere, ad esempio, di introdurre il simbolismo necessario all'inizio dell'argomentazione: da un lato la scelta di introdurlo alla fine sembra sorreggere una maggiore fluidità nella discorsività del ragionamento; dall'altro, il rischio è di appesantire in modo repentino e non graduale l'argomentazione, aumentando la complessità semantica per il lettore, il quale deve saper improvvisamente decodificare una forma linguistico-simbolica nuova, che non è rientrata fino a questo momento nello stile di *elocutio* globale del discorso.

Epilogo. Infine, l'ultimo blocco testuale presenta la conclusione del discorso, nella quale viene esposta la tesi cui si voleva giungere. Osserviamo in primo luogo come questa conclusione venga inserita all'interno di un box colorato, segnalato a sua volta da tre triangoli di colore verde posti di fianco; queste scelte rientrano nella categoria di *elocutio*, perché hanno l'effetto di richiamare l'attenzione visiva del lettore attraverso delle enfasi di tipo semiotico multimodale date dall'uso di un colore diverso dallo sfondo bianco del testo precedente e dall'uso di elementi deittici extra-linguistici. Se ci concentriamo poi sulla parte testuale, si osserva la scelta di ribadire la tesi per ben tre volte con formulazioni diverse. Due di queste sono interne al primo enunciato, suddiviso in due proposizioni: la prima ("In ogni poligono la somma degli angoli interni (S_i) corrisponde all'ampiezza di n - 2 angoli piatti") è una formulazione in parte linguistica e in parte simbolica, nella quale vengono richiamati i simboli introdotti nel blocco precedente; la seconda ("a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due") è una formulazione esclusivamente linguistica che segue subito dopo la congiunzione con valore riformulativo "cioè". A questo enunciato segue, dopo la pausa data dal punto, una terza formulazione ("$S_i = (n - 2) \cdot 180°$") esclusivamente simbolica.[24] Non possiamo fare a meno di mettere in evidenza l'abbondanza delle rappresentazioni, che da un lato è positiva perché stimola processi cognitivi imprescindibili nell'apprendimento della matematica (il trattamento e la conversione semi-

23. Questa de-enfatizzazione potrebbe anche essere interpretata come scelta efficace da parte del libro di testo: sostare in modo esplicito sull'utilizzo di un procedimento induttivo potrebbe condurre lo studente a pensare che si tratti di un contenuto da apprendere, e non di una strategia pedagogica per la costruzione di congetture matematiche.

24. L'ulteriore espressione simbolica nel testo ($n = S_i : 180° + 2$), introdotta dal connettivo "da cui", rappresenta una tipica, e spesso malsana, abitudine, molto presente nei libri di questo livello scolastico, di presentare immediatamente le "formule inverse" dei risultati appena esposti senza ulteriori spiegazioni. Pur essendo questa scelta potenzialmente veicolo di confusione da parte del lettore, non commenteremo questo ulteriore passaggio, limitandoci a osservare come, ponendolo alla fine dell'argomentazione, gli si stia dando un'importanza forse non desiderata.

otica secondo la teoria di Duval, 1993); dall'altro, in questo caso, ci domandiamo in primo luogo se non vi sia il rischio che queste tre enunciazioni possano essere intese come enunciati semanticamente diversi tra loro, e in secondo luogo se queste diverse rappresentazioni potessero essere disposte in modo più efficace, ad esempio separando in modo netto le prime due, oppure presentando prima la formulazione esclusivamente linguistica, poi quella mista, infine quella simbolica. In ultimo osserviamo che la formulazione linguistica "cioè a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due" conduce a un'ambiguità sintattica a causa della virgola posta tra la parola "lati" e "meno": uno studente che leggesse solo questa parte potrebbe interpretare la pausa indicata dalla virgola in senso procedurale, rischiando di capire che per trovare la somma degli angoli interni di un poligono occorra prima considerare tanti angoli piatti quanti sono i lati, e poi sottrarre due a questo valore.
Le scelte di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio* apportate in questo caso di studio rispecchiano solo alcune delle variegate possibilità retoriche presenti nei libri di testo di geometria; d'altronde, questo è naturale se si considera che, in generale, la retorica può essere considerata come arte di scegliere forme e strutture del discorso in modo che esso sia funzionale agli obiettivi di ragionevolezza e persuasione che ci si pone. Nei prossimi paragrafi metteremo a confronto le scelte del caso di studio con altre presenti nel corpus di libri DFA-Italmatica mostrandone dunque la molteplicità e le differenze; ciò verrà fatto accompagnandole con alcuni dati quantitativi.

5 La varietà di scelte nell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio* nei libri di testo

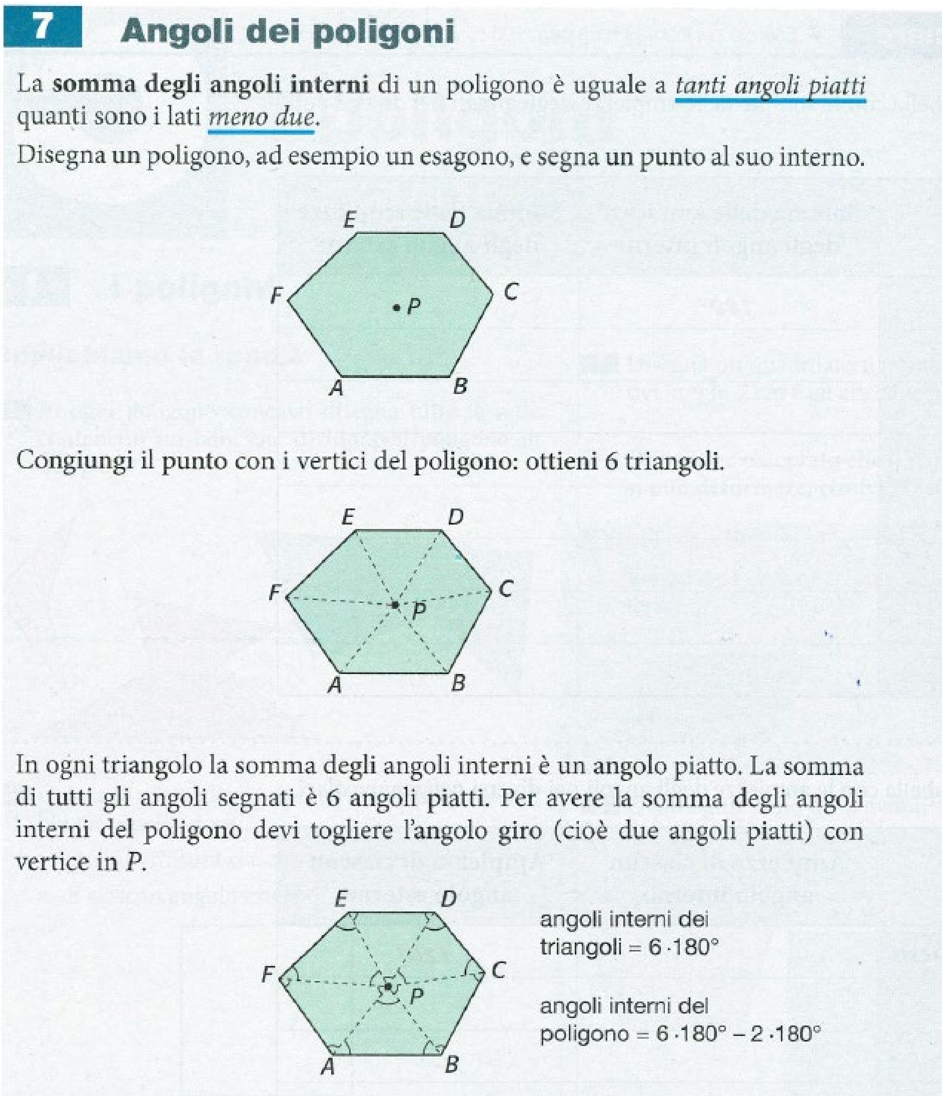
In questo paragrafo metteremo a confronto le scelte fatte a livello di categorie retoriche di *inventio* e di *dispositio* ed *elocutio* nel caso di studio da noi scelto con quelle effettuate in altri libri di testo scolastici rientranti nel corpus DFA-Italmatica. Questo al fine di cogliere la grande varietà di scelte che si possono intraprendere da questo punto di vista sullo stesso tema, e il possibile impatto comunicativo che potrebbero avere sui lettori-allievi. Va considerato che dei 143 libri del corpus, sono 23 quelli nei quali viene presentato l'argomento da noi scelto: 1 italiano di quinta primaria, 20 italiani di prima secondaria di primo grado; 1 italiano di seconda secondaria di primo grado; 1 svizzero (Canton Ticino) del secondo anno di scuola media.[25]

5.1 La varietà dell'*inventio* per la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono

Nel corpus si possono identificare tre tipi di scelte di *inventio*, chiaramente distinte a livello di scelta della costruzione geometrica come base della strategia argomentativa. La prima (*I1*) è stata presentata nel paragrafo precedente; la seconda (*I2*) e la terza (*I3*) vengono invece analizzate in questo paragrafo.

– L'*inventio I2* si basa sulla triangolazione del poligono che si ottiene tracciando i segmenti che hanno come estremi un punto interno al poligono e i vertici del poligono. Tale scelta è presente nel seguente esempio (**Figura 2**).

25. In Canton Ticino, la scuola media dura quattro anni, di cui i primi tre corrispondono al triennio di scuola secondaria di primo grado italiana.



7 Angoli dei poligoni

La **somma degli angoli interni** di un poligono è uguale a *tanti angoli piatti* quanti sono i lati *meno due*.

Disegna un poligono, ad esempio un esagono, e segna un punto al suo interno.

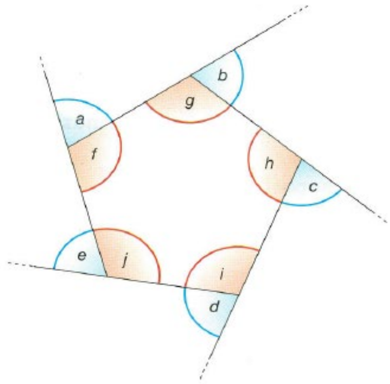
Congiungi il punto con i vertici del poligono: ottieni 6 triangoli.

In ogni triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto. La somma di tutti gli angoli segnati è 6 angoli piatti. Per avere la somma degli angoli interni del poligono devi togliere l'angolo giro (cioè due angoli piatti) con vertice in *P*.

Figura 2. Esempio tratto da un libro di testo italiano del primo anno di scuola secondaria di primo grado in cui si utilizza la strategia di *inventio I2* (libro 19_6 del corpus, p. 155).

Analizzando l'esempio più nello specifico, anche l'argomentazione qui proposta rientra nella tipologia di *inventio* del "caso particolare" individuato da Perelman e Olbrechts-Tyteca (1958/2013). Pur presentando una struttura che potrebbe far pensare alla porzione testuale in termini di illustrazione, si tratta in realtà ancora di un *esempio* utilizzato induttivamente per dare delle ragioni che sostengono l'accettazione della tesi, posta all'inizio del discorso. Una caratteristica a livello di *inventio* che emerge immediatamente è la scelta di presentare un solo esempio a sostegno dell'argomentazione, nello specifico un esagono, a differenza del caso di studio dove se ne proponevano tre diversi tra loro che conducono alla generalizzazione. La scelta di fornire un solo esempio, unita alla mancanza di passi linguistici che potrebbero esplicitare le relazioni tra il caso specifico dell'esagono e il caso generico del poligono di *n* lati, sembra rendere ancora più nascosta rispetto al caso di studio la generalizzazione dal caso particolare al caso di un poligono generico, generalizzazione che sembra essere totalmente a carico del lettore. A livello di *luoghi*, ne notiamo almeno tre, afferenti alle categorie "della specie e dell'individuo" e "parte e tutto". Il primo, usato in modo analogo al caso di studio, è di carattere deduttivo e rientra nella categoria "della specie e dell'individuo" ("Se per la specie S vale una proprietà P, allora per ogni individuo della specie S vale la proprietà P"). Un secondo luogo, anch'esso utilizzato nel caso di studio, e che rientra nella categoria "parte e tutto" è usato per calcolare la somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli ottenuti dalla triangolazione come *n* volte la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo; sempre in questa categoria può rientrare anche un terzo luogo: "se un tutto T è composto dalle parti A e B, allora una delle due parti corrisponde al tutto meno l'altra parte", utilizzato per individuare la somma delle ampiezze degli angoli interni del poligono come differenza fra la somma delle ampiezze degli angoli di tutti i triangoli ottenuti dalla triangolazione e l'ampiezza dell'angolo giro.

– L'*inventio I3* si basa invece su una costruzione incentrata sulla constatazione che gli angoli interni ed esterni sono supplementari. Tale costruzione si riscontra nel seguente esempio (Figura 3).



Relazioni tra gli angoli interni

Osserva il poligono e i suoi angoli **interni**. Si nota che ogni angolo interno con il suo corrispondente esterno forma un angolo piatto:

$\hat{f} + \hat{a} = \hat{g} + \hat{b} = \ldots = 180°$

n = numero dei lati

$S_{\text{omma angoli}}\ e_{\text{sterni}}\ (Se) = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} = 360°$

$S_{\text{omma angoli}}\ i_{\text{nterni}}\ (Si) = \hat{f} + \hat{g} + \hat{h} + \hat{i} + \hat{j} = ?$

Quindi, in questo poligono che ha cinque lati, la somma degli **angoli interni (Si)** e dei suoi **angoli esterni (Se)** è uguale a 5 angoli piatti:

$$Si + Se = 5 \times 180°$$

Poiché la somma degli angoli esterni è uguale a un angolo giro, cioè a due angoli piatti, per calcolare la somma degli angoli interni del poligono basta togliere 2 angoli piatti dalla somma di tutti gli angoli (Si + Se), cioè:

$$Si = 5 \times 180° - 2 \times 180° = (5 - 2) \times 180° = 3 \times 180°$$

La somma degli angoli interni di un pentagono è uguale a 3 angoli piatti, cioè 540°.
Questo ragionamento può essere fatto per qualsiasi poligono; si ha che:

la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono qualsiasi è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.

Indicando con ***n*** il **numero dei lati**, si può scrivere la formula per calcolare la somma degli angoli interni:

$$\mathbf{Si = (n - 2) \times 180°}$$

Figura 3. Esempio, tratto anch'esso da un libro di testo italiano del primo anno di scuola secondaria di primo grado, in cui si utilizza la strategia di *inventio I3* (libro c1_6, p. 193).

A livello di tipo di ragionamento proposto, anche questo estratto rientra nella tipologia di *inventio* del "caso particolare", nello specifico in quello che gli autori chiamano *esempio*, anche se a differenza di quanto accadeva per il caso di studio, si sceglie nuovamente, in analogia a quanto scelto nell'esempio relativo all'*inventio I2*, di fornire un solo esempio a sostegno dell'argomentazione, sviluppato attorno alla costruzione relativa a un pentagono. Per quanto riguarda i luoghi presenti nel testo, ne troviamo almeno quattro, afferenti a tre categorie presenti anche nel caso di studio e nell'esempio precedente. Il primo, interno alla categoria "della specie e dell'individuo" ("Se per la specie S vale una proprietà P, allora per ogni individuo della specie S vale la proprietà P") è utilizzato quando si applica al caso del pentagono il fatto che la somma delle ampiezze degli angoli esterni di un poligono corrisponde all'ampiezza di un angolo giro. Un secondo luogo, anch'esso utilizzato nell'esempio precedente, è qui usato per calcolare la somma delle ampiezze degli angoli interni ed esterni del pentagono come *n* volte la somma delle ampiezze di un angolo interno ed esterno corrispondente (ossia 180°), e rientra nella categoria "parte e tutto"; sempre in questa categoria rientra anche il terzo luogo, presente anche nell'esempio precedente: "se un tutto T è composto dalle parti A e B, allora una delle due parti corrisponde al tutto meno l'altra parte", qui utilizzato per individuare la somma delle ampiezze degli angoli interni del pentagono come differenza fra la somma delle ampiezze degli angoli di tutti i triangoli ottenuti dalla triangolazione e l'ampiezza dell'angolo giro. Infine, troviamo in questo estratto anche un luogo "del genere e della specie", già citato nel caso di studio: "se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P, allora probabilmente P è una proprietà del genere G"; questo luogo viene utilizzato per generalizzare a un poligono generico il ragionamento adottato in questo caso, come manifestato dall'affermazione presente nel testo "Questo ragionamento può essere fatto per qualsiasi poligono". Questa affermazione risulta cruciale, in quanto rende esplicito il passo di generalizzazione che non è coperto dalle altre inferenze di tipo deduttivo presenti nel discorso.

Gli esempi mostrati relativi alle tre strategie di *inventio* presentano dunque elementi di diversità al loro interno, dati dalla scelta del tipo di ragionamento proposto e da diverse ulteriori scelte. Nella **Tabella 1** vengono schematizzate le differenze più evidenti che fanno riferimento alle conoscenze matematiche in gioco per ciascuna delle tre strategie. Abbiamo categorizzato queste differenze dal punto di vista dei prerequisiti geometrici necessari, dei risultati matematici nuovi cui si giunge e dei passaggi aritmetico-algebrici coinvolti.

	Inventio I1	*Inventio I2*	*Inventio I3*
Prerequisiti	La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180°.	La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180°.	La somma delle ampiezze degli angoli esterni di un poligono è costante ed è 360°.
		Un angolo giro ha un'ampiezza di 360°.	Un angolo giro corrisponde a due angoli piatti.
		Un angolo giro corrisponde a due angoli piatti.	
Risultati matematici	Il numero di triangoli ottenuti dalla triangolazione è pari al numero dei lati del poligono (*n*) meno due.	Il numero dei triangoli ottenuti dalla triangolazione è pari al numero dei lati del poligono (*n*).	In un poligono angoli esterni e angoli interni corrispondenti sono supplementari.[26]
	La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono si ottiene moltiplicando 180° per il numero dei triangoli.	La somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli ottenuti dalla triangolazione è pari a 180° moltiplicato per il numero di triangoli.	La somma delle ampiezze degli angoli interni ed esterni di un poligono è pari a 180° moltiplicato per il numero di angoli (interni o esterni) del poligono.
		La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono si ottiene sottraendo l'ampiezza di un angolo giro alla somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli ottenuti dalla triangolazione.	La somma delle ampiezze degli angoli interni ed esterni di un poligono è pari a 180° moltiplicato per il numero di angoli (interni o esterni) del poligono.

26. In linea di principio, questo risultato potrebbe anche essere trattato precedentemente nel testo, e utilizzato in questo caso come prerequisito. Tuttavia, nell'esempio mostrato (e nelle altre porzioni di libri del corpus in cui si utilizza la strategia *I3*) esso viene sempre presentato nel momento in cui si affronta la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono, motivo per cui lo abbiamo inserito tra i risultati matematici.

Passaggi aritmetico-algebrici	Moltiplicazione: (n - 2) · 180°.	Moltiplicazione: "angoli interni dei triangoli = 6 · 180°."	Moltiplicazione: $S_i + S_e = 5 \cdot 180°$.
		Sottrazione: "angoli interni del poligono = 6 · 180° - 2 · 180°".	Sottrazione: $S_i = 5 \cdot 180° - 2 \cdot 180°$.
			Proprietà distributiva: $5 \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (5 - 2) \cdot 180°$.
			Sottrazione: $(5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180°$.

Tabella 1. Differenze presenti all'interno delle diverse strategie di inventio in termini di prerequisiti, risultati matematici e passaggi aritmetico-algebrici.

In generale, notiamo che la strategia *I1* è quella che prevede meno elementi di prerequisiti, risultati matematici nuovi e passaggi aritmetico-algebrici. Dal punto di vista quantitativo si rileva che delle 23 porzioni di testo del sub-corpus, 14 (il 60,9%) utilizzano la tipologia *I1* presente nel caso di studio, 4 (il 17,4%) la tipologia *I2*, 4 (17,4%) la tipologia *I3*; in 1 caso, (il 4,3%) invece, si sceglie di mostrare entrambe le strategie *I1* e *I2*, anche se queste vengono applicate a un problema specifico e non viene fatta alcuna generalizzazione al poligono generico.[27] La maggior parte dei libri di testo del corpus utilizza dunque la strategia *I1*, che, basandosi su un minor numero di conoscenze da attivare, risulta essere più intuitiva e immediata. Osserviamo però che questa immediatezza potrebbe essere solo apparente, perché si poggia su un fatto geometrico non banale quale è la relazione tra numero di lati del poligono generico e numero di triangoli ottenuti da quel tipo di triangolazione (n - 2), relazione che dal lato pedagogico è plausibile interpretare come cognitivamente complessa da accettare. Il punto delicato in questa strategia è proprio riuscire a convincere gli allievi della validità di questa relazione. È interessante aggiungere, a queste già di per sé significative differenze di *inventio*, altre riflessioni sulle diverse realizzazioni argomentative in termini di *dispositio* ed *elocutio* rispetto al caso di studio, di cui daremo riscontro nel prossimo paragrafo.

5.2 La varietà della dispositio ed elocutio per la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono

Dai due esempi riportati nel paragrafo precedente si evince come, anche a livello di *dispositio* ed *elocutio*, le scelte possono essere molto varie.[28] In questo paragrafo mostreremo solo gli aspetti più generali, senza entrare negli aspetti più puntuali, perché già da questi si intuisce la grande variabilità di scelte possibili. Nell'esempio in cui si utilizza la strategia *I2* (**Figura 2**), si nota a livello di organizzazione del discorso che il testo è composto dalle fasi dell'*esordio* e dell'*argomentazione*, mentre manca un *epilogo* conclusivo. In questo caso, l'esordio coincide con l'enunciazione della tesi, a cui segue l'argomentazione a sostegno della stessa. L'argomentazione è composta da tre blocchi linguistico-figurali, disposti in modo sequenziale. Nei primi due blocchi viene descritto il procedimento relativo alla costruzione geometrica da realizzare, riferito a un esagono. Significativo è notare l'utilizzo di un linguaggio che, a differenza di quanto accadeva nel caso di studio, tenta di coinvolgere in prima persona il lettore attraverso l'uso di verbi iussivi alla seconda persona singolare ("Disegna", "segna", "congiungi" ecc.). Questo tipo di strategia comunicativa può variare molto a seconda dell'impostazione adottata dal testo (come mostra l'analisi condotta in Sbaragli, Canducci & Demartini, 2021), e in generale prevedere coinvolgimenti molto diversi del lettore, ad esempio stimolandolo a operare

27. C'è da dire che questo caso rientra all'interno di un libro, in uso nel Canton Ticino, che è particolarmente attento a dare spazio alla dimensione dei problemi matematici da cui far emergere riflessioni e ragionamenti, non solo risultati.
28. Abbiamo scelto di analizzare le scelte di *dispositio* ed *elocutio* negli esempi già mostrati in precedenza, evitando di appesantire la trattazione con ulteriori porzioni di libri di testo. Questo da una parte ci consente di andare in profondità rispetto agli esempi presentati, rinunciando d'altra parte a caratterizzare le scelte possibili di *dispositio* ed *elocutio* riferite a un'*inventio* geometrica specifica.

direttamente congetture sulla base di attività più o meno laboratoriali. Nel terzo blocco vengono invece presentati i passi del ragionamento che conducono alla giustificazione della tesi, rinunciando al coinvolgimento diretto del lettore.
A livello di *elocutio* multimodale, si nota globalmente la scelta di rappresentare l'esagono tre volte, in seguito alla parte linguistica di ciascuno dei tre blocchi. Notiamo anche che il punto rappresentato all'interno dell'esagono, cruciale per la triangolazione proposta, risulta essere in una posizione centrale della figura, cosa che non solo non sarebbe necessaria ai fini della validità dell'argomento, ma rischia di portare con sé interpretazioni non desiderate, perché un lettore potrebbe pensare che la triangolazione sia valida solo quando il punto interno al poligono è scelto in una posizione privilegiata. Infine, anche in questo caso si è scelto di utilizzare strategie semiotiche di enfatizzazione del testo (il grassetto e la sottolineatura nel primo enunciato).

Si notano varie differenze di *dispositio* ed *elocutio* anche con l'esempio riferito alla strategia di *inventio I3* (Figura 3). A livello di *dispositio*, si nota l'assenza di un *esordio*: il testo procede direttamente presentando l'*argomentazione* seguita dall'*epilogo*, nel quale viene presentata la tesi, mostrando dunque un esempio diverso dai due casi precedenti. L'argomentazione può essere suddivisa in diverse parti. La prima è di tipo linguistico, figurale e simbolico: viene introdotto un dato osservativo (significativamente richiamato dal verbo "Osserva") dell'argomentazione, che sta nel riconoscere che ogni angolo interno forma insieme al corrispondente angolo esterno un angolo piatto; inoltre, a differenza di quanto accadeva nel caso di studio, si introducono fin da subito numerosi simboli, utili nelle parti successive dell'argomentazione. Quanto osservato nella prima parte funge da premessa all'affermazione enunciata nella seconda, significativamente introdotta dal connettivo "Quindi". Dopo aver richiamato il prerequisito relativo al fatto che la somma delle ampiezze degli angoli esterni di un poligono è uguale all'ampiezza dell'angolo giro, nella terza parte si propongono passaggi di tipo aritmetico riferiti al caso del pentagono, arrivando a concludere che "La somma degli angoli interni di un pentagono è uguale a 3 angoli piatti, cioè 540°". A questa conclusione segue un'importante affermazione, che mancava tanto nel caso di studio quanto nell'esempio riferito alla strategia *I2*: "Questo ragionamento può essere fatto per qualsiasi poligono", che rende esplicita la generalizzazione al caso di un poligono generico a partire dall'esempio mostrato. Segue dunque la tesi, espressa dapprima in forma linguistica ("la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono qualsiasi è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due"), poi attraverso una sua riformulazione simbolica ("$S_i = (n - 2) \cdot 180°$"). Osserviamo che tale scelta sembra essere, rispetto a quanto accadeva nel caso di studio, più ordinata e chiara, ma più complessa dal punto di vista della gestione degli aspetti aritmetico-algebrici.
Dal punto di vista dell'*elocutio* multimodale, anche in questo caso si notano strategie semiotiche utili a enfatizzare alcune parti del discorso (uso del colore nella rappresentazione degli angoli del pentagono, uso del grassetto, uso del colore nel box in cui è racchiusa la prima formulazione della tesi). Rispetto al caso di studio e all'esempio precedente, inoltre, viene fatto un maggiore uso del simbolismo matematico: al di là dei simboli n, S_i ed S_e, utilizzati poi nelle varie parti dell'argomentazione, emerge la scelta, forse esageratamente pedante e non necessaria, di introdurre anche un simbolismo per gli angoli interni ed esterni rappresentati in figura.

Può essere interessante esplicitare che, delle 23 porzioni di testo del corpus, indipendentemente dall'utilizzo delle strategie *I1*, *I2* e *I3*, 19 (l'82,6%) scelgono di proporre la tesi come epilogo del discorso; 1 caso (il 4,3%) presenta la tesi all'interno dell'argomentazione, facendola seguire da un esempio illustrativo della strategia geometrica adottata; 1 (il 4,3%), corrispondente all'esempio mostrato in precedenza, pone la tesi come *esordio* del discorso; infine, 2 casi (l'8,7%) non esplicitano la tesi: un libro stimola lo studente a ipotizzarla in modo autonomo, l'altro invece si limita a raggiungere la conclusione riferita al caso specifico di un pentagono. Questo è indice di una preferenza generale dei libri di testo per la scuola, a cui potrebbe corrisponderne un'altra a livello di pratiche didattiche, di terminare il discorso con una conclusione che è anche la tesi cui si voleva giungere.[29] Abbiamo inoltre rilevato che delle 23 porzioni di testo, 9 (il 39,1%) scelgono di proporre un *esordio* per introdurre il tema, mentre 14 (il 60,9%) iniziano direttamente dalla parte *argomentativa*. Si nota dunque una certa tendenza a entrare direttamente dentro al tema (in *medias res*, come direbbe uno studioso di retorica), senza preamboli introduttivi, il che potrebbe disorientare il lettore bisognoso di capire il senso di quello che sta per affrontare.

Ovviamente, la variabilità delle scelte di *dispositio* ed *elocutio* è presente anche all'interno di ciascuna categoria di *inventio*, ma in misura meno significativa, motivo per cui abbiamo deciso di non renderne conto in questo contributo. D'altra parte, anche solo analizzando gli aspetti più generali presenti negli esempi mostrati, risulta evidente il livello di eterogeneità che le lenti teoriche da noi adottate riescono a far emergere.

6 Conclusioni

Le analisi condotte sulla base del quadro teorico presentato consentono di trarre alcune conclusioni. In primo luogo, ci sembra opportuno rimarcare come non fosse scontata la possibilità di applicare categorie di analisi di tipo retorico, oggi afferenti ai domini delle scienze della comunicazione e delle teorie dell'argomentazione, al caso di libri di testo di matematica. Le analisi condotte hanno mostrato non solo che questo è possibile, ma che riflettere su testi argomentativi di matematica attraverso le lenti proposte permette di mettere in evidenza, e anche in parte di sciogliere, la complessità di questi testi, nei quali si intrecciano dimensioni legate al tipo di argomenti proposti (l'*inventio*), al modo con il quale si struttura il discorso (la *dispositio*) e alla forma linguistico-testuale che viene adottata (l'*elocutio*). In particolare, a livello di *inventio*, l'esplicitazione delle strutture di ragionamento ha messo in evidenza come esistano diversi modi di trattare la generalizzazione all'interno di argomentazioni non dimostrative: la generalizzazione può essere infatti più o meno esplicitata linguisticamente, e più o meno facilitata dall'uso di esempi come sostegno empirico al passo induttivo. Sempre a livello di *inventio*, l'esplicitazione dei *luoghi* ha fatto emergere una serie di meccanismi inferenziali di base di varia natura, che potrebbero non rientrare in un patrimonio già consolidato degli studenti.

A livello di *dispositio* ed *elocutio*, l'esplicitazione della struttura organizzativa del testo ha messo in evidenza da un lato le possibilità comunicative offerte dall'utilizzo delle parti del discorso, dall'altro ha consentito di focalizzare l'attenzione su alcune scelte stilistiche che potrebbero risultare problematiche. Su questo ultimo punto in particolare, emergono scelte stilistiche *marcate* che a volte vanno in contraddizione con il carattere di genericità che richiederebbe la disciplina, e come alcune scelte di enfatizzazione e de-enfatizzazione possano produrre ambiguità di natura semantica e inferenziale. Questo tipo di analisi diventa dunque importante, perché consente – al ricercatore, ma anche all'insegnante che utilizza il libro nella pratica didattica – di guardare al testo con un occhio fine e critico, che può favorire una maggiore consapevolezza di quali siano i dettagli comunicativi con i quali il testo "parla"; questo occhio critico può risultare utile anche per ciò che avviene in classe in termini di oralità. Ad esempio, l'insegnante potrebbe scegliere di adottare argomenti, ordini del discorso o stili comunicativi differenti in base a questioni di carattere didattico, riferite alla disciplina matematica, ma anche contestuali, riferite cioè al particolare uditorio dato dagli studenti della classe: quali strategie argomentative sono più opportune in base alle conoscenze dei miei studenti? È opportuno

29. Notiamo che ciò differisce da quanto accade abitualmente nei testi e nella pratica didattica universitaria, in cui solitamente si preferisce enunciare il teorema e poi la sua dimostrazione.

presentarne una sola o più di una? Quanti e quali esempi proporre nell'argomentazione che si vuol condurre? Come organizzare il discorso in modo che esso risulti il più efficace possibile dal punto di vista comunicativo? E ancora: come disporre, ad esempio alla lavagna, il testo scritto, le figure e i simboli matematici in modo che sostengano il ragionamento invece di confonderlo? Quali attenzioni linguistiche adottare perché il discorso non presenti oscurità parziali? Quale equilibrio tenere tra il dire troppo, rischiando di annoiare qualcuno, e il dire troppo poco, rischiando di perderne qualcun altro per strada?
Tutte queste domande, alle quali potrebbero esserne aggiunte altre, sono da un lato spunti di riflessione per i docenti, ma anche proficui campi di studio per i ricercatori in didattica della matematica, che potrebbero indagare gli effetti, in termini di comprensione, delle diverse scelte linguistico-comunicative adottabili con gli studenti.

Bibliografia

Aristotele. (1973). *Opere*. Laterza.

Austin, J. L. (1987). *Come fare cose con le parole*. Marietti. (Titolo originale: *How to do things with words*, pubblicato nel 1962).

Balacheff, N. (2001). *Imparare la prova*. Pitagora.

Bellucci, C., & Blotti, A. (2017). Un'esemplificazione dagli *Elementi* di Euclide. In P. Nanni, E. Rigotti & C. Wolfsgruber (A cura di), *Argomentare per un rapporto ragionevole con la realtà* (pp. 209–220). Fondazione per la Sussidiarietà.

Bezemer, J., & Kress, G. (2010). Changing Text: A Social Semiotic Analysis of Textbooks. *Designs for Learning*, *3*(1-2), 10–29.

Canducci, M. (2019). Il rapporto testo-figure nei libri di testo di matematica: il caso dei poligoni analizzato in ottica multimodale. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Didattica della matematica e professionalità docente, Atti del XXXIII convegno di Castel San Pietro Terme* (pp. 107–108). Pitagora.

Canducci, M. (2020). L'incoerenza delle scelte di numero nei libri di testo di geometria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace, Atti del XXXIV convegno di Castel San Pietro Terme* (pp. 69–70). Pitagora.

Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2019a). La definizione nei testi scolastici: dall'analisi alla didattica. In B. Di Paola (A cura di), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva* (pp. 47–48). "Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 2 Numero speciale n. 5, 2019. G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf

Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2019b). Analisi di manuali scolastici di matematica dal punto di vista linguistico e disciplinare. In B. Di Paola (A cura di), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva* (pp. 43–44). "Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 2 Numero speciale n.5, 2019. G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf

Canducci, M., Demartini, S., & Sbaragli, S. (2021). Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado italiani. *Italiano a scuola*, *3*(1), 99–132. https://doi.org/10.6092/issn.2704-8128/12935

Canducci, M., Rocci, A., & Sbaragli, S. (2021). The influence of multimodal textualization in the conversion of semiotic representations in Italian primary school geometry textbooks. *Multimodal Communication*, *10*(2), 157–174. https://doi.org/10.1515/mc-2020-0015

Cattani, A. (1994). *Forme dell'argomentare*. *Il ragionamento tra logica e retorica*. Edizioni GB.

Cicerone. (1994). *Dell'oratore*. BUR.

Cornificio. (1993). *Rhetorica ad Herennium*. Pàtron.

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2020). Se la sintesi diventa un problema. Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica. In J. Visconti, M. Manfredini & L. Coveri (A cura di), *Linguaggi settoriali e specialistici: sincronia, diacronia, traduzione, variazione. Atti del XV Congresso Internazionale SILFI*, *Genova, 28-30 maggio 2018* (pp. 487–494). Cesati.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). Le parole che "ingannano". La componente lessicale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. In B. Di Paola (A cura di), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva* (pp. 19–25). "Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 2 Numero speciale n.5, 2019. G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf

Demartini, S., Sbaragli, S., & Ferrari, A. (2020). L'architettura del testo scolastico di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado, *Italiano LinguaDue*, *12*(2), 160–180. www.italianolinguadue.unimi.it

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 57–65.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. Utet università.

Kjeldsen, J. E. (2015). The study of visual and multimodal argumentation. *Argumentation*, *29*(2), 115–132.

Lausberg, H. (1969). *Elementi di retorica*. Il Mulino. (Titolo originale: *Elemente der literarischen Rhetorik* pubblicato nel 1949).

Lavinio, C. (2004). *Comunicazione e linguaggi disciplinari. Per un'educazione linguistica trasversale*. Carocci.

Leal, F. (2016). Review of: Frans H. van Eemeren (2015): Reasonableness and Effectiveness in Argumentative Discourse: Fifty Contributions to the Development of Pragma-Dialectics, *Argumentation*, *30*, 527–532. https://doi.org/10.1007/s10503-016-9393-7

Maggi, A. (2017). Funzioni dell'inferenza nel ragionare matematico. In P. Nanni, E. Rigotti & C. Wolfsgruber (A cura di), *Argomentare per un rapporto ragionevole con la realtà* (pp. 221–237). Fondazione per la Sussidiarietà.

Mortara Garavelli, B. (2020). *Manuale di retorica*. Bompiani (edizione originale pubblicata nel 1988).

Mercier, H., & Sperber, D. (2017). *The enigma of reason*. Harvard University Press.

Novaes, C. D. (2020). *The dialogical roots of deduction: Historical, cognitive, and philosophical perspectives on reasoning*. Cambridge University Press.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2013). *Trattato dell'argomentazione. La nuova retorica.* Giulio Einaudi editore (Titolo originale: *La nouvelle rhétorique*. *Traité de l'Argumentation* pubblicato nel 1958).

Piazza, F. (2015). *La Retorica di Aristotele. Introduzione alla lettura*. Carocci.

Pollaroli, C., & Rocci, A. (2015). The argumentative relevance of pictorial and multimodal metaphor in advertising. *Journal of argumentation in context*, *4*(2), 158–199.

Rigotti, E., & Greco, S. (2009). Argumentation as an Object of Interest and as a Social and Cultural Resource. In N. M. Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices* (pp. 1–61). Springer.

Rigotti, E., & Greco, S. (2019). *Inference in Argumentation: A Topics-Based Approach to Argument Schemes*. Springer.

Rocci, A. (1996). *Valori comunicativi della posizione dell'aggettivo in italiano*. Vita e pensiero.

Rocci, A. (2017). Ragionevolezza dell'impegno persuasivo. In P. Nanni, E. Rigotti & C. Wolfsgruber (A cura di), *Argomentare per un rapporto ragionevole con la realtà* (pp. 88–120). Fondazione per la Sussidiarietà.

Rocci, A., & Pollaroli, C. (2018). Introduction: Multimodality in argumentation. *Semiotica*, *2018*(220), 1–17.

Sbaragli, S., Canducci, M., & Demartini, S. (2021). Le modalità logico-argomentative nei testi scolastici di geometria della scuola elementare e media in lingua italiana. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *9*, 44–71. https://doi.org/10.33683/ddm.21.9.3

Sbaragli, S., & Demartini, S. (A cura di). (2021). *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica*. Dedalo.

van Eemeren, F. H. (2013). In what sense do modern argumentation theories relate to Aristotle? The case of pragma-dialectics. *Argumentation*, *27*(1), 49–70.

van Eemeren, F. H. (2015). *Reasonableness and Effectiveness in Argumentative Discourse: Fifty Contributions to the Development of Pragma-Dialectics*. Springer.

Walton, D., Reed, C., & Macagno, F. (2008). *Argumentation schemes.* Cambridge University Press.

Whately, R. (1963). *Elements of rhetoric*. Southern Illinois University Press (edizione originale pubblicata nel 1828).

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 53 - 69, DOI: 10.33683/ddm.21.10.3 OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Un esempio di introduzione del paradigma relazionale nella scuola media

An example of introduction of the relational paradigm in lower secondary school

Alice Lemmo• e Andrea Maffia°
• Università dell'Aquila – Italia
° Università di Pavia – Italia

✉ alice.lemmo@univaq.it, andrea.maffia@unipv.it

Sunto / La rappresentazione simbolica di relazioni tra numeri viene spesso introdotta nella scuola media. Vari autori sostengono che l'adozione di un paradigma relazionale e l'uso di rappresentazioni grafiche possono supportare gli studenti nel primo approccio all'algebra, tuttavia esempi di sequenze didattiche del genere non sono ancora largamente diffusi. Si propone un esempio ispirato al lavoro di Castellini (2016) e, all'interno di un design quasi-sperimentale, se ne valuta l'efficacia usando uno strumento di valutazione appositamente sviluppato che comprende tutte e cinque le componenti dell'apprendimento della matematica di Fandiño Pinilla. Si nota una particolare efficacia in termini di apprendimento strategico e significativi progressi in termini comunicativi.

Parole chiave: relazioni; scuola media; algebra; valutazione.

Abstract / The symbolic representation of relations between numbers is often introduced in lower secondary school. Many authors claim that a relational paradigm and the use of graphical representations may support students in approaching algebra. However, examples of such teaching sequences are still not widespread in schools. We propose an example inspired by Castellini's work (Castellini, 2016) and adopting a quasi-experimental design we evaluate its effectiveness. An ad hoc instrument for assessment has been develop considering the five components of mathematical learning by Fandiño Pinilla. Data show a specific effectiveness in relation to problem solving, and significant progress in communicational learning.

Keywords: relations; lower secondary school; algebra; assessment.

1 Introduzione

La scuola media è sicuramente il livello scolastico in cui lo studente fa il suo primo incontro formale con il linguaggio dell'algebra come strumento di rappresentazione di relazioni che intercorrono tra quantità incognite e/o variabili. Come si legge nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*

> «Il calcolo algebrico viene proposto come generalizzazione del calcolo aritmetico. Grazie ad esso si intendono sviluppare negli allievi le competenze necessarie per gestire situazioni problema risolvibili tramite espressioni aritmetiche, equazioni, [...] secondo varie modalità e sfruttando le proprietà del calcolo, riuscendo così a matematizzare e modellizzare la realtà».
>
> (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015, p. 153)

Riferimenti analoghi si possono rintracciare nelle Indicazioni Nazionali del primo ciclo italiane; tra gli obiettivi alla conclusione del primo ciclo, si legge: «Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà» (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012, p. 54).

La letteratura in didattica della matematica ha ampiamente mostrato come un approccio prettamente sintattico all'introduzione della lettera possa risultare infruttuoso (Siety, 2001/2003). In alternativa, viene proposto un graduale avvicinamento all'algebra attraverso attività volte alla generalizzazione di proprietà osservate in ambito aritmetico (Radford, 2010). L'insieme di questi approcci prende il nome di *early algebra*, ne è un esempio a livello italiano il progetto ArAl (Navarra, 2019). Nonostante le evidenze scientifiche circa l'efficacia di queste prospettive, la loro diffusione all'interno delle pratiche scolastiche sembra ancora non essere così vasta, forse anche per l'altrettanto scarsa diffusione di esempi di sequenze didattiche e per la mancanza di prove di valutazione coerenti.

Un esempio di approccio all'uso della lettera per rappresentare relazioni tra numeri (naturali) e operazioni è fornito da Castellini (2016). Si tratta di esempi di attività svolte in classe da un'insegnante di scuola media (l'autrice) a partire dalla rielaborazione personale della letteratura di ricerca, corredati dalla riflessione della stessa docente sull'efficacia didattica dell'approccio.

I problemi verbali che esprimono relazioni tra quantità vengono generalmente proposti agli studenti con tecniche di risoluzione attraverso un metodo grafico; per questo motivo vengono spesso nominati "problemi con i segmenti". Secondo l'autrice, questo genere di approccio pone «l'accento sulla rappresentazione grafica mentre la difficoltà […] è a monte ovvero nella identificazione, comprensione, appropriazione delle informazioni di tipo relazionale» (Castellini, 2016, p. 289). Castellini sottolinea che, in una situazione problematica, un dato assoluto è generalmente ben identificato dagli studenti (Pierino possiede tot mele; il perimetro del triangolo è pari a…; …) mentre invece il dato relazionale (il doppio; la metà; il successivo; …) sfugge spesso alla loro attenzione. Nel suo lavoro, Castellini introduce una rappresentazione grafica intermedia (nel senso di Davydov, 1982) tra la situazione problematica affrontata e il simbolismo algebrico. In questa rappresentazione, le quantità note sono rappresentate mediante palline (presentate come oggetti concreti o disegnate come cerchietti), ciascuna delle quali ha valore 1. Le quantità incognite sono invece rappresentate mediante barattoli (rappresentati da contenitori concreti o disegnati a forma di cilindri) che, convenzionalmente, contengono tutti la stessa quantità (non nota) di palline. Per esempio, in **Figura 1** è rappresentata l'espressione $2x + 3$.

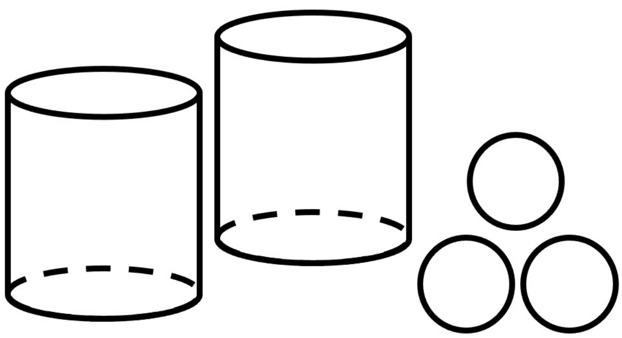


Figura 1. Esempio di rappresentazione di $2x + 3$ secondo la proposta di Castellini (2016).

Questo approccio nasce dall'attenzione verso gli sviluppi storico-epistemologici che hanno portato alla oggettivazione del linguaggio algebrico come oggetto matematico (Radford, 2008), riprendendo l'idea di "mucchio" proposta dagli antichi egizi (si veda il par. 2). Nel prossimo paragrafo di questo contributo presentiamo un'analisi a priori dell'approccio proposto da Castellini (2016) in cui evidenziamo le sue potenzialità didattiche facendo riferimento alla letteratura in didattica della matematica. Seguirà poi una valutazione a posteriori della possibile efficacia di un simile approccio all'introduzione dell'uso della lettera nella scuola media. Si tratta di uno studio con un design quasi-sperimentale condotto in classe prima e per il quale è stata appositamente ideata una prova di valutazione che sarà presentata di seguito.

2 Potenzialità didattiche dell'approccio

Il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese si sviluppa in tre cicli che vanno dal primo all'undicesimo anno di scolarità. Per quanto riguarda la matematica, essi si articolano in cinque ambiti di competenza: "Numeri e calcolo", "Geometria", "Grandezze e misure" (dal primo ciclo), "Funzioni" e "Probabilità e statistica" (dal terzo ciclo). L'aritmetica viene quindi esplorata sin dai primi anni di scolarità, ma l'algebra come strumento per generalizzare fatti aritmetici e modellizzare la realtà viene introdotta esplicitamente solo nella scuola media. Questo, però, non significa che l'insegnamento dell'aritmetica nei primi cicli non possa dare spazio ad attività in ambito numerico, di tipo rappresentativo o relazionale, che guidino gli allievi a riconoscere analogie fra strutture aritmetiche, a vedere il generale nel particolare.

Nei traguardi di competenza del piano di studio sono presentati gli obiettivi irrinunciabili che gli studenti dovrebbero raggiungere alla conclusione di ciascun ciclo di istruzione; lo studio dell'aritmetica comincia dai numeri naturali nel primo ciclo e si conclude con i numeri reali nel terzo ciclo. Questa gradualità mette in risalto una scelta esplicita di passaggio dal discreto al continuo; esso si riscontra in parallelo anche nel processo di misura che passa da un confronto tra una grandezza e un'unità scelta, all'utilizzo di strumenti che prevedano l'uso di scale graduate (un discorso analogo può essere fatto nel caso italiano). Gli studi di Fischbein (1987) mostrano che i primi modelli didattici che vengono presentati agli allievi sembrano diventare profondamente radicati e continuano a esercitare un controllo inconscio sul comportamento degli allievi anche da adulti; per esempio, l'introduzione dell'addizione ripetuta come modello della moltiplicazione porta spesso a pensare che il prodotto debba essere sempre maggiore del moltiplicando (Fischbein et al., 1985). L'autore chiama questi modelli primitivi poiché si costruiscono nei primi anni di scolarità e continuano a permanere anche dopo che l'allievo ha acquisito nozioni matematiche formali, solide e corrette. Conoscere i modelli primitivi può essere importante per l'interpretazione e l'intervento su possibili misconcezioni o difficoltà che possono incontrare gli alunni (Sbaragli, 2005). In base alle indicazioni dei piani di studio, infatti, è possibile che gli studenti costruiscano i primi modelli di numero nel discreto, a partire cioè dai numeri naturali, per poi passare al continuo, ovvero ai numeri reali. Questa osservazione potrebbe indicare che, anche nel costruire relazioni tra numeri, i modelli a cui gli alunni fanno riferimento potrebbero inizialmente essere nell'ambito dei numeri naturali per poi essere ampliati agli altri insiemi numerici.

L'approccio iniziale al discreto piuttosto che al continuo è oggetto di discussione nella letteratura in didattica della matematica (si veda per esempio Mellone et al., 2020). In particolare, la precoce introduzione al continuo è sostenuta dai ricercatori che fanno riferimento al lavoro seminale dal matematico russo Davydov (1982), il quale vede nelle relazioni il concetto matematico fondamentale, che dovrebbe essere insegnato addirittura prima delle operazioni (Polotskaia & Savard, 2021). All'interno del paradigma relazionale «il concetto di numero emerge dal confronto moltiplicativo di due gran-

dezze (o quantità incognite), una che gioca il ruolo di unità di misura mentre l'altra viene misurata» (Polotskaia & Savard, 2021, p. 449, traduzione degli autori).
Possiamo osservare che nell'esempio riportato in Figura 1, il ruolo assunto dai barattoli (cilindretti) nella rappresentazione è proprio quello di unità di misura[1] che permette il confronto moltiplicativo tra quantità indefinite. In altre parole, il bicchiere, che rappresenta l'incognita, può essere percepito dell'allievo come un contenitore di numero incognito di elementi discreti; al contrario il segmento potrebbe essere inteso come «un pezzo di retta che contiene centimetri» (Castellini, 2016, p. 292) e quindi una rappresentazione continua di quantità. Questo risulta ancora più chiaro in altri esempi proposti da Castellini (2016) come quello mostrato in Figura 2, in cui viene chiesto agli studenti di descrivere la relazione tra i bicchieri di Anna e quelli di Bea in termini di doppio o metà.

Figura 2. Esempio di confronto moltiplicativo tra quantità incognite. Immagine tratta da Castellini (2016, p. 292).

L'uso di contenitori opachi è voluto allo scopo di evitare che le quantità utilizzate nella rappresentazione non siano individuabili ma restino non conosciute. Questa scelta permette di rappresentare la quantità incognita e confrontarle in situazioni che altrimenti potrebbero essere difficilmente gestibili. L'obiettivo è evitare che gli studenti operino con quantità determinate ma trattino il contenuto del bicchiere come una variabile. In letteratura, si parla di *lack of closure* (mancanza di chiusura) definito da Collis (1974, citato in Kieran, 1981) per riferirsi alla necessità di sostituire sempre a un'operazione il suo risultato, che comporta l'impossibilità di gestire un calcolo che non può effettivamente essere svolto. Probabilmente non è un caso che la stessa Castellini (2016) riconosca nell'origine dell'idea di usare dei contenitori l'analogo espediente utilizzato nel papiro di Ahmes (risalente al 1550 a.C.) per gestire le quantità incognite. Nel papiro, le quantità incognite sono designate dalla parola "aha", traducibile come "mucchio" (Boyer, 1968/2017; D'Amore & Sbaragli, 2017). Viene per esempio utilizzato per enunciare situazioni problematiche del tipo «[qual è] il valore del mucchio se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19» (Boyer, 1968/2017, p. 23), in cui svolge il ruolo della quantità incognita. Il termine mucchio (in modo del tutto analogo ai contenitori impiegati da Castellini) permette contemporaneamente di designare una moltitudine e un singolo oggetto (tant'è che la parola è usata al singolare) permettendo quindi di "misurare" una quantità totale in termini di un'altra quantità incognita, così come auspicato da Davydov (1982). Un ulteriore vantaggio è rappresentato dalla possibilità di inserire effettivamente delle palline (o dei ceci, come suggerisce Castellini, 2016) all'interno di contenitori opachi e tappati in modo che lo studente possa percepire la presenza

1. Qui il termine "unità di misura" deve intendersi nel senso di "composite unit" così come definito da Steffe (1994, p. 15): «a unit that itself is composed of units». L'autore sostiene che la differenza tra il pensiero additivo e quello moltiplicativo sta proprio nel passare da unità a unità composite, pensare al moltiplicando come un'unità (composita) che si ripete. Per esempio, in $7×3$ il 7 può essere visto come l'unità composita (composta di 7 unità) che viene ripetuta 3 volte.

di una quantità di oggetti in questo "mucchio". Dobbiamo notare che in questo modo si restringe la possibilità d'uso di questa rappresentazione a sole relazioni tra numeri naturali. L'uso di liquidi o della sabbia, al posto delle palline, potrebbe permettere un passaggio al continuo (Davydov, 1982). Ancora, alte numerosità di piccoli oggetti discreti potrebbero spingere a trattare le quantità discrete come se fossero continue (Mellone et al., 2020).
L'approccio proposto da Castellini (2016) non è interessante solo per la rappresentazione mediante palline e barattoli, ma anche per via delle tipologie di consegne proposte agli studenti. Nel suo articolo si fa riferimento a consegne del tipo «descrivi a parole la situazione che vedi» (Castellini, 2016, p. 292) in cui si invita esplicitamente lo studente alla conversione in linguaggio quotidiano della relazione rappresentata con barattoli e palline. Questo appare di rilevante importanza sia per acquisire l'abitudine di utilizzare certe rappresentazioni come possibile traduzione di situazioni espresse verbalmente (ovvero nel caso dei problemi espressi a parole), sia per l'obiettivo più generale di distinguere l'oggetto matematico "relazione" dalla particolare rappresentazione. Secondo Duval:

> «[...] la matematica, sia il suo insegnamento che le pratiche più avanzate, è il campo in cui l'uso dei segni è il più complesso e la gamma eterogenea di segni usati è la più estesa. Questo è dimostrato essere così intrinseco dell'attività matematica che possiamo permetterci di affermare che non c'è pensiero matematico senza usare rappresentazioni semiotiche per trasformarle in altre rappresentazioni semiotiche».
>
> (Duval, 2008, p. 39, traduzione degli autori)

Ci si potrebbe tuttavia chiedere se la sola conversione dal linguaggio quotidiano spontaneo a quello simbolico-algebrico (e viceversa) non possa essere sufficiente. Come sostengono Bazzini e Iaderosa (2000), il linguaggio algebrico, se da una parte eclissa la semantica espressa dal linguaggio verbale, dall'altra agevola ragionamenti di tipo più avanzato. L'evoluzione storica della disciplina testimonia le difficoltà incontrate nel passaggio dalla risoluzione di problemi con procedimenti espressi a parole (algebra retorica) all'introduzione e all'uso consapevole di simboli (algebra sincopata, mista di simboli e parole, e poi algebra simbolica).
Secondo vari autori, gli studenti incontrano spesso difficoltà nel modellizzare situazioni problematiche (descritte a parole) direttamente in forma di equazione; un modello grafico di tipo analogico può svolgere un importante ruolo fornendo una forma intermedia di modellizzazione (Cai et al., 2005; Polotskaia & Savard, 2021; Xin et al., 2011). Polotskaia e Savard (2021) analizzano una rappresentazione proposta da Van de Walle e Lovin (2008, citati in Polotskaia & Savard, 2021) del tutto analoga a quella proposta da Castellini (2016). In riferimento alla rappresentazione della situazione problematica (Figura 3) «Roberto e Anna hanno 15 libri; Roberto ha il doppio dei libri di Anna. Quanti libri ha ciascuno di loro?» ne descrivono così le potenzialità:

> «Essa mostra ripetizioni di insiemi uguali all'insieme di riferimento e usa i numeri e la notazione analogico-visuale per indicare la relazione di comparazione. Essa non mostra elementi dei singoli insiemi (nessun libro è rappresentato) e quindi può rappresentare quantità incognite. [...] Da questa combinazione di rappresentazioni, il solutore del problema verbale può scoprire **visivamente**[2] che il totale dei libri è composto da 3 parti uguali e quindi risolvere il problema».
>
> (Polotskaia & Savard, 2021, p. 456, traduzione degli autori)

2. Il grassetto è stato mantenuto come da originale.

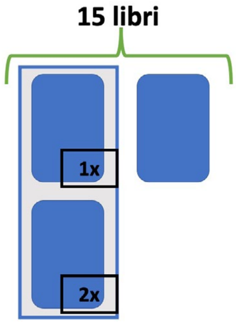


Figura 3. Esempio di rappresentazione proposta da Van de Walle e Lovin (2008, citati in Polotskaia & Savard, 2021, p. 456).

Più in generale, le stesse autrici (Polotskaia & Savard, 2021) suggeriscono che una rappresentazione che vuole supportare lo sviluppo del pensiero relazionale attraverso la soluzione di problemi debba soddisfare tre requisiti:

- la rappresentazione può presentare sia le quantità note sia quelle incognite;
- la rappresentazione mostra il ruolo di ciascun elemento all'interno della relazione;
- la rappresentazione supporta l'analisi visiva e la scoperta di nuove informazioni.

Abbiamo notato nella sezione precedente che la prima condizione è soddisfatta dalla rappresentazione con barattoli e palline. L'analisi di Polotskaia e Savard citata mostra come anche gli altri due requisiti siano soddisfatti.

3 Quadro teorico

L'obiettivo di questo lavoro è quello di studiare l'efficacia di un approccio didattico per l'insegnamento/apprendimento di un particolare contenuto matematico; in questo caso la gestione delle relazioni aritmetiche tra numeri naturali. Per fare questo è necessario chiarire cosa si intende per insegnamento/apprendimento della matematica.
Per descrivere i diversi fenomeni tipici dell'insegnamento/apprendimento della matematica, Fandiño Pinilla sostiene che:

> «L'apprendimento della matematica si presenta come un fattore multiplo, ricco di mille aspetti: è sotto gli occhi di tutti gli insegnanti il fatto che un apprendimento riuscito in matematica è da considerarsi un'ottimale combinazione di apprendimenti specifici e distinti. In matematica, infatti, non basta aver costruito un concetto, ma occorre saperlo usare per effettuare calcoli o dare risposta a esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare a sé stessi e agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, occorre saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di passare da una rappresentazione ad un'altra».
>
> (Fandiño Pinilla, 2015, p. 10)

Secondo l'autrice, appoggiare su queste categorie l'azione di ricerca didattica può fornire all'insegnante un riferimento utile a organizzare meglio il proprio lavoro, coordinando l'insegnamento con gli obiettivi di apprendimento. In questa prospettiva Fandiño Pinilla (2008) propone una descrizione dell'apprendimento della matematica multidimensionale, composto da almeno cinque tipologie di apprendimenti distinti che fanno capo a diversi ambiti cognitivi:

– apprendimento concettuale (noetica);
– apprendimento algoritmico (calcolare, operare ecc.);
– apprendimento strategico (risolvere, congetturare ecc.);
– apprendimento comunicativo (dire, argomentare, validare, dimostrare ecc.);
– apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (di trattamento e di conversione).

Prima di descrivere nel dettaglio ciascuna componente, l'autrice sottolinea più volte che queste componenti dell'apprendimento non sono indipendenti, separabili, ma interagiscono tra loro attraverso il meccanismo dell'intersezione, come se si permeassero vicendevolmente.

L'apprendimento concettuale non si riferisce ad un apprendimento ancorato alla conoscenza delle definizioni e proprietà degli oggetti matematici, ma un apprendimento relativo ad una riflessione critica sul *perché*, sul motivo di determinati procedimenti, definizioni, formalismi ecc. Esso, dunque, riguarda i concetti, visti come la conoscenza e la padronanza di determinate nozioni.

L'apprendimento algoritmico riguarda invece le procedure che vengono messe in campo nel affrontare situazioni matematiche. Secondo l'autrice i passaggi da effettuare nel percorso algoritmico sono meccanici, ma essi vengono effettuati dall'individuo se e solo se egli sa che cosa sta facendo e perché; ogni passo "meccanico" ha una sua funzione ed una sua giustificazione logica e concettuale.

In questa prospettiva, è bene dare importanza a situazioni più problematiche nelle quali la gestione degli algoritmi non sia vista come meramente esecutiva.

L'apprendimento strategico si riferisce ai processi legati al porsi, affrontare e risolvere problemi. Tali problemi possono essere presentati in contesto matematico o reale. L'autrice descrive l'apprendimento strategico attraverso ulteriori sotto-processi: comprensione del testo, trasformazione o traduzione dell'enunciato in una forma aritmetica, scelta e uso delle strategie e, infine, validazione della risposta. In riferimento al processo di traduzione e trasformazione, possiamo riprendere la definizione di matematizzazione (che trae origine dalla teoria della Realistic Mathematics Education introdotta da Freudenthal): Treffers (1987) distingue la matematizzazione orizzontale come il passaggio e la comunicazione tra due mondi (reale e matematico) e la matematizzazione verticale, invece, come l'elaborazione di strategie e procedure all'interno di uno stesso mondo.

L'apprendimento comunicativo si riferisce alla capacità di esprimere idee matematiche, giustificando, argomentando, dimostrando e facendo uso di figure, disegni o schemi per comunicare. Spiegazione e giustificazione sono i due processi principalmente coinvolti nella scuola media; Brunero e Panero (2019) propongono una distinzione tra spiegazione e giustificazione (a partire da precedenti studi come quello di Yackel, 2001) a seconda delle funzioni che esse svolgono. Si parla di spiegazione nel momento in cui l'alunno è chiamato a

> «[...] chiarire aspetti del proprio ragionamento matematico che potrebbero non risultare evidenti agli altri. In casi specifici, tale spiegazione svolge la funzione di giustificazione se è fornita per reagire alle contestazioni di apparenti violazioni dell'attività normativa matematica. Una giustificazione matematica è quindi un caso particolare di spiegazione matematica che fa riferimento più direttamente a proprietà matematiche o criteri condivisi».
>
> (Brunero & Panero, 2019, p. 84)

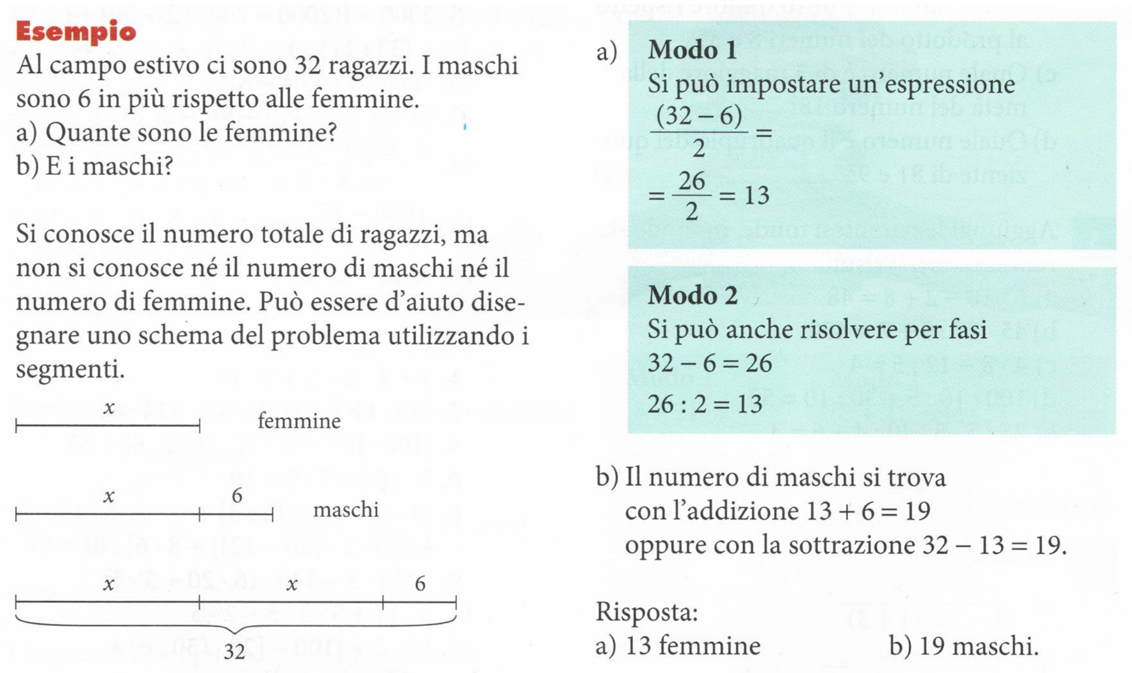
Infine l'apprendimento legato alle trasformazioni semiotiche, riguarda la gestione di tutte le diverse trasformazioni che si possono utilizzare di uno stesso oggetto matematico attraverso uno o più sistemi di segni (Duval, 2008). La ricerca in didattica della matematica pone l'accento sul non dare per scontate le trasformazioni semiotiche, bisogna infatti abituare gli studenti al fatto che le diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto siano equivalenti ed univoche.

4 Metodologia della ricerca

Lo studio dell'efficacia dell'intervento in classe è stato realizzato adottando un approccio quasi-sperimentale classico. Si adotta un disegno quasi-sperimentale perché non è possibile controllare tutti i fattori per cui differiscono le classi oltre all'intervento sperimentale (insegnanti differenti, numero di alunni per classe, composizione delle classi ecc.). Si sono quindi individuati un gruppo sperimentale e un gruppo di controllo e raccolti dati sia prima che dopo l'intervento sperimentale. I dati di pre- e post-test dei due gruppi (sperimentale e controllo) vengono quindi messi a confronto.

4.1 Contesto di ricerca

Tutte e cinque le classi prime di una scuola secondaria di primo grado[3] di Ravenna sono state coinvolte nel progetto, per un totale di 102 studenti. Tre delle classi (64 studenti) hanno svolto il percorso sperimentale proposto (par. 4.2); altre due classi (38 studenti) sono servite da gruppo di controllo. Tutte le classi hanno svolto la stessa prova (par. 4.3) come pre-test e post-test. La sperimentazione è stata condotta nell'anno scolastico 2020-21 e ha avuto una durata di cinque settimane; il campione scelto è un campione di convenienza. Ciascuna delle classi ha una diversa insegnante di matematica, ma in tutte le classi è in uso lo stesso libro di testo; mentre il gruppo sperimentale ha seguito l'intervento descritto nella prossima sezione, gli studenti del gruppo di controllo hanno seguito la proposta presente su tale libro di testo in cui viene introdotto l'uso di segmenti per rappresentare quantità incognite nella soluzione di problemi. Un esempio riportato nel libro di testo è mostrato in Figura 4. Gli studenti del gruppo di controllo hanno svolto anche a casa esercizi tratti dal loro libro di testo.



Esempio

Al campo estivo ci sono 32 ragazzi. I maschi sono 6 in più rispetto alle femmine.
a) Quante sono le femmine?
b) E i maschi?

Si conosce il numero totale di ragazzi, ma non si conosce né il numero di maschi né il numero di femmine. Può essere d'aiuto disegnare uno schema del problema utilizzando i segmenti.

a) **Modo 1**
Si può impostare un'espressione

$$\frac{(32-6)}{2} = \\ = \frac{26}{2} = 13$$

Modo 2
Si può anche risolvere per fasi
$32 - 6 = 26$
$26 : 2 = 13$

b) Il numero di maschi si trova con l'addizione $13 + 6 = 19$ oppure con la sottrazione $32 - 13 = 19$.

Risposta:
a) 13 femmine b) 19 maschi.

Figura 4. Esempio tratto dal libro di testo in adozione nelle classi coinvolte.

3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

Le insegnanti del gruppo sperimentale hanno ricevuto i materiali presentati di seguito ed è stato proposto loro di leggerli autonomamente. Successivamente, un incontro tra gli autori e le insegnanti è servito a chiarire eventuali dubbi sull'implementazione. Le insegnanti non hanno ricevuto ulteriore formazione sul paradigma relazionale, né è stato presentato loro il lavoro di Castellini (2016).

4.2 L'intervento sperimentale

L'intervento sperimentale è stato presentato alle insegnanti coinvolte nello studio attraverso sei schede di lavoro per lo studente. Ciascuna scheda è stata accompagnata dalla relativa guida per l'insegnante che riportava indicazioni metodologiche sulle modalità di gestione della classe (lavoro individuale, in piccoli gruppi, discussioni collettive), sulle tempistiche e sui materiali.

La prima scheda di lavoro propone di far completare individualmente agli studenti dei grafi in cui ogni freccia rappresenta una relazione tra due numeri. Dopo il completamento si richiede agli studenti di mettere a confronto il proprio lavoro con quello di un compagno di classe per poi discutere con tutta la classe le osservazioni fatte.

Nella seconda scheda di lavoro si propone per la prima volta la rappresentazione con i barattoli per mettere a confronto una quantità (rappresentata da un solo barattolo) col proprio doppio (due barattoli). Allo studente viene chiesto sia di ipotizzare la numerosità di palline in un barattolo per poi determinare il numero di palline in due barattoli, sia di descrivere a parole la relazione tra due quantità A e B (una doppia dell'altra) utilizzando come soggetto una volta A e una volta B. Si chiede poi di confrontare il proprio lavoro con quello di un compagno e si propone al docente di introdurre il termine "relazione inversa".

La terza scheda di lavoro richiede di confrontare una quantità rappresentata da un solo barattolo con un'altra rappresentata da un barattolo e una pallina. Si propone di lavorare in coppia a una traduzione simbolica di questa relazione e si propone all'insegnante di chiedere la descrizione di altri esempi usando le locuzioni "supera di …" oppure "aumentata di …" oppure "... in meno".

Nella quarta scheda viene riportata a parole la relazione "Le caramelle di Anna superano di 5 il doppio di quelle di Marco" e si chiede agli studenti di lavorare a coppie nella conversione di questa frase nella rappresentazione con barattoli e palline. Si chiede quindi di determinare alcune coppie di numeri che soddisfano la relazione. Si propongono alcuni esercizi di conversione da una rappresentazione all'altra e di sostituzione di particolari valori numerici.

La quinta scheda mostra una tabella a due colonne e si chiede agli studenti di individuare la relazione che lega i numeri che si trovano nella stessa riga (la stessa per tutte le righe della tabella). Tale relazione deve essere da loro espressa (lavorando in coppie) con diverse rappresentazioni, compresa la rappresentazione con barattoli e palline.

L'ultima scheda propone di individuare una coppia di numeri che soddisfa due relazioni espresse in forma simbolica (ovvero risolvere un semplice sistema di due equazioni di primo grado a due incognite). Viene proposto di convertire le relazioni nella rappresentazione con barattoli e palline per poi determinare il valore di ciascun barattolo.

Alle insegnanti sono stati forniti anche alcuni esercizi in modo che potessero utilizzarli come compito per casa per gli studenti. Essi sono stati costruiti in riferimento ai cinque aspetti dell'apprendimento della matematica (Fandiño Pinilla, 2008); in particolare, per quanto riguarda l'apprendimento e la gestione delle trasformazioni semiotiche, sono stati proposti esercizi di trattamento e conversione tra le diverse rappresentazioni – non solo riguardanti la rappresentazione con barattoli e palline.

4.3 La prova

Prima di iniziare il percorso e subito dopo il suo termine, tutte le classi (sia quelle del gruppo sperimentale, sia quelle del gruppo di controllo) hanno svolto la stessa prova composta da nove consegne. La prova è stata ideata dagli autori di questo contributo in modo che, nell'insieme, fossero valutate tutte le componenti dell'apprendimento della matematica descritte da Fandiño Pinilla (2008), così come viene indicato nelle descrizioni dei singoli quesiti presenti nella **Tabella 1**. Per ogni quesito si indicano le componenti dell'apprendimento principalmente indagate, pur essendo consapevoli che tutte le componenti concorrono nell'affrontare ciascuna consegna.

Quesito	Testo della consegna	Componente apprendimento
1	Completa le seguenti frasi con i numeri corretti.	Apprendimento algoritmico
2	Scrivi le relazioni rappresentate nelle figure come nell'esempio - *B* rispetto a *C*: "*B* è la metà di *C*"	Apprendimento comunicativo Apprendimento concettuale
3	$2 \cdot A + 5 = B$ Scrivi la relazione inversa utilizzando i simboli matematici. $A =$ ______________________	Apprendimento algoritmico Apprendimento concettuale
4	Completa il grafico inserendo le relazioni indicate dalle frecce. Rappresenta il grafico con le frecce nella direzione inversa e completalo indicando le relazioni.	Apprendimento algoritmico Apprendimento concettuale
5	La somma di due numeri consecutivi è 85. Di quali numeri si tratta?	Apprendimento strategico
6	Su una spiaggia ci sono 120 ombrelloni; gli ombrelloni aperti sono il doppio di quelli chiusi. Quanti sono gli ombrelloni aperti e quanti quelli chiusi sulla spiaggia?	Apprendimento strategico
7	Collega con una freccia le rappresentazioni equivalenti.	Apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche
8	Spiega utilizzando il linguaggio a parole cosa significa che la differenza tra *A* e *B* è 5.	Apprendimento comunicativo
9	Indica se le affermazioni scritte sono Vere (V) o False (F). Motiva la scelta proponendo un esempio numerico e correggi le affermazioni errate.	Apprendimento comunicativo

Tabella 1. Sintesi delle consegne presenti nella prova.

Il primo quesito richiede di completare frasi del tipo "21 è il triplo di ..." oppure "... diminuito di 11 è 22" inserendo il numero opportuno. Si possono completare le frasi anche solo ricorrendo al calcolo nel contesto numerico; pertanto questo quesito permette di valutare quantomeno l'apprendimento di tipo algoritmico.
Nel secondo quesito lo studente deve descrivere verbalmente relazioni tra quantità rappresentate con barattoli e palline (**Figura 5**). In particolare, si chiede di indicare cosa è *A* rispetto *B*, cosa è *A* rispetto *C*, cosa è *B* rispetto ad *A* e così via. Questo quesito permette di mettere in luce sia aspetti concettuali dell'apprendimento, sia aspetti comunicativi. In riferimento a questa consegna possiamo notare che la rappresentazione proposta non era stata presentata a nessuno degli studenti nella fase di pre-test ed era nota solo agli studenti del gruppo sperimentale nel post-test. A priori, possiamo quindi immaginare di notare notevoli differenze tra i due gruppi al termine dell'intervento sperimentale.

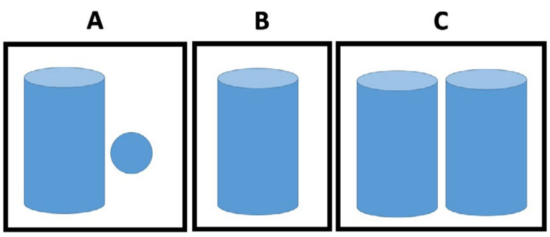


Figura 5. Quantità rappresentate con barattoli e palline nel secondo quesito della prova.

Il terzo quesito propone di rappresentare la relazione inversa di $2 \cdot A + 5 = B$, mentre nel quarto quesito lo studente deve indicare quale relazione è rappresentata da ciascuna delle frecce presenti in un grafo (**Figura 6**). Viene poi chiesto di copiare lo stesso grafo invertendo il verso delle frecce e di indicare ancora una volta la relazione rappresentata da ciascuna freccia. Si tratta in entrambi i casi di quesiti che possono permettere di valutare la componente concettuale (in questo caso in riferimento al concetto di relazione inversa) e che potenzialmente possono mettere in luce anche aspetti algoritmici, soprattutto nel caso in cui si utilizzano soprattutto i numeri. In entrambi i casi si tratta di consegne familiari per gli studenti del gruppo sperimentale al termine dell'intervento; consegne analoghe non sono invece presenti nel libro di testo adottato e quindi dovrebbero presentare maggiori difficoltà per il gruppo di controllo.

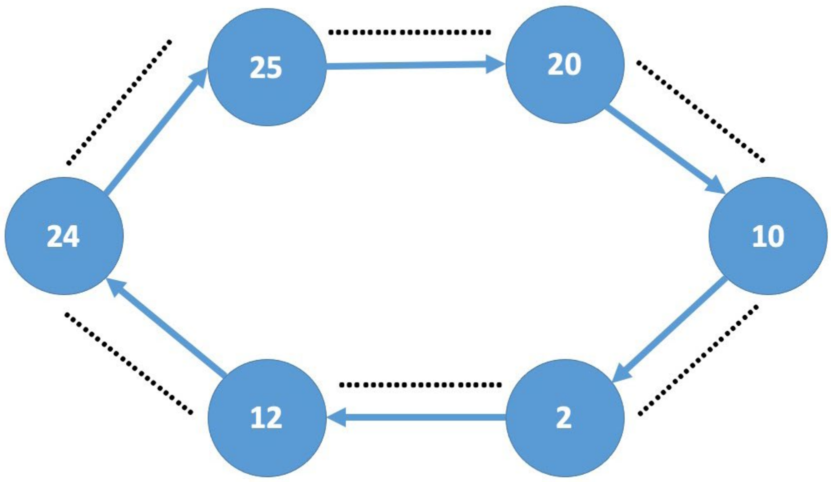


Figura 6. Grafo da completare nel quarto quesito della prova.

Il quinto e il sesto quesito si riferiscono a due situazioni problematiche, la prima in contesto matematico e la seconda in contesto extra-matematico. Tali quesiti sono pensati per valutare soprattutto la componente strategica dell'apprendimento. I testi delle due situazioni problematiche sono riportati, insieme a quelli delle altre consegne, nella **Tabella 1**. Situazioni simili sono presenti anche nel libro di testo adottato dalla scuola e quindi queste consegne dovrebbero essere familiari anche per il gruppo di controllo.
Il settimo quesito richiede di collegare con una freccia le rappresentazioni verbali matematicamente equivalenti di varie relazioni, per esempio "La somma tra *B* e 5 è *A*" e "*B* aumentato di 5 è *A*". Allo studente è chiesto di individuare quali rappresentazioni si riferiscono alla stessa relazione; si indaga principalmente l'apprendimento e la gestione delle rappresentazioni semiotiche.
L'ottavo quesito richiede di spiegare verbalmente il significato dell'espressione "La differenza tra *A* e *B* è 5". Il focus è quindi sull'argomentazione, ovvero sull'apprendimento di tipo comunicativo. L'ultimo quesito viene risolto indicando se affermazioni del tipo "Tre volte *B* è *A*, quindi un terzo di *A* è *B*" siano vere o false. Si tratta di un quesito che, in modo più semplice, indaga l'interpretazione del linguaggio verbale e richiede di prendere posizione su alcune affermazioni; si chiede anche di motivare la scelta. L'aspetto comunicativo è quindi prevalente.
La codifica delle risposte date dagli studenti è stata realizzata dal team di docenti della scuola. Ad ogni quesito è stato inizialmente attribuito un punteggio grezzo corrispondente al numero di completamenti o associazioni corrette. Successivamente tutti i punteggi sono stati normalizzati in modo da associare ad ogni quesito un valore compreso tra 0 e 1.

4.4 Analisi

La prova di valutazione progettata ha lo scopo di valutare diversi aspetti dell'apprendimento di uno stesso contenuto matematico, pertanto dovrebbe presentare un'alta coerenza interna intesa come coerenza tra i singoli quesiti e il costrutto latente dell'intera prova. La coerenza interna è misurata attraverso il calcolo dell'alpha di Cronbach. Tale indice può essere considerato soddisfacente per ricerche esplorative quando il suo valore supera 0,70 (Nunnally & Bernstein, 1994).
Per l'analisi dei dati raccolti nella prova di valutazione prima e dopo l'intervento didattico dobbiamo utilizzare un test non parametrico per via del numero ridotto di individui del campione. In particolare, abbiamo scelto il test di Mann-Whitney poiché si adatta a dati di tipo discreto che non prevedono a priori una distribuzione normale. L'ipotesi nulla che abbiamo assunto è che le distribuzioni delle performance dei due campioni messi a confronto siano uguali (sia nella prova complessiva sia nei singoli quesiti). Quando la probabilità che i due campioni siano uguali è inferiore al 5% (p-value < 0,05), l'ipotesi può essere negata e cioè si può assumere che le performance dei due campioni siano significativamente diverse, altrimenti si interpretano i dati come se le differenze fossero dovute al caso.
Applichiamo il test di Mann-Whitney ai risultati normalizzati della prova di valutazione somministrata prima dell'intervento didattico.

5 Risultati

Per quanto riguarda l'attendibilità della prova di valutazione, la coerenza interna è stata misurata attraverso il calcolo dell'alpha di Cronbach che è pari a 0,72. Questo risultato può essere considerato soddisfacente (Nunnally & Bernstein, 1994) a fronte del basso numero di quesiti presenti nella prova.
La media dei punteggi ottenuti dal gruppo sperimentale (3,79) è più bassa di quella del gruppo di controllo (5,91), ma il test di Mann-Whitney ci suggerisce che possiamo considerare i due campioni simili nonostante la differenza della media delle performance. Infatti, il test sulle performance dei singoli studenti non mostra differenze significative: la probabilità è maggiore del 5% (p-value = 0,0655), quindi possiamo ipotizzare che le differenze riscontrate siano dovute al caso.
Successivamente abbiamo applicato il test Mann-Whitney confrontando le performance della prova di valutazione prima e dopo gli interventi didattici nelle due classi. Nelle **Tabelle 2** e **3** sono mostrati i risultati dei due gruppi considerando sia la media dei punteggi dei singoli quesiti, sia della prova complessiva.

Quesito	Componente apprendimento	Punteggio medio gruppo sperimentale prima	Punteggio medio gruppo sperimentale dopo	p-value
1	Algoritmico	0,82	0,91	0,2327
2	Comunicativo – Concettuale	0,19	0,76	0,0721
3	Algoritmico – Concettuale	0,11	0,50	0,001
4	Algoritmico – Concettuale	0,70	0,89	0,2611
5	Strategico	0,25	0,48	0,0287
6	Strategico	0,24	0,72	0,0096

7	Gestione delle trasformazioni semiotiche	0,66	0,91	0,4364
8	Comunicativo	0,10	0,41	0,0139
9	Comunicativo	0,59	0,81	0,0301
Media del punteggio complessivo nella prova		3,79	6,44	0,0029

Tabella 2. Tabella dei risultati nei singoli quesiti della prova di valutazione e p-value del test di Mann-Whitney del gruppo Sperimentale (in grigio sono evidenziati i quesiti in cui si riscontra un p-value < 5%).

Quesito	Componente apprendimento	Punteggio medio gruppo di controllo prima	Punteggio medio gruppo di controllo dopo	p-value
1	Algoritmico	0,84	0,87	0,4641
2	Comunicativo – Concettuale	0,27	0,38	0,3446
3	Algoritmico – Concettuale	0,50	0,36	0,1788
4	Algoritmico – Concettuale	0,77	0,80	0,4207
5	Strategico	0,48	0,77	0,1611
6	Strategico	0,39	0,61	0,2611
7	Gestione delle trasformazioni semiotiche	0,91	0,81	0,1949
8	Comunicativo	0,38	0,51	0,1401
9	Comunicativo	0,81	0,82	0,4522
Media del punteggio complessivo nella prova		5,91	5,90	0,1587

Tabella 3. Tabella dei risultati nei singoli quesiti della prova di valutazione e p-value del test di Mann-Whitney del gruppo di Controllo.

Consideriamo prima la media dei punteggi complessivi della prova: il gruppo sperimentale mostra una media dei punteggi significativamente aumentata (da 3,79 a 6,44); al contrario, il gruppo di controllo non mostra differenze significative (da 5,91 a 5,90), entrambi i risultati sono confermati dal test di Mann-Whitney (per il gruppo sperimentale p-value = 0,0029; per il gruppo di controllo p-value = 0,1587). Nel dettaglio dei quesiti, si può notare che nel gruppo sperimentale si osservano differenze significative in più della metà dei quesiti, anche se non nella totalità. Il gruppo di controllo non sembra invece aver fatto progressi significativi per nessuno dei quesiti.

6 Discussione e conclusioni

Abbiamo presentato un'analisi di una particolare rappresentazione grafica intermedia tra situazioni problematiche e simbolismo algebrico. Tale rappresentazione è stata incorporata in una sequenza

didattica sperimentata in classi prime medie. Per valutare l'efficacia dell'intervento è stata predisposta una prova ideata in modo da essere rappresentativa di tutte le componenti dell'apprendimento della matematica individuate da Fandiño Pinilla (2008); la prova ha dimostrato soddisfacenti capacità misuratorie in termini di coerenza interna. I risultati mostrano che il gruppo sperimentale presenta differenze significative nel punteggio medio tra pre- e post-test, cosa che non accade per il gruppo di controllo.
Prendendo in esame le singole componenti della prova, possiamo osservare che in nessun quesito il gruppo di controllo sembra aver avuto differenze significative (Tabella 3) mentre il gruppo sperimentale le mostra in più della metà dei quesiti (Tabella 2). Un importante aspetto da notare prima di passare all'analisi dettagliata dei quesiti, è che essi (fatta eccezione per il quesito numero 2) non presentano rappresentazioni con barattoli e palline, ma sono privilegiate rappresentazioni che utilizzano il linguaggio verbale, simbolico, tabulare e grafico.
Entrando nel dettaglio, le maggiori differenze si riscontrano in tutti i quesiti legati alla componente strategica (5 e 6), alla maggior parte di quelli relativi alla componente comunicativa (8 e 9) e ad uno legato a quella concettuale (3). I quesiti 5 e 6 afferiscono alla componente strategica e presentano due situazioni: il primo in contesto matematico e il secondo in contesto reale. L'aspetto di notevole interesse è che, tra i due, il quesito in cui si registrano le maggiori differenze (con una significatività statistica maggiore) è quello in contesto reale e quindi quello che prevede, oltre all'attivazione di un processo di matematizzazione verticale, anche un processo di matematizzazione orizzontale (Treffers, 1987).
I quesiti 8 e 9, invece, si riferiscono alla componente comunicativa: in particolare, il primo chiede di descrivere con il linguaggio verbale una relazione tra due quantità, mentre il secondo chiede di verificare e motivare se delle affermazioni sono vere o false. Nell'ambito della componente comunicativa, non si sono riscontrate differenze significative nel quesito 2 poiché coinvolge aspetti comunicativi che in generale non si riferiscono ad argomentazioni (spiegazioni o giustificazioni nel senso di Brunero e Panero, 2019).
Infine, il quesito 3 chiede di manipolare un'espressione scritta con il linguaggio algebrico per determinare la relazione inversa. Il quesito è stato categorizzato all'interno delle componenti di apprendimento concettuale e algoritmico; coinvolgendo il concetto di relazione inversa, potrebbe non essere stato familiare per il gruppo di controllo e quindi il vantaggio del gruppo sperimentale in questo caso potrebbe essere proprio nell'apprendimento concettuale.
In conclusione, le differenze maggiori si riscontrano negli apprendimenti strategici e comunicativi che potrebbero confermare lo stretto rapporto che esiste tra risoluzione di problemi e argomentazione. Come osserva Di Martino

> «Problem solving e argomentazione […] sono ovviamente tra loro collegati: per valutare la risoluzione di un problema dobbiamo avere informazioni sia sui processi attivati (quindi è necessaria la spiegazione) sia valutare le giustificazioni delle scelte fatte (quindi la vera e propria argomentazione). D'altra parte richiedere di argomentare ha senso laddove lo studente è chiamato a fare delle scelte, ad assumersi delle responsabilità nell'attivazione dei processi di pensiero, e dunque in merito a processi produttivi».
>
> (Di Martino, 2017, p. 25)

Un approccio di questo tipo potrebbe fare la differenza nello sviluppare e stimolare aspetti trasversali legati all'argomentazione e alla risoluzione di problemi. Lo stesso *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) suggerisce il ricorso a situazioni di apprendimento significative che consentano di lavorare sulla capacità di utilizzare concetti, principi e metodi della matematica per comprendere, spiegare, esaminare e rappresentare la realtà. Ricordiamo, inoltre, che gli aspetti di competenza "comunicare e argomentare" e "matematizzare e modellizzare" sono due dei quattro processi individuati per la matematica nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015).

Questi risultati fanno eco alla vasta letteratura che mette in evidenza come l'approccio standard che si concentra solo sull'apprendimento concettuale e algoritmico si può superare (Fandiño Pinilla, 2008). L'attivazione di processi riproduttivi (per esempio la risoluzione di esercizi) può essere accompagnata da processi produttivi (risoluzione di problemi e argomentazione), dando una rilevanza ai processi e alla capacità di saperli descrivere e sostenere (argomentazione) piuttosto che ai prodotti (risultati). Questo vale tanto nel processo di insegnamento-apprendimento in generale quanto nella fase valutativa in particolare.

Dobbiamo anche notare i limiti dello studio qui presentato: il numero di studenti coinvolti è sicuramente basso e il fatto che appartengano tutti alla stessa scuola non ci permette di avere nessuna informazione su come una variazione di contesto potrebbe influire sui risultati della sperimentazione. Dal punto di vista quantitativo lo studio potrebbe essere rafforzato attraverso un diverso campionamento dei partecipanti. Ulteriori sviluppi potrebbero essere effettuati anche da un punto di vista qualitativo. Per esempio, abbiamo notato differenze nei quesiti di carattere argomentativo che potrebbero dipendere proprio dal fatto di aver richiesto una spiegazione in un caso e una giustificazione nell'altro. Un'analisi delle specifiche argomentazioni prodotte dagli studenti potrebbe permettere di identificare le differenze per queste tipologie di argomentazione. Inoltre, un'analisi qualitativa dei protocolli relativi alle situazioni problematiche potrebbe permettere di meglio descrivere il ruolo delle diverse rappresentazioni nel processo di soluzione dei problemi.

In conclusione, ai risultati quantitativi che abbiamo presentato nelle sezioni precedenti, aggiungiamo alcune considerazioni che abbiamo condiviso con i docenti coinvolti in questa esperienza: una prima osservazione riguarda il fatto che tutti i ragazzi della classe sono riusciti a partecipare alle attività proposte senza particolari difficoltà; questo testimonia il potenziale della proposta in termini di inclusività. Più di un insegnante ha notato che già nel post-test una buona parte degli studenti ha abbandonato spontaneamente la rappresentazione con barattoli e palline; questo suggerisce che essa si presta molto bene come rappresentazione intermedia che, per definizione (Davydov, 1982), deve essere superata. Infine, l'approccio proposto ha suscitato un particolare entusiasmo non solo tra gli studenti ma anche tra i loro insegnanti. Da un punto di vista di metodologia della ricerca, tale entusiasmo potrebbe essere ascrivibile come una delle cause dei risultati ottenuti; se invece ci mettiamo nel punto di vista dell'implementazione in classe, esso fornisce una buona ragione per adottare questo cambiamento di paradigma. L'unico limite riportato dagli insegnanti coinvolti riguarda le tempistiche di implementazione che richiedono una ristrutturazione della programmazione.

Ringraziamenti

Si ringraziano Antonella Castellini e Chiara Giberti per la proficua collaborazione nella progettazione della proposta didattica e della prova di valutazione. Si ringraziano inoltre tutte le docenti della scuola secondaria di primo grado dell'I.C. "Guido Novello" di Ravenna per l'entusiasta collaborazione e le profonde riflessioni condivise: Loredana Adamo, Laura Caruso, Loretta Evangelisti, Francesca Focaccia, Alessandra Gennari.

Bibliografia

Bazzini, L., & Iaderosa, R. (2000). Approccio all'Algebra. *Riflessioni didattiche*. FrancoAngeli.

Boyer, C. B. (2017). *Storia della matematica*. Mondadori. (Titolo originale: *A History of Mathematics* pubblicato nel 1968).

Brunero, A. M., & Panero, M. (2019). Sviluppare e valutare competenze argomentative in matematica: un percorso per la scuola elementare. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *6*, 82–108.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Fong Ng, S., & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. *ZDM*, *37*(1), 5–15.

Castellini, A. (2016). Against problem solving by segment method. *EDiMaST: Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology*, *2*(2), 287–302.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco*. Edizioni Dedalo.

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 224–238). Routledge.

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *1*, 23–37.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. http://www.pianodistudio.ch/

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education* (pp. 39–61). Brill Sense.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Erickson.

Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Insegnare e valutare la competenza in Matematica. In AA. VV. (2015). *Didattica per competenze. Supplemento a La Vita Scolastica*, *70*(2), 10–14.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 3–17.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Springer Science & Business Media.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326.

Mellone, M., Baccaglini-Frank, A., & Martignone, F. (2020). Measuring Rice in Early-Childhood Education Activities: A Bridge Across Discrete and Continuous Magnitudes. In M. Carlsen, I. Erfjord & P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 161–176). Springer.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. http://www.indicazioninazionali.it/

Navarra, G. (2019). Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebrica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 70–94.

Nunnally, J. C., & Bernstein, I. H. (1994). *Psychometric Theory* (3rd ed.). McGraw-Hill.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(3), 447–469.

Radford, L. (2008). Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Brill Sense.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, *30*(2), 2–7.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, *1*, 57–71.

Siety, A. (2003). *Matematica, mio terrore. Alla scoperta del lato umano della matematica*. Salani Editore. (Titolo originale: *Mathématiques, ma chère terreur* pubblicato nel 2001).

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 1–41). SUNY.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction-The Wiskobas project*. Kluwer Academic Publishers.

Xin, Y. P., Zhang, D., Park, J. Y., Tom, K., Whipple, A., & Si, L. (2011). A comparison of two mathematics problem-solving strategies: Facilitate algebra-readiness. *The Journal of Educational Research*, *104*(6), 381–395.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25 vol. 1* (pp. 1–9). Utrecht University.

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 71 - 99, DOI: 10.33683/ddm.21.10.4

OPEN ACCESS

Ti spiego il mio problema: un'indagine sulle competenze argomentative nella risoluzione di problemi matematici

I explain my problem to you: a survey on argumentative skills in solving mathematical problems

Monica Avenia
Docente di scuola primaria – Italia

monica.avenia@gmail.com

Sunto / Diversi studiosi hanno di recente approfondito la competenza argomentativa applicata a processi di problem solving da parte degli studenti già dagli ultimi anni della scuola dell'infanzia. In questo articolo viene presentata un'indagine effettuata in una classe III primaria di Imola (Bologna) durante l'anno scolastico 2018/2019, avente come focus di interesse l'analisi dell'argomentazione durante la risoluzione di problemi. Ci si riferisce nello specifico al problem solving quale approccio alla risoluzione di tre problemi matematici prendendo come riferimento metodologico il *Progetto ArAl* e il *Rally Matematico Transalpino*, nei quali emerge l'importanza di tale approccio all'interno delle prassi didattiche in matematica, con attenzione al linguaggio specifico della disciplina e all'utilizzo dell'argomentazione per sviluppare e riconoscere i processi emotivi e metacognitivi tramite il ragionamento e la riflessione.

Parole chiave: problem solving; metacognizione; competenza argomentativa; vissuti emotivi; apprendimento tra pari.

Abstract / In recent years, several researchers have deeply analyzed the argumentative skills applied to students' problem solving processes since their last years of kindergarten. The article presents a survey carried out in a third-grade class of a primary school in Imola (near Bologna) during the 2018/2019 school year. It is focused on the analysis of the argumentation during the resolution of mathematical problems. We specifically refer to problem solving as an approach to the resolution of three math problems taking as methodological reference the *Progetto ArAl* and the *Rally Matematico Transalpino*. They both show the importance of this approach within mathematical education, with a particular attention to the specific language of the discipline and the use of argumentation to develop and recognize emotions and metacognitive processes through reasoning and reflection.

Keywords: problem solving; metacognition; argumentative skill; emotions; cooperative learning.

1 Problem solving e competenza argomentativa

La decisione, in questo articolo, di trattare l'impiego della competenza argomentativa durante la risoluzione di problemi matematici legati a un ambito specifico, parte dall'assunto che:

> «[...] fare matematica è in prima istanza affrontare problemi, […] la soluzione di un problema non sorge mai dal nulla; ma dipende sempre dall'esperienza di un soggetto. Dunque la soluzione dei problemi (o, come si dice anche in Italia, il problem solving) è una condizione ottimale per l'apprendimento».
>
> (D'Amore, 1993, pp. 11–13)

Ci si è avvalsi dei principi del Progetto ArAl[1] e del Rally Matematico Transalpino[2] nei quali emerge l'importanza delle attività di problem solving all'interno delle prassi didattiche in matematica con attenzione al linguaggio specifico della disciplina e all'utilizzo dell'argomentazione per sviluppare un approccio metacognitivo nello studente, che scaturisce dal suo ruolo di protagonista attivo nel processo di apprendimento. Bisogna tenere conto che gli esercizi e i problemi concernono due differenti applicazioni didattiche in base allo scopo che l'insegnante vuole raggiungere e al tipo di attività richiesta all'allievo. Occorre fare una distinzione e maggior chiarezza tra esse, come esortano a fare in particolare due ricercatori:

> «Si ha un esercizio quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento; gli esercizi ritornano dunque nella categoria delle prove a scopo di verifica immediata o di rafforzamento; si ha invece un problema quando una o più regole o nozioni che dovrebbero essere utilizzate per la risoluzione non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore (alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione); a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto strategico, talvolta creativo, da parte del risolutore».
>
> (D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 95)

Da questa distinzione si evince come non sia il testo in sé a costituire un esercizio o un problema ma un complesso legato a situazioni didattiche, a capacità individuali, a fattori emotivi o più semplicemente al "contratto" che si è stabilito tra insegnante e alunno. Partendo dal presupposto che anche gli esercizi hanno la loro valenza in ambito didattico, soprattutto se utilizzati per consolidare conoscenze acquisite, in questa indagine ci si occuperà principalmente di una matematica che passa attraverso la risoluzione di problemi, dal risultato non predeterminato, che ammettono diverse strategie risolutive e diverse modalità di far fronte al testo proposto; questi problemi prevedono tipicamente l'accompagnamento di argomentazioni approfondite ed esplicative del percorso intrapreso al fine di rendere minore la distanza percepita da ogni allievo tra il linguaggio matematico e gli altri linguaggi di uso comune.
Quando uno studente si trova di fronte a un problema, si può dire che si trova dinanzi a una *situazione problematica,* e vive un momento di apprendimento che ne comporta sì la risoluzione ma non con una semplice ripetizione di conoscenze: c'è la necessità di formulare ipotesi nuove.
Nel campo del problem solving, tra numerosi altri studi, è stato molto importante il contributo dell'opera *How to solve it* (Polya, 1945), in cui viene enfatizzata l'importanza dei problemi nell'attività matematica evidenziando quattro fasi principali di risoluzione:

1. Per approfondimenti si rinvia al sito: www.progettoaral.it
2. Da ora in poi verrà citato con l'abbreviazione RMT. Per approfondimenti si rinvia al sito: https://armtint.eu

– capire il problema cercando di porsi alcune domande;
– ideare un piano per trovare la relazione tra dati e incognita;
– eseguire il piano;
– ritornare indietro per verificare il procedimento e controllare i risultati per poi discuterne apertamente.

La raccomandazione che Polya dà agli insegnanti è quella di percorrere in un certo senso l'approccio costruttivista dell'apprendimento andando a enfatizzare l'importanza del ruolo dell'allievo nella costruzione del sapere. Propone infatti di distaccarsi da compiti meramente esecutivi a favore di esperienze significative e stimolanti che aumentino la motivazione ad apprendere.

1.1 Valenza didattica dell'argomentazione

Costruire, sviluppare, promuovere, rafforzare e avvalersi della motivazione è una delle più serie sfide che la scuola deve fronteggiare. La motivazione muove l'alunno a spingersi verso l'apprendimento. Entrando nello specifico dell'argomento, come sostengono D'Amore e Marazzani:

> «[...] nell'insieme delle capacità che si devono mettere in atto per risolvere un problema, anche la capacità di stare attenti è fondamentale [...] motivare tanto da far sì che il bambino guardi il testo del problema con attenzione e curiosità, fa parte della professionalità dell'educatore».
>
> (D'Amore & Marazzani, 2011, p. 54)

Un consiglio pratico che viene dato dagli autori è quello, ad esempio, di fissare tra i criteri di valutazione il ragionamento che l'allievo ha seguito nella risoluzione di un problema piuttosto che valutare con estrema pignoleria la mera esecuzione dei calcoli. Ciò potrebbe giovare all'incremento di motivazione in quanto ad essa è strettamente correlato il lato affettivo ed emotivo dei bambini, bambini che si mettono in gioco e che potrebbero manifestare sensazioni negative creando, successivamente, situazioni di blocco di fronte a possibili difficoltà anziché cercare di superare l'ostacolo. Nella manifestazione della motivazione, favorita dall'insegnante con determinate pratiche didattiche di tipo attivo, l'allievo è il protagonista della costruzione del proprio sapere e della propria conoscenza.
Citando Di Martino (2017, p. 25), ci viene ricordato che «dal punto di vista epistemologico, infatti, molti matematici sottolineano come l'essenza del fare matematica sia il risolvere problemi» e inoltre «– sconfinando negli aspetti didattici – che il miglior modo per imparare a risolvere problemi sia affrontare problemi».
Anche dal punto di vista normativo, la lettura attenta delle Indicazioni Nazionali italiane per la scuola dell'infanzia e il primo ciclo (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012) evidenzia come lo sviluppo di competenze argomentative e nell'ambito del problem solving sia un traguardo fondamentale di tutta l'educazione matematica dai 3 ai 14 anni: un traguardo dunque da sviluppare in verticale, ma anche trasversale alle diverse discipline e soprattutto che assume un ruolo cruciale nella formazione del cittadino adulto.
I traguardi delle Indicazioni Nazionali suggeriscono significativi contesti di lavoro riferiti alla scienza, alla tecnologia, alla società. La matematica, tuttavia, permette di sviluppare competenze trasversali importanti attraverso attività che valorizzano i processi tipici della disciplina: «[...] in particolare, la matematica […] contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri» (MIUR, 2012, p. 49).
Tali competenze sono rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti.
Il laboratorio di matematica rappresenta, in questo scenario, un contesto naturale per stimolare le capacità di argomentare e favorire il confronto fra pari:

> «[...] in matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico, sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

Alla luce della descrizione che ne viene data nelle Indicazioni Nazionali, il laboratorio può costituire anche una palestra per imparare a fare scelte consapevoli, a valutarne le conseguenze e quindi ad assumersene la responsabilità, aspetti anche questi centrali per l'educazione a una cittadinanza attiva.
Tutto ciò perché viene data, a livello normativo, estrema importanza allo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per porsi e affrontare problemi significativi.
Problem solving e argomentazione costituiscono dunque ufficialmente il leitmotiv di tutta l'educazione matematica dello studente.
Problem solving e argomentazione, inoltre, sono tra loro collegati: per valutare la risoluzione di un problema, dobbiamo avere informazioni sia sui processi attivati (quindi è necessaria la spiegazione), sia valutare le giustificazioni delle scelte fatte (quindi la vera e propria argomentazione). D'altra parte, richiedere di argomentare ha senso laddove lo studente è chiamato a fare delle scelte, ad assumersi delle responsabilità nell'attivazione dei processi di pensiero.
È necessaria, dunque, una didattica attenta alla visione della matematica che gli allievi si costruiscono, cercando di ridurre il più possibile quelli che Zan (2007) definisce "i danni del bravo insegnante", danni che si presentano nel momento in cui si predispongono piani di apprendimento secondo schemi tradizionali e predefiniti. C'è invece la necessità di provare a fondare il proprio agire didattico partendo dal vedere i possibili errori degli allievi anche come opportunità di scambio aperto e crescita condivisa.

1.2 Progetto ArAl e Rally Matematico Transalpino: due realtà concrete di utilizzo della competenza argomentativa

Il Progetto ArAl e il RMT sono due realtà, due metodologie di insegnamento concrete e attuali che si approcciano alla matematica in modo innovativo e che fanno dell'argomentazione uno dei capisaldi metodologici.
Il progetto ArAl si colloca all'interno di quella cornice teorica che assume la denominazione di *Early Algebra*, un'area di ricerca nell'ambito dell'educazione matematica che promuove l'insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica sin dai primi anni della scuola primaria.[3]
Punto di forza e di partenza dell'*Early Algebra* è l'attenzione verso la semantica del linguaggio algebrico e la volontà di introdurlo fin da subito affiancato al linguaggio naturale, cosicché gli alunni possano costruire quelli che sono i modelli mentali propri di tale linguaggio. Si parla a tal proposito di "balbettio algebrico", intendendo con questo termine quanto definito da Malara e Navarra (2008, pp. 168–169): «l'appropriazione sperimentale di un nuovo linguaggio, nel quale le regole trovino la loro collocazione gradualmente, all'interno di un contratto didattico adatto e tollerante». È a partire da questi presupposti che il progetto ArAl sviluppa l'attenzione verso le proposte, le affermazioni, le sperimentazioni degli alunni stessi, facendo partire l'indagine e lo studio dei fenomeni della matematica, accompagnando gli allievi verso una comprensione radicata tramite una discussione collettiva sui temi matematici. Attraverso questo approccio gli alunni sono portati a «riflettere continuamente sulle idee, sulle opinioni, sugli errori e sui successi conseguiti» (Malara, 2009, p. 18); a riflettere quindi sui processi, a porsi in relazione con le ipotesi e con le proposte dei compagni, a confrontarle e classificar-

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

le, a valutare le loro proprie convinzioni, a operare scelte consapevoli. Tutto ciò si deve poi misurare con la competenza dell'insegnante nel gestire tale situazione e nel permettere che da essa gli alunni possano trarre il maggior giovamento possibile. Attraverso la verbalizzazione e l'argomentazione, gli alunni possono essere avvicinati più facilmente alla comprensione dell'aritmetica in chiave algebrica. Per sviluppare il linguaggio della matematica, il progetto ArAl spinge gli allievi a discutere, ascoltare, proporre, motivare affermazioni ed esplicitare idee sui temi matematici trattati. Questo approccio didattico si pone in maniera trasversale in tutti i gradi di scuola, e l'insegnante che vuole intraprendere questo percorso è costantemente seguito oltre ad avere diverse possibilità di formazione.
Il RMT, nato nel 1992 in Svizzera, invece, si configura come un confronto fra classi, dalla terza primaria al secondo anno di scuola secondaria di secondo grado,[4] nell'ambito della risoluzione di problemi di matematica. Propone situazioni problematiche per le quali non si dispone di una soluzione immediata e che conducono a inventare una strategia, a fare tentativi, a congetturare, a verificare, a giustificare la soluzione, a spiegare le proprie procedure. Tra i suoi obiettivi, vi è la pratica del ragionamento scientifico: sviluppo dell'autonomia di apprendimento, organizzazione di una ricerca, rigore delle notazioni, capacità di argomentare e di comunicare i risultati.
Il RMT non è solo una gara, è anche l'occasione per un approfondito lavoro di analisi didattica.
Per quanto concerne il progetto ArAl, in questa indagine sono stati utilizzati alcuni traguardi per lo sviluppo delle competenze (che a loro volta si rifanno ai traguardi delle Indicazioni Nazionali) incentrati sull'utilizzo del linguaggio matematico ponendo l'attenzione alla discussione di classe. Dal RMT sono stati scelti i tre problemi somministrati al gruppo classe applicandone la metodologia di svolgimento.
È evidente come entrambi gli approcci presentino elementi innovativi rispetto all'apprendimento della matematica. Si riscontrano molti punti in comune: entrambi si propongono

> «[...] di fare matematica attraverso la risoluzione di problemi, […] di sviluppare la capacità di lavorare in gruppo sentendosi responsabili, di imparare a parlare di matematica. […] Il confronto fra gli insegnanti sulla progettazione delle attività di problem solving e sui processi risolutivi messi in atto dagli allievi si configura come una significativa modalità di auto-formazione».
> (Zan, 2007, pp. 268–271)

Un ulteriore obiettivo di fondo dei due approcci è quello di offrire agli insegnanti spazi per la riflessione sulle loro conoscenze e sul loro agire didattico in aula, affinché gli alunni possano sviluppare processi cognitivi e competenze sociali in sinergia.
I bambini, protagonisti del loro sapere, hanno la possibilità concreta di esperire in classe un modello di didattica incentrata sugli aspetti di una vita societaria democratica, ampliando così l'acquisizione delle competenze trasversali previste dalla Comunità Europea.

2 Sperimentazione in aula

Questa sperimentazione, attraverso un primo questionario a risposta aperta, è volta a esplorare in un primo momento le convinzioni dei bambini sul concetto di problema, sul suo utilizzo e sull'utilità estrinseca che esso ha per ciascun bambino, nonché le eventuali difficoltà che sorgono nel momento in cui un bambino si trova a riflettere individualmente sulle esperienze avute, prima della sperimentazione, durante la risoluzione di problemi matematici. La sperimentazione, per come è stata struttu-

4. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

rata, si propone di fornire gli strumenti necessari per una chiave interpretativa funzionale alla verifica delle ipotesi di ricerca.
In un secondo momento, dopo la somministrazione dei problemi matematici da svolgere in gruppo, argomentando la risoluzione e la procedura adottata, questo lavoro indaga le dinamiche argomentative e cooperative che si sono create in contesto gruppale durante lo svolgimento del compito.
Infine, tramite la somministrazione di un questionario individuale finale, vengono raccolti i vissuti e le impressioni dei bambini, si analizza come le strategie argomentative applicate ai problemi possano migliorare le competenze linguistiche, nonché facilitare i processi comunicativi in un contesto cooperativo e chiarire quelli cognitivi che si attuano durante la fase di svolgimento del compito assegnato.
Di seguito sono riportati gli obiettivi di apprendimento che si intende far raggiungere, attraverso la sperimentazione, agli allievi e sui quali sono costruiti gli indicatori dei questionari somministrati. Tali obiettivi fanno riferimento alle Indicazioni Nazionali 2012 e agli obiettivi specifici del progetto ArAl.
I traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della classe V primaria presi come riferimento dalle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012) sono i seguenti:

– Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.
– Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
– Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.

Gli obiettivi del progetto ArAl[5] relativi a strategie di problem solving considerati per strutturare il questionario, con particolare riguardo all'utilizzo del linguaggio matematico nell'argomentazione durante la risoluzione di un problema, sono di seguito riportati:
Categoria Numeri:
– Usare termini specifici del linguaggio matematico.
– Eseguire mentalmente semplici operazioni con le quattro operazioni anche esplicitando strategie e proprietà usate.

Categoria Relazioni numeri dati e previsioni:
– In riferimento a semplici situazioni problematiche, distinguere i dati dai loro valori numerici, assegnando o facendo variare tali valori.
– Oggettivare le relazioni tra i dati in semplici situazioni problematiche.
– Utilizzare le relazioni individuate per prevedere nuovi risultati sulla base di quelli precedenti.
– Giustificare la procedura usata.

Nelle Tabelle 1 e 2, riportate nel prossimo paragrafo, è possibile visualizzare come sono stati strutturati i questionari a partire dagli indicatori individuati.

2.1 Metodologia

In questo lavoro, ci si è avvalsi di una metodologia che riflette una ricerca di carattere qualitativo. La sperimentazione descritta in questa esperienza didattica si è svolta in una classe terza della scuola primaria "Athos Rubri" afferente all'Istituto Comprensivo n. 6 di Imola. Nell'indagine sono stati

5. Al seguente link è possibile consultare il documento degli indicatori e degli obiettivi di apprendimento del progetto ArAl: https://progettoaral.files.wordpress.com/2015/06/curr_2_obiettivi_nuovosito.pdf

coinvolti 21 bambini su un totale di 22[6] tra cui 10 maschi e 11 femmine. Tra marzo e aprile 2019, in accordo con l'insegnante della classe, si sono fissati cinque appuntamenti a cadenza settimanale, per un totale di 15 ore di lavoro con gli studenti.
La sperimentazione in classe si è articolata come segue:

1. Nel primo incontro sono stati presentati agli alunni i passaggi della sperimentazione ed è stato somministrato il questionario in entrata (**Tabella 1**). Il questionario è composto da 10 domande riferite a quattro indicatori al fine di «portare alla luce le convinzioni […] sulla visione della matematica» (Zan, 2007, p. 223) che l'allievo sta costruendo, nello specifico sui problemi che sono entrati a far parte della routine del suo percorso scolastico.

Indicatori	Indagare le concezioni spontanee sul concetto di problema	Analizzare le strategie attuate per la risoluzione di un problema matematico	Indagare i vissuti emotivi che emergono durante la risoluzione di un problema matematico	Indagare le competenze argomentative attuate per spiegare la procedura di risoluzione di un problema matematico
Domande	1) Che cos'è per te un problema di matematica? 2) Quali caratteristiche ha per te un problema di matematica? 3) A cosa serve, per te risolvere un problema?	4) Cosa fai quando risolvi un problema? 5) Qual è per te la difficoltà che ti trovi ad affrontare?	6) Cosa provi quando devi risolvere un problema? 7) Da 1 a 5 quanto ti senti a tuo agio nel risolvere un problema? Perché?	8) Di solito spieghi come sei giunto alla soluzione di un problema? 9) In quali situazioni ti capita solitamente? Descrivi un episodio. 10) Durante la correzione ti confronti con i tuoi compagni e/o con la maestra? Se sì, come?

Tabella 1. Questionario in entrata.

2. Tre incontri sono stati incentrati sulla risoluzione di alcuni problemi selezionati dal RMT. I problemi scelti sono riportati nei prossimi paragrafi, insieme a un'analisi a priori del loro svolgimento e delle loro principali caratteristiche. Prima della risoluzione sono state descritte ai bambini le modalità di lavoro.
   Con l'aiuto dell'insegnante, la classe è stata divisa in 7 gruppi omogenei composti da 3 bambini, gruppi rimasti fissi per l'intera fase della sperimentazione. Ogni gruppo aveva a disposizione 50 minuti per svolgere il problema proposto e poteva avvalersi degli strumenti che riteneva necessari per la risoluzione. È stato posto l'accento sull'importanza di trascrivere e argomentare il percorso fatto per giungere a una o più strategie di risoluzione dei problemi matematici.
3. Al termine del quinto incontro è stato somministrato il questionario in uscita sull'esperienza fatta. Questo dopo aver presentato all'intera classe i protocolli di risoluzione dei problemi dei vari gruppi in modo da avviare una discussione di classe sulle diverse strategie di risoluzione trovate e ampliare il bagaglio di competenze di ogni singolo allievo, discussione che l'insegnante ha proseguito anche a posteriori. Il questionario era strutturato in nove domande che fanno riferimento a quattro indicatori pensati per analizzare le impressioni e i vissuti emotivi scaturiti dall'esperienza delle modalità di risoluzione dei problemi del RMT, focalizzando l'attenzione sull'importanza dell'argomentazione come supporto alle strategie di risoluzione.

6. Un alunno certificato non ha potuto partecipare alla sperimentazione per problemi di salute.

Indicatori	Indagare le concezioni personali sulla somministrazione di problemi matematici seguendo la metodologia del RMT	Individuare la ripartizione dei ruoli per risolvere il problema matematico in contesto gruppale	Evidenziare le strategie argomentative messe in atto per formulare la procedura di risoluzione del problema	Rilevare i vissuti dei bambini durante la risoluzione in gruppo dei problemi matematici
Domande	1) Quali differenze hai trovato mentre svolgevi i problemi del RMT proposti rispetto a quelli svolti in modo tradizionale? 2) Se hai qualcosa da aggiungere in merito ai problemi del RMT puoi scriverlo di seguito.	3) Durante lo svolgimento del problema in gruppo come vi siete divisi i compiti? 4) Qual è stato il tuo ruolo durante la risoluzione del problema?	5) In che modo siete arrivati alla risoluzione del problema? Spiega le fasi. 6) Pensi sia utile spiegare scrivendo, tutto il percorso fatto per arrivare alla soluzione? Perché?	7) Quali sono le cose positive per te, nello svolgere un problema secondo le regole del RMT? 8) Da 1 a 5 quanto ti sei sentito a tuo agio nel risolvere i tre problemi presentati? Perché? 9) Quali sono le emozioni che hai provato mentre hai risolto i problemi con i tuoi compagni di classe?

Tabella 2. Questionario in uscita.

2.2 Problema n. 1 – Caccia al tre

Il seguente problema è tratto dal RMT: 10.I.03; afferisce all'ambito NU (numeri), ed è somministrabile alle categorie:[7] 3, 4, 5.

> «Isidoro sta scrivendo la successione dei numeri a partire da 1:
> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …
> Ad un certo punto Isidoro scrive la cifra 3 per la venticinquesima volta.
> Quale numero sta scrivendo Isidoro a quel punto?
> Mostrate come l'avete trovato».

Questo problema fa riferimento alle conoscenze sul sistema di numerazione decimale posizionale. In questo problema occorre elencare la successione dei numeri, oppure solo i numeri contenenti la cifra 3 e fermarsi al numero 131 che la contiene per la venticinquesima volta.
Lo studente deve aver compreso che la cifra 3 va considerata qualunque sia il suo valore posizionale e che essa compare *regolarmente* nella posizione delle unità una volta in ogni decina, 10 volte (da 30 a 39) nella posizione delle decine in ogni centinaio, 100 volte (da 300 a 399) nella posizione delle centinaia in ogni migliaio e così via.
Gli errori che si possono commettere sono diversi:

1. i bambini non distinguono le due cifre 3 contenute nel numero 33 con la conseguenza di dare 132 come risposta al problema;
2. lacune nella numerazione per disattenzioni o imprecisioni che portano a una costruzione errata della successione dei numeri;
3. considerare solo la cifra 3 quando ha valore di unità e non di decina;
4. moltiplicare 3 per 25, influenzati dall'interpretazione del numero ordinale "venticinquesima volta", riportata nell'enunciato, come se fosse "venticinque volte";

7. Le classi che partecipano al RMT si suddividono in otto categorie. Tre per la scuola primaria: cat.3 – classe terza, cat.4 – classe quarta, cat.5 – classe quinta. Tre per la scuola secondaria di primo grado: cat.6 – classe prima, cat.7 – classe seconda, cat.8 – classe terza. Due per la scuola secondaria di secondo grado: cat.9 – classe prima, cat.10 – classe seconda.

5. scrivere la cifra 3 ripetutamente per 25 volte per lettura errata del testo.

Gli errori degli studenti nella risoluzione del problema si possono ricondurre all’influenza in campo matematico delle competenze linguistiche in loro possesso e all’assenza totale del controllo del senso del testo stesso (soprattutto nei casi 4 e 5 sovraesposti), ma sono altresì rivelatori della confusione cifra-numero (ad esempio nel caso 1).

2.3 Problema n. 2 – Tiro al barattolo

Il seguente problema è tratto dal RMT: 26.I.01; afferisce all’ambito OPN (operazioni aritmetiche con numeri naturali), ed è somministrabile alle categorie: 3, 4.

> «In questo gioco di abilità bisogna far cadere uno dei quattro barattoli che sono appoggiati su un tavolo, lanciando una palla.
> Quando un barattolo cade, si ottiene il numero di punti che è scritto sul barattolo e si rimette il barattolo al suo posto. Se nessun barattolo cade, non si ottengono punti.
> Si guadagna un bell’orso di pelouche se si ottengono esattamente 32 punti, né più né meno, dopo aver lanciato cinque volte la palla.
> Quali sono i barattoli che si devono far cadere per vincere l’orso lanciando cinque volte la palla?
> Indicate tutte le possibilità: quali barattoli dovranno cadere e quante volte ognuno di essi cadrà».

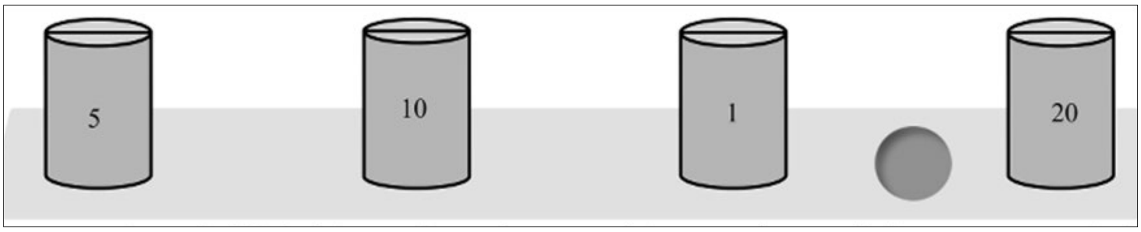


Figura 1. Barattoli con punteggi.

Questo problema riguarda le operazioni aritmetiche con numeri naturali. Il compito degli studenti è scegliere l'operazione o le operazioni da utilizzare per la risoluzione, tenere conto delle loro proprietà, eseguire i calcoli corrispondenti. Dal punto di vista didattico questi problemi consentono di rafforzare il controllo delle relazioni e delle operazioni sui numeri naturali.

Allo studente viene richiesto di trovare tutte le addizioni di cinque termini scelti tra i numeri 0, 1, 5, 10, 20 e la cui somma sia 32.

Nello specifico il ragionamento del gruppo deve analizzare le seguenti situazioni:

- capire che ad ogni lancio si possono ottenere 5, 10, 1, 20 o anche 0 punti;
- capire che la palla è lanciata cinque volte, che il numero di punti ottenuti è la somma di cinque termini presi tra i numeri precedenti e che uno stesso numero può essere ripetuto più volte.

Le diverse strategie possibili si possono riassumere come segue:

- simulare il gioco scegliendo il barattolo abbattuto o l’assenza di barattoli abbattuti ad ogni lancio, calcolare il numero di punti ottenuti e confrontarlo con 32 e, se necessario, ricominciare con la simulazione;
- fare dei tentativi addizionando cinque numeri tra 0, 1, 5, 10, 20 con ripetizione possibile e confrontare la somma con 32;
- capire che, per ottenere 32 punti, bisogna necessariamente far cadere due volte il barattolo con il numero 1 e che poi bisogna fare 30 con tre lanci con gli altri numeri. Procedere per tentativi o iniziare una ricerca sistematica:

   a. con presenza del numero 20: ottenere le due possibilità 20 + 10 + 0 e 20 + 5 + 5;
   b. senza il numero 20: ottenere la sola possibilità 10 + 10 + 10;
– concludere che ci sono tre possibilità con gli addendi non disposti necessariamente in quest'ordine:
   a. 20 + 10 + 1 + 1 + 0;
   b. 20 + 5 + 5 + 1 + 1;
   c. 10 + 10 + 10 + 1 + 1.

Gli errori in cui gli alunni possono incorrere sono diversi:
– i bambini non considerano la possibilità di un lancio a vuoto a cui attribuire il punteggio 0 perché non rientra nello schema visivo della figura che accompagna il testo del problema;
– il bambino potrebbe considerare valida la somma aritmetica 20 + 10 + 1 + 1, utilizzando quattro dei cinque tiri a disposizione, e ritenerla giusta perché si sono utilizzati meno tiri di quelli a disposizione;
– il bambino potrebbe non considerare che un barattolo può essere colpito più volte credendo che deve necessariamente colpirli tutti.

Gli errori degli studenti nella risoluzione di questo problema si possono ricondurre a una confusione sul controllo del senso del testo, seppure il testo sia costruito su una narrazione verosimile «dove la verosimiglianza narrativa riguarda anche gli scopi dei personaggi» (Zan, 2012a, p. 122).

2.4 Problema n. 3 – Il cuore di Martina

Il seguente problema è tratto dal RMT: 22.I.09; afferisce all'ambito GP (geometria piana), ed è somministrabile alle categorie: 5, 6.

> «Martina ha fatto un disegno a forma di cuore sul suo quaderno.
> Ha colorato il cuore di rosso e di azzurro la parte rimanente del quadrato.
> Qual è la parte più grande, quella colorata in rosso o quella colorata in azzurro?
> Spiegate come avete trovato la vostra risposta».

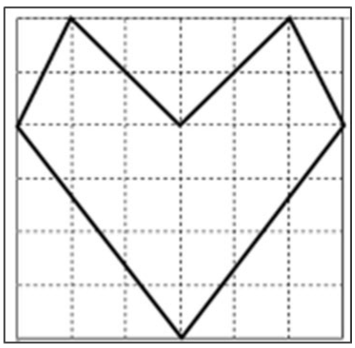


Figura 2. Cuore di Martina.

Il compito consiste nel confrontare delle aree di figure senza ricorrere al calcolo con le formule tradizionali, dato che i bambini del livello scolastico a cui viene somministrato il problema non conoscono ancora le formule per il calcolo dell'area. Si aiuteranno quindi tramite la scomposizione in unità determinate dalla "griglia" sulla quale le figure sono disegnate.

Per la risoluzione del problema è necessario confrontare l'area interna ed esterna di un poligono disegnato su una griglia quadrettata 6 × 6. Il poligono ha un asse di simmetria e i suoi vertici si trovano sulle intersezioni della quadrettatura.

È necessario decontestualizzare la situazione: passare dall'immagine del "cuore in rosso" e del "resto

del quadrato in azzurro" alle figure geometriche e capire che l'espressione "la parte più grande" si riferisce alle aree delle figure.
Si procede così a scomporre, mentalmente o con il disegno dei segmenti, le due forme in figure più semplici o elementari: quadretti della griglia quadrata o triangoli.
Fatta la scomposizione si passa al conteggio dei quadrati della griglia. Infine, è possibile effettuare le addizioni corrispondenti e confrontare le aree totali.
Tra i saperi mobilizzati nell'ambito geometrico rientrano: il concetto di unità d'area (quadretti della griglia), l'equivalenza e la trasformazione di unità d'area, la scomposizione o ricomposizione di parti di quadretti della griglia per spostamenti (traslazione o rotazione), il calcolo dell'area del rettangolo sulla griglia. In ambito aritmetico invece i saperi concernono il conteggio e l'addizione.
Si può procedere alla risoluzione tramite diverse procedure:

– Per i triangoli: la parte inferiore è scomposta in due rettangoli 3 × 4 suddivisi entrambi in due triangoli rettangoli dal contorno della figura.
– La parte superiore è scomposta in due quadrati centrali 2 × 2 e due rettangoli a destra e a sinistra del tipo 1 × 2; ciascuno di questi poligoni risulta suddiviso in due triangoli rettangoli dal contorno della figura. La spiegazione può presentarsi sotto forme differenti a seconda di come i bambini argomentano la risoluzione del problema.
– Con conteggio dei quadretti della griglia: sono presi in conto i quadretti interi e le parti di quadretto sono raggruppate per ricostituire dei quadretti interi.

Ciascuna di queste procedure può presentarsi con varianti molto diverse.
Nelle procedure per conteggio dei quadretti della griglia, gli ostacoli risiedono nella ricomposizione delle parti di quadretti. Per la parte superiore, il contorno del cuore divide i quadretti e i semi-quadretti triangolari o in quarti di quadretti triangolari o in tre quarti di quadretti a forma di trapezio; il compito di ricomposizione è facilitato in questo caso.
Nella parte inferiore dove il contorno segue la diagonale dei rettangoli di tipo 3 × 4 e divide sei quadretti in triangoli e trapezi di tre grandezze differenti, il conteggio dei quadretti può condurre di conseguenza a errori mentre i calcoli d'area effettuati sulla base di misure in cm e mm sono sempre inefficaci.

3 Questionario in entrata: analisi dei dati rilevati

Le risposte per esteso al questionario, riportate dagli alunni, sono consultabili nell'Allegato 1. Le risposte simili date dagli alunni sono state accorpate sotto un unico argomento relativo ai diversi indicatori al fine della misurazione statistica. Il numero dei bambini menzionato si riferisce sempre in rapporto al totale degli alunni partecipanti che corrisponde a 21.

3.1 Indagare le concezioni spontanee sui problemi

Le domande riferite al primo indicatore "Indagare le concezioni spontanee sul concetto di problema matematico" (si veda la **Tabella 1**) hanno spinto gli alunni a riflettere su cos'è per loro un problema matematico, sullo scopo che ha e le caratteristiche che lo definiscono.
Per 7 bambini un problema viene definito tale quando il testo richiede delle «operazioni da trovare», simile all'affermazione «un testo con una domanda a cui dare una risposta», pensiero condiviso da altri 4 alunni e riconfermato nella domanda n. 2, quando tra le caratteristiche più condivise rientrano: domande a cui rispondere con operazioni (10 bambini), lettura del testo diverse volte per comprendere la consegna (4 bambini) al fine di individuare una domanda e una risposta (3 alunni). Come

sostengono D'Amore e Sbaragli (2011, pp. 26-27), «lo studente ritiene che in matematica si devono fare dei calcoli […] e tende a far uso dei dati numerici presenti nel testo del problema per dare dunque una risposta formale, usando qualche operazione». Una minoranza della classe sostiene che la risoluzione di problemi matematici necessiti di riflessione e ragionamento, caratteristiche del problem solving, un solo bambino su 21 ha riscontrato una connessione tra problemi risolti in aula e problemi di vita quotidiana.

Nonostante tali concezioni sui problemi matematici, la quasi totalità del campione concorda sul fatto che attraverso la risoluzione di problemi matematici si accrescono le proprie competenze e, attraverso il ragionamento che il problema richiede, «si imparano cose nuove».

3.2 Strategie di risoluzione di un problema

Le domande riferite al secondo indicatore: "Analizzare le strategie attuate per la risoluzione di un problema matematico" avevano l'obiettivo di far emergere le modalità con cui gli allievi si avvicinano alla risoluzione di un problema matematico e le difficoltà che riscontrano durante la risoluzione.

Quasi la totalità degli alunni si rapporta alla situazione problematica evocando alla mente tutti i passaggi che sono soliti adottare. Si evidenzia come specificare il «fare ipotesi» nella procedura implichi nel ragionamento dei ragazzi che non tutti i problemi si eseguono tramite prassi già apprese, «a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto strategico, talvolta creativo, da parte del solutore» (D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 95). Ne consegue che l'allievo ha ben chiaro di essere in una situazione nella quale è prevista la costruzione di una conoscenza, prerogativa del problem solving.

Per quanto concerne le difficoltà che gli studenti avvertono, interpretando le risposte date, salta all'occhio come percepiscano una fatica nell'argomentare, produrre e spiegare prove a sostegno di una loro tesi: ciò potrebbe essere correlato all'altro pensiero condiviso dagli alunni, cioè non capire quale operazione usare, come se implicitamente l'alunno desse per assodato che il fine ultimo del testo sia trovare un'operazione da formulare al fine di rispondere a una domanda e non sbagliare (sapendo che tutto ciò prima o poi condurrà a una valutazione che genera una sorta di ansia da prestazione). Un alunno riporta quanto segue: «ho difficoltà a spiegare il ragionamento perché se è giusto, è giusto poche volte e qualche volta lo spiego male». Molto probabilmente (bisognerebbe verificare ogni singolo problema che viene proposto), queste difficoltà nascono dalla difficoltà nel dare un senso al testo del problema e alla domanda correlata. Come sostiene Zan (2012b, p. 440), la domanda sia implicita che esplicita potrebbe «essere sul contesto, non nasce quindi nel contesto», andando a interrompere i legami tra i vari elementi della storia narrata e rendendo così confusionaria la comprensione del testo del problema.

3.3 Emozioni e vissuti

Il terzo indicatore "Indagare i vissuti emotivi che emergono durante la risoluzione di un problema matematico" aveva l'intento di far emergere le emozioni e i sentimenti che i bambini provano, cercando anche di cogliere i motivi da cui scaturiscono determinate sensazioni.

Per 18 alunni, le emozioni vissute sono di tipo negativo; solo 3 alunni provano tranquillità. Ad esempio, una bambina riporta: «Mi sento un po' nervosa, un po' agitata perché penso che non ce la faccio, però ce la farò sicuramente».

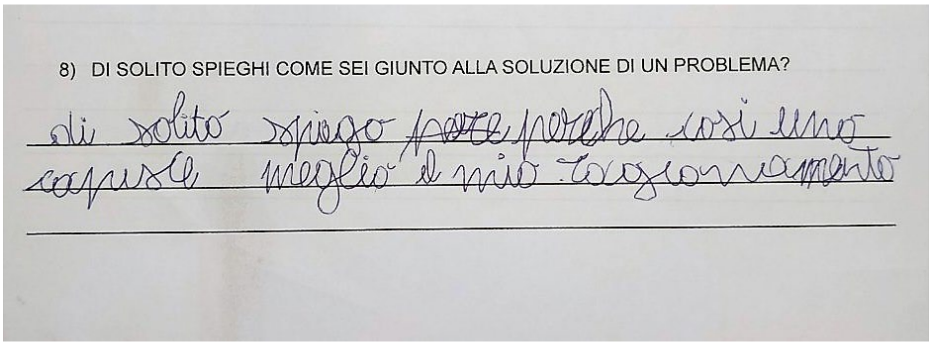
La situazione è confermata anche dal grado che i bambini attribuiscono nella domanda 7 al senso di agio provato durante la risoluzione di un problema: di nuovo 18 alunni scelgono un punteggio minore o uguale a 3. Tali sensazioni sono dovute a un senso di insicurezza, alla paura di sbagliare e alla preoccupazione che ne deriva. Soffermarsi sulle emozioni vissute durante le situazioni di apprendimento è importante; la paura di sbagliare può creare un blocco nel singolo studente che nel tempo lo inibisce a rinforzare le strutture cognitive. Come ci viene ricordato, si riconosce:

> «[...] nella nascita dell'emozione una componente cognitiva essenziale: l'emozione non è direttamente scatenata da un evento, ma dall'interpretazione di tale evento. […] Se assumiamo questo punto di vista, non è l'esperienza matematica in sé che direttamente può scatenare emozioni negative, ma l'interpretazione che l'allievo ne dà, interpretazione che risente quindi delle sue convinzioni, dei suoi valori, dei suoi gusti e delle sue attitudini».
>
> (Zan, 2007, p. 191)

Lavorare sull'aspetto motivazionale gioca quindi un ruolo fondamentale nel cambiamento delle percezioni degli alunni.

3.4 L'argomentazione nei problemi matematici

L'obiettivo del quarto indicatore "Indagare le competenze argomentative attuate per spiegare la procedura di risoluzione di un problema matematico" era quello di valutare, prima della somministrazione dei problemi scelti per la sperimentazione, quale fosse il livello individuale delle competenze argomentative in ambito matematico, invitando gli alunni a riflettere per iscritto su esperienze pregresse vissute.
Circa la metà degli studenti sostiene di spiegare i passaggi durante la risoluzione dei problemi, la motivazione che viene addotta si può ricondurre alla seguente risposta estrapolata dal questionario:


8) DI SOLITO SPIEGHI COME SEI GIUNTO ALLA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA?

di solito spiego ~~parte~~ perché così uno
capisce meglio il mio ragionamento

Figura 3. Estratto di un questionario.

Sebbene un bambino abbia dato una risposta non pertinente alla domanda fatta, più della metà della classe ritiene che argomentare i passaggi eseguiti per la risoluzione di un problema sia necessario per chiarire il percorso intrapreso dal lettore. Tre bambini riconducono la spiegazione alla sottolineatura di parole chiave, ancorandosi quindi a uno schema tradizionale di risoluzione di problemi basato sulla semplificazione del testo, adottando quelle che Zan (2012a, 2012b) definisce «scorciatoie cognitive»: inferendo direttamente sul testo le operazioni da fare, anziché rappresentarsi la situazione descritta e, su tale rappresentazione, costruire il processo risolutivo. I momenti in cui ciò accade non si limitano a situazioni in cui lo studente si trova da solo, la maggior parte della classe risponde alle domande 9 e 10 affermando che le discussioni, le argomentazioni sui procedimenti di risoluzione adottati avvengono quando si lavora in gruppo, e nei momenti di restituzione dei risultati, in linea quindi con gli obiettivi del Progetto ArAl e i principi del RMT. È importante, infatti, che processi cognitivi e competenze sociali possano svilupparsi in sinergia, facendo pratica della cooperazione positiva tra pari utilizzandola come risorsa anche per scoprire potenzialità e criticità di sé stessi all'interno di un contesto gruppale.

4 Problemi somministrati: i protocolli degli studenti

Nei tre problemi somministrati, i bambini, suddivisi in gruppi, hanno trovato diverse strategie di risoluzione. In questo paragrafo si mostrano le strategie più significative sia per modalità di argomentazione sia per varietà di risoluzione.

4.1 I protocolli del Problema n.1 – Caccia al tre

In **Figura 4** viene riportata la risoluzione a cui sono giunti tre gruppi[8] (rispettivamente i gruppi n. 1, n. 3 e n. 4). Come si evince dall'argomentazione che accompagna la risoluzione del problema, i bambini hanno scritto tutta la successione dei numeri e hanno cerchiato i numeri contenenti la cifra 3; a ogni cifra trovata un altro bambino ha segnato una X su un foglio attribuendone due al numero 33, cerchiando la cifra 3 due volte. In questo modo sono giunti alla conclusione che la risposta esatta è 131.

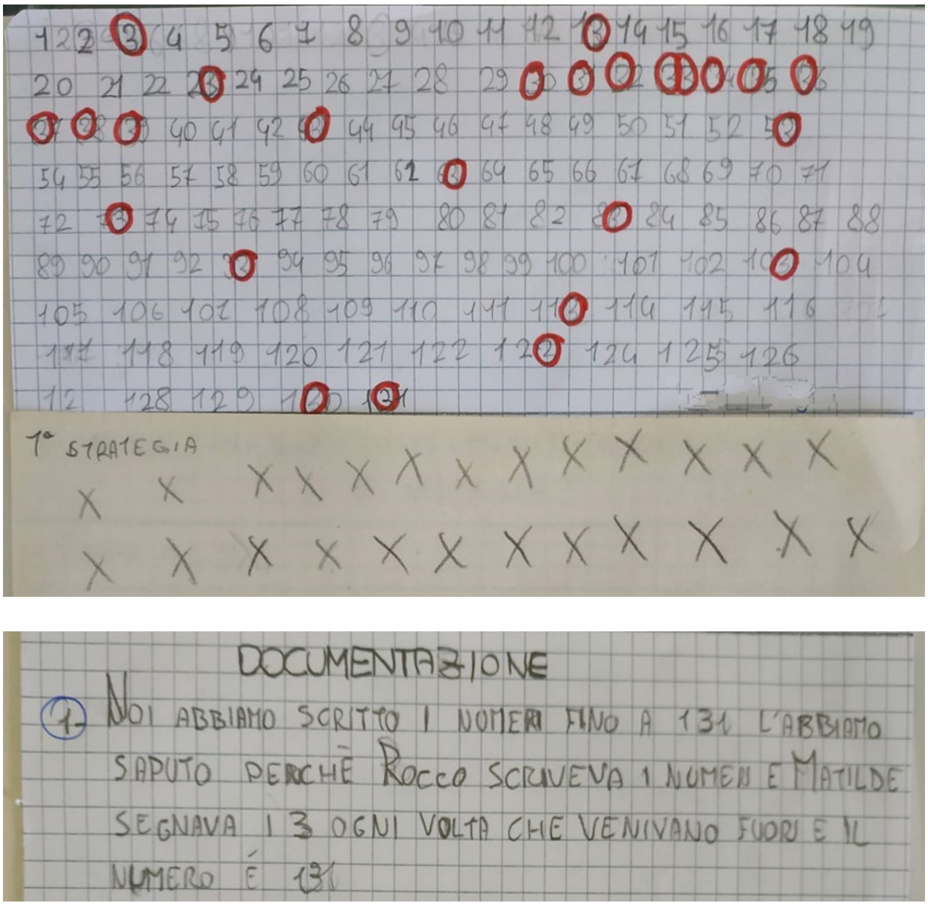


Figura 4. Esempio di protocollo, strategia n. 1.

Nella seconda variante (**Figura 5**), i bambini del gruppo n. 5 hanno riportato sul foglio soltanto i numeri contenenti la cifra 3 considerando mentalmente le decine, di volta in volta "saltando" tutti i numeri che non la contenevano.

8. I sette gruppi, come spiegato nel paragrafo "Metodologia", sono fissi; da qui in poi, quando si cita il numero di un determinato gruppo, ci si riferisce sempre allo stesso per composizione di alunni.

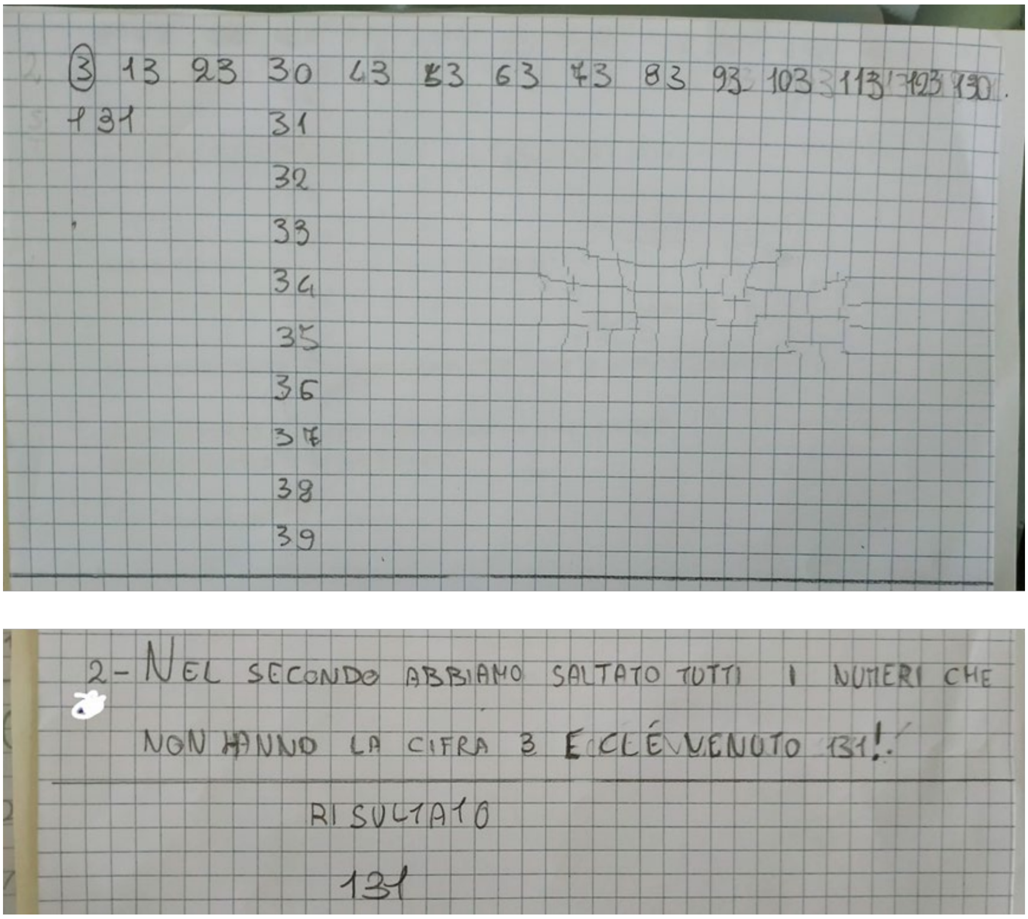


Figura 5. Esempio di protocollo, strategia n. 2.

Nella Figura 6, il gruppo n. 2 ha trovato una strategia (la terza) simile a quella della Figura 5: i bambini hanno scritto in successione soltanto i numeri che contenevano la cifra richiesta, cerchiando e contando di volta in volta la cifra 3 fino a giungere al numero 131. La differenza tra le due strategie risiede nel fatto che, nella precedente, è stato riportato per iscritto in modo più distinto il ragionamento fatto in base 10.

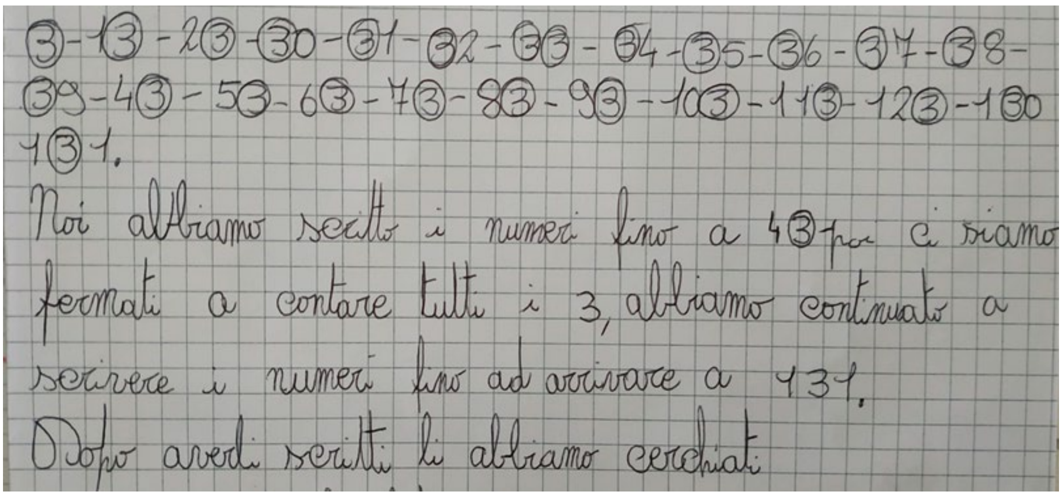


Figura 6. Esempio di protocollo, strategia n. 3.

In **Figura 7**, il gruppo n. 6 ha usato una strategia che sembra simile alla precedente. L’argomentazione fornita dai bambini, tuttavia, chiarisce che la modalità di risoluzione è differente: i bambini dapprima hanno disegnato 24 cerchi per poi inserirvi di volta in volta i numeri contenenti la cifra 3. Resta però implicito che i bambini durante lo svolgimento abbiano considerato mentalmente le decine di volta in volta e abbiano contato la cifra 3 nel numero 33 due volte. Sebbene compaiano 24 cerchietti e non 25, la soluzione trovata è giusta.

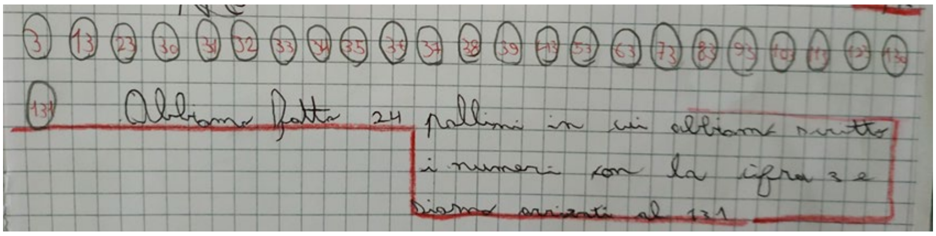


Figura 7. Esempio di protocollo, strategia n. 4.

In **Figura 8** il gruppo n. 7 ha creato una tabella numerata da 1 a 25. Dopo ha proseguito inserendovi i numeri contenenti la cifra 3. Al numero 33 sono state riconosciute 2 frequenze di comparsa della cifra 3 rispettivamente alla settima e ottava posizione.

Leggendo l’argomentazione fornita dai bambini, si evince come essi implicitamente abbiano ragionato correttamente con uno schema, trovando come venticinquesimo numero 131; poi hanno cercato di spiegarlo a parole, riportando diversi tentativi di trovare un’operazione risolutiva che desse come risultato 131. In particolare, in un primo momento hanno moltiplicato 3 per 25, e poi sommato ripetutamente 3, ma il meglio che sono riusciti a ottenere è stato 132. Nella ricerca di tale moltiplicazione, si può supporre che siano stati influenzati dall’aver interpretato l’espressione «venticinquesima volta» riportata nell’enunciato come “venticinque volte” e non come numero ordinale.

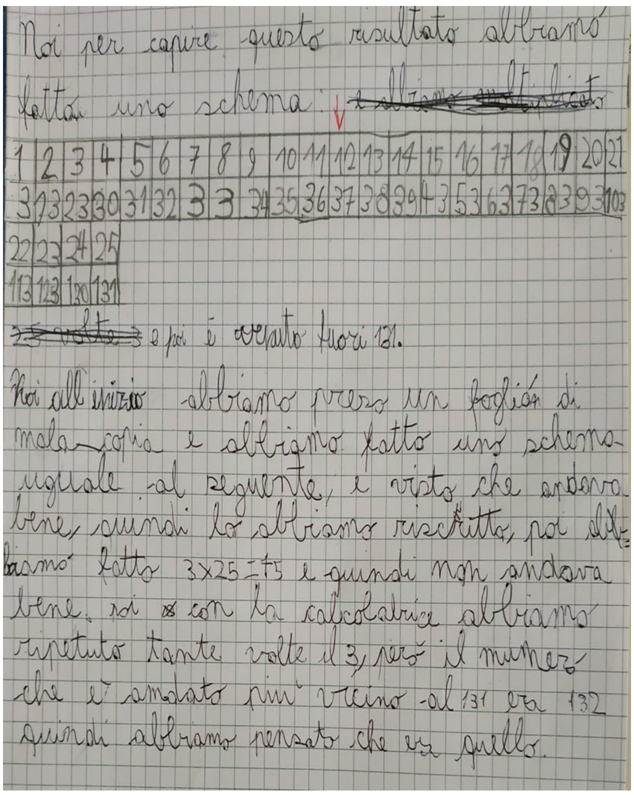


Figura 8. Esempio di protocollo, strategia n. 5.

4.2 I protocolli del Problema n. 2 – Tiro al barattolo

Di seguito si riportano i protocolli più significativi inerenti al secondo problema somministrato "Tiro al barattolo". Sei gruppi su sette hanno trovato le tre combinazioni per risolvere il problema matematico (Figura 9).

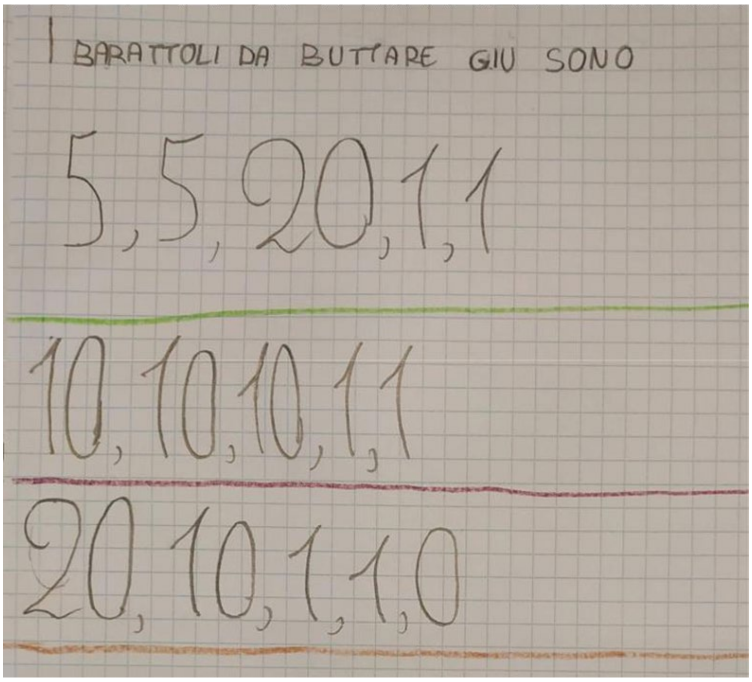


Figura 9. Combinazioni possibili.

Cinque gruppi (gruppo n. 2, n. 3, n. 5, n. 6, n. 7) su sette hanno utilizzato due argomentazioni differenti (Figure 10 e 11) ma tutte concordi nel considerare lo zero come possibile lancio sbagliato da conteggiare in una delle tre possibili combinazioni. Di seguito sono riportate le due argomentazioni più significative.

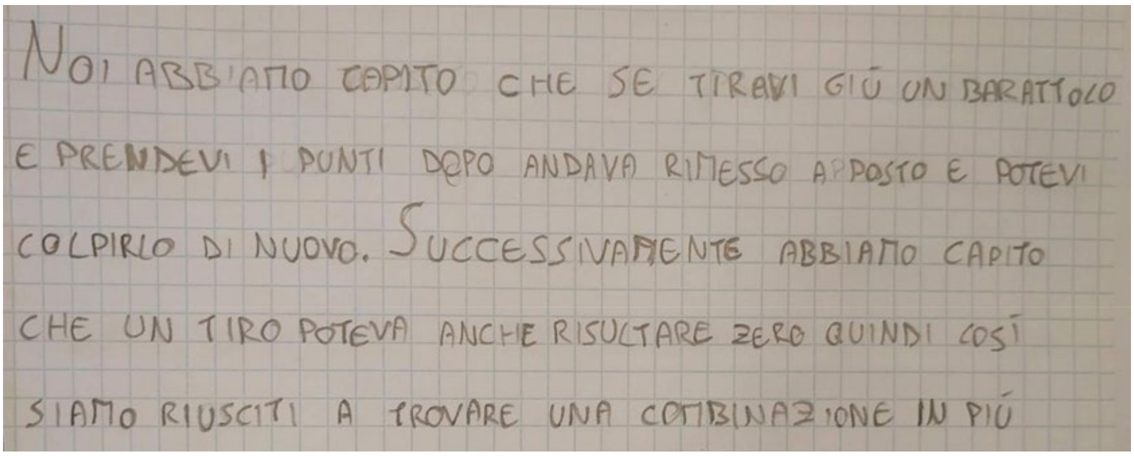


Figura 10. Argomentazione n. 1.

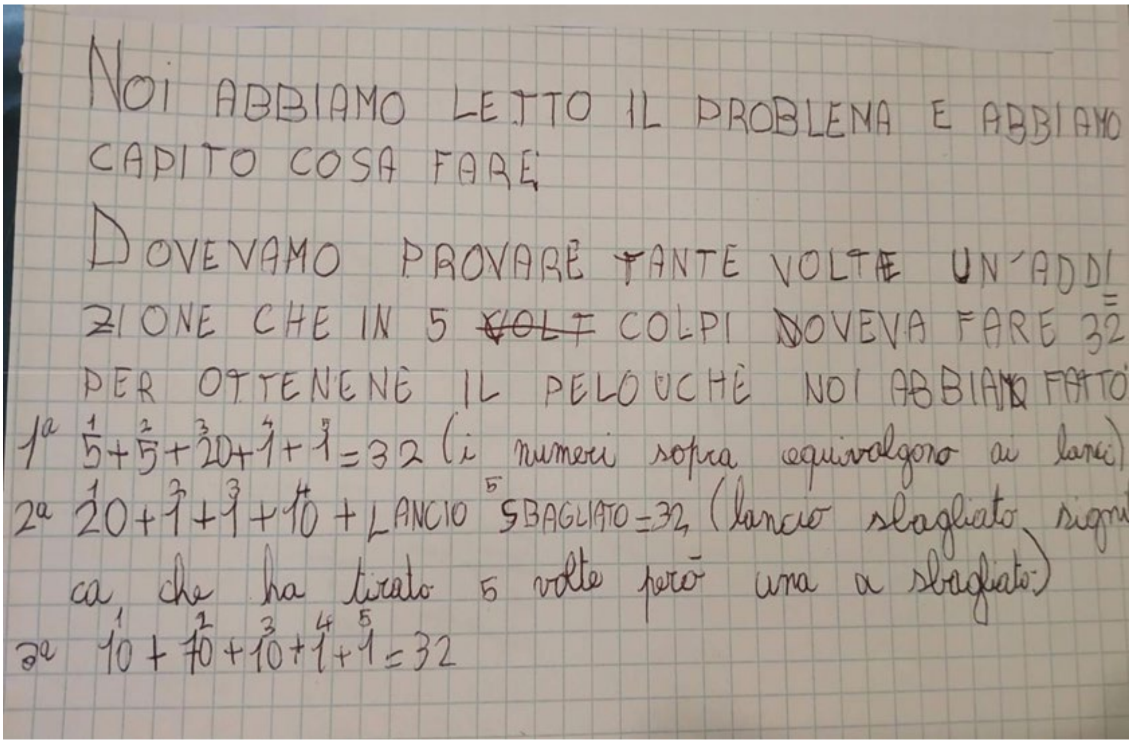

NOI ABBIAMO LETTO IL PROBLEMA E ABBIAMO CAPITO COSA FARE
DOVEVAMO PROVARE TANTE VOLTE UN'ADDIZIONE CHE IN 5 ~~VOLT~~ COLPI DOVEVA FARE 32 PER OTTENENÈ IL PELOUCHÈ NOI ABBIAMO FATTO
1ª 5+5+20+1+1=32 (i numeri sopra equivalgono ai lanci)
2ª 20+1+1+10+LANCIO SBAGLIATO=32 (lancio sbagliato significa che ha tirato 5 volte però una a sbagliato)
3ª 10+10+10+1+1=32

Figura 11. Argomentazione n. 2.

Nella Figura 12, gli studenti del gruppo n. 1 hanno simulato graficamente la situazione narrata dal problema. Il numero scritto sopra a ogni barattolo corrisponde a quante volte è necessario farlo cadere per giungere a 32, inoltre viene rappresentato graficamente con uno slash anche il tiro che ottiene zero punti, necessario per giungere alla terza combinazione possibile.

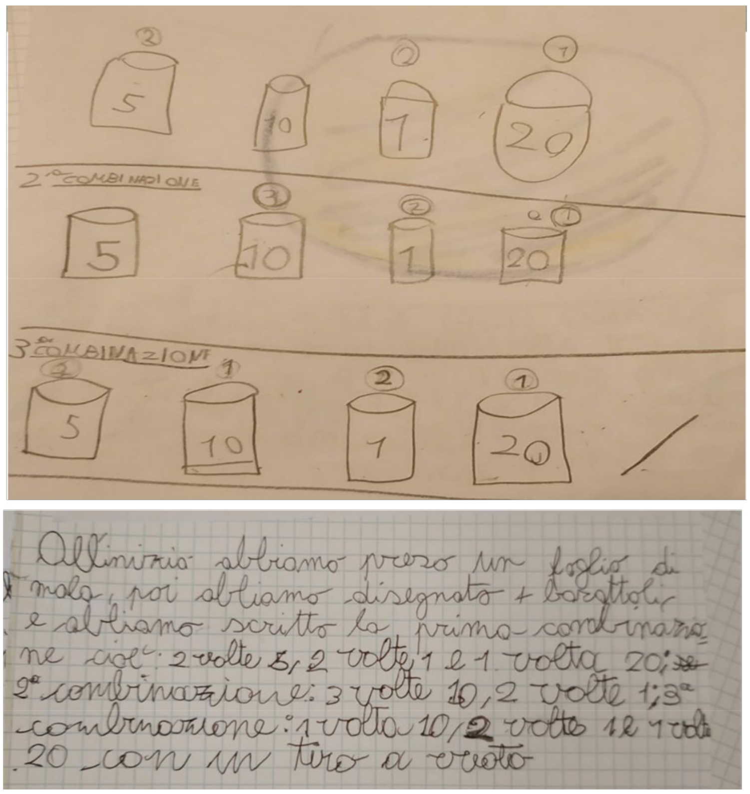


Figura 12. Esempio di protocollo, gruppo n. 1.

Nella Figura 13, leggendo le argomentazioni, si può notare che il gruppo n. 4 non ha trovato la combinazione 10, 10, 10, 1, 1. Nei punti 1 e 3 (Figura 13) è riportata due volte la stessa combinazione ma con gli addendi in ordine diverso. Oltre a ciò, nel punto 1 è riportato il numero 0 nell'addizione numerica, mentre nel punto 3 compare l'espressione «nessun tiro» a cui non corrisponde l'addendo 0 nel calcolo scritto.

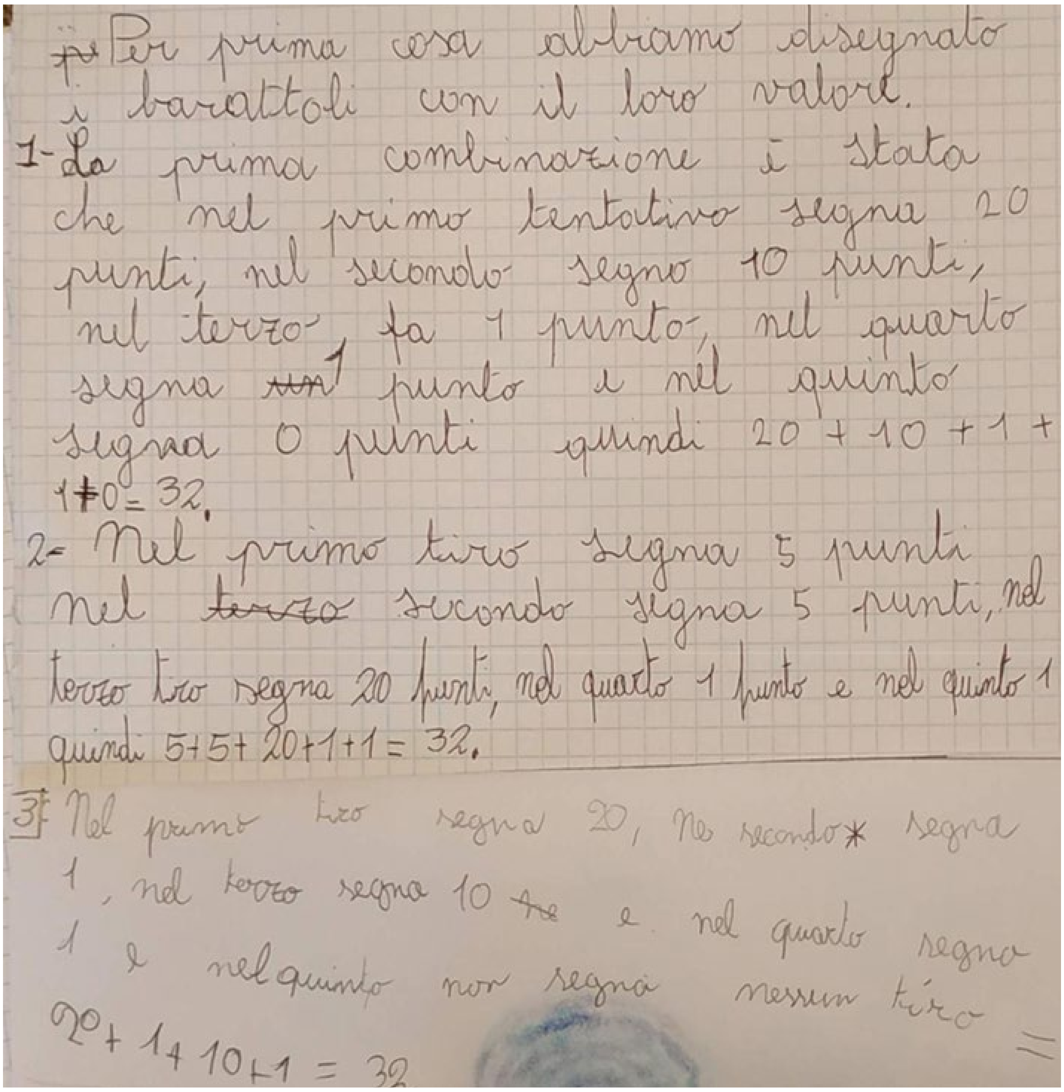

~~p~~ Per prima cosa abbiamo disegnato i barattoli con il loro valore.
1- La prima combinazione è stata che nel primo tentativo segna 20 punti, nel secondo segno 10 punti, nel terzo, fa 1 punto, nel quarto segna ~~un~~ 1 punto e nel quinto segna 0 punti quindi 20 + 10 + 1 + 1 + 0 = 32.
2- Nel primo tiro segna 5 punti nel ~~terzo~~ secondo segna 5 punti, nel terzo tiro segna 20 punti, nel quarto 1 punto e nel quinto 1 quindi 5+5+20+1+1 = 32.
3- Nel primo tiro segna 20, ne secondo* segna 1, nel terzo segna 10 ~~tre~~ e nel quarto segna 1 e nel quinto non segna nessun tiro =
20+1+10+1 = 32

Figura 13. Esempio di protocollo, gruppo n. 4.

4.3 I protocolli del Problema n. 3 – Il cuore di Martina

Il terzo problema somministrato, "Il cuore di Martina", è attribuito solitamente dal RMT alle categorie 5 e 6 ovvero all'ultimo anno di primaria e al primo della secondaria di primo grado;[9] per lo svolgimento sono previste delle conoscenze teoriche che si raggiungono in quei determinati anni scolastici. In accordo con l'insegnante della classe, si è deciso di somministrare ugualmente il problema per verificare se gli alunni sarebbero giunti ugualmente alla soluzione. Ne sono state trovate due diverse: la prima è stata applicata da sei gruppi su sette, la seconda è stata applicata e scoperta dal gruppo rimanente.

9. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

Viene utilizzato il termine "scoperta" perché un gruppo ha applicato una strategia di risoluzione non presente nella banca dati dei problemi del RMT.

Di seguito (Figure 14, 15 e 16) vengono riportate e commentate le argomentazioni dei gruppi n. 2, n. 4 e n. 5, ritenute le più rilevanti e rappresentative della strategia n. 1 (utilizzata anche dai gruppi n. 1 e n. 6). In tutte e tre le argomentazioni si nota che la procedura utilizzata è stata la medesima; i vari gruppi hanno deciso di ritagliare, nella figura a disposizione, la parte esterna al cuore e assemblarla, per poi constatare che le due aree sono equivalenti.

Nella seconda e terza argomentazione a sostegno della procedura, si può notare, prendendo come riferimento i principi teorici del progetto ArAl espressi nel par. 1.2, che vengono utilizzati dei termini afferenti al linguaggio specifico della matematica come «simmetrico» e «si equivalgono»; l'uso di tali termini denota una buona padronanza nell'utilizzo del linguaggio specifico, una volontà di superamento del "balbettio algebrico" rispetto alla prima argomentazione che utilizza il termine «uguali» tipico del linguaggio naturale.

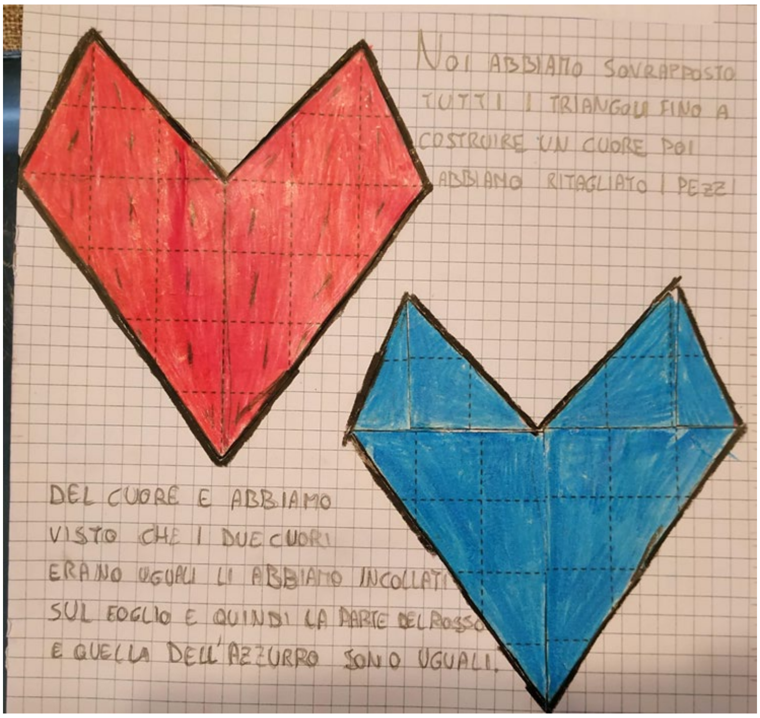


Figura 14. Argomentazione n. 1, gruppo n. 2.

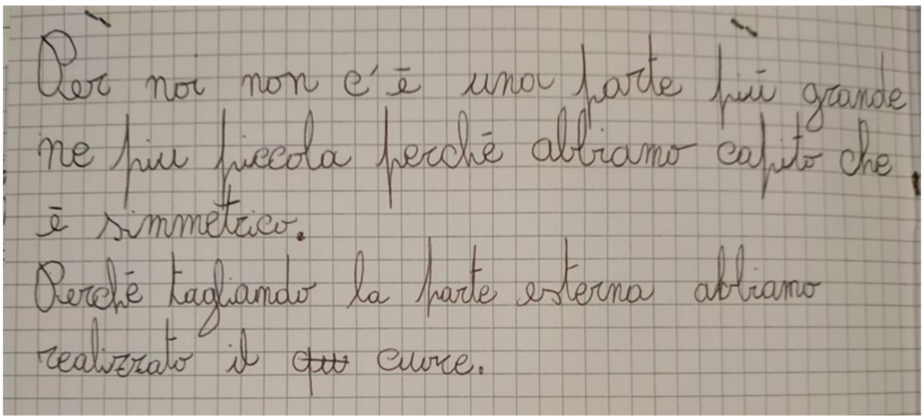


Figura 15. Argomentazione n. 2, gruppo n. 4.

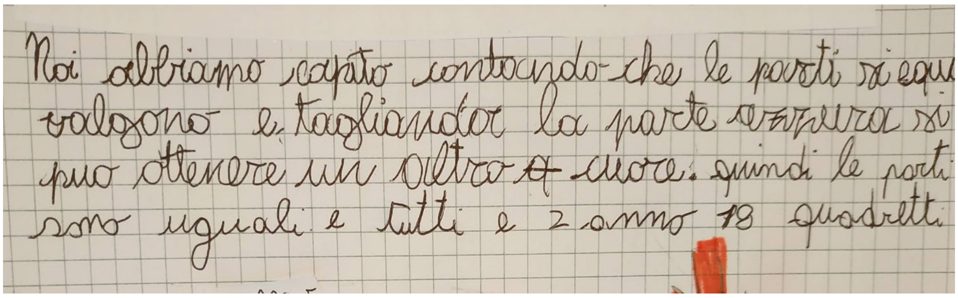


Figura 16. Argomentazione n. 3, gruppo n. 5.

L'utilizzo di questa tipologia di problemi è un'occasione di valutazione in itinere per l'insegnante, che può verificare le diverse competenze degli alunni e la padronanza del lessico acquisito come nel caso sovraesposto. In particolare, con l'analisi dei risultati di questo problema, l'insegnante potrebbe verificare le conoscenze in possesso degli alunni e prevedere delle lezioni di approfondimento o di recupero, prima di introdurre nuovi concetti.
In Figura 17, viene riportata la strategia di risoluzione usata dal gruppo n. 3. Tale strategia è simile alla precedente, ma differisce per la modalità di ricostruzione del secondo cuore. I bambini hanno tagliato tutta l'area esterna al cuore e, nel ricomporlo, hanno usato come guida quello rosso, giungendo alla medesima conclusione.

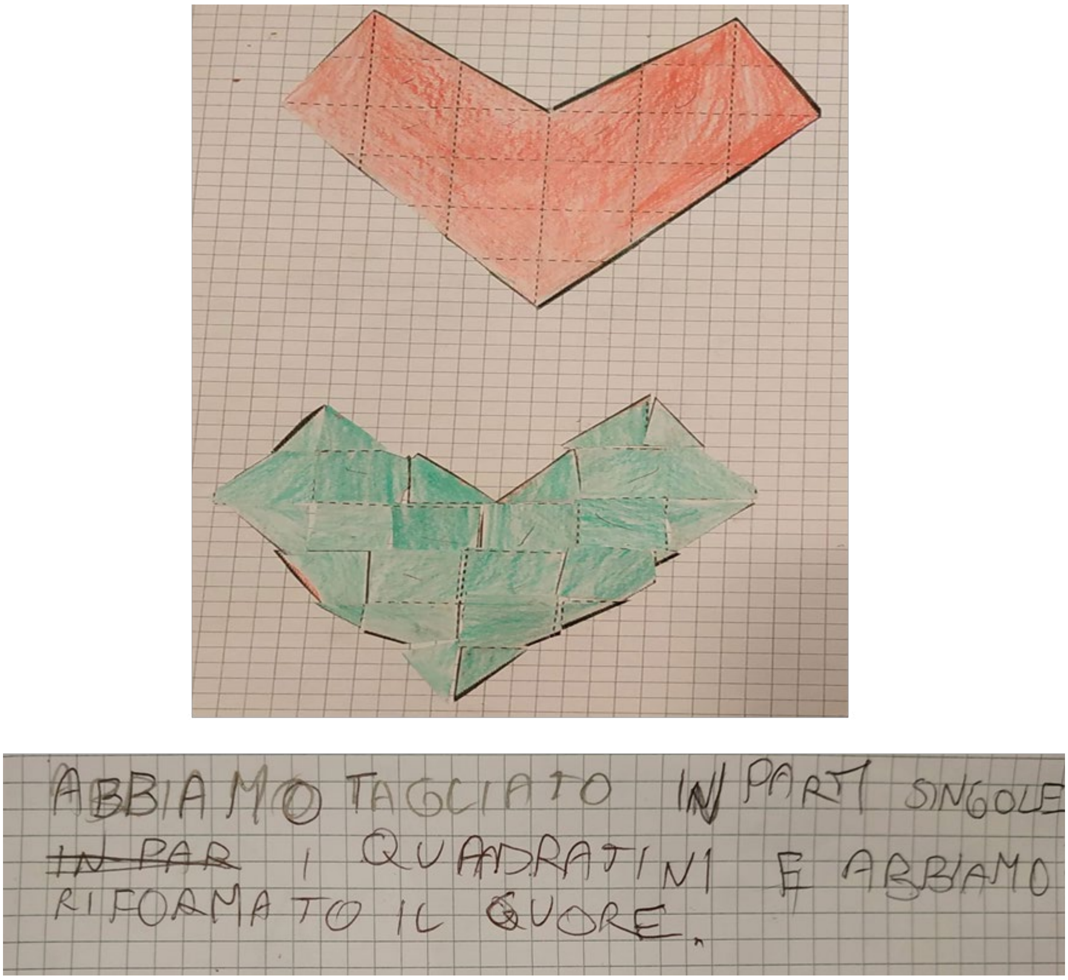


Figura 17. Esempio di protocollo, strategia n. 2.

Si riporta infine il protocollo del gruppo n. 7 che ha trovato una strategia di risoluzione differente (Figura 18).

I bambini di questo gruppo, per trovare la strategia di risoluzione, hanno applicato il pensiero computazionale: ragionando passo passo sulla strategia migliore per arrivare alla soluzione, si sono approcciati alla figura in modo algoritmico sia a livello di astrazione di pensiero che di linguaggio utilizzato. Nello specifico hanno utilizzato lo stesso numero e lo stesso colore per forme congruenti all'interno e all'esterno del perimetro del cuore.[10] Terminata questa fase, hanno comparato il numero di pezzi interni ed esterni alla figura ottenuti. Rendendosi conto che ogni tipologia di forma aveva il medesimo numeri di pezzi, sono giunti alla conclusione che le due aree sono equivalenti.

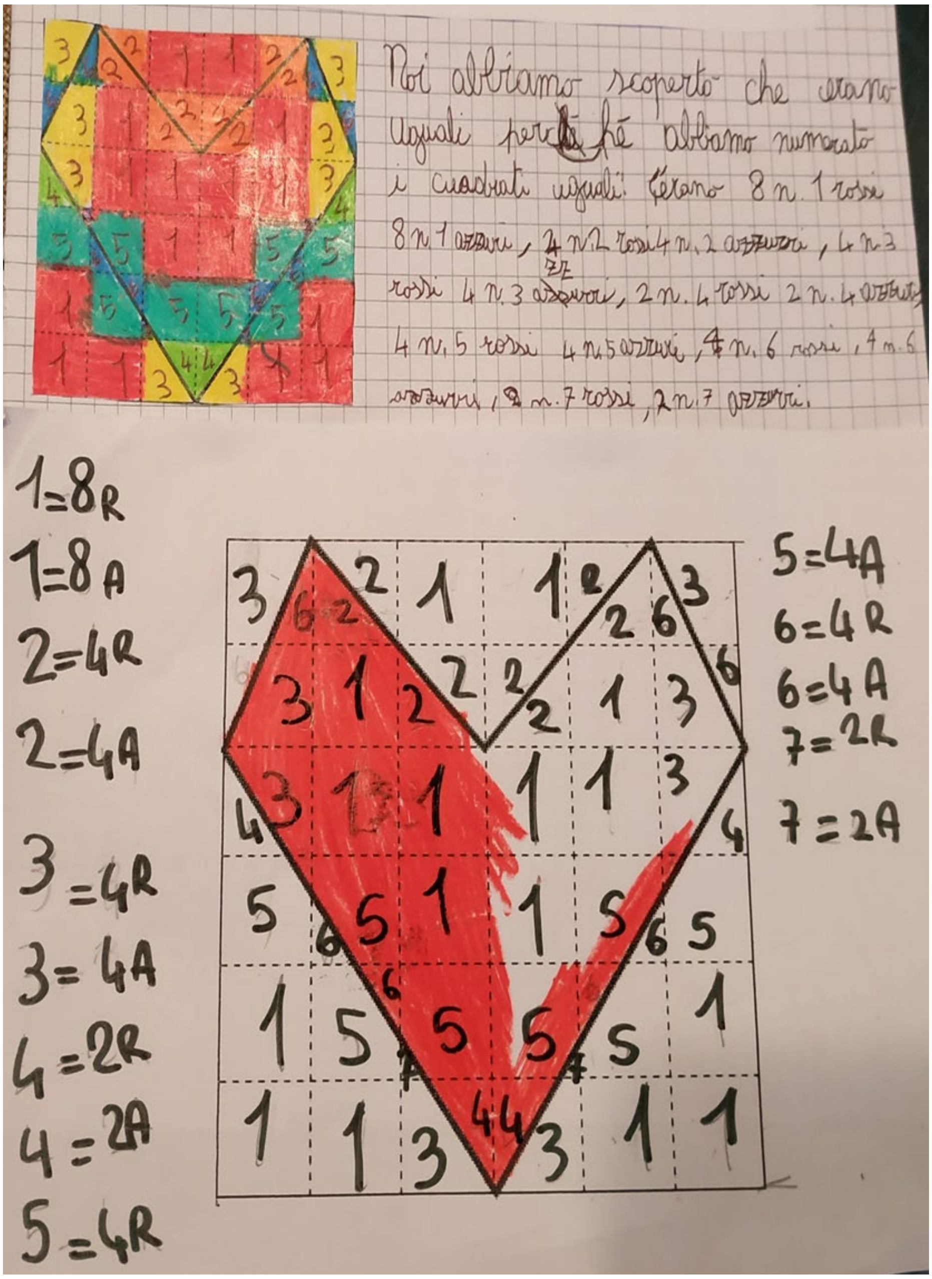


Figura 18. Esempio di protocollo, strategia n. 3.

10. Sebbene i bambini siano giunti alla risoluzione del problema, in realtà, il metodo non è applicato in modo formalmente corretto. Ad esempio, le figure segnate con il numero 3 o quelle segnate con il numero 6 non sono tutte tra loro equivalenti.

In generale, tutti i bambini dei gruppi, pur non avendo nel proprio bagaglio le conoscenze delle formule geometriche per risolvere il problema, sono andati oltre: hanno tentato una strada nuova, come in un laboratorio di matematica, laboratorio inteso come momento «dove si costruiscono oggetti, si lavora concretamente, si ottiene qualche "cosa", è viva la tensione verso l'ideazione, la progettazione, la realizzazione di qualcosa di non ripetitivo, non banale» (D'Amore & Marazzani, 2011, p. 16). I bambini hanno utilizzato un fare immaginato rendendolo concreto e operativizzabile sino a giungere alla risoluzione del problema.

5 Questionario finale: analisi dei dati rilevati

In questo paragrafo viene esposta l'analisi dei dati[11] rilevati dal questionario somministrato dopo lo svolgimento dei tre problemi del RMT.

5.1 Impressioni sull'approccio del RMT

Le domande relative al primo indicatore "Indagare le concezioni personali sui problemi matematici seguendo la metodologia del RMT" puntavano a far emergere le prime riflessioni degli studenti su eventuali differenze rispetto allo svolgimento di problemi tradizionali.
Secondo 13 alunni vi è la possibilità di lavorare in gruppo e ne consegue maggior motivazione e coinvolgimento nella partecipazione al compito rispetto alla risoluzione tradizionale dei problemi.
Sebbene un bambino abbia dichiarato il desiderio di dare meno spazio ad attività didattiche incentrate sull'argomentazione, 7 bambini si ritengono soddisfatti delle regole di svolgimento del problema e non cambierebbero nulla.
Vengono anche forniti da 12 studenti diversi suggerimenti che possono fungere da spunti per la pratica didattica in aula:

- richiesta di tempi più dilatati: quando si inizia a lavorare sullo sviluppo della competenza argomentativa, è necessario dare ai bambini tempi più distesi per far propria la necessità e il focus sulla spiegazione della risoluzione del problema matematico;
- la richiesta di ampliamento del gruppo di lavoro: tale richiesta può essere interpretata come possibilità di discussione delle strategie da attuare assieme all'intero contesto classe;
- prevedere all'interno del complesso scolastico uno spazio specifico destinato ai laboratori matematici;
- come ultimo suggerimento, collegato ai due precedenti e collegato al problem solving, l'insegnante potrebbe calendarizzare con gli alunni un orario specifico da utilizzare nel laboratorio di matematica, uscendo dal solito contesto classe.

È importante tenere a mente che, quando ci si approccia ad attività di classe incentrate sulle metodologie descritte finora:

> «[...] è naturale che i nostri studenti abbiano difficoltà nella maturazione di tali competenze, trattandosi di competenze complesse che costituiscono traguardi significativi di un percorso educativo lungo: proprio per questo bisogna dedicarci tempo e attenzione e progettare un percorso in verticale. Senza dimenticare che gli obiettivi relativi alle competenze di problem solving e argomentazione sono, per loro natura, obiettivi trasversali, che coinvolgono, nella loro specificità, molteplici discipline».
>
> (Di Martino, 2017, p. 26)

11. Le risposte complete degli alunni sono consultabili nell'Allegato 2.

I suggerimenti sopracitati, se introdotti nell'azione didattica, possono avviare un percorso per l'acquisizione di tali competenze.

5.2 I ruoli nel contesto gruppo

L'obiettivo del secondo indicatore "Individuare la ripartizione dei ruoli per risolvere il problema in contesto gruppale" era quello di indagare la ripartizione spontanea dei ruoli durante lo svolgimento dei problemi matematici.
Tra i principi del Progetto ArAl e del RMT, la cooperazione tra pari è un punto fondamentale per contrastare una logica competitiva e individualistica dell'apprendimento a favore di una di tipo democratico:

> «Gli allievi devono dunque sapersi organizzare: devono dividere il lavoro fra i vari gruppi, gestire il tempo a disposizione, accettare i contributi di tutti, entrare nel punto di vista degli altri. Tali capacità non sono semplici da acquisire, ma sono sempre più indispensabili per adattarsi alla società attuale».
>
> (Sito internet del RMT)[12]

Le risposte alle domande relative a questo indicatore ci forniscono informazioni dettagliate su come gli alunni abbiano lavorato per portare a termine il compito assegnato.
Dai risultati si evince che la maggioranza dei gruppi si è ripartita i compiti al suo interno lasciando aperta la possibilità di sperimentare altri ruoli laddove ve ne fosse la necessità, come dimostra questa affermazione:

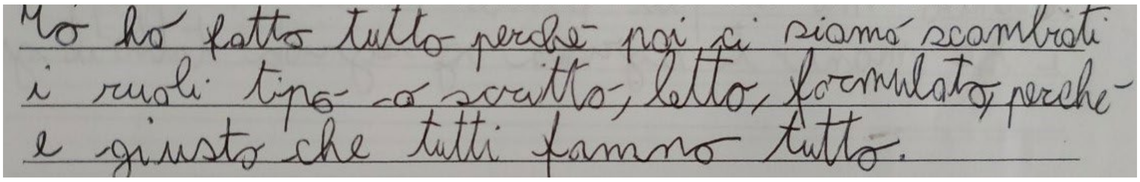

Io ho fatto tutto perché poi ci siamo scambiati
i ruoli tipo o scritto, letto, formulato, perché
è giusto che tutti fanno tutto.

Figura 19. Risposta dal questionario.

«L'apprendimento di gruppo rappresenta una strategia che ha come scopo finale quello di acquisire competenze cognitive e sociali. È dunque un percorso evolutivo, di progresso, che richiede una tempistica adeguata e uno sforzo da parte di chi è coinvolto» (Magnone, 2018, p. 84). Le strategie di tipo cooperativo rendono il bambino autonomo e consapevole del proprio contributo responsabile all'interno del gruppo.

5.3 L'argomentazione nella risoluzione dei problemi

Le domande del terzo indicatore "Evidenziare le strategie argomentative messe in atto per formulare la procedura di risoluzione del problema" avevano l'obiettivo di indagare come gli alunni si relazionano e attivano le proprie competenze per fronteggiare la necessità di un'argomentazione, indispensabile ai fini della risoluzione del problema.
Nelle risposte, 19 alunni hanno sottolineato come, dopo la discussione tra pari delle strategie risolutive da cercare, sia seguita in modo del tutto naturale l'argomentazione per iscritto del percorso fatto.

12. Si rinvia al par. 1 per la consultazione del link.

Seppure con motivazioni diverse, la totalità dei bambini ha ritenuto importante la fase argomentativa della risoluzione di un problema, in particolare hanno evidenziato che attraverso l'argomentazione è più facile far capire a chi si ha di fronte il ragionamento seguito prima di giungere alla conclusione. C'è un aumento della motivazione ad apprendere che scaturisce dall'esplicitazione del percorso fatto tramite l'argomentazione. Infine, la consapevolezza di imparare una nuova competenza trasversale, spendibile anche in altri campi della vita personale, lascia una libertà di espressione da non sottovalutare: mantenendo inalterata la propria individualità, i bambini sentono la libertà di esprimersi perché si è in un contesto di rispetto reciproco, basilare per l'apertura verso l'altro, non si parla di compromesso, di ostacoli da superare ma di condivisione e co-costruzione delle conoscenze.

5.4 Emozioni e vissuti

Attraverso le risposte alle domande dell'ultimo indicatore "Rilevare i vissuti dei bambini durante la risoluzione in gruppo dei problemi matematici", è possibile fare emergere un confronto con le sensazioni e le emozioni espresse nel questionario in entrata, analizzate nel par. 3.3.

Se nel questionario in entrata la maggioranza degli alunni aveva dichiarato di provare emozioni negative durante lo svolgimento di problemi matematici tradizionali, dopo l'esperienza di risoluzione dei problemi del RMT la situazione è completamente ribaltata: ben 16 bambini hanno affermato di sentirsi a proprio agio attribuendo un punteggio tra 4 e 5, mentre 4 bambini hanno scelto il valore 3 e soltanto un bambino ha provato un senso di disagio assegnando un punteggio di 2.

Le motivazioni con cui i bambini accompagnano questo ribaltamento delle emozioni forniscono degli spunti di riflessione importanti per gli insegnanti: attraverso la cooperazione, il lavoro per raggiungere uno scopo comune, aumenta la stima verso sé stessi, al punto da sentirsi più preparati (7 alunni) e non sentire più il peso della paura di sbagliare perché il progetto di risoluzione è condiviso (4 alunni), con la possibilità di confrontarsi non essendo da soli di fronte al compito (6 studenti).

Anche le risposte relative alle emozioni provate sono nettamente cambiate rispetto al questionario in entrata: nella domanda del primo questionario, 18 allievi avevano riscontrato emozioni di tipo negativo e legate al senso di ansia, di insicurezza e alla paura di sbagliare.

Nell'analoga domanda 9 del secondo questionario, invece, 19 studenti hanno manifestato emozioni positive, quali felicità, senso di tranquillità e agitazione positiva, funzionale allo svolgimento del compito assegnato.

Dall'analisi di questi dati e dal confronto con quelli del primo questionario, è evidente come gli aspetti motivazionali, anche in campo matematico, siano strettamente correlati a quelli cognitivi. Come afferma Zan (2007, p. 184) «le variabili motivazionali sono ritenute l'aspetto energetico dei processi di auto-regolazione sottostanti le attività di problem solving». Da qui ci si collega a come lo studente si percepisce e percepisce la disciplina che ha di fronte:

> «[...] le decisioni che un soggetto prende, i processi di auto-controllo che attiva avvengono all'interno della cornice delle sue convinzioni. Fra queste convinzioni appaiono particolarmente significative le convinzioni che l'allievo ha sulla matematica, le sue teorie del successo, le convinzioni che ha su di sé e in particolare la convinzione di "potercela fare"».
>
> (Zan, 2007, p. 182)

I questionari hanno dimostrato come una percezione di tranquillità, un clima disteso, un senso di sicurezza, siano stati importanti per il lavoro in gruppo.

6 Conclusioni e spunti didattici

Dallo studio effettuato emerge come i risultati della sperimentazione si allineino agli studi e alle ricerche recenti riguardanti lo sviluppo della competenza argomentativa in campo matematico.
La domanda posta a monte di questa sperimentazione ha voluto indagare se lo sviluppo e l’utilizzo della competenza argomentativa nella risoluzione di problemi matematici possa incidere a livello didattico in modo positivo nei processi partecipativi e motivazionali per gli alunni.
Dall’analisi globale del primo questionario, emergono i seguenti aspetti rilevanti: nonostante per la maggior parte dei bambini, almeno all’inizio della sperimentazione, un problema sia identificabile come tale quando prevede delle operazioni da trovare oppure ha delle domande a cui dare una risposta (tramite lo svolgimento di una serie di operazioni), la quasi totalità degli alunni riconosce come scopo dei problemi l’imparare cose nuove tramite il ragionamento e la riflessione. Ciò li spinge a leggere e rileggere un problema e fare ipotesi sulle possibili risoluzioni prima di delineare la strategia scelta.
Tra le difficoltà emerse per la risoluzione di problemi tradizionali, sono menzionate la fatica a esplicitare il ragionamento fatto e le difficoltà a decifrare il senso del testo. Ne consegue l’affiorare di sentimenti di tipo negativo per la maggior parte del campione, dovuti alla paura di sbagliare in primis e al senso di ansia e insicurezza provato successivamente.
Analizzando invece i dati rilevati dal secondo questionario, i primi elementi di differenza che emergono rispetto alla risoluzione dei problemi tradizionali riguardano la possibilità di condivisione del percorso per giungere alla risoluzione del problema matematico: ciò conduce gli alunni a trovare più motivante il contesto in cui sono calati al punto da spingerli a fornire dei suggerimenti didattici da implementare.
Dopo l’esperienza di discussione e argomentazione delle procedure di risoluzione, tutti gli alunni hanno concordato che argomentare è funzionale a rendere più comprensibile le scelte intraprese, permette di esperire una libertà di espressione che conduce anche a «imparare cose nuove», ampliando quindi il proprio bagaglio di conoscenze.
In ultima istanza, dai risultati dell’ultimo indicatore, è evidente come l’esperienza abbia ribaltato i vissuti emotivi dei bambini rispetto alla risoluzione di problemi: confrontando le risposte fornite tra il questionario in entrata e in uscita, si può affermare che l’utilizzo in classe di problemi che seguono gli obiettivi del Progetto ArAl e l’approccio didattico del RMT favorisce l’acquisizione di competenze in modo autonomo, l’assunzione di responsabilità da parte degli allievi, la visione critica e la messa in atto di strategie di condivisione del sapere in virtù di una crescita comune e una co-costruzione dei saperi.
È importante però ricordare che il lavoro di regia dell’insegnante è necessario e basilare per l’apprendimento: è attraverso esso che si favorisce la costruzione dei saperi.
Utilizzare strategie didattiche, come quella sperimentata in aula, può avere ricadute positive sul contratto didattico: ad esempio, nel momento in cui l’insegnante fa in modo che lo studente comprenda gli errori fatti a causa di “misconcezioni” o di clausole del contratto didattico, senza che insorga in lui la paura di sbagliare.[13]
Si riportano, infine, alcuni aspetti emersi dall’analisi dei protocolli degli studenti. Ciò è funzionale ad avere una visione più dettagliata a sostegno dei risultati riscontrati.
Interessanti implicazioni didattiche emergono dal fatto che alcuni problemi, ad esempio “Il cuore di Martina”, hanno coinvolto conoscenze non ancora trattate: nonostante il “deficit di sapere”, tutti gli studenti hanno risolto il problema cimentandosi nella ricerca di soluzioni razionali e originali.
Un gruppo su sette ha utilizzato una strategia di risoluzione inedita, ricorrendo al pensiero computazionale: una volta appurato che la strategia trovata fosse giusta, è stata contattata la referente della

13. Per approfondire i concetti e gli studi relativi alle misconcezioni e al contratto didattico si rinvia agli studi di D’Amore e Sbaragli (2011).

sezione Romagna del RMT, la quale ha chiesto di visionare la nuova strategia trovata per inserirla ufficialmente tra le possibili strategie di risoluzione nelle analisi a priori dei problemi del RMT.
Dal confronto tra le argomentazioni fornite per la strategia n. 1 del problema "Il cuore di Martina" (Figure 14, 15 e 16), si può osservare che l'argomentazione, soprattutto il tipo di argomentazione utilizzata, ha fatto emergere come alcuni gruppi hanno utilizzato un linguaggio specifico (termine «simmetrico») mentre altri hanno esposto la loro dissertazione aiutandosi con il linguaggio comune (termine «uguali»). L'insegnante può analizzare le risposte fornite per attivare strategie didattiche mirate al rinforzo del linguaggio specifico, affinché anche la parte di classe che è carente in tal senso possa arricchire il proprio bagaglio di conoscenze e superare, o ridurre, la fase di "balbettio algebrico".
Significativo anche il protocollo n. 5 del problema "Caccia al tre" (Figura 8): in questo caso l'utilizzo dell'argomentazione è importante perché è emerso un iniziale errore che non sarebbe emerso nella sola parte procedurale (confondere il numero cardinale 25 con il numero ordinale venticinquesimo riportato nel testo); questo dato può essere utilizzato come spunto di riflessione dall'insegnante da rivolgere a tutta la classe.
Riallacciandoci alle emozioni vissute prima e dopo la somministrazione dei problemi, appare chiaro come il contesto gruppale e la responsabilità condivisa portino gli alunni a vivere l'esperienza con meno ansia e maggior coinvolgimento. L'allievo che è spronato a partecipare attivamente sarà motivato a migliorare il proprio operato e ciò andrà a ricadere sulla propria autostima, ma anche sul rapporto di collaborazione che instaura con i suoi pari.
Esperire situazioni didattiche come quelle del RMT potrebbe giovare al superamento di possibili conflitti e ostacoli in quanto l'incremento di motivazione è correlato alla manifestazione di maggior autostima dei bambini che si mettono in gioco.
Possiamo far riferimento a quanto riscontrato già più di vent'anni fa:

> «[...] una delle maggiori difficoltà del rapporto insegnamento-apprendimento consiste in questo: l'insegnante dovrebbe convincere l'allievo e sé stesso che quel che si apprende, lo si apprende per la vita e non per il breve spazio di tempo legato ad una prova, ad una verifica, ad una qualche forma di valutazione».
>
> (D'Amore, 1999, p. 386)

L'argomentare e l'ipotizzare, in particolare, sono propedeutici allo sviluppo delle competenze matematiche e all'individuazione di relazioni di passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio specifico.
L'attività argomentativa potrebbe essere definita come lo strumento più generale per poter costruire catene deduttive nel linguaggio naturale, seguendo le modalità del prevedere e dell'interpretare, e in questo senso come attività di avviamento alla dimostrazione.
L'attività argomentativa risulta funzionale non solo al monitoraggio delle reali concezioni degli allievi, ma anche alla configurazione di elementi su cui focalizzare la trasposizione didattica e alla messa a punto di percorsi educativi attenti anche ai vissuti emozionali.
A tal proposito è possibile evidenziare alcuni accorgimenti didattici atti a valorizzare la competenza argomentativa nella pratica d'insegnamento:

– dedicare maggiore spazio e tempo a momenti di lavoro condiviso affinché gli alunni possano mobilitare i processi di interpretazione e riflessione sulle strategie di risoluzione messe in atto;
– come suggerisce Di Martino (2017), scegliere problemi da proporre in aula con un'adeguata difficoltà, perché questo porta a un ventaglio più ampio di risposte al problema da parte dei ragazzi (come nel caso del problema "Il cuore di Martina"), accompagnate da argomentazioni che l'insegnante può utilizzare per avviare momenti di discussione;
– esplicitare e condividere i criteri di valutazione, rendere palesi le attese dell'insegnante per evitare fraintendimenti da parte degli allievi e affinché si sentano motivati e coinvolti nel processo di insegnamento-apprendimento;

– prendendo ad esempio gli studi di Zan (2012a, 2012b), proporre lavori di inferenza sul testo dei problemi per condurre i bambini a riconoscere e cogliere le connessioni tra contesto (ricco di riferimenti al concreto) e domanda;
– prevedere, laddove possibile, uno spazio all’interno della scuola, dedicato al laboratorio di matematica, quale luogo privilegiato del fare (D’Amore & Marazzani, 2011). L’insegnante, mantenendo il ruolo di regia in questo luogo, adotta una devoluzione a favore della presa di responsabilità da parte del bambino, vero protagonista in questo ambiente.

Attraverso questa esperienza didattica emerge la consapevolezza di quanto la scuola di oggi necessiti della figura di un insegnante che non si limiti a leggere e catalogare i fatti e i risultati che di volta in volta scaturiscono dal proprio agire didattico: integrando l'expertise professionale e didattico in modo continuativo, accompagnato da pratiche di riflessione sul proprio operato, si può puntare a una progettazione educativa intesa come «percorso di ricerca per eccellenza» (Vannini, 2009, p. 100).
Porre l’attenzione sui vissuti dei bambini, su come percepiscono sé stessi e su cosa provano di fronte alla richiesta di un compito matematico è importante per gli insegnanti: c’è la necessità nell’approccio valutativo di andare oltre le tracce che gli studenti lasciano trascritte a penna su un foglio. Affinché si possa delineare una didattica basata sull’agire, sul fare, sullo sviluppo delle competenze metacognitive e argomentative, è necessario indagare e partire dai vissuti emotivi dei singoli bambini, perché da essi si delineeranno i diversi approcci alla disciplina e gli apprendimenti che ne derivano.
È necessario che l’insegnante offra ai bambini occasioni per calarsi nella situazione problematica, attraverso la quale il bambino stesso, tramite la condivisione del percorso con i suoi pari e l’argomentazione quale mezzo atto a esternare i vissuti emotivi e i processi logici attuati, possa:

> «[...] trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un’impresa specifica dell'intelligenza e l’intelligenza è un dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l’attività più caratteristica del genere umano».
>
> (Polya, 1945, p. 130, traduzione dell’autore)

Bibliografia

D’Amore, B. (1993). *Problemi*. Pitagora Editrice.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. FrancoAngeli.

D’Amore, B., & Marazzani, I. (2011). *Problemi e laboratori, metodologie per l’apprendimento della matematica*. Pitagora Editrice.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di didattica della matematica*. Pitagora Editrice.

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, *1*, 23–37. https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/32

Magnone, S. (2018). Il Rally matematico e la cooperazione tra allievi di scuola elementare. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, *4*, 82–99. https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/53

Malara, N. (2009). *Processi educativi per promuovere nelle classi un approccio costruttivo all’early algebra. Consapevolezze emerse negli insegnanti*. http://www.progettoaral.it/wp-content/uploads/2016/08/Malara-atti-NTSE-5-10-09.pdf

Malara, N., & Navarra, G. (2008). Analisi critica di processi di classe in ambito aritmetico-algebrico come modalità di formazione degli insegnanti. In O. Robutti (A cura di), *Atti del III Convegno Nazionale Di.Fi.Ma.* (pp. 164–170). Università di Torino.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale*. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Polya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Vannini, I. (2009). *La qualità nella didattica. Metodologie e strumenti di progettazione e valutazione*. Edizioni Erickson.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Zan, R. (2012a). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo (Parte I). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35A*(2), 107–126.

Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo (Parte II). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35A*(4), 437–467.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 100 - 118, DOI: 10.33683/ddm.21.10.5

OPEN ACCESS

Dalla statistica alla creazione di pittogrammi: un esempio di itinerario didattico contestuale nella scuola dell'infanzia

From statistics to pictogram creation: an example of contextual educational path in pre-primary school

Leyla Bernasconi•°, Alberto Piatti° e Mario Bottinelli Montandon°
• Scuola dell'infanzia di Bioggio – Svizzera
° Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI – Locarno, Svizzera

✉ leyla.bernasconi@edu.ti.ch, alberto.piatti@supsi.ch, mario.bottinelli@supsi.ch

Sunto / Questo itinerario didattico interdisciplinare (matematica ed educazione visiva) è stato realizzato in una scuola dell'infanzia del Canton Ticino seguendo un approccio contestuale. In una prima fase, i bambini hanno realizzato un intero processo statistico, dalla domanda di ricerca alla rappresentazione dei risultati. Sono state proposte due indagini: la prima volta a capire se nelle case degli allievi fossero presenti più gatti o più cani, la seconda per determinare se nella scuola dell'infanzia di Bioggio fossero presenti più allievi o più allieve. Questa prima fase ha messo in evidenza come la difficoltà principale dei bambini fosse la rappresentazione dei risultati, e in particolare la rappresentazione di classi di equivalenza (gatto/cane, maschio/femmina). Questo genere di difficoltà è stato quindi affrontato didatticamente con il linguaggio visivo del pittogramma, che ha accompagnato gli allievi attraverso diversi compiti di realtà. Lungo le ultime fasi del suo sviluppo, l'itinerario è stato strutturato per consolidare la capacità degli allievi di creare pittogrammi.

Parole chiave: scuola dell'infanzia; statistica; pittogrammi; approccio contestuale.

Abstract / This interdisciplinary learning itinerary (mathematics and visual education) was carried out in a kindergarten in Canton Ticino following a contextual approach. In a first phase, the boys and girls carried out a whole statistical process, from the research question to the representation of the results. Two surveys were proposed: the first one aimed at understanding if in the houses of the pupils there were more cats or more dogs, the second one aimed at determining if in the kindergarten of Bioggio (Canton Ticino) there were more pupils or more students. This first phase showed that the main difficulty of the boys and girls was the representation of the results, and in particular the representation of equivalence classes (cat/dog, male/female). This kind of difficulty was addressed instructionally with the visual language of the pictogram, which accompanied the pupils through various reality tasks. Along the last stages of its development, the itinerary was structured to consolidate the pupils' ability to create pictograms.

Keywords: pre-primary school; statistics; pictograms; contextual approach.

1 Introduzione

L'itinerario presentato in questo articolo è stato concepito nell'ambito di un corso di formazione continua sul tema della progettazione di itinerari didattici in matematica a partire da contesti reali, proposto dal Dipartimento formazione e apprendimento nel corso dell'anno scolastico 2019-2020. L'itinerario è stato realizzato in una sezione di scuola dell'infanzia di Bioggio (Canton Ticino, Svizzera) nello stesso anno scolastico.

1.1 Inquadramento teorico dell'approccio contestuale

Il percorso presentato si basa sull'assunto che progettare un itinerario didattico efficace è come progettare un'esperienza di vita, da realizzare insieme ai propri allievi e alle proprie allieve, che risulti coinvolgente per tutti e che produca come risultato un apprendimento. Metaforicamente, progettare un itinerario didattico è come concepire un viaggio da compiere insieme ai propri allievi e alle proprie allieve in un territorio inesplorato. Per poter raggiungere questo obiettivo, è però necessario che l'itinerario didattico sia immerso in un contesto di senso. Per definire il concetto di contesto adottiamo la definizione di Klassen:

> «[...] propongo di definire il contesto come tutte le entità che sono correlate o che circondano un determinato elemento focale e che contribuiscono alla sensatezza di tutto l'insieme. L'elemento focale nella definizione può essere una conoscenza scientifica o un'abilità, un concetto o una competenza. La sensatezza di tale entità nodale emerge da fattori quali la familiarità, l'interazione sociale, l'attività, la riflessione, la relazione logica, la risposta emotiva ecc., che, nel senso della definizione, costituiscono il contesto per il concetto o la competenza».
>
> (Klassen, 2006, p. 35, traduzione degli autori)

Il contesto permette all'allievo o all'allieva di dare senso, di contestualizzare, un concetto o una competenza, intrecciandolo con altre conoscenze, competenze ed esperienze di vita, ancorandolo così a una memoria a lungo termine. Come definizione operativa, un approccio contestuale è tale se favorisce, come indicato dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015), «una visione sistemica del progetto educativo» (p. 55), ovvero quando accoglie quella dimensione della complessità in cui saperi, competenze ed esperienze sono tessuti insieme.
Klassen (2006) distingue cinque ambiti di contesto:

1. Il *contesto pratico:* che tipi di attività vengono svolte dagli allievi e dalle allieve? Con quali finalità e quali metodologie? In che luogo? Questo ambito di contesto è fondamentale per la motivazione e il coinvolgimento degli allievi e delle allieve. In questo senso è fondamentale che le attività proposte, nel caso delle situazioni-problema, siano autentiche, ovvero rappresentino dei problemi significativi nel contesto reale o narrativo di riferimento. Riprendendo la metafora del viaggio, questo ambito corrisponderebbe al tipo di attività svolta durante il viaggio: scoperta, socializzazione, festa, rilassamento ecc.
2. Il *contesto teorico*: qualsiasi contesto si basa su conoscenze e teorie. Quali sono i concetti principali che sottostanno al contesto prescelto? Spesso le risorse cognitive mirate sono basate su questi concetti di fondo. Per questo ambito di contesto sono fondamentali la correttezza e la ricchezza dei concetti di fondo mobilitati. È dunque sempre utile scegliere contesti (reali o narrativi) di cui il/la docente abbia una conoscenza approfondita, o ancora meglio una passione. Nella metafora del viaggio, questo ambito di contesto corrisponderebbe alla destinazione o alle destinazioni del viaggio: dove vado? E a vedere cosa?

3. Il *contesto sociale*: andare in vacanza da solo, o con il compagno o la compagna, o con la famiglia, o con un gruppo di persone sconosciute non è la stessa cosa. I compagni di viaggio influenzano in maniera preponderante l'esperienza vissuta. Lo stesso vale per un itinerario didattico: con chi svolgerò il percorso e con quali modalità?
4. Il *contesto storico*: le conoscenze e le teorie trattate a scuola spesso differiscono in modo importante dallo stato della ricerca e delle conoscenze accademiche sugli stessi ambiti. Spesso la trasposizione didattica, soprattutto in matematica, porta a presentare i concetti come se fossero puri, universali e immutabili. In questo senso, giova piuttosto presentare e impostare i concetti in tutta la loro umanità e variabilità. Le teorie sono di regola frutto di spiegazioni alternative e contrastanti, di dibattiti e conflitti, di esperimenti riusciti e falliti, di casualità, di problemi che si sono posti nel tempo ecc. Prendere in considerazione la storia dei diversi concetti e il loro sviluppo nel tempo consente di rendere viva la teoria e quindi di aumentare la motivazione e il coinvolgimento degli allievi e delle allieve. Chi di noi, visitando una grande città o una regione, ha trascurato completamente la sua storia? È possibile apprezzare veramente un luogo senza sapere nulla della sua storia e dello sviluppo che ha avuto?
5. Il *contesto affettivo e narrativo*: non c'è apprendimento senza emozioni ed esperienza in prima persona. Quali vissuti e quali emozioni l'allievo ricollega al contesto considerato? Quali esperienze ha già raccolto in questo contesto? Si tratta di un contesto narrativo oppure di un contesto reale legato alla quotidianità dell'allievo o dell'allieva?

1.1.1 Significato e senso di un concetto matematico

In quest'ottica, in didattica della matematica si distingue tra significato e senso di un concetto (Radford et al., 2011).

> «Il significato di un concetto è un costrutto storico, culturale e politico, condiviso all'interno di una comunità, e appartenente a una coscienza collettiva. La definizione di un concetto matematico, condiviso all'interno della comunità scientifica, può essere un esempio di significato di un concetto. Il significato di un concetto, pur essendo oggettivo, non è però, come si potrebbe facilmente pensare, una realtà statica e stabile, ma piuttosto il risultato di una serie di tensioni e visioni contrapposte all'interno della comunità di riferimento e come tale è in continua evoluzione».
>
> (Piatti, 2015, p. 104)

In generale però,

> «[...] quando si chiede a una persona di evocare un concetto matematico, spesso ciò che sorge spontaneo alla mente è legato a una o più esperienze o attività, più o meno concrete, che la persona ha vissuto e in cui quel concetto era coinvolto. L'insieme di tutte le esperienze che una persona ha vissuto con un dato concetto; le immagini, le parole, i ricordi, i gesti legati a quelle esperienze formano quello che gli autori definiscono il senso del concetto matematico. In altre parole, il senso sta alla coscienza individuale, come il significato sta alla coscienza collettiva, ma le coscienze individuali non sono e non potranno mai essere riproduzioni in scala della coscienza collettiva».
>
> (Piatti, 2015, p. 104)

Il *contesto affettivo e narrativo* è l'ambito del contesto che maggiormente è influenzato dalle esperienze precedenti e che più differenzia le esperienze dei singoli allievi. Se pensiamo alla metafora del viaggio, spesso le destinazioni cui siamo maggiormente legati o per noi più significative sono quelle a cui possiamo collegare delle emozioni intense. Seguire un approccio contestuale significa prendere in considerazione tutti questi ambiti di contesto nella progettazione di percorsi che si traducano per gli allievi e le allieve in vere esperienze di vita, di viaggio.

1.2 Inquadramento teorico del pittogramma

La proposta del pittogramma segue l'impostazione pedagogico-didattica finora delineata, coinvolgendo aspetti che si riferiscono allo studio del disegno infantile e alla semiotica cognitiva (*contesto teorico*). Darras (1998) ha inquadrato il termine *pittogramma* nel dominio degli *schemi*: «I pittogrammi sono schemi convalidati da una comunità di utenti, il che ha permesso loro di stabilizzarsi nel tempo e, talvolta, anche di evolversi verso sistemi di scrittura» (Darras, 1998, p. 93, traduzione degli autori). Secondo il semiologo francese, inoltre, il pittogramma assolve un bisogno *figurativo* più che *visivo*, nel senso che, disegnando, il bambino si pone sul piano della comunicazione visiva convenzionale (*iconotipo*). Considerare i tracciati infantili, al contrario, solo come fenomeni dell'espressione personale, rifacendosi a categorie di giudizio estetico derivate dall'arte, equivarrebbe a trascurare degli schemi grafici il fatto che «ogni iconotipo è un potenziale pittogramma e le produzioni dei bambini ne sono i laboratori» (Darras, 1998, p. 93, traduzione degli autori).
Il focus sull'espressione grafica come *comunicazione* consentirebbe dunque un'interpretazione «semiotico-pragmatica» (Rickenmann, 2001) degli schemi prodotti dai bambini, spostando l'attenzione del docente dal prodotto al processo, o meglio dall'*immagine* al *segno*, cioè quell'articolazione figurativa che «indica il tipo di lavoro semiotico che il ricevente deve fare per ricostruire il suo significato usando regole comuni del sistema» (Rickenmann, p. 238, traduzione degli autori). La rilevanza sociale e «consensuale» del pittogramma infantile (Rickenmann, 2001, p. 235) si ritrova anche nella segnaletica contemporanea. A questo proposito, Massironi (1982) nota che ai segnali è attribuito il compito di «trasmettere delle informazioni essenziali a un grande numero di persone di lingua diversa, ma che hanno tratti socio-culturali comuni e a cui non è stato fornito alcun addestramento per affrontare la decodifica di tali messaggi» (p. 104). Ancora secondo Darras, la segnaletica come strategia di comunicazione visiva ha lo scopo primario di economizzare le risorse cognitive di chi osserva. Anche quando la loro elaborazione avviene empiricamente, i pittogrammi della segnaletica manifestano sempre la preoccupazione di essere percepiti in quanto tali, «facilitando il riconoscimento, le inferenze e la memorizzazione» (Darras, 2005, p. 4, traduzione degli autori). Grazie alla loro qualità di facilitatori, pertanto, i pittogrammi «anticipano il lavoro cerebrale riducendo, comprimendo, separando, categorizzando, neutralizzando e stereotipando le informazioni» (Darras, 2005, p. 4, traduzione degli autori). Per Massironi (1982), inoltre, è essenziale che i pittogrammi consentano all'osservatore «la maggior velocità di lettura possibile» (p. 107).
Il pittogramma come segno *in un contesto* si distingue per alcune caratteristiche ricorrenti: occupa un'area spaziale riservata, per esempio all'interno di un riquadro o cartello più o meno standardizzato; adotta una grafica lineare, a volte potenziata con informazioni testuali, e colori convenzionali a tinte piatte. Darras nota che «tutte queste caratteristiche ci permettono di aumentare il divario con altri potenziali segni dell'ambiente e di massimizzare la loro distinzione e individuazione» (Darras, 2005, p. 4, traduzione degli autori).
Per tornare brevemente all'impronta comunicativa del pittogramma come *segno* in contrapposizione al suo darsi come *immagine*, è interessante riportare la posizione di Massironi (1982, p. 104), per il quale esso costituisce una zona di confine fra il linguaggio, che procede per *concetti*, e la percezione, che procede invece per *oggetti*. In effetti, «i simboli grafici, informativi, si pongono in uno spazio compreso fra la definizione verbale di un concetto, generalmente non complesso, e la rappresentazione illustrativa, depurata di tutti gli attributi di singolarità» (Massironi, 1982, p. 111). Ma l'indicazione di Massironi è da leggere, per quanto ci concerne, soprattutto in chiave pedagogico-didattica, nel senso che permette di illuminare quella zona del lavoro formativo in cui le dimensioni disciplinari devono necessariamente incontrarsi: immagine e parola (*oggetto percepito* e *concetto*), infatti, sono

codici della comunicazione che nel pittogramma trovano un'occasione di dialogo costruttivo. Del resto, è ben conosciuta, grazie all'opera e al pensiero del pedagogista Loris Malaguzzi (1920-1994), la capacità del bambino in età prescolare di mobilitare simultaneamente i «100 linguaggi». Si impone di base la *necessità di comunicare*, che il bambino evade adoperando di volta in volta il linguaggio che reputa più efficace. Ma è una strategia comune anche agli adulti, come nota Massironi:

> «[...] quando un sistema codificato in un certo modo (ad esempio il linguaggio) non ce la fa più, ne subentra un altro codificato diversamente […] a fornire quel tanto d'informazione in più che il primo sistema non poteva dare […]. Dove la scrittura trova degli ostacoli all'esaustività, subentra il disegno o l'illustrazione».
>
> (Massironi, 1982, p. 111)

Alla scuola dell'infanzia è quindi utile, oltre che in sintonia con i processi di significazione adottati spontaneamente dai bambini, proporre situazioni in cui la codifica semantica segue percorsi cognitivi reversibili, integrando e avvicendando numero, linguaggio discorsivo e figurazione:

> «[...] tra i vari percorsi della significazione vi è una continuità e il passaggio dall'uno all'altro è estremamente sfumato e non così netto come le varie gerarchie preposte fra i sistemi di segni, o gli esami condotti su universi separati potrebbero far pensare».
>
> (Massironi, 1982, p. 112)

2 Struttura dell'itinerario

L'itinerario si presenta come una sequenza di tre fasi. La particolarità principale risiede nel fatto che le tre fasi non sono state concepite *a priori* nel loro insieme, ma ognuna è stata creata a seguito di un bisogno emerso lungo il percorso. Globalmente l'itinerario è stato rivolto principalmente ai venti bambini del secondo anno obbligatorio, i quali hanno lavorato al pomeriggio, nel momento a loro dedicato, per due pomeriggi a settimana nel corso di cinque mesi, per un totale di circa 40 ore lezione. Si è lavorato in grande gruppo, per il lancio degli stimoli e le riflessioni a conclusione delle varie fasi, in piccoli gruppi o a coppie per le sperimentazioni e lo svolgimento dei lavori.
In questo paragrafo presentiamo le principali scelte strutturali e didattiche effettuate durante il percorso. Nel par. 3, invece, descriveremo più in dettaglio quanto avvenuto nella sperimentazione.

2.1 Prima fase: la statistica

2.1.1 Indagine sugli animali domestici: ci sono più gatti o cani?

A seguito del lancio dello stimolo «Secondo voi, nelle vostre case ci sono più gatti o più cani?» i bambini hanno raccolto e rappresentato le informazioni necessarie per rispondere alla domanda, in un primo momento in modo spontaneo. È seguito un momento di istituzionalizzazione dei dati, attraverso la creazione di un cartellone riassuntivo.

2.1.2 Indagine sul genere: ci sono più maschi o femmine?

Inizialmente la domanda «Nella nostra scuola, ci sono più maschi o più femmine?» è stata ristretta ai venti bambini del gruppo dei bambini del secondo anno obbligatorio. In seguito, ha fatto invece riferimento a tutta la sede. Il bisogno emergente è stato quello di stilizzare la forma grafica e questo ha

portato a un lavoro sulla figura umana. I dati relativi al numero di maschi e femmine sono stati raccolti su un foglio. L'attività era volta a sviluppare le seguenti competenze, previste dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015): (i) attuare una serie di tentativi volti ad affrontare e risolvere una data situazione numerica derivante da un contesto famigliare (Esplorare e provare); (ii) rappresentare situazioni numeriche espresse in forma linguistica con parole, disegni, schemi, frecce, istogrammi (Matematizzare e modellizzare) e (iii) descrivere e presentare le proprie scelte prese per affrontare una situazione numerica in modo tale che risultino comprensibili per gli altri (Comunicare e argomentare). Inoltre, l'attività permette di sviluppare le competenze di collaborazione (Competenze trasversali) e di approfondire il contesto di formazione generale del *Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza*.
In questa prima fase, sono stati scelti due contesti molti vicini alla quotidianità dei bambini e delle bambine: i propri animali domestici e i propri compagni e le proprie compagne (*contesto affettivo e narrativo*). I problemi posti, in tutta la loro semplicità, hanno rappresentato delle vere situazioni problema, che hanno richiesto di sviluppare complesse (per i bambini e le bambine) strategie di conteggio e rappresentazione (*contesto teorico* e *pratico*) in un ambito ben conosciuto. A livello sociale, l'attività è stata strutturata in modo articolato, per passare da una prima riflessione individuale a un'attività di classe, privilegiando in particolare la collaborazione tra allievi/e (*contesto sociale*). In questa fase, così come nelle seguenti, non è stato considerato esplicitamente l'ambito storico.
L'indagine su maschi e femmine ha messo in evidenza la necessità per i bambini e le bambine di sviluppare la capacità di rappresentare in maniera schematica delle entità del mondo reale. Durante la trascrizione sul foglio, i bambini si sono resi conto della difficoltà e del tempo necessario per disegnare ogni bambino presente, vista la tendenza a voler arricchire di dettagli tutti i protagonisti del disegno. Da una discussione è emerso il bisogno di trovare una strategia che risultasse più sostenibile in termini di tempo ed energie, più funzionale e visibile a colpo d'occhio. Si è deciso quindi di proporre un ciclo di attività sul tema dei *pittogrammi*. Si è proposta una prima serie di situazioni legate ai pittogrammi delle ferrovie federali svizzere, che sono stati interpretati e ricreati. Una seconda serie ha visto invece i bambini e le bambine concentrarsi sulla creazione di pittogrammi che servissero a identificare i diversi spazi del nuovo edificio scolastico di imminente inaugurazione. Entrambe le attività erano volte a sviluppare le seguenti competenze, previste dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015): (i) procedere per prove e tentativi nella manipolazione e osservazione di figure assegnate o di motivi corrispondenti (Esplorare e provare); (ii) tradurre situazioni geometriche – che coinvolgono figure o simmetrie – in rappresentazioni figurali (disegni, schemi, percorsi con frecce ecc.) o a parole (Matematizzare e modellizzare) e (iii) orientarsi e orientare persone o oggetti nello spazio reale usando termini specifici (Eseguire e applicare). Inoltre, l'attività permetteva di sviluppare competenze di comunicazione (Competenze trasversali) e di continuare ad approfondire il contesto di formazione generale del *Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza*.

2.2 Seconda fase: alla scoperta dei pittogrammi

In questa fase sono stati scelti due contesti più ampi e in parte meno conosciuti dagli allievi e dalle allieve: i pittogrammi delle ferrovie svizzere (*contesto storico*) e la nuova sede scolastica (*contesto affettivo e narrativo*). Dal punto di vista disciplinare, ci si è spostati da un ambito numerico/statistico a uno prevalentemente geometrico, mentre gli aspetti relativi all'educazione visiva hanno preso una certa prevalenza nella didattica (*contesto teorico*). Anche in questo caso, le attività di riproduzione e creazione di pittogrammi hanno rappresentato delle situazioni problema autentiche (*contesto pratico*) ed è stata privilegiata una modalità collaborativa (*contesto sociale*).
Questa attività ha messo in evidenza la necessità per i bambini e le bambine di sviluppare le loro capacità di creare delle rappresentazioni della realtà utilizzando un insieme limitato di semplici figure. La ragione della scelta di permettere unicamente l'uso delle forme geometriche era facilitare la semplificazione e schematizzazione del disegno.

2.3 Terza fase: creiamo disegni con le sagome

Nell'ultima fase è stato proposto un percorso didattico interdisciplinare tra matematica ed educazione visiva, dove i bambini e le bambine hanno creato delle figure utilizzando formine create appositamente. Dopo aver lavorato per un certo periodo con delle forme geometriche "piene" è emerso il bisogno di passare a forme che non fossero forzatamente convenzionali e a motivi più "leggeri" e adattabili. Sono state dunque introdotte delle sagome, o mascherine, che hanno permesso più libertà nel disegno. Dal punto di vista matematico, l'attività era volta sviluppare le seguenti competenze: (i) procedere per prove e tentativi nella manipolazione e osservazione di figure assegnate o di motivi corrispondenti (Esplorare e provare) e (ii) orientarsi e orientare persone o oggetti nello spazio reale usando termini specifici (Eseguire e applicare); dal punto di vista dell'educazione visiva, le competenze perseguite erano le seguenti, previste dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015): (i) identificare le nozioni spaziali elementari per analizzare e descrivere le componenti di un'immagine o di un'opera plastica (Percezione/Interpretazione) e (ii) inventare e produrre delle immagini, liberamente o in risposta a una consegna (Espressione e rappresentazione). Inoltre, l'attività permetteva di sviluppare le strategie di apprendimento (Competenze trasversali) e di approfondire il contesto di formazione generale delle *Scelte e progetti personali*.
In quest'ultima fase, si è deciso di riallacciarsi al contesto di riferimento dell'anno della sezione, ovvero gli uccelli (*contesto affettivo e narrativo*). Per quanto attiene l'ambito teorico, sono state introdotte nuove figure non standard e gli aspetti relativi all'educazione visiva hanno preso ancora maggior prevalenza (*contesto teorico*). Il contesto pratico e il contesto sociale sono rimasti sostanzialmente invariati rispetto alla seconda fase.
Di seguito, illustriamo in dettaglio quanto avvenuto durante le tre fasi.

3 Le fasi in dettaglio

3.1 Prima fase: la statistica

3.1.1 Indagine sugli animali domestici: ci sono più gatti o più cani?

La prima fase dell'itinerario ha visto impegnati i venti bambini dell'ultimo anno di scuola dell'infanzia nel momento del pomeriggio, dalla metà di settembre alla prima settimana di ottobre 2019.
Il tema è stato introdotto per mezzo di due albi illustrati di Simona Meisser (2010a, 2010b) *Perché i cani odiano i gatti* e *Perché i gatti odiano i cani*, con conseguente discussione su questi animali domestici.
Successivamente è stata proposta la domanda stimolo: «Secondo voi nelle nostre case ci sono più gatti o più cani?». Sono seguite risposte libere ispirate perlopiù dalla propria esperienza e dal proprio vissuto. Dopo un primo momento di sperimentazione in cui i bambini hanno rappresentato graficamente su un foglio il proprio animale domestico (a volte riportandone la cifra indo-araba, a volte riportando diversi animali sul foglio, altre volte indicando la quantità con dei trattini) è nata l'esigenza di elaborare una strategia comune e condivisa per effettuare una raccolta precisa dei dati.

Figura 1. Un bambino conta i fogli con i disegni degli animali domestici.

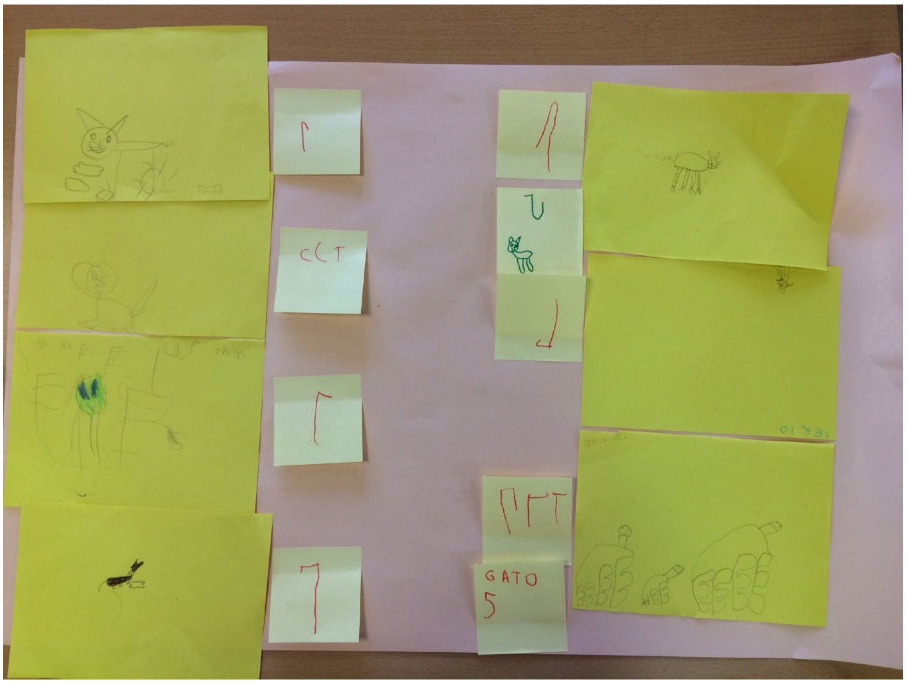


Figura 2. Tentativo di sintesi dei dati.

Una delle difficoltà riguardava coloro che non possedevano animali domestici: in alcuni casi venivano rappresentati e barrati, in altri casi il foglio veniva lasciato in bianco. Un'altra difficoltà è stata il conteggio: i bambini tendevano a contare i fogli o disporli in fila per valutare quale fosse la fila più lunga (**Figura 1**), senza tenere presente che non in tutti i casi un foglio contava come un'unità. I bambini hanno dunque proposto che, oltre al disegno, occorresse scrivere la cifra indo-araba, di solito più volte il numero 1, da conteggiare poi in sede di controllo finale (**Figura 2**).
Come illustrato nelle **Figure 3** e **4**, l'allestimento del cartellone ha permesso di sintetizzare i dati.

Figura 3. Cartellone riassuntivo.

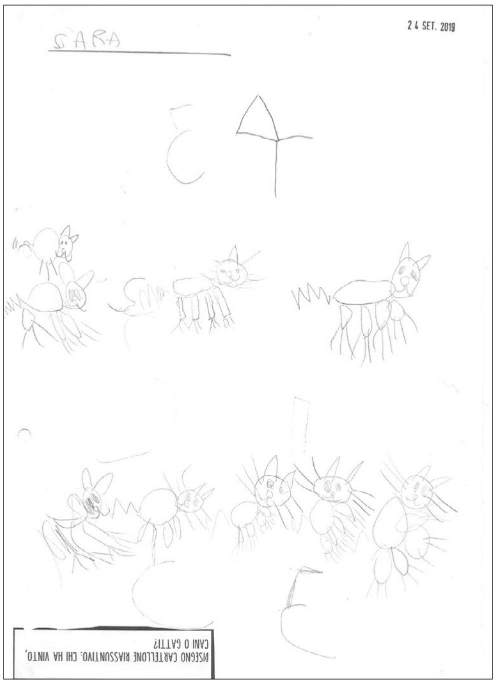


Figura 4. Sul proprio foglio ogni bambino rappresenta la sintesi dei dati raccolti.

3.1.2 Indagine sul genere: ci sono più maschi o più femmine?

In questa seconda parte relativa alla prima fase dell'itinerario, durata dalla prima settimana di ottobre alla metà di novembre 2019, la domanda che ha guidato le attività è stata: «Secondo voi ci sono più maschi o più femmine?». Da questo stimolo sono partite diverse attività.

I bambini hanno dapprima deciso di disporsi frontalmente su due file: da una parte i maschi e dall'altra le femmine. Questa strategia ha permesso di contare e valutare, anche solo visivamente, quale fosse il gruppo più numeroso.

Più complesso è stato invece riflettere sulla maggioranza di genere rispetto all'intera sede, sia per l'elevato numero di bambini, sia considerato il fatto che durante il momento di lavoro i compagni più piccoli si trovavano a casa, mentre altri stavano svolgendo il riposo pomeridiano. I bambini hanno quindi deciso di lavorare a gruppi su grandi fogli divisi a metà e annotare i contrassegni di tutti gli allievi suddividendoli tra maschi e femmine (**Figure 5** e **6**).

Figura 5. I bambini, divisi in gruppi, annotano i contrassegni di tutti gli allievi, suddividendoli per genere.

Figura 6. Contrassegni rappresentati su un foglio e suddivisi per genere.

Il problema è emerso in sede di sintesi dei dati: come unire e riportare questi dati su foglio o su un unico cartellone?
Per semplicità si è tornati per un momento a lavorare sul conteggio del gruppo dell'ultimo anno di scuola dell'infanzia, chiedendo ai bambini di trovare un modo per rappresentare il fatto che nel gruppo fossero presenti nove maschi e undici femmine (**Figura 7**).

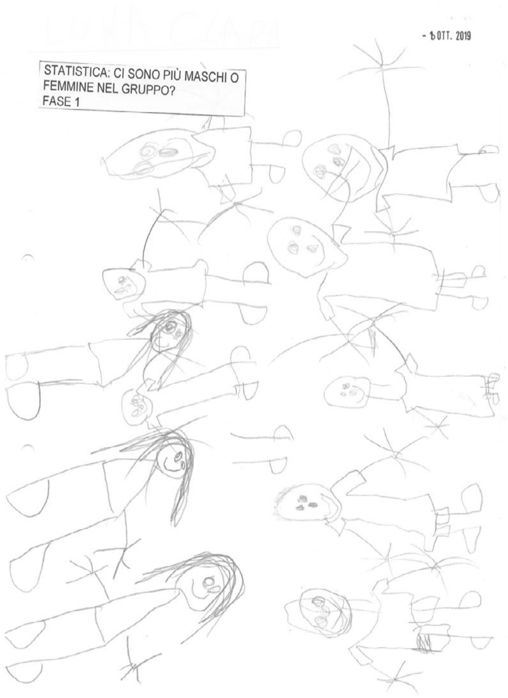


Figura 7. A coppie, i bambini rappresentano quanti maschi e quante femmine ci sono nel gruppo dell'ultimo anno di scuola dell'infanzia.

Dopo aver sperimentato il disegno dettagliato di ogni persona sul foglio, i bambini hanno capito che questa soluzione era troppo gravosa sia sul piano energetico, sia in termini di tempo: è nata l'esigenza di semplificare. Il dato emerso conferma quindi quanto anticipato nel par. 1.2, a proposito della funzione comunicativa convenzionale del pittogramma, utile a facilitare il riconoscimento, le inferenze e la memorizzazione (Darras, 2005).
Da questa attività ha preso avvio una ricerca da parte dei bambini di figure umane stilizzate ed è venuta loro in aiuto l'immagine affissa sulle porte dei bagni, un esempio di pittogramma offerto dal contesto sociale della sezione scolastica. I bambini hanno copiato i due pittogrammi a mano libera e, in seguito, hanno scomposto i loro disegni in semplici figure geometriche del piano (Figura 8) per poi ricomporle con la tecnica del collage eseguita individualmente (Figure 9 e 10).

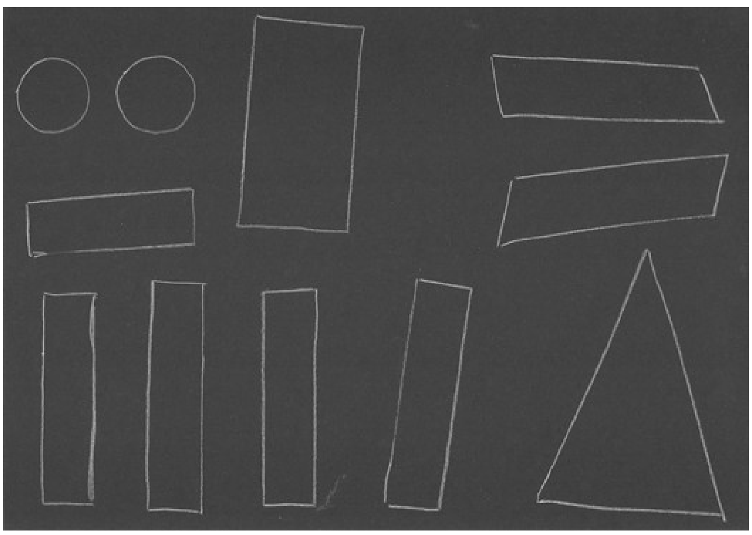


Figura 8. Figure geometriche nate dalla scomposizione delle figure umane stilizzate del bagno.

Figure 9-10. Collage di Federico e di Marta,[1] che rappresentano le figure umane maschile e femminile realizzate ritagliando e assemblando le forme geometriche delle figure umane stilizzate del bagno.

A seguito di questo lavoro è stato più semplice trovare il modo di simbolizzare la figura umana e di conseguenza registrare i dati relativi ai maschi e le femmine.[2]

3.2 Seconda fase: alla scoperta dei pittogrammi

Questa fase dell'itinerario si è snodata lungo i primi due mesi del 2020. In continuità con le attività di simbolizzazione della figura umana sono stati introdotti i pittogrammi, in particolare quelli delle Ferrovie Federali Svizzere (https://digital.sbb.ch/de/brand_elemente/piktogramme). Il repertorio grafico-informativo delle FFS si iscrive nella tradizione visiva della cosiddetta Scuola svizzera di design, o *Swiss Style*, le cui figure preminenti possono essere individuate in Josef Müller-Brockmann (1914-1996), Armin Hofmann (1920-2020) e Karl Gerstner (1930-2017). Tale scelta è anche funzionale a un criterio di qualità nella proposta del referente didattico: come richiamato dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015), il contributo dei linguaggi artistici ed espressivi è da intendersi finalizzato anche alla «configurazione di adeguati riferimenti culturali» (p. 227).
I bambini, divisi in gruppi da 4, hanno visionato i pittogrammi delle FFS. Il loro compito era di commentarli, trovare un modo per categorizzarli (ad esempio per tipologia: mezzi di trasporto, oggetti, animali ecc.) e, successivamente, presentarli ai compagni. Divisi in questi piccoli gruppi, i bambini hanno preso visione, commentato e suddiviso in categorie i pittogrammi ricevuti. In seguito hanno provato a riprodurli con il vincolo di utilizzare unicamente le forme geometriche date, che avrebbero dovuto ritagliare e incollare su cartoncini blu. Unica eccezione: delle semplici linee tracciate con la matita.
In un secondo momento ogni bambino ha scelto uno dei pittogrammi e ha provato a riprodurlo utilizzando le figure geometriche già presenti nella fase precedente (simbolizzazione della figura umana). La difficoltà maggiore è stata adattare delle forme standard alle figure e il vincolo di limitare gli interventi su di esse con la matita o altri strumenti grafici (Figura 11).

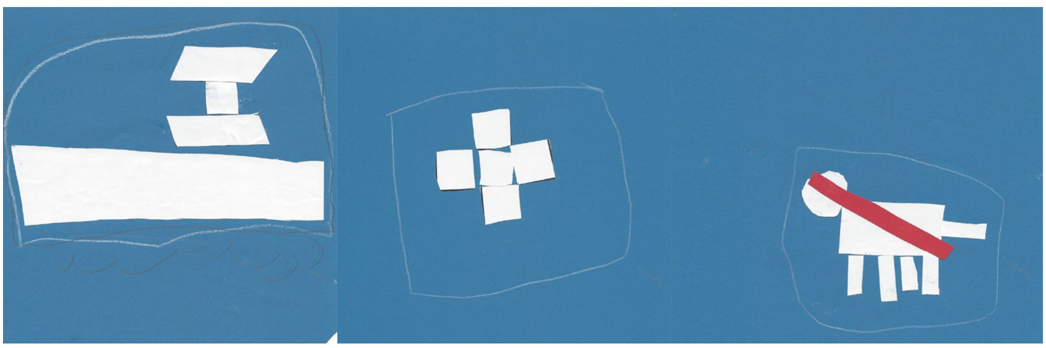


Figura 11. Esempi di pittogrammi riprodotti dai bambini partendo da forme geometriche.

1. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i nomi sono stati cambiati.
2. Questa attività è andata a toccare temi e stereotipi legati all'identità di genere. In questo senso, nelle conclusioni si approfondisce un dato emerso grazie all'attività di collage realizzata dai bambini.

Esaurito il discorso sui pittogrammi delle FFS si è presentata l'opportunità dell'imminente inaugurazione della sede ristrutturata della scuola elementare per lavorare sull'invenzione di pittogrammi in relazione ad aule e spazi. Il compito di creare dei pittogrammi è stato proposto ai bambini e alle bambine come una sfida per identificare i diversi ambienti del nuovo edificio scolastico. Dopo la visita alla sede ristrutturata, i bambini sono stati invitati a elencare i locali visionati. Da questa lista a coppie i bambini hanno scelto uno spazio e provato dapprima a progettare una forma iconica che lo rappresentasse e in seguito a realizzarla, sempre attraverso l'utilizzo delle forme geometriche (**Figure 12** e **13**).

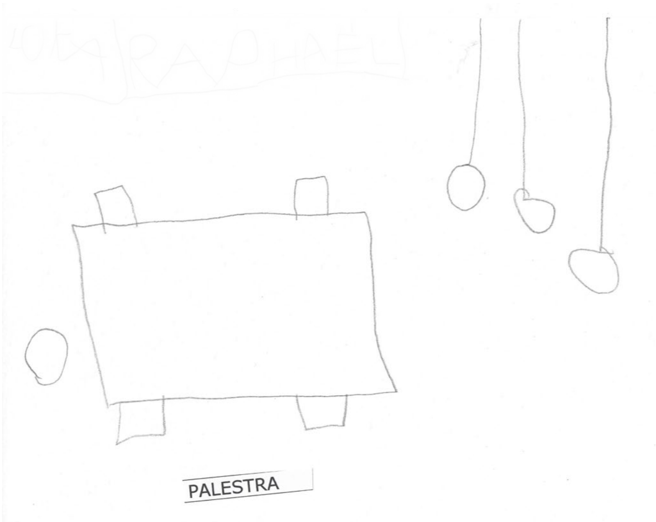


Figura 12. Progetto di un pittogramma che rappresenta la palestra.

Figura 13. A coppie, i bambini realizzano, attraverso l'uso di forme geometriche, il pittogramma di un'aula o di un altro spazio scolastico.

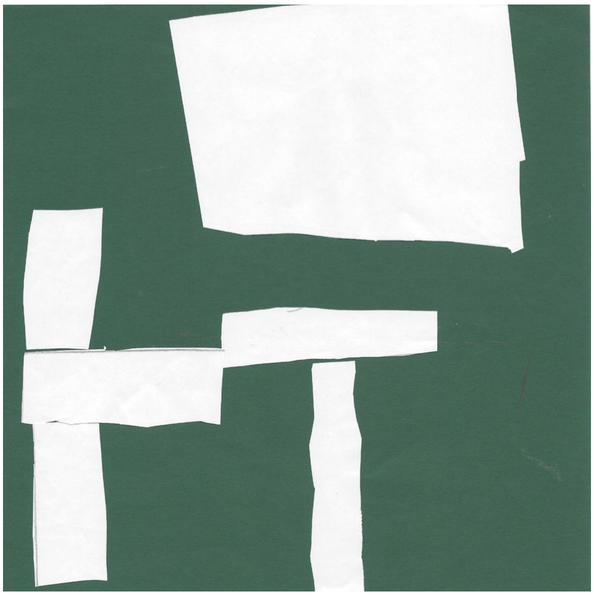


Figura 14. Esempio del pittogramma che rappresenta l'aula di classe.

Il nuovo tipo di immagine richiesta dal compito (rappresentazione spaziale di ambienti) ha fatto emergere ostacoli supplementari legati alla stilizzazione, semplificazione e schematizzazione della realtà (Figura 14). Si è reso necessario un lavoro, tramite discussione, per cogliere le parti essenziali e caratterizzanti di ogni spazio: ad esempio il flauto e le note per l'aula di educazione musicale, un banco e una sedia per l'aula di classe.
I lavori finiti avrebbero dovuto essere appesi nei vari ambienti in occasione dell'inaugurazione (Figura 15), che purtroppo non ha potuto avere luogo a causa dell'emergenza sanitaria.

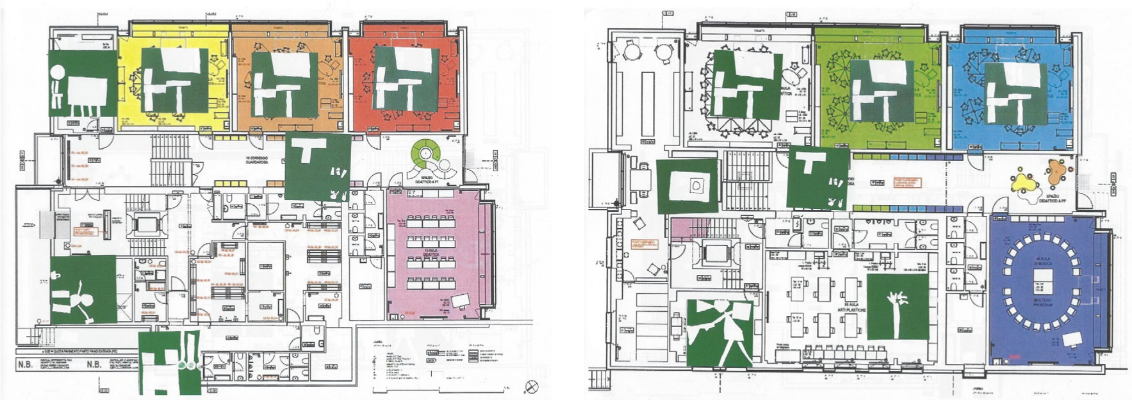


Figura 15. Planimetria della scuola elementare sulla quale sono stati applicati i pittogrammi relativi agli spazi creati dai bambini.

3.3 Terza e ultima fase: creiamo disegni con le sagome

Al rientro dal lockdown, tra metà maggio e metà giugno 2020, i bambini della sezione hanno fatto ritorno in presenza a effettivi ridotti, metà alla volta, a causa della delicata situazione legata alla pandemia. Tutti si sono dedicati ad un nuovo lavoro di rappresentazione visiva basato su sagome, o mascherine, realizzate su misura. Come illustrato nella Figura 16, le mascherine permettevano di creare forme più o meno convenzionali come la goccia, l'ogiva, l'uncino, il triangolo, il cerchio e il rombo; ognuna di quattro grandezze diverse.

Figura 16. Sagome di plastica semirigida create su misura.

Per gli allievi, la motivazione alla base dell'attività era quella di creare delle figure di uccelli, tema dell'anno scolastico, che dovevano poi essere proposte ai compagni per un riconoscimento sotto forma di indovinello.
Nel lavoro di stilizzazione è stato fondamentale estrapolare le caratteristiche essenziali e caratterizzanti di ogni animale, per poi cercare la forma che più si addiceva alla rappresentazione grafica di una data parte del corpo.
In prima battuta c'è stato un momento di scoperta delle sagome e di sperimentazione libera (**Figura 17**), con relativa discussione sul loro uso e sulle strategie emerse. Dalle **Figure 18** e **19** si nota come alcuni codici del linguaggio visivo (simmetria, ritmo e modularità), mobilitati spontaneamente dai bambini giustapponendo e sovrapponendo le forme per creare diversi motivi, contribuiscono alla creazione di artefatti ancora indeterminati fra la funzione decorativa e quella figurativa dell'immagine.

Figura 17. I bambini sperimentano liberamente con le sagome.

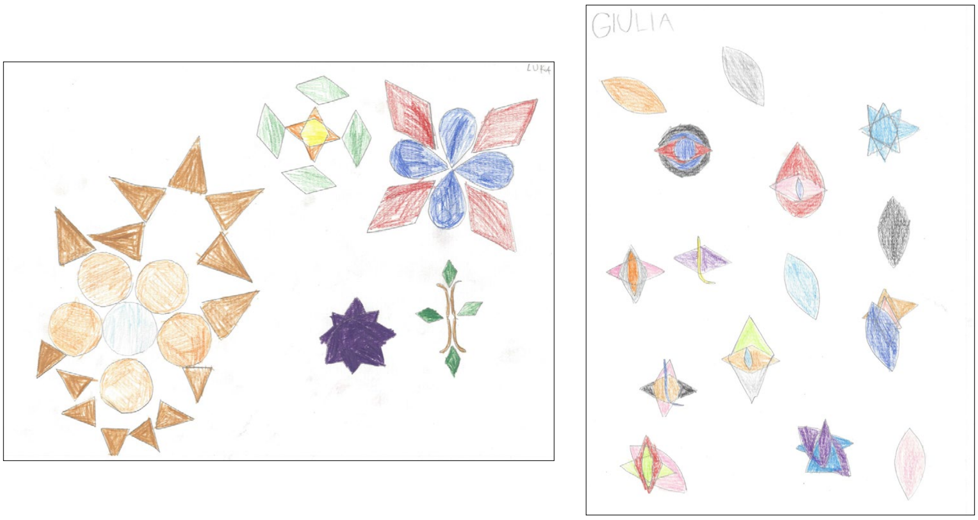


Figure 18-19. Due prodotti della sperimentazione libera.

Nell'attività seguente ogni bambino ha ricevuto un uccello diverso da riprodurre, orientando così in modo esplicito l'intenzione della rappresentazione grafica in chiave figurativa (Figure 20 e 21).

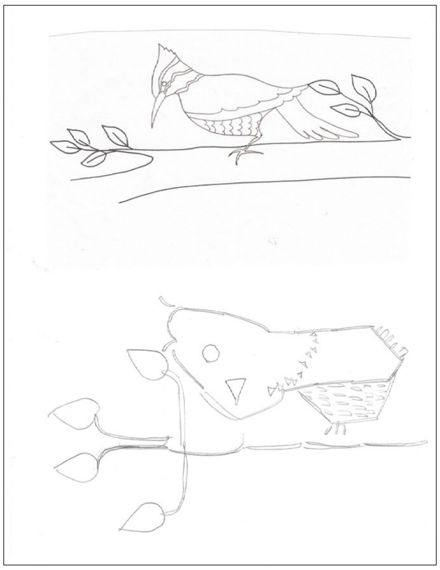


Figura 20. Il picchio rappresentato attraverso l'utilizzo delle sagome.

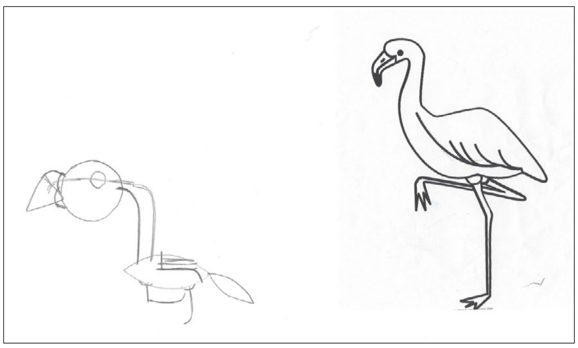


Figura 21. Il fenicottero rappresentato attraverso l'utilizzo delle sagome.

Parallelamente sono stati svolti degli allenamenti rappresentando, sempre attraverso l'uso delle mascherine, le varie parti del corpo che caratterizzano un uccello: piumaggio, ali, becco, zampe, occhi (Figura 22).

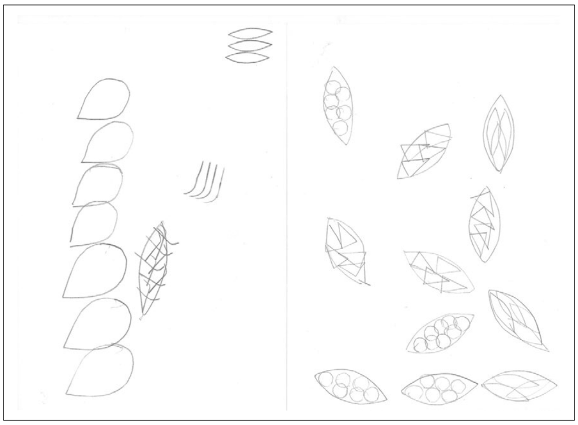


Figura 22. Esempio di rappresentazione per le ali attraverso l'utilizzo delle sagome.

Nel corso della sperimentazione con le sagome, finalizzata alla creazione di figure di uccelli, le strategie messe in atto dalle allieve e dagli allievi sono state principalmente quelle di accostare, giustapporre e combinare le forme per crearne di nuove e più somiglianti all'oggetto di studio, sia nel caso della figura intera (Figure 20 e 21), sia di una parte di esso (Figura 22). In alcuni casi i bambini hanno utilizzato solo una parte della mascherina (Figura 20: alcune linee rette sono state tracciate con una parte della forma a uncino).

4 Conclusioni

In generale si è rilevato un marcato interesse nel gruppo di allievi lungo tutto il percorso. I bambini sono apparsi fin da subito coinvolti e motivati nelle varie attività. Hanno avuto spesso l'occasione di lavorare in piccoli gruppi o a coppie, raramente a livello individuale, e questo ha sicuramente favorito il rafforzamento delle relazioni interpersonali, la collaborazione e l'autonomia delle allieve e degli allievi. Gli apprendimenti principali che le tre parti dell'itinerario hanno stimolato sono legati all'astrazione, alla capacità di rilevare ed estrapolare l'essenziale e a quella di simbolizzare e sintetizzare.

4.1 Apprendimenti legati alla matematica

L'itinerario proposto ha permesso ai bambini e alle bambine, grazie alla prima attività, di svolgere in prima persona un processo statistico, dalla domanda di ricerca fino alla rappresentazione dei risultati, combinando, in un'unica attività, aspetti di classificazione (compresa la rappresentazione di classi di equivalenza), conteggio e rappresentazione numerica, favorendo una creazione di senso dei diversi concetti mobilitati. L'attività ha pure messo in luce come, in questo caso, le difficoltà principali riscontrate nella risoluzione delle situazioni problema in matematica non siano legate necessariamente ad aspetti matematici, quanto piuttosto ad aspetti relativi alla rappresentazione e alla comunicazione. Questa considerazione è un'ulteriore evidenza a favore della concezione e realizzazione di itinerari interdisciplinari. Le attività successive hanno invece permesso agli allievi e alle allieve di aumentare la familiarità con l'utilizzo di diverse figure geometriche, sia standard che non standard, favorendo così anche in questi casi la creazione di senso e l'astrazione.

4.2 Apprendimenti legati all'educazione visiva

In linea con gli autori cui si è fatto riferimento nel par. 1.2, si conferma l'utilità didattica di integrare, nel lavoro per la definizione dei concetti, i modi della significazione grafica con quelli di altri linguaggi come parole e numeri. La permeabilità e l'interscambio fra i processi della percezione visiva e della categorizzazione astratta dei concetti è un dato che si è potuto notare chiaramente. È poi emerso un dato specifico interessante, come anticipato nel par. 3.1.2, che riguarda la *distinzione di genere* richiesta ai bambini nella fase di simbolizzazione della figura umana mediante la tecnica del collage. La maggioranza delle configurazioni femminili (19 su 20) è stata schematizzata con un unico elemento rettangolare equivalente alle gambe, laddove la configurazione maschile presenta due rettangoli paralleli, a volte divaricati oppure leggermente distanziati (Figure 9 e 10). La motivazione sembra banale: avendo a disposizione solo 7 elementi rettangolari (Figura 8) adatti alla resa visiva di braccia e gambe – quando ne sarebbero serviti 8 – i bambini sono stati obbligati a scegliere quale delle due figure, donna o uomo, rappresentare a gambe unite. Curiosamente, però, nessun bambino ha scelto di schematizzare l'uomo con le gambe unite; dai disegni spontanei, per contro, emergeva una maggiore uniformità degli iconotipi di genere, simbolicamente rappresentati entrambi sempre con due gambe, indifferentemente se uomo o donna (Figura 7). Ora, lo stesso fenomeno è stato studiato da Darras, che commenta:

> «La rappresentazione delle gambe degli uomini lascia supporre che indossino dei pantaloni. Al contrario, la rappresentazione delle gambe delle donne è spesso più serrata, il che, associato al fatto di portare un vestito o una gonna, fa supporre che le gambe siano nude. Le gambe sono generalmente disegnate parallele, ma possono convergere in alcuni pittogrammi femminili. Sono pudicamente tenute insieme nei pittogrammi femminili, mentre possono essere ostentatamente aperte in quelli maschili».
>
> (Darras, 2005, p. 2, traduzione degli autori)

Possiamo ipotizzare che la scelta di rappresentazione dei bambini sia la conseguenza di uno schema appreso – la segnaletica dei bagni della scuola – e non spontaneo, come dimostrato in effetti dai disegni iniziali. In chiave di pensiero critico e riflessivo, quindi, s'impone una riflessione sugli stereotipi di genere, mentre si richiama la necessità per l'adultità educativa di riflettere sulle proprie conoscenze implicite, specie quando siano veicolate da strutture visive oltre che verbali. Darras (2005) prospetta l'opportunità, nello specifico dei pittogrammi di genere, di approfondire l'analisi didattica dei materiali implementando un approccio semiotico centrato sulla *relazione* sociale e culturale (*contesto teorico, sociale e storico*): «questi segni di relazione risultano da scelte e selezioni operate a tutti i livelli di produzione e di interpretazione. Sono dettati o guidati dallo stato delle conoscenze e delle relazioni di cooperazione, negoziazione e potere nella società» (Darras, p. 9, traduzione degli autori). Per quanto innocui possano sembrare, i pittogrammi realizzati dai bambini nei contesti di realtà che hanno caratterizzato il percorso qui presentato, svolgono la duplice funzione di «registratori e prescrittori della tradizione» (Darras, p. 9, traduzione degli autori).

In generale, l'adozione di un approccio contestuale nella progettazione di questo itinerario ha consentito di realizzare attività interdisciplinari che hanno permesso alle allieve e agli allievi di acquisire diversi apprendimenti, come testimoniato dalle diverse immagini riportate nel presente articolo. D'altro canto, tale approccio ha richiesto di poter gestire in modo dinamico le competenze mirate, adattandole, rivedendole e addirittura concependole man mano che gli allievi e le allieve procedevano nel loro percorso di apprendimento. Raccomandiamo dunque di adottare un approccio contestuale solo se non si è troppo vincolati a delle precise competenze mirate da consolidare lungo tutto l'itinerario e se si dispone di ampia autonomia nella concezione e realizzazione degli itinerari didattici.

Bibliografia

Darras, B. (1998). L'image, une vue de l'esprit. Étude comparée de la pensée figurative et de la pensée visuelle. *Recherches en communication*, *9*, 77–99.

Darras, B. (2005). Semiotic of visual signs and information design. *Information Design International Conference Proceedings*. https://www.academia.edu/27840113/Darras_B_2005_Semiotic_of_visual_signs_and_information_design

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Divisione scuola, DECS.

Klassen, S. (2006). A theoretical framework for contextual science teaching. *Interchange*, *37*(1–2), 31–62.

Massironi, M. (1982). *Vedere con il disegno*. *Aspetti tecnici, cognitivi, comunicativi.* Franco Muzzio.

Meisser, S. (2010a). *Perché i cani odiano i gatti*. Fatatrac.

Meisser, S. (2010b). *Perché i gatti odiano i cani*. Fatatrac.

Piatti, A. (2015). Il senso e il significato dei concetti in matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, *70*, 103–106.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (2011). Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *77*, 149–156.

Rickenmann, R. (2001). Sémiotique de l'action éducative: apports pour l'analyse didactique des leçons d'arts plastiques. In J. M. Baudouin (Eds.), *Théories de l'action et éducation* (pp. 225–253). De Boeck Supérieur. https://doi.org/10.3917/dbu.baudo.2001.01.0225

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 119 - 139, DOI: 10.33683/ddm.21.10.6 OPEN ACCESS

Introduzione alla modellizzazione matematica nella scuola secondaria di secondo grado

Introduction to mathematical modelling in upper secondary school

Antonella Moser
Liceo scientifico "A. Labriola" – Roma Lido, Italia

moser_a@virgilio.it

Sunto / Nell'ambito della didattica della matematica, i modelli matematici sembrano avere scarsa attenzione, nonostante il loro crescente sviluppo e utilizzo nel mondo reale. Nella prassi didattica spesso si presenta un modello già costruito, chiedendo agli studenti di quantificare grandezze che vi compaiono per rispettare determinate condizioni. Rimane il dubbio che quest'unico approccio aiuti effettivamente a interiorizzare il concetto di modello e a capirne l'importanza e l'efficienza come strumento matematico.
Quest'esperienza didattica stimola gli studenti a costruire un modello matematico descrittivo di una situazione basata su un gioco competitivo per introdurre le peculiarità della modellizzazione matematica. Seppur circoscritta a un certo tipo di modello matematico, l'esperienza evidenzia i passi fondamentali per realizzare un qualsiasi modello. In particolare, si pone una certa attenzione a far sì che gli studenti siano il più possibile autonomi proprio nella costruzione del modello, in modo che possano sviluppare un approccio consapevole e critico alla modellizzazione matematica.

Parole chiave: modellizzazione matematica; modello descrittivo; variabili; gioco competitivo; scuola secondaria di secondo grado.

Abstract / Mathematical models are extensively used in many fields of the modern society, even though they seem to be poorly explored in mathematics teaching at secondary school. In teaching practice, often a predefined mathematical model is presented, and students are asked to calculate the values of the variables involved in order to meet specific conditions. However, it is still questionable whether this approach actually helps the students understand the concept of mathematical model and its importance and efficiency as a mathematical tool.
This teaching experience encourages students to construct a descriptive mathematical model of a situation based on a competitive game in order to introduce the peculiarities of mathematical modelling. Although limited to a certain type of mathematical model, the experience highlights the fundamental steps for constructing any model. In particular, some attention is paid to ensuring that students become as autonomous as possible precisely in the construction of the model, so that they can develop a conscious and critical approach to mathematical modelling.

Keywords: mathematical modelling; descriptive model; variables; competitive game; upper secondary school.

1 Introduzione

È ormai evidente, al giorno d'oggi, l'importanza che i modelli matematici rivestono nell'analisi delle situazioni e dei fenomeni reali che ci circondano. A tal proposito, l'Accademia dei Lincei evidenzia che:

> «Nella pratica reale della ricerca scientifica si lavora, di fatto, sempre con "modelli" [...]. Lo sviluppo di potenti tecniche numeriche e, recentemente, di metodi basati sull'intelligenza artificiale (come il machine learning), assieme all'utilizzo dei Big Data, ha rivitalizzato il problema della costruzione di modelli, ponendo nuove interessanti sfide».
>
> (Accademia dei Lincei, 2019)[1]

In ambito educativo, anche le Indicazioni Nazionali italiane (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010) richiamano il tema dei modelli matematici tra gli obiettivi specifici di apprendimento già al termine del primo biennio del liceo scientifico: «Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica» (p. 340). Durante il secondo biennio lo studente «In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico» (MIUR, 2010, p. 341). E, nel corso del quinto anno, «In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi» (MIUR, 2010, p. 341).

In alcuni libri di testo per la scuola secondaria di secondo grado[2] (Bergamini et al., 2017; Sasso & Zanone, 2019), vengono presentati diversi problemi del tipo *Realtà e Modelli* che si riferiscono a modelli matematici. Questo tipo di problemi viene inserito nelle sezioni pratiche relative agli strumenti matematici utilizzati per modellizzare una situazione reale (esponenziali, equazioni differenziali, ricerca di massimi e minimi), ma è assente una sezione teorica che riguardi esclusivamente la modellizzazione matematica. Poiché le sezioni teoriche normalmente corrispondono ai temi affrontati nelle usuali programmazioni didattiche, può sembrare strano che tale sezione non sia presente. Nonostante il recente e notevole sviluppo dell'utilizzo dei modelli in molti campi della società moderna, sempre più orientata verso quelle che sono chiamate *STEM disciplines* (*Science, Technology, Engineering and Math*), e la breve parentesi di attenzione del MIUR con l'inserimento di tipologie di problemi basati su modelli matematici nell'esame di stato, perché sembra esserci ancora una certa reticenza a introdurre il tema della modellizzazione matematica nella programmazione di classe? Forse la maggior parte degli insegnanti non sono adeguatamente formati per trattare la disciplina dal punto di vista applicativo, in particolare mediante modelli matematici?
Esaminando i seminari dei più importanti convegni nazionali sulla didattica della matematica degli ultimi anni,[3] o gli argomenti dei corsi per insegnanti indetti dall'AIRDM,[4] sembra quasi di non scorgere traccia di questo contenuto disciplinare. È presente in convegni scientifici[5] ove si illustrano esempi di applicazioni complesse in vari campi (non solo scientifici), ma senza alcun accenno al modo di insegnarli (e comunque si tratta di modelli sviluppati con strumenti matematici che si affrontano solo all'università, probabilmente incomprensibili per uno studente della scuola secondaria di secondo

1. https://sites.google.com/view/modellilincei2019/
2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.
3. Fra gli altri citiamo: *XXXIII Convegno Nazionale Incontri con la matematica*, novembre 2019 (BO); *AIRDM: L'insegnamento della matematica tra procedure e concetti: la ricerca di un delicato equilibrio*, Agosto 2019, Frascati (RM); Convegno Nazionale *Educare alla razionalità: L'insegnamento della matematica e della logica nella scuola secondaria*, Università di Torino, Maggio 2019 (TO); EDU-SIMAI: *La matematica applicata incontra la scuola*, Luglio 2018 (RM).
4. Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica.
5. Per esempio: https://www.lincei.it/it/manifestazioni/genesi-dei-modelli-convegno

grado). Se si esclude un tentativo all'interno di un convegno, dedicato proprio alla possibilità di trasferire la conoscenza dei modelli matematici dai laboratori alle aule didattiche (Natalini, 2013), solo durante l'anno scolastico 2019/2020, in piena pandemia, con le continue informazioni sulle previsioni dei modelli matematici per la diffusione del coronavirus, si è sviluppata una maggiore curiosità verso questo strumento e verso la possibilità di renderlo almeno parzialmente accessibile agli studenti mediante appositi laboratori.

Esula dallo scopo di quest'articolo il cercare di capire perché le Indicazioni Nazionali non sembrino essere osservate completamente e se proprio questo sia alla base delle difficoltà e perplessità non raramente dimostrate dagli studenti a riguardo dei modelli matematici anche alla fine del loro percorso scolastico nella scuola secondaria di secondo grado. Tali perplessità si riscontrano nell'incapacità di definire il modello matematico, nella manifestata assenza di conoscenza dei passi fondamentali per la relativa costruzione, di conoscenza delle differenti tipologie, di concezione dell'importanza e utilità dei modelli matematici.[6]

Eppure, alcuni modelli matematici sono estremamente semplici e a volte utilizzati senza riconoscerli. Come si potrebbe dunque introdurre la modellizzazione matematica nelle scuole secondarie di secondo grado? Una proposta metodologica efficace potrebbe essere quella di stimolare gli studenti a costruire un modello matematico semplice, ponendo attenzione ai prerequisiti che agevolano l'autonomia degli studenti durante tale costruzione; in quest'ottica, un esempio interessante è il *modello descrittivo* come strumento per rappresentare e descrivere quantitativamente situazioni reali o fenomeni naturali a loro vicini.

L'esperienza didattica qui proposta si focalizza proprio sulla costruzione di un modello matematico descrittivo di una situazione reale, basata su un gioco competitivo. La realizzazione del modello è preceduta da una fase introduttiva in cui vengono svolte alcune attività che favoriscono e verificano l'acquisizione dei prerequisiti. Il messaggio che si vuole lasciare agli allievi con questa esperienza didattica è che ricorrere a un modello significa rispettarne una caratteristica che gli è peculiare (che lo rende fra l'altro estremamente versatile): la caratteristica di trovare una relazione fra i dati iniziali e finali del problema che sia applicabile per qualsiasi valore di detti dati; caratteristica che rappresenta una differenza sostanziale tra i passi che costituiscono un modello matematico rispetto a quelli relativi a un approccio risolutivo specifico per un determinato problema. Questa differenza è puntualizzata mediante un esempio pratico descritto nell'Allegato 1, che può eventualmente essere proposto e discusso con gli allievi a conclusione dell'attività di modellizzazione.

2 Una versatile esperienza didattica: costruzione di un modello matematico descrittivo

L'esperienza didattica descritta di seguito è stata realizzata in una classe quarta di una scuola secondaria di secondo grado (liceo scientifico tradizionale). Con opportune semplificazioni l'esperienza è adattabile anche ad altre classi a partire dalla classe seconda dello stesso ciclo di istruzione (Allegato 2).

Quanto realizzato è frutto di raffinamenti successivi di varie esperienze precedenti, condotte dall'autrice di questo articolo sempre nello stesso tipo di scuola.[7] Si è cercato di porre una particolare attenzione nell'equilibrare ciò che si predispone per gli studenti e quello che essi stessi devono invece

6. L'autrice ha rilevato empiricamente tali perplessità, lavorando con studenti e studentesse alla fine del quinto anno in occasione di sostituzioni saltuarie di colleghi, con gruppi di studenti intenti a preparare i test di ingresso all'università e/o esami di analisi del primo anno universitario.

7. Le prime esplorazioni didattiche sono avvenute con gli alunni di tre scuole statali di Roma, due site in periferia (liceo scientifico "A. Labriola", liceo scientifico e linguistico "F. Enriques") e una in un quartiere residenziale (liceo classico e scientifico "Democrito"), negli anni scolastici dal 2014 al 2018 (una media di tre classi per anno scolastico).

capire e realizzare da soli, cogliendo l'essenza stessa del modello matematico, e vivendo contemporaneamente dei momenti in cui hanno l'autentica sensazione di "afferrare un'idea". Un'idea propria, frutto di tentativi e analisi dei relativi risultati, che stimoli ulteriormente un'esplorazione autonoma.
In una prima esplorazione del tema, si è cercato di sondare se la parte strettamente matematica fosse alla portata di studenti liceali. Da queste esperienze "brevi" di 3-4 ore-lezione, si è passati a effettuare esperienze più lunghe (7-8 ore-lezione) provando a far costruire agli studenti un modello matematico per la situazione proposta. Anche in queste ulteriori esperienze era stato necessario guidare in modo marcato il lavoro degli studenti. Si è deciso dunque di effettuare alcune premesse pratiche e teoriche all'esperienza vera e propria di costruzione di un modello. In particolare, si è pensato di sottoporre inizialmente gli studenti all'analisi delle caratteristiche rappresentative di un semplice dispositivo reale (la ruota idraulica) e alla sua possibile rappresentazione grafica semplificata. Inoltre, si è cercato di far capire ai discenti, attraverso un video esplicativo, la differenza fra parametri e variabili in una rappresentazione matematica di un fenomeno reale.
Nel corso dell'esperienza didattica, seppur circoscritta a un modello matematico descrittivo, si evidenziano comunque i passi fondamentali per realizzare qualsiasi modello. Si offre inoltre un modo per interiorizzare i concetti di variabile caratteristica di un fenomeno, di un processo, di un dispositivo, di una situazione reale, e variabile matematica. Grazie a questa prima semplice esperienza didattica, la proposta poi di modelli via via più complessi sarà probabilmente accolta con minore perplessità. Inoltre, al suo interno sono previsti dei passaggi che offrono spunti per potenziare il concetto di sequenza numerica e di formula ricorsiva.
Nello specifico, l'esperienza didattica consiste nella costruzione di un modello matematico molto semplice, descrittivo di una situazione reale che coinvolge facilmente gli studenti: un gioco competitivo fra squadre. Agli studenti si presenta il caso di una gara di corsa e abilità: la *pumpkin race* (**Figura 1**), una gara di zucche della tradizione americana. Tuttavia, potrebbe trattarsi anche di una generica gara a staffetta; il modello rappresentativo sarebbe lo stesso.

Figura 1. File ordinate di zucche predisposte per il gioco competitivo.

Nella *pumpkin race*, si predispongono le zucche una dietro l'altra, in file parallele a una certa distanza da una linea di start, in modo che lo spazio fra una zucca e la successiva della stessa fila sia identico per tutte le zucche.
I partecipanti alla gara si dividono in squadre, ciascuna posta in prossimità di una fila di zucche e della

linea di start. La gara consiste nel raccogliere più zucche possibili della propria fila, in un certo tempo fissato. Le zucche vanno raccolte *in ordine sequenziale a partire dalla prima*, inoltre, presane una, la si deve riportare alla linea di start e poi andare a prendere la successiva. Ogni giocatore della squadra deve prendere almeno tre zucche prima di farsi dare il cambio dal giocatore successivo.
Per ogni competizione, il tempo di durata della gara, la distanza fra le zucche, la distanza della prima zucca dallo start sono fissati a priori, ma potrebbero variare di anno in anno a causa delle condizioni atmosferiche e/o di esigenze organizzative.
La squadra che vince la gara può ottenere anche un premio speciale se sarà riuscita a stabilire il record di velocità media rispetto agli anni precedenti.
Alla fine di ogni competizione è quindi importante determinare la velocità media della sola squadra vincitrice (calcolando i metri effettivamente percorsi da tutti i componenti della squadra e rapportandoli al tempo avuto a disposizione, ovvero alla durata stabilita per la gara).
L'attività didattica proposta agli studenti consente, sulla base della gara appena descritta, di sviluppare per gradi un modello matematico, rappresentativo della gara ed efficiente nel determinare proprio i metri percorsi da una squadra e quindi la relativa velocità media sostenuta.

2.1 Fasi e caratteristiche dell'esperienza didattica

In questo paragrafo si riportano schematicamente le fasi dell'esperienza didattica, le finalità e i contenuti coinvolti, la modalità didattica adottata e le procedure valutative attivate.

Fasi dell'esperienza

1. Fase introduttiva:
   - Introduzione al concetto di modello matematico.
   - Introduzione ai concetti di caratteristiche di una situazione reale e di analisi di dette caratteristiche, mediante l'esame di esempi concreti in cui si evidenzia anche la differenza fra individuazione delle variabili caratteristiche e loro analisi.
   - Analisi della differenza fra parametri e variabili mediante un esempio concreto.
   - Presentazione della situazione reale che si vuole rappresentare in termini matematici.
2. Fase realizzativa:
   - Individuazione e analisi delle caratteristiche della situazione reale.
   - Individuazione di variabili matematiche da associare alle caratteristiche della situazione reale.
   - Realizzazione di un modello grafico che schematizzi la situazione.
   - Ricerca di modi intuitivi, empirici per determinare i valori delle variabili matematiche, iniziando da casi particolari (corrispondenti a valori predeterminati di alcuni parametri).
   - Ricerca di una modalità matematica per determinare gli stessi valori, che sia più efficace di quella empirica, a partire dai primi risultati calcolati empiricamente.
   - Ricerca di una relazione diretta fra le variabili matematiche.
   - Generalizzazione della relazione individuata.
3. Fase conclusiva:
   - Analisi del modello matematico generato.
   - Rielaborazione verbale, strutturale dell'esperienza.

Finalità

Preparare gli studenti a sviluppare in maniera consapevole e critica l'approccio alla modellizzazione matematica.

Contenuti

- Relazioni, funzioni parametriche.

- Parametri, variabili.
- Sequenze numeriche.
- Successioni ricorsive e formule ricorsive.
- Modelli matematici.

Competenze attivate
- Analizzare dati e situazioni reali.
- Rappresentare graficamente situazioni reali.
- Argomentare strategie e scelte.
- Costruire e utilizzare modelli descrittivi.
- Interpretare e valutare i risultati matematici ottenuti con il modello all'interno del contesto reale di partenza.

Modalità operative
Tempi. L'attività didattica completa (fase introduttiva, realizzativa e conclusiva) richiede dalle 8 alle 10 ore di lezione (in base alle competenze logico-matematiche del gruppo classe) più qualche ora pomeridiana extrascolastica di studio individuale e/o di gruppo.
Metodi. Sono stati alternati due metodi didattici. A volte si forniva un certo tempo a tutti gli studenti per arrivare a formulare una risposta a quanto richiesto, chiedendo di descrivere i risultati a cui erano giunti sul quaderno per poi controllarli singolarmente. Questa strategia ha fatto sì che gli studenti con competenze più avanzate non interrompessero il ragionamento dei compagni e che ognuno riflettesse con i tempi che gli sono propri. Altre volte si è lasciato che gli studenti esprimessero a turno le loro proposte così come le avevano maturate, per poi discuterle collettivamente.
Si è proposto prima un modello semplificato, avendo fissato a priori i valori di alcuni parametri per poi aumentare la difficoltà e giungere a un modello generale.
Gli studenti hanno spesso lavorato in piccoli gruppi, specie nella fase realizzativa del modello grafico semplificato e di quello matematico, e nelle fasi scritte di rielaborazione dell'esperienza. Per la ricerca della sequenza rappresentativa dei metri percorsi per prendere le varie zucche, gli studenti hanno invece lavorato in modalità individuale. Continue rielaborazioni verbali individuali venivano richieste, alla fine di ogni fase, per consolidare quanto appreso durante la fase stessa.

Modalità di valutazione
La valutazione dell'esperienza didattica è stata realizzata mediante prove di diverso genere, sia durante che alla fine dell'esperienza. Sono stati realizzati vari momenti valutativi, in particolare: per valutare la comprensione della parte introduttiva è stato utilizzato un test con domande a risposta aperta (Allegato 3), con lo scopo di capire in particolare se gli studenti fossero in grado di inquadrare storicamente la nascita dei modelli matematici, se sapessero darne una definizione, e se fossero in grado di distinguerne le varie tipologie. Per le sequenze numeriche, sono stati somministrati esercizi sul riconoscimento di regolarità di sequenze con eventuale associazione di una formula ricorsiva, scelti fra quelli riportati in un testo scolastico dedicato alla preparazione della prova di matematica dell'Esame di Stato di fine liceo scientifico (Bergamini et al., 2015). L'insegnante ha impostato inoltre, come richiesta di risoluzione del problema, di determinare la velocità media della squadra vincitrice, mediante la ricerca della relazione fra metri percorsi e numero di zucche prese.
Alla fine dell'esperienza sono state richieste agli studenti delle rielaborazioni schematiche della fase realizzativa, da svolgere in piccoli gruppi, con lo scopo di capire se gli studenti avessero compreso la necessità dei vari passaggi realizzati durante l'esperienza; se avessero appreso quali sono le fasi alla base della costruzione di un modello matematico e l'efficacia di ricorrere a un modello per descrivere una situazione reale.

2.2 Fase introduttiva

2.2.1 Lezione 1: introduzione al concetto di modello matematico, cenni ad alcune definizioni storiche e alle diverse tipologie di modelli

In questa prima lezione, si è cercato di introdurre il concetto di *modello matematico* a partire da alcune definizioni storiche per poi concludere descrivendo brevemente le diverse tipologie di modelli. È stata utilizzata una lezione frontale, supportata dalla visualizzazione di alcune diapositive realizzate dall'insegnante (Allegato 4), in cui sono riportate per intero diverse citazioni e presentati in modo schematico alcuni concetti chiave e le tipologie di modelli.
Fra le tante definizioni di modello e di modello matematico, si è preferita quella di Valeriano Comincioli (2004):

> «Un modello, dal latino *modulus* (diminutivo di *modus*, misura), è un oggetto, o un concetto, che è usato per rappresentare qualcosa d'altro. In particolare, un *modello matematico* è un modello che ha come componenti concetti matematici, come costanti, variabili, funzioni, equazioni. […] La parola "modello" implica originariamente un cambiamento di scala nella sua rappresentazione. Attualmente, tale significato rimane nel senso che un modello ad esempio matematico, rappresenta un cambiamento sulla scala di astrazione: per ottenere il modello certi particolari vengono rimossi e vengono introdotte delle semplificazioni».
>
> (Comincioli, 2004, p. 1)

Si è poi fatto notare agli studenti come la parola "modello" ci riporti alla sua definizione nelle arti, come di una rappresentazione in qualsiasi materiale di un oggetto reale (esistente o da realizzare). Questa idea si collega infatti a una prima definizione di Giorgio Israel (2003) che considera *ingenua*:

> «Nel nostro caso dobbiamo costruire il modello con una "materia" affatto speciale: la matematica. Disponiamo in tal modo di una definizione che deriva dal significato testuale delle parole: il modello matematico è una rappresentazione, in linguaggio matematico, di un aspetto della realtà, sia che esista già sia che si tratti di realizzarlo. […] Di fatto queste due parole (matematica applicata ma soprattutto "modelli matematici") cominciarono ad essere usate sistematicamente quando entrò in crisi non soltanto la concezione meccanicistica[8] ma anche la concezione unitaria[9] della scienza [...] Già in una conferenza del 1901 il matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) descrisse in modo assai chiaro il nesso fra la crisi della scienza classica e l'introduzione dei "modelli"».
>
> (Israel, 2003, pp. 6-7)

In seguito, si è chiarito come i modelli matematici costituiscano un potente strumento per rappresentare e descrivere quantitativamente un fenomeno naturale, o un'attività reale, per visualizzare le proprietà di una data teoria, e per rappresentare il progetto di un modello reale di un artefatto tecnologico (in questi casi si parla di *modelli descrittivi*). I modelli matematici sono inoltre utilizzati per le scienze sociali come *modelli di controllo*, cioè come modelli che possano definire i comportamenti più idonei in certe circostanze secondo criteri etici, di pubblica utilità (i modelli di controllo vengono utilizzati nelle applicazioni più svariate, per esempio nella teoria delle code in telecomunicazioni); si tratta dunque di modelli matematici che permettono di intervenire sulla realtà.
Nella breve descrizione delle tipologie di modelli si è ritenuto utile accennare anche al tema dei *modelli deterministici*. I pochi esempi riportati in molti libri di testo sono proprio di questo tipo (ad

8. Secondo questa concezione tutti i fenomeni dell'Universo sono riconducibili al moto dei corpi e poiché questi moti sono retti da formule matematiche ben determinate, queste formule possono costituire una base di rappresentazione anche per i fenomeni dell'Universo.
9. Le differenti parti della scienza debbono essere collegate e coerenti fra loro e formare una costruzione unitaria, all'interno della quale il posto preminente è riservato alla meccanica.

esempio, un isotopo radioattivo che decade nel tempo riducendo la sua massa, oppure l'evoluzione di una popolazione di batteri nel tempo). La maggior parte dei modelli descrittivi o di controllo sono *deterministici*, ossia descrivono l'evoluzione di un fenomeno, di un'attività reale, di una situazione, in modo che noto il valore di certe variabili di stato (rappresentative del fenomeno a un certo momento) si riesca a determinare il loro valore futuro e passato in modo univoco. A questo proposito, Giorgio Israel (2003) specifica:

> «[...] diremo che il processo evolutivo di un sistema reale è deterministico se esso è governato da una legge strettamente causale. Le cause che agiscono sul sistema considerato determinano in modo univoco la sua evoluzione, senza alcuna alternativa possibile […], i matematici enunciano questo principio dicendo che le *condizioni iniziali* del sistema determinano in modo univoco la sua evoluzione nel tempo».
>
> (Israel, 2003, pp. 72-73)

Questa breve presentazione si è poi conclusa con un accenno a un'altra tipologia di modello: i *modelli stocastici*. Le caratteristiche di un fenomeno, o di un'attività reale, che si vuole rappresentare potrebbero variare in modo casuale; in questo caso si utilizzano modelli stocastici (particolarmente usati, ad esempio, nel mondo della finanza).
Parlando di questa tipologia di modelli si sarebbe potuto specificare che esistono altri casi intermedi rappresentabili proprio attraverso un modello a metà fra quelli deterministici e quelli stocastici (*modelli semi-deterministici*), ma non si è voluta appesantire questa introduzione con ulteriori informazioni teoriche, che potranno tuttavia costituire un approfondimento futuro per gli studenti.

2.2.2 Lezione 2: esempio di analisi di variabili e rappresentazione semplificata di un artefatto reale; studio del rendimento di una ruota idraulica

La ruota idraulica è uno dei primi esempi di uno studio sistematico, prima empirico e poi matematico, dovuto all'esigenza di confrontare il rendimento delle ruote idrauliche verticali alimentate "da sotto" o "da sopra".
In generale, il rendimento di un motore è una variabile fisica espressa dal lavoro effettuato per unità di energia utilizzata. In termini matematici, esso è indicato dal rapporto fra il lavoro svolto sfruttando una certa quantità di energia e detta quantità di energia. L'idea di capire a parità di energia sfruttabile (ad esempio l'energia cinetica o potenziale di un corso d'acqua) quali siano le variabili fisiche che possono incidere per aumentare il lavoro effettuato (numeratore della frazione corrispondente al rapporto), e dunque il rendimento della macchina, può far intuire agli studenti cosa si intenda per *analisi delle caratteristiche fisiche* e far intravvedere la stretta connessione fra variabile fisica e variabile matematica.
Nella sperimentazione sono state presentate due immagini di ruote, rispettivamente da sotto (Figura 2) e da sopra (Figura 3):

Figura 2. Ruota da sotto.

Figura 3. Ruota da sopra.

Si è poi spiegato agli studenti che per studiare le caratteristiche fisiche che ne influenzano il rendimento è più adatto analizzare un modello grafico semplificato che rappresenti le ruote.
La docente ha dunque presentato due corrispondenti rappresentazioni, rispettivamente per il primo (**Figura 4**) e secondo tipo di ruota (**Figura 5**):

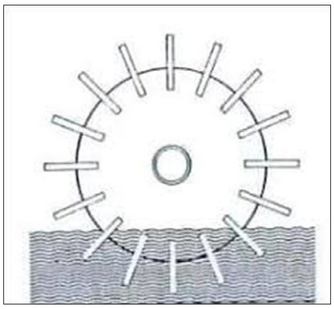


Figura 4. Schema ruota da sotto.

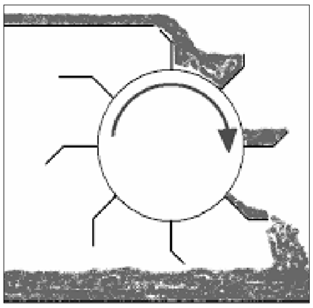


Figura 5. Schema ruota da sopra.

Si è poi chiesto agli studenti, in modalità di discussione collettiva, di individuare le possibili caratteristiche fisiche, reali che incidono sul rendimento della ruota. Tali variabili sono state chiamate *variabili caratteristiche*.
Nell'elencarle, gli studenti hanno nominato tutte le caratteristiche importanti, in modo ridondante, assieme ad altre irrilevanti e mischiando quelle tipiche della ruota da sotto con quelle della ruota da sopra (**Figura 6**).

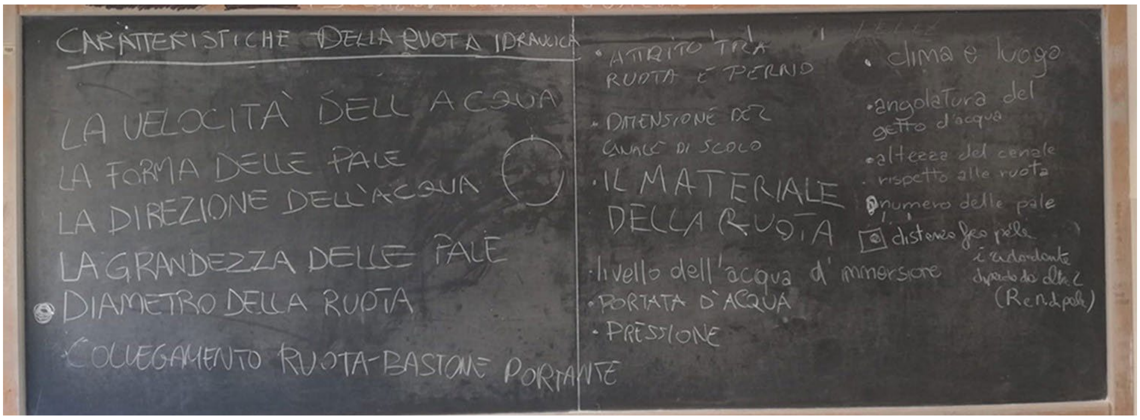


Figura 6. Variabili caratteristiche della ruota.

Si è dunque posta l'attenzione al fatto che aver *individuato le variabili* che influenzano il rendimento di questo motore primo non significa *averne effettuato un'analisi*.
L'insegnante ha quindi inizialmente invitato gli studenti a capire quali variabili dipendessero dalla situazione fisica in cui la ruota avrebbe operato (velocità del corso d'acqua e clima, ad esempio) e quali invece rappresentano delle scelte costruttive (raggio della ruota, numero di pale, distanza fra le pale). Fra queste ultime un'ulteriore riflessione ha portato a selezionare solo quelle che costituiscono un'effettiva scelta (dunque, escludendo per esempio l'attrito fra il perno centrale e l'asse della ruota).
L'ultimo passo dell'analisi è stato capire fra le variabili selezionate quali fossero realmente *indipendenti*. L'insegnante ha proseguito con un esempio: fissato il raggio della ruota, il numero di pale e la distanza fra le pale non costituiscono due variabili indipendenti. Il numero di pale, infatti, si ottiene

dividendo la misura della circonferenza per la distanza fra le pale, viceversa la distanza fra le pale si ottiene dividendo la circonferenza per il numero di pale (formula inversa).
Si è introdotto così il concetto di *dipendenza* fra variabili.

Di seguito il risultato della selezione effettuata collettivamente e riordinata dall'insegnante:
- raggio della ruota;
- distanza fra le pale;
- lunghezza delle pale;
- dimensioni della concavità delle pale;
- (per la ruota da sotto) parte della ruota immersa nell'acqua;[10]
- (per la ruota da sopra) altezza a cui posizionare il canale di scolo rispetto alla ruota.

Si è fatto riflettere gli studenti sull'importanza di trovare delle relazioni matematiche fra le variabili individuate e la potenza o il rendimento, in modo che si potesse determinare con buona approssimazione a priori (prima di costruire la ruota e verificarne il funzionamento) quali dovessero essere i valori ottimali corrispondenti al rendimento massimo. D'altro canto, questi valori ottimali nascono a volte da esigenze contrastanti. La docente ha chiesto agli studenti se il canale di scolo, ad esempio, dovesse essere posizionato abbastanza in alto rispetto alla ruota per sfruttare al meglio l'energia potenziale dell'acqua o se questa scelta non avesse dei risvolti negativi a parità di quantitativo d'acqua disponibile. A questo proposito, gli studenti sono rimasti inizialmente interdetti, per poi dire che troppo in alto ci sarebbe stata più dispersione di acqua specie in condizioni di vento. L'insegnante ha poi concluso spiegando che le ruote da sopra si utilizzano per salti naturali non superiori ai 6 m. Se si costruisce il canale di scolo, si preferisce un'altezza molto ridotta (inferiore a un metro) che dipende dalla pressione con cui l'acqua arriva al salto.

2.2.3 Lezione 3: analisi della differenza fra parametri e variabili; esempio pratico di utilizzo

Un modello di solito è progettato per definire relazioni fra grandezze che possono variare durante una situazione, un esperimento, o lo studio di un caso. Per definire la relazione fra queste grandezze variabili se ne utilizzano anche alcune di altro tipo, i parametri, che rimangono costanti durante lo studio, ma che contribuiscono a determinare le variazioni delle prime.
Nel corso delle lezioni ordinarie, l'insegnante aveva notato come gli studenti avessero chiara la distinzione fra parametri e variabili nello studio dell'algebra (nelle equazioni parametriche, ad esempio, dimostravano di sapere che x è la variabile e k, a, b, c sono dei parametri) ma che facessero molta confusione fra questi due tipi di grandezze nei contesti applicativi. Venendo spesso denominate tutte le grandezze con lettere diverse da x, cui di volta in volta corrispondono dei valori, spesso gli studenti consideravano i termini "parametri" e "variabili" come sinonimi.
La docente ha quindi dedicato una lezione per chiarire la differenza fra questi due tipi di grandezze, tramite l'analisi di un video specifico, percependone in seguito l'efficacia.[11]
Il video riguarda la conservazione dell'energia meccanica ed è realizzato da Zanichelli[12] (Figura 7).

10. Questa variabile è stata curiosamente individuata prontamente da uno dei più giovani studenti.
11. Durante la costruzione del modello, infatti, gli studenti sono riusciti a utilizzare i termini "parametri" e "variabile" in modo consapevole.
12. Il video è disponibile al seguente link: https://www.youtube.com/watch?v=bRqQRRXxx3I

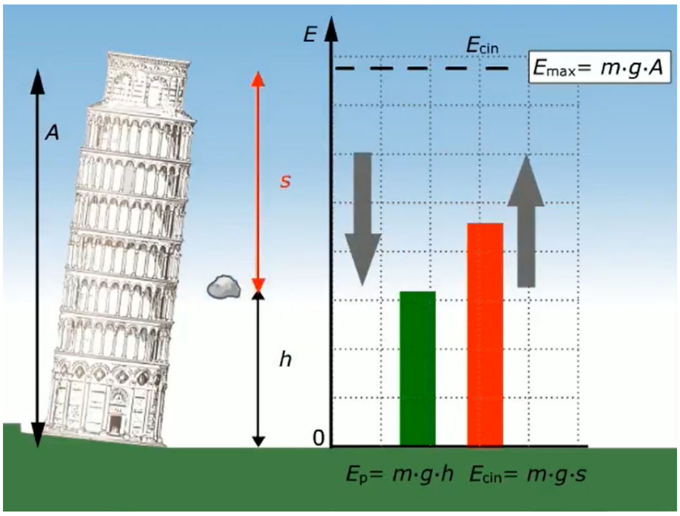


Figura 7. Immagine video Zanichelli *La conservazione dell'energia meccanica.*

In questo video si studia il caso di un sasso lanciato dall'estremità della Torre di Pisa e si analizza la variazione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale man mano che il sasso percorre uno spazio s verso il basso e di conseguenza varia la sua quota h rispetto al suolo. L'energia potenziale massima si ha quando il sasso è in cima alla torre e quindi $E_{max} = m \cdot g \cdot A$, dove si è posta pari ad A l'altezza della torre e quindi di lancio.

In seguito alla visione del video, l'insegnante ha chiesto agli studenti di notare l'utilizzo di lettere minuscole per lo spazio e la quota, e di una lettera maiuscola per indicare l'altezza di lancio. Alla richiesta di dare una spiegazione di tale scelta, sono rimasti abbastanza interdetti. Molti non hanno saputo dire nulla. Alcuni hanno detto: «È indifferente, si tratta di una differenza casuale». Facendo notare loro che la scelta non è casuale ma è voluta per distinguere quelli che di fatto sono due tipi di grandezze diversi, uno studente dopo qualche minuto ha affermato che: «Il sasso poteva essere lanciato anche da un ponte alto meno della torre ma lo studio del caso rimaneva uguale». Gli è stato chiesto quindi che conclusione traesse da questa osservazione. Ha detto: «*A* sarebbe stata l'altezza del ponte ma di fatto non cambiava nulla della spiegazione successiva. Sarebbe stato solo un valore iniziale diverso da attribuire ad *A*». È stata sfruttata quest'ultima considerazione per rimarcare il fatto che *A* poteva assumere valori diversi se corrispondeva all'altezza di una torre o di un ponte, ma che fissato il caso e quindi il suo valore iniziale questo poi nel corso di tutto lo studio non cambiava, pur restando un fattore che influenza il valore dell'energia meccanica totale. Infine, si è chiesto: «E quindi la differenza con *s* e *h*?». Uno studente diverso ha concluso che: «*s* e *h* durante la caduta variano, *A* no».

Dopo aver verificato oralmente che questa differenza fosse chiara per tutti, l'insegnante ha fornito agli studenti una definizione più formale: un parametro è un ente matematico che può assumere vari valori a seconda dei casi, ma il suo valore viene stabilito e rimane costante per tutto lo studio di ogni singolo caso, sebbene il parametro non sia una costante (come il numero di Nepero *e*, come la costante di gravità *G* che assumono lo stesso valore in qualunque contesto); le variabili invece assumono valori che variano durante lo studio del caso.

2.2.4 Lezione 4: descrizione dell'attività che si vuole rappresentare in termini matematici

Agli studenti è stata descritta la gara di zucche, come riportato nella parte introduttiva di questo paragrafo (par. 2), evidenziando il problema di calcolare la velocità media della squadra vincitrice per stabilire se risulti un valore migliorativo rispetto a quelli degli anni precedenti e si debba quindi assegnare il premio speciale.

Agli studenti è stato lasciato il compito di dedurre che, per fare ciò, è sufficiente conteggiare il numero di zucche raccolte. Infatti, la velocità media sostenuta dalla squadra vincitrice si calcola mediante il seguente rapporto:

$$v_m = \frac{\text{Spazio percorso}}{\text{Tempo impiegato}} \qquad \text{Tempo impiegato} = T \text{ tempo gara fissato a priori per ogni gara}$$

Come calcolare quanti metri ha percorso la squadra vincitrice? Considerando il numero di zucche prese, la distanza fra una zucca e la successiva della stessa fila, e la distanza della prima zucca dallo start. Ciò significa dover determinare quanto spazio si deve percorrere per arrivare a prendere l'ultima zucca raccolta dalla squadra vincitrice (se ha preso 10 zucche, occorre determinare quanto spazio bisogna percorrere per arrivare a raccogliere la decima zucca).
A questa conclusione si è giunti attraverso una discussione collettiva in cui il ruolo dell'insegnante è stato solo quello di orientare la riformulazione delle eventuali soluzioni errate degli studenti. Alcuni studenti, per esempio, hanno semplificato il calcolo moltiplicando il numero di zucche per la distanza fra le zucche e poi il risultato per 2, dimenticando che la prima fosse a una distanza diversa dalla linea di partenza.
Vista l'erroneità delle soluzioni intuitive per calcolare lo spazio percorso, si è proposto di rappresentare la gara in termini grafici e matematici riscrivendo in chiaro l'obiettivo alla LIM:

> Individuare quanti metri occorre percorrere per prendere una determinata zucca, da cui calcolare rapidamente quanti metri abbia percorso una squadra che abbia colto un certo numero di zucche (e quindi riuscire a determinare la velocità media sostenuta).

2.3 Fase realizzativa del modello matematico

2.3.1 Lezione 5: individuazione e analisi delle caratteristiche dell'attività

Dopo aver richiamato brevemente la fase introduttiva relativa al concetto di caratteristica di una situazione e di variabile matematica, gli studenti sono stati invitati a individuare le caratteristiche della situazione in esame tramite una riflessione prima individuale e poi una discussione collettiva.
In generale gli studenti hanno proposto:
- numero di zucche disposte su ogni fila;
- distanza della prima zucca dallo start;
- distanza fra una zucca e l'altra;
- posizione della zucca rispetto alle altre (prima, seconda, …);
- numero di concorrenti per squadra;
- estensione del campo di gioco;
- tempo disponibile per la gara;
- metri da percorrere per arrivare a prendere una determinata zucca;
- numero minimo di zucche che ogni studente deve raccogliere.

Ricordando le attività svolte nelle prime lezioni (analisi delle caratteristiche che influenzano il funzionamento di una ruota idraulica e conseguente scelta di quelle ritenute essenziali), è stato richiesto agli studenti di proporre un elenco minimo di caratteristiche che descrivano la competizione, ai fini di calcolare la velocità media tenuta dalle squadre. L'insegnante ha sottolineato che serviva una *rappresentazione semplificata* della gara, sufficiente per raggiungere l'obiettivo di capire quanti metri si debbano percorrere per raccogliere un certo numero di zucche.
Sempre mediante una discussione collettiva si sono analizzate quindi le caratteristiche proposte per determinare quelle ridondanti e quelle necessarie. In questa fase l'insegnante ha cercato di orientare alcuni ragionamenti logici, anche riformulandoli nel caso non fossero stati esplicitati correttamente dagli studenti.

Una caratteristica ridondante che è stata subito individuata, per esempio, è l'*estensione del campo di gioco*, in quanto si riesce a determinare dalle seguenti tre caratteristiche:

– distanza della prima zucca dallo start;
– distanza fra una zucca e l'altra;
– numero di zucche disposte su ogni fila.

Fra le caratteristiche non necessarie si è arrivati, tramite il vaglio delle proposte e delle relative spiegazioni in modalità collettiva, a includere anche le seguenti:

– numero di zucche disseminate per ogni fila (supponendo che tale numero sia comunque maggiore del numero di zucche che una squadra può raccogliere nel tempo prefissato);
– numero di concorrenti per squadra.

Dopo aver effettuato questa selezione si sono chiarite le caratteristiche considerate necessarie, ad esempio i metri da percorrere per arrivare a prendere una determinata zucca.
Per semplicità, è stato proposto inizialmente di trascurare la parte di percorso per riportare l'ultima zucca presa allo start, posticipando a un secondo momento la costruzione del modello completo, che considera cioè l'intero percorso per recuperare e portare allo start tutte le zucche prese.
Le caratteristiche necessarie per modellizzare matematicamente la situazione reale sono dunque risultate le seguenti:

– posizione della zucca rispetto le altre (prima, seconda, …);
– distanza della prima zucca dallo start;
– distanza fra una zucca e l'altra;
– tempo disponibile per la gara;
– metri da percorrere per arrivare a prendere una determinata zucca.

2.3.2 Lezione 6: individuazione di variabili matematiche da associare alle caratteristiche dell'attività; prime semplificazioni e schematizzazioni

Gli studenti dovevano determinare le entità matematiche da associare alle caratteristiche individuate nella lezione precedente e distinguerle in parametri e variabili.
Gli studenti hanno riconosciuto subito che il tempo disponibile per la gara fosse da considerarsi un parametro, mentre hanno presentato qualche difficoltà per le altre caratteristiche e soprattutto nell'associarvi delle variabili matematiche. La docente ha poi esplicitato formalmente la relazione fra le caratteristiche dell'attività e le variabili matematiche, associando:

– la variabile n alla zucca n-esima;
– il parametro d alla distanza della prima zucca dallo start;
– il parametro l alla distanza fra una zucca e l'altra;
– il parametro T al tempo disponibile per la gara;
– la variabile a_n ai metri percorsi per prendere la zucca n-esima.

Proseguendo con la realizzazione dell'attività, i ragazzi sono stati sollecitati a individuare una relazione matematica fra le variabili.
Per far questo, gli studenti sono stati invitati a realizzare un modello grafico che schematizzasse l'attività, rimostrando loro i disegni rappresentativi delle ruote idrauliche (Figure 4 e 5). A questo scopo è stato consigliato di individuare un'alternativa all'oggetto "zucca" che fosse equivalente ai fini di descrivere in termini schematici l'attività della gara. Alla maggior parte degli studenti è venuta in mente la "palla". Si è dunque stabilito di considerare palle al posto di zucche.

La relazione matematica fra le variabili è di estrema importanza nella costruzione di un modello matematico, e individuare tale relazione è una fase fondamentale del processo, che mette in evidenza tutte le potenzialità offerte dalla modellizzazione matematica.

Per far toccare con mano agli studenti l'importanza di individuare la relazione matematica fra le variabili, l'insegnante ha deciso di far prima calcolare empiricamente alcuni valori delle grandezze in gioco. Si è partiti da un esempio particolare, fissando i parametri d e l in modo che *empiricamente* gli studenti potessero ricavare i valori da attribuire alla variabile a_n per $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e capire se questi valori potessero rappresentare i termini di una sequenza e, in caso affermativo, individuare la sequenza relativa (per poi definire la possibile relazione matematica fra n e a_n che si potrà poi estendere al caso di d e l generici).

Ponendo $d = 3$ e $l = 1$, tutte le palle sono poste alla distanza di un metro l'una dall'altra e la prima è posta alla distanza di 3 metri dallo start.
Gli studenti, divisi in piccoli gruppi, sono stati invitati a realizzare a casa dei possibili modelli grafici. Tornati in classe, i ragazzi hanno proposto i loro modelli grafici schematizzanti l'attività (tutti molto simili, qualcuno contemplava più file in parallelo; altri non descrivevano le grandezze associate). Dopo averli discussi collettivamente è stato adottato uno schema semplice e funzionale (Figura 8).

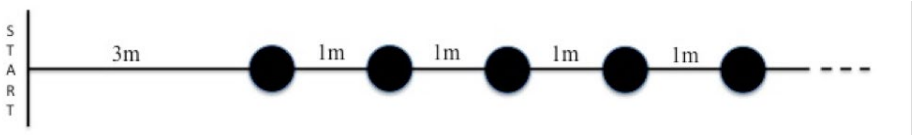


Figura 8. Schema della gara per l'esempio particolare.

2.3.3 Lezione 7: ricerca di modi empirici per determinare i valori delle variabili matematiche a partire da casi particolari; analisi della relativa inefficienza

Gli studenti sono stati invitati a calcolare empiricamente di volta in volta quanti metri i componenti della squadra vincitrice hanno dovuto percorrere per arrivare a prendere le prime palle (le prime cinque), ricordando che si prende una palla solo dopo che si è riportata indietro allo start la precedente. Sfruttando il disegno realizzato (Figura 8) gli studenti hanno facilmente trovato che: per arrivare a prendere la prima palla occorre percorrere tre metri; per prendere la seconda occorre prendere la prima, riportarla indietro allo start e poi avanzare fino alla seconda; per prendere la terza devono aver preso la seconda, riportata indietro e poi avanzato fino alla terza, e così via.
I ragazzi hanno inizialmente svolto i calcoli in modo informale, senza descriverne i passaggi. Sono stati poi invitati a riportare in dettaglio tutte le operazioni effettuate, per ottenere in termini matematici queste espressioni numeriche:

$a_1 = 3$ $\quad$ $a_2 = 3 + 3 + 4 = \mathbf{10}$ $\quad$ $a_3 = 10 + 4 + 5 = \mathbf{19}$
$a_4 = 19 + 5 + 6 = \mathbf{30}$ $\quad$ $a_5 = 30 + 6 + 7 = \mathbf{43}$.

L'insegnante si è poi limitata a marcare i risultati delle espressioni proposte dagli studenti e a scrivere direttamente il numero di metri che occorre percorrere per prendere 6 palle, 7 palle aggiungendoli ai risultati precedenti:

$a_6 = \mathbf{58}$ $\quad$ $a_7 = \mathbf{75}$.

Quindi ha domandato agli studenti come potesse aver calcolato così rapidamente questi valori e se loro fossero in grado di calcolare i metri necessari per prendere l'ottava e la nona palla in modo rapido. Gli studenti inizialmente sono rimasti perplessi. Dopo diversi minuti uno studente è intervenuto dicendo il valore (corretto) $a_8 = \mathbf{94}$, mentre un altro studente ha subito fatto una controproposta: $a_6 = \mathbf{57}$, $a_7 = \mathbf{73}$ e ha ipotizzato $a_8 = \mathbf{90}$.

La docente ha chiesto al secondo studente di esplicitare il suo ragionamento; ecco la risposta: «Si passa da un termine al successivo aumentando di uno le decine e ponendo come unità la somma delle cifre del termine precedente, se maggiore di 9 riconsidera la somma del numero ottenuto per le unità e aumenta ancora di uno le decine».
È stato proposto, a questo punto, di verificare quale dei due studenti avesse dato la risposta corretta rifacendo i calcoli come per i primi termini.
Gli studenti hanno quindi verificato che fosse corretta la proposta del primo. Alla richiesta di spiegazioni, alcuni studenti sono rimasti perplessi, altri invece hanno notato che la differenza di metri per prendere una zucca e quella precedente aumentava ogni volta di due:

$$a_2 - a_1 = 7 \qquad a_3 - a_2 = 9 \qquad a_4 - a_3 = 11 \qquad a_5 - a_4 = 13$$

e correttamente hanno determinato: $a_8 = \mathbf{94}$ e $a_9 = \mathbf{115}$.
A questo punto si è arrivati collettivamente a capire che la sequenza numerica trovata non era casuale, ma guidata da una legge precisa espressa da molti studenti con queste parole: *la differenza fra due risultati successivi di volta in volta è incrementata di due*.
Gli studenti sono stati invitati a descrivere in termini matematici la legge che determina la sequenza individuata. L'insegnante ha fatto solo notare che si trattava di una successione definita in modo ricorsivo: il suo *n*-esimo termine è calcolato come funzione di alcuni dei precedenti, avendo posto delle condizioni iniziali per i primi termini. Ha poi chiesto di formalizzare la regola della sequenza individuata mediante una formula ricorsiva che esprimesse il termine a_n come funzione dei due termini precedenti:

$$a_\mathrm{n} = f\,(a_{n-1}, a_{n-2})$$

poste le condizioni iniziali per i primi due termini $a_1 = 3$ e $a_2 = 10$.
Gli studenti, divisi in piccoli gruppi di lavoro, hanno cercato di determinare la funzione f, partendo dal descrivere in termini matematici quanto detto a parole, iniziando dalla differenza di metri percorsi rispettivamente per prendere la terza e la seconda palla. La maggior parte dei gruppi ha iniziato a scrivere: $a_3 - a_2 = (a_2 - a_1) + 2$. È stato loro ricordato che avrebbero dovuto calcolare i metri percorsi per prendere una determinata palla, nel modo più generico possibile e che le espressioni scritte sono espressioni algebriche per cui valgono le consuete regole algebriche.
I vari gruppi dopo esser arrivati a una scrittura di passaggio di questo tipo:

$$a_3 = a_2 + (a_2 - a_1) + 2$$

hanno determinato l'espressione seguente:

$$a_n = a_{n-1} + [(a_{n-1} - a_{n-2}) + 2] = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2.$$

Gli studenti, in seguito, sono riusciti spontaneamente a calcolare in modo rapido altri termini della successione. A questo punto si è passati ad analizzare l'efficienza dei metodi utilizzati. L'insegnante ha invitato gli studenti a riflettere su come sia comunque lungo e laborioso calcolare i metri percorsi per prendere per esempio 40 palle, dato che i metri percorsi al passo *n*-esimo dipendono dai metri percorsi al passo (n – 1)-esimo e (n – 2)-esimo. Tramite una breve discussione collettiva, gli stessi studenti hanno concluso che i metri percorsi per cogliere sequenzialmente le varie palle formano una successione numerica e utilizzare una formula ricorsiva che la rappresenti non costituisce un metodo matematico efficiente per calcolare i metri percorsi nel caso di un numero di palle raccolte anche solo maggiore di qualche decina, caso che corrisponde alla situazione reale che si vuole descrivere.

2.3.4 Lezione 8: ricerca di una relazione diretta fra le variabili matematiche

In questa lezione si è proposto agli studenti, divisi in gruppi, di trovare la relazione diretta fra a_n ed n, necessaria per svincolarsi dall'idea di successione ricorsiva, in modo da poter poi generalizzare la costruzione del modello.
Alcuni gruppi sono partiti dalla formula ricorsiva e hanno provato ad applicarla per $n = 3$. Hanno cercato di ricavare da quest'applicazione una regola generale ma non sono riusciti comunque a svincolarsi da una formula ricorsiva e quando sono stati invitati a verificarla nel caso di $n = 4$ (qualcuno l'ha verificata autonomamente) hanno capito che non era la relazione cercata. In pratica, da $a_1 = 3$, $a_2 = 10$ e $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$, hanno messo in evidenza che $a_3 = \mathbf{2} \cdot 10 - \mathbf{3} + 2$ da cui hanno ipotizzato la relazione $a_n = \mathbf{(n-1)} \cdot a_{n-1} - \mathbf{n} + 2$ che è sempre una formula ricorsiva.

Altri gruppi di studenti sono partiti dal cercare di generalizzare i calcoli empirici effettuati inizialmente per individuare i metri da percorrere per cogliere le prime palle:

$a_3 = \mathbf{5} \cdot 3 + 4$	con $\mathbf{5} = \mathbf{3} \cdot 2 - 1$ e $\mathbf{4} = \mathbf{3} + 1$
$a_4 = \mathbf{7} \cdot 3 + 4 + 2 + 3 = 7 \cdot 3 + 4 + \mathbf{5}$	con $\mathbf{7} = \mathbf{4} \cdot 2 - 1$ e $\mathbf{5} = \mathbf{4} + 1$

da cui hanno ipotizzato che $a_n = \mathbf{(2n-1)} \cdot 3 + \mathbf{(n+1)}$ salvo poi accorgersi che andava bene per a_3 ma che per a_4 mancava il termine $(+\,n)$.

2.3.5 Lezione 9: definizione della relazione finale confacente alla situazione reale che si vuole descrivere con il modello

Dopo aver lasciato del tempo a casa per effettuare qualche tentativo, solo un gruppo (di competenze eterogenee ma composto da due studenti con competenze avanzate) ha pensato di considerare la relazione cercata come somma di due espressioni, ciascuna corrispondente a una parte del moto.
La prima espressione corrisponde ai metri percorsi solo per ripetere la distanza dallo start alla prima palla: si tratta di 3 metri nel nostro caso, ripetuti per $2n$ volte, meno i 3 metri per riportare allo start la palla n-esima; si ricorda che la docente ha suggerito di conteggiare inizialmente solo i metri percorsi per arrivare a prenderla. Si individua così l'espressione: $3(2n-1)$.
La seconda espressione corrisponde ai metri percorsi ripetutamente dalla prima palla ad ogni palla successiva, fino alla palla n-esima: 1 metro dalla prima palla alla seconda palla (avanti e indietro), 2 metri dalla prima palla alla terza palla (avanti e indietro) e così via. Si ricava quindi l'espressione:

$$1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + (n-3) + (n-3) + (n-2) + (n-2) + (n-1)$$

che, addizionando il primo termine con il penultimo, il secondo con il terzultimo ecc., risulta un'addizione ripetuta di $(n-1)$ metri per $(n-1)$ volte:

$$[1 + (n-2)] + [1 + (n-2)] + \ldots + (n-1) = (n-1)^2.$$

Gli studenti hanno così presentato in classe la relazione corretta dopo averla verificata per svariati casi:

$$a_n = 3(2n-1) + (n-1)^2 \quad \text{ossia} \quad a_n = n^2 + 4n - 2.$$

La relazione è molto semplice ed esprimibile tramite un polinomio di secondo grado.
Prima di richiamare nuovamente l'attenzione sul gioco competitivo che si vuole rappresentare, l'insegnante ha chiesto a ogni studente della classe di controllare la validità della relazione finale, sia verificandola per svariati valori di n, sia dal punto di vista del procedimento utilizzato per definirla.

Il modello matematico individuato è utile per calcolare la velocità media della squadra vincitrice a partire dal numero di zucche, schematizzate come palle nel modello, che questa squadra ha preso. Però

per individuare la relazione si è semplificata la situazione reale, fissando la distanza della prima zucca dalla posizione di start a 3 metri. La docente ha quindi chiesto agli studenti di provare a estenderla al caso d qualsiasi (caso semi-generico) costruendo lo schema grafico relativo.
L'estensione al caso di d qualsiasi (**Figura 9**), non ha comportato particolari difficoltà:

$$a_n = d\,(2n - 1) + (n - 1)^2 \quad \text{ossia} \quad a_n = n^2 - 2\,(1 - d)\,n + 1 - d.$$

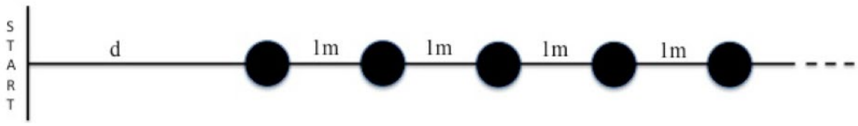


Figura 9. Schema gara semi-generico.

Un'altra semplificazione effettuata nell'approccio al modello è stata quella di calcolare i metri percorsi per arrivare a cogliere l'ultima palla, non includendo quindi quelli per riportarla allo start. Gli studenti, autonomamente, non hanno avuto difficoltà a trovare una relazione finale fra i metri effettivamente percorsi da una squadra vincitrice che abbia portato n palle allo start, il numero di palle prese e la distanza parametrica d della prima palla dallo start. Hanno dovuto semplicemente aggiungere alla relazione i metri da percorre per riportare la palla n-esima allo start, considerando che ciascuna è posta a distanza di un metro dalla successiva e che le palle precedenti l'ennesima sono $(n - 1)$, dunque $(n - 1)$ metri per tornare indietro a cui sommare d, dunque: $n - 1 + d$. Si è pertanto arrivati a definire la relazione finale:

$$a_n = n^2 - 2\,(1 - d)\,n + 1 - d + n - 1 + d \quad \text{o equivalentemente} \quad a_n = n^2 - n\,(1 - 2d).$$

Se si sta lavorando con una classe brillante o se si vogliono stimolare gli studenti con competenze più avanzate, si può studiare il caso in cui anche la distanza fra le palle sia un numero qualsiasi di metri l (caso generico) fissato a priori uguale per tutte (**Figura 10**).

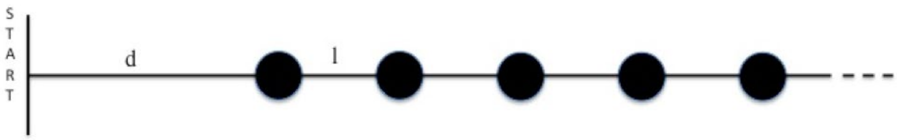


Figura 10. Schema gara caso generico.

In questa sperimentazione è stato accennato alla possibilità del caso generico ma non è stato affrontato.

2.4 Fase conclusiva

2.4.1 Analisi del modello matematico generato

Dopo aver determinato la relazione che esprime i metri percorsi in funzione del numero di palle prese, gli studenti sono stati invitati a soffermarsi ad analizzare il modello generato. Questa fase è stata guidata principalmente dall'insegnante, chiedendo la collaborazione degli studenti per arrivare a certe conclusioni una volta chiarite le premesse.
È stato ritenuto importante chiedere agli studenti di inquadrare la relazione nell'ambito del gioco competitivo che si è preso in esame all'inizio dell'esperienza didattica. Tale relazione è essenziale per calcolare la velocità media sostenuta da una squadra, conoscendo il parametro T, tempo di gara. Essenziale visto che il numero di zucche prese da ciascuna squadra vincitrice è sempre elevato e quindi altri metodi risulterebbero troppo onerosi nei calcoli. La stessa relazione può permettere, viceversa, di

calcolare altrettanto rapidamente il numero di zucche/palle prese da chi ha percorso un certo numero di metri come risoluzione di una semplice equazione di secondo grado.

La possibilità di generalizzare la relazione rendendola valida per qualunque valore dei parametri d e l rende il modello generato flessibile, valido per tutte le possibili combinazioni di valori dei due parametri, rappresentanti altrettante situazioni reali. Riflettere su questa caratteristica può essere un'occasione per accennare alla struttura degli algoritmi dei programmi informatici alla base delle applicazioni che quotidianamente utilizziamo.

Nell'analizzare il modello costruito si è ritenuto importante far riflettere gli studenti sulla sua genesi, sui passaggi che hanno determinato proprio l'esigenza di individuarlo. Per gli studenti è stato anche un modo per ripercorrere le fasi del lavoro svolto e per interiorizzare meglio il significato stesso dell'esperienza. Per l'insegnante, invece, si è trattato della possibilità di valutare il successo o meno dell'attività didattica, quanto sia stata significativa dal punto di vista dell'apprendimento relativo e delle eventuali riflessioni che è riuscita a generare.

2.4.2 Rielaborazione verbale strutturale dell'esperienza

La rielaborazione è avvenuta in due fasi: la prima con modalità individuale orale, così da esercitare la comunicazione matematica e l'utilizzo di termini tecnici, anche suddividendo l'intera esperienza nelle sue fasi e facendole rielaborare da studenti diversi. La seconda modalità è stata scritta, schematica, attraverso un diagramma di flusso che è stato realizzato in piccoli gruppi (in modo che gli studenti condividessero quanto appreso e prestassero continuamente attenzione sia alle dinamiche interpersonali, sia al prodotto del lavoro).

Nelle rielaborazioni orali è emersa qualche difficoltà a utilizzare termini tecnici, ma in generale gli studenti sono riusciti a dare la giusta importanza alla necessità di semplificare la situazione reale per studiarla in termini matematici e all'efficacia di ricorrere a un modello matematico rappresentativo rispetto ad altri metodi di studio. Non molti invece hanno evidenziato personalmente l'analisi delle caratteristiche della situazione, ma spesso si sono limitati a citare la necessità di considerare le caratteristiche essenziali per poi trasformarle in variabili matematiche.

Si riporta di seguito il prodotto scritto finale di un gruppo (**Figura 11**). Nel corso della realizzazione gli studenti hanno chiesto varie conferme all'insegnante e, in caso di risposta negativa, si è suggerito di rivedere bene i loro appunti. L'imprecisione più frequente è stata di saltare almeno un passaggio, soprattutto l'analisi delle caratteristiche della situazione reale.

Inoltre, come si vede dal diagramma riportato (**Figura 11**), probabilmente per i termini di fatto utilizzati durante tutta l'esperienza, nonostante scrivano che «le zucche diventano palle» poi citano solo le zucche.

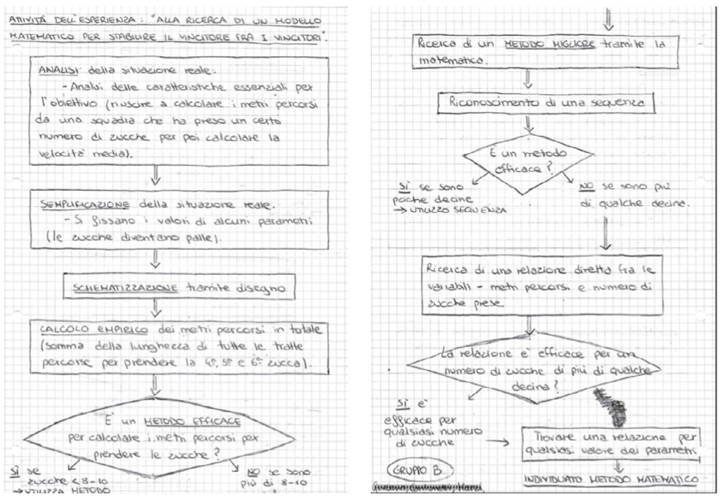


Figura 11. Schema riassuntivo dell'esperienza: prodotto finale di un gruppo di studenti.

2.5 Commento generale dell'insegnante sui risultati percepiti

Le ultime due esperienze realizzate con queste premesse sono state svolte durante l'anno scolastico 2018-2019. In particolare, in una classe seconda (Allegato 2) e in una classe quarta del liceo scientifico, con risultati soddisfacenti.
La maggior parte degli studenti è riuscita a produrre in maniera autonoma quanto necessario per svolgere tutte le fasi dell'esperienza, dimostrando soprattutto una rielaborazione finale corretta.
In questa sperimentazione di costruzione di un modello matematico descrittivo di una situazione reale, l'insegnante ha dovuto guidare le relative fasi, ma gli studenti hanno prodotto in modo autonomo le schematizzazioni grafiche relative al gioco competitivo e soprattutto la relazione finale fra le variabili matematiche e i parametri associati alle caratteristiche fisiche della situazione reale. Una volta descritto il modello matematico (dai gruppi che l'hanno individuato a quelli che non sono riusciti a determinarlo) anche la relazione finale è stata comunque compresa da tutti.
In particolare, per la classe quarta, dall'analisi delle relazioni finali orali individuali e scritte di gruppo, e da alcune esercitazioni successive sulle sequenze, successioni ricorsive, funzioni parametriche e modelli matematici, effettuate dopo l'esperienza didattica descritta, i contenuti e le competenze disciplinari sembrano risultare per lo più acquisite dalla maggior parte degli studenti. Questa considerazione nasce dall'esito della correzione degli esercizi assegnati per casa o svolti in classe.
In particolare, per le sequenze numeriche e le funzioni parametriche l'insegnante ha riscontrato un livello di correttezza maggiore rispetto agli usuali risultati emersi nelle attività didattiche precedenti e soprattutto nella stessa classe prima dell'esperienza. Qualche esitazione sembra permanere a riguardo delle formule ricorsive.

3 Conclusioni

Superato ormai il primo ventennio del 2000, considerato l'enorme sviluppo e utilizzo dei modelli matematici in svariati campi del sapere umano, e considerato quanto contemplato dalle Indicazioni Nazionali, si potrebbe auspicare che la loro esplorazione entri definitivamente a far parte del bagaglio culturale degli studenti alla fine del loro percorso scolastico.
L'esempio di esperienza didattica descritto nell'articolo vuole rappresentare uno dei tanti possibili modi, efficaci e non eccessivamente complessi, di introdurre i modelli matematici e di far intuire agli studenti la loro *efficienza* e *importanza*. Le fasi introduttive dell'esperienza potrebbero costituire un ulteriore spunto di riflessione su quali requisiti di base gli studenti debbano possedere prima di affrontare il concetto di modellizzazione matematica. Inoltre, l'esperienza di costruire un modello matematico, per quanto semplice, se avviene prima di affrontare modelli precostituiti probabilmente creerà un inizio di familiarità che renderà meno meccanico e fine a sé stesso l'utilizzo successivo di modelli precostituiti.
La validità dell'attività didattica descritta può essere al momento dedotta dai risultati percepiti dall'insegnante nelle ultime sperimentazioni effettuate in licei scientifici (par. 2.5). Probabilmente l'esperienza potrebbe dare risultati migliori, se si proponesse prima qualche semplice esempio di costruzione di un modello. Ad esempio, si potrebbe utilizzare come premessa all'esperienza quanto riportato nell'Allegato 1, che evidenzia come un modello matematico ricerchi sempre un legame funzionale fra le variabili e non sia interessato a esplicitare risultati di calcoli particolari, validi solo per determinati valori dei dati. Per quanto riguarda l'introduzione teorica, potrebbe essere più efficace effettuarla in chiusura dell'attività, per formalizzare e generalizzare quanto appreso durante l'esperienza. Il concetto di modello matematico, quindi, verrebbe formalizzato dopo che gli studenti hanno avuto la possibilità di sperimentarne un esempio nelle varie fasi dell'attività stessa. Si potrebbe chiedere loro di formulare una definizione formale da assegnare ai modelli matematici e poi confrontare le loro enunciazioni con le definizioni storiche. Probabilmente l'attenzione in classe sarebbe più viva e gli

studenti potrebbero più facilmente interiorizzare la maggior parte delle informazioni fornite.
Inoltre, nei tentativi di trovare la relazione finale rappresentativa del modello, gli studenti sono stati fuorviati dal cercare di utilizzare la formula ricorsiva dedotta in precedenza. In questo caso particolare sarebbe stato più semplice non tenerne conto. L'idea di evidenziare la formula ricorsiva, dopo aver individuato la sequenza, nasce da un'esigenza di completezza. Anche in questo caso però forse sarebbe meglio svolgere questo passaggio dopo aver trovato la relazione finale.
Questa esperienza, pensata per introdurre la modellizzazione matematica nella scuola secondaria di secondo grado, risulta guidata in varie parti dall'insegnante anche se, con il raffinamento della proposta da parte dell'insegnante nel corso degli anni, gli studenti sono riusciti a svolgere autonomamente dei passi importanti (come individuare la relazione finale fra le grandezze rappresentative della situazione, analizzare le suddette grandezze, schematizzare e semplificare la situazione). L'esperienza didattica potrebbe proseguire con la stessa classe, proponendo altri esempi di costruzione di un modello matematico, diminuendo di volta in volta la guida dell'insegnante.
Rimane da sperimentare se sia più efficace cercare prima uno schema semplificativo nel caso generico e poi assegnare valori ai parametri, per trovare in un primo momento in modo più facile una relazione tra le variabili, e se sia meglio schematizzare la situazione reale prima di definire le caratteristiche essenziali in modo che la semplificazione della situazione sia facilitata dai tentativi di realizzazione dello schema grafico. La seconda proposta potrebbe essere efficace per definire meglio le caratteristiche essenziali.
Un altro punto aperto è come formare i gruppi nei vari lavori: gruppi omogenei per livello di competenze in modo da permettere a tutti i componenti del gruppo di rispettare più o meno i propri tempi di riflessione, o gruppi eterogenei in modo da stimolare la collaborazione tra studenti con competenze di livello differente, inducendoli a trarre giovamento dalla situazione sia per esplicitare le proprie difficoltà sia per chiarire le proprie strategie.
A posteriori, sarebbe stato interessante confrontare gli schemi riassuntivi dell'esperienza, prodotti finali dei vari gruppi di studenti, eventualmente in modalità collettiva; spesso tali schemi risultano incompleti, ma dalla loro unione e confronto si potrebbe ottenere una relazione schematica esaustiva dell'attività, ricca anche di spunti di riflessione.

Sarebbe interessante esaminare ulteriori risultati, in altri tipi di scuole e di realtà, e confrontare eventualmente altri metodi aggiuntivi e/o sostitutivi. Al momento si ha a disposizione solo quanto svolto successivamente in un'altra classe quarta, sempre liceo scientifico, di una scuola sita in una grande periferia. In particolare, uno studente con competenze avanzate, dopo l'individuazione della prima sequenza numerica, ha ricavato (in un pomeriggio a casa) direttamente la relazione generale fra i metri percorsi (indicati questa volta con z_n, scelta della classe) e il numero di zucche prese, considerando qualsiasi distanza l fra una zucca e la successiva e qualsiasi distanza d fra la prima zucca e lo start. Il procedimento utilizzato, riportato in **Figura 12**, è interessante e originale.

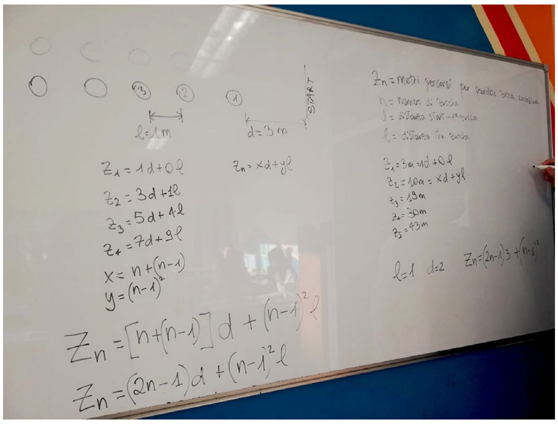


Figura 12. Relazione finale caso generico.

La determinazione di sequenze, di formule ricorsive durante lo svolgimento della costruzione del modello rappresenta un'occasione per evidenziare come la matematica offra spesso diversi modi per arrivare a determinare lo stesso risultato, tutti validi, logicamente corretti, seppur diversi dal punto di vista dell'efficienza. L'*ottimizzazione* che scaturisce proprio dalla scelta risolutiva basata sul loro confronto potrebbe essere uno spunto di riflessione e ampliamento dei concetti trattati.
L'esempio, modulare nella sua difficoltà, che contempla un particolare utilizzo di grandezze parametriche, apre una visione, oltre che sui modelli matematici, anche sulla struttura degli algoritmi dei programmi informatici alla base di applicazioni che quotidianamente utilizziamo.
L'esperienza didattica presentata nell'articolo potrebbe dunque essere utile anche per ampliare l'orizzonte matematico degli studenti.

Bibliografia

Accademia dei Lincei. (2019). *La genesi dei modelli: teoria, simulazioni e dati*. https://sites.google.com/view/modellilincei2019/

Bergamini, M., Barozzi, G., & Trifone, A. (2015). *Verso la seconda prova di matematica*. Zanichelli.

Bergamini, M., Barozzi, G., & Trifone, A. (2017). *5 Matematica.Blu 2.0*. Zanichelli.

Comincioli, V. (2004). *Problemi e Modelli matematici nelle Scienze Applicate*. Ambrosiana.

Israel, G. (2003). *La visione matematica della realtà*. Laterza.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Schema di regolamento recante *"Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali"*. http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Natalini, R. (2013). *I modelli matematici: dai laboratori di ricerca alle aule scolastiche*. http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/scuola/materiali-relativi-al-ix-convegno-corso-di-formazione-i-modelli-matematici-dai-laboratori-di-ricerca-alle-aule-scolastiche/

Sasso, L., & Zanone, C. (2019). *Colori della matematica. Edizione Blu*, Volume 5 α β. Petrini.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 140 - 158, DOI: 10.33683/ddm.21.10.7 OPEN ACCESS

Esperienze didattiche di modellizzazione emergente: uno sguardo ai processi di matematizzazione

Educational experiences of emergent modelling: a look at the mathematization processes

Simone Passarella
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", Università di Padova – Italia

simone.passarella@unipd.it

Sunto / In questo contributo si presentano due esperienze didattiche di modellizzazione emergente. Dopo aver chiarito i costrutti di modellizzazione emergente e matematizzazione, vengono proposte due esperienze didattiche. La prima, condotta in una classe seconda della scuola primaria, ha riguardato la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione; la seconda, in una classe quarta di una scuola secondaria di secondo grado, ha riguardato il calcolo del volume di solidi non noti. La descrizione di queste esperienze segue tre direzioni principali: l'esplicitazione dell'obiettivo di apprendimento; la scelta del problema nel contesto; l'analisi dei processi di matematizzazione orizzontale e verticale presenti nelle strategie risolutive degli studenti. Le esperienze descritte rappresentano un esempio significativo dell'importanza di proporre agli studenti attività di modellizzazione emergente, supportando gli studenti in un processo di reinvenzione di concetti matematici a partire dalle loro informali strategie risolutive.

Parole chiave: modellizzazione matematica; modellizzazione emergente; matematizzazione.

Abstract / In this contribution, two teaching experiences of emergent modelling are presented. After having clarified the constructs of emergent modelling and mathematization, two teaching experiences are proposed. The first one, carried out in a 2nd grade class of a primary school, concerned the distributive property of multiplication over addition; the second one, carried out in a 12th grade class of an upper secondary school, concerned the calculus of the volume of solids. The description of these experiences follows three main directions: the presentation of the learning objective; the choice of the problem in context; the analysis of horizontal and vertical mathematization processes in the students' solution strategies. The experiences described represent a significant example of the importance of proposing emergent modelling activities to students, supporting them in a process of re-invention of mathematical concepts starting from their informal solving strategies.

Keywords: mathematical modelling; emergent modelling; mathematization.

1 Introduzione

Lo sviluppo della capacità di utilizzare la matematica per comprendere e risolvere problemi in situazioni reali è considerato in tutto il mondo come uno dei principali obiettivi dell'educazione matematica (Eurydice, 2011; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2004, 2006, 2013, 2016). In ambito italiano, tale capacità è sottolineata nelle stesse Indicazioni Nazionali per il Primo Ciclo di Istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012) e nelle Indicazioni Nazionali per i Licei (MIUR, 2010), nelle quali viene indicato come la conoscenza matematica debba fornire strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare eventi della vita quotidiana. Lo studente, quindi, deve imparare ad analizzare situazioni reali traducendole in termini matematici e a scegliere opportune azioni da compiere in modo da produrre una soluzione efficace del problema. Tali competenze sono in linea con la strategia educativa in didattica della matematica della *modellizzazione matematica* (Kaiser, 2017). Modellizzare non significa solamente risolvere problemi reali, ma dar vita a un processo di matematizzazione e riflessione sulla matematica che porti alla costruzione di nuovi concetti e strumenti matematici (Passarella, 2021). Benché l'importanza della modellizzazione matematica sia ampiamente riconosciuta a livello nazionale e internazionale, nella pratica scolastica le attività di modellizzazione ricoprono ancora un ruolo marginale (Blum & Borromeo Ferri, 2009), anche a causa di una resistenza da parte degli insegnanti ad abbandonare modelli didattici tradizionali e di tipo prevalentemente trasmissivo (MIUR, 2018). Gli stessi insegnanti richiedono infatti maggior supporto, formazione e materiali, quali ad esempio prototipi di pratiche didattiche, al fine di realizzare nelle loro classi attività significative di modellizzazione matematica (Bonotto & Passarella, 2019).

Nel presente contributo si descrivono due esperienze didattiche di modellizzazione matematica nella prospettiva della modellizzazione emergente e con particolare attenzione ai processi di matematizzazione. Prima di presentare queste esperienze, si ripercorreranno i principali riferimenti teorici relativi alla modellizzazione e alla matematizzazione in didattica della matematica, al fine di chiarire e specificare il significato che questi termini ricoprono nel resto del lavoro.

In conclusione, di questa introduzione, si desidera specificare che in questo articolo con il termine *modello* si intende un sistema di strutture concettuali usate per interpretare e descrivere matematicamente una certa situazione (Richardson, 2004).

2 Modellizzazione e matematizzazione

2.1 Modellizzazione matematica

Storicamente lo sviluppo della modellizzazione matematica e del suo insegnamento è stato influenzato da due principali prospettive (Kaiser-Messner, 1986): la prospettiva *pragmatica* e quella *scientifico-umanistica*, le quali, benché condividano l'importanza di introdurre aspetti del mondo reale nell'insegnamento della matematica, presentano significative differenze. Secondo la prospettiva pragmatica, gli studenti dovrebbero imparare ad applicare la matematica per risolvere problemi del mondo reale (Pollak, 1968, 1969, 1979). Di conseguenza, la modellizzazione è vista come un processo ciclico dal mondo reale a quello della matematica e viceversa (Pollak, 1979), sottolineando l'interazione reciproca tra realtà e matematica applicata (Kaiser, 2017). La prospettiva *scientifico-umanistica*, invece, si sviluppa attorno a due direttrici principali: (i) la prima considera la matematica come una scienza, cioè una disciplina caratterizzata da strutture formali e non formali; (ii) la seconda si concentra sull'ideale educativo di enfatizzare l'abilità degli studenti nel creare relazioni tra la matematica ed il mondo reale. Di conseguenza, in questa prospettiva il fine della modellizzazione è quello di supportare gli studenti in processi di matematizzazione (si veda il par. 2.2). A partire da queste due prime prospettive sulla modellizzazione matematica, si sono sviluppati diversi approcci, differenziati per scopi, sfondi epistemologici, e relazioni rispetto alle prospettive iniziali (Kaiser & Sriraman, 2006). Tra questi approcci ricordiamo quello della *modellizzazione emergente* (*emergent modelling*), nella quale gli elementi fondanti sono gli esempi dal mondo reale e le loro relazioni con la matematica stessa (De Lange, 1987; Freudenthal, 1991; Treffers, 1987). La modellizzazione emergente è stata teorizzata inizialmente da Gravemeijer (1999). La teoria di riferimento è quella della Realistic Mathematics Education (RME), nella quale i modelli rappresentano uno strumento per supportare un processo di re-invenzione (Freudenthal, 1991) della matematica da parte degli studenti. Infatti, attività di modellizzazione vengono qui usate come veicoli per re-inventare piuttosto che applicare concetti matematici (Greer et al., 2007). Gli studenti, partendo da situazioni reali, iniziano a modellizzare le proprie strategie matematiche informali, giungendo a re-inventare concetti matematici e applicazioni di cui hanno bisogno. Questi concetti sono successivamente formalizzati in termini matematici e generalizzati ad altre situazioni. Il ruolo del modello, quindi, cambia durante il processo di modellizzazione, da specifico per la situazione reale di partenza a generale. La modellizzazione emergente è quindi un processo dinamico a lungo termine nel quale si realizza un passaggio da un modello delle strategie matematiche informali situate degli studenti a un modello per un ragionamento matematico formale e generale (Gravemeijer & Doorman, 1999). Questo passaggio *modello di-modello per* ha come naturale conseguenza la costruzione di una nuova realtà matematica formale (Streefland, 1985), condivisa e significativa per gli studenti. Si ricorda infine come in Gravemeijer (2020) vengano descritti alcuni punti chiave per la progettazione e la realizzazione di attività di modellizzazione emergente, tra i quali l'identificazione dell'obiettivo di apprendimento (*identify the learning goal*) e l'identificazione di contesti di partenza (*identify instructional starting points*). Infatti, uno dei capisaldi della modellizzazione emergente è che il processo di modellizzazione ha inizio da un problema nel contesto che sia esperienzialmente significativo per gli studenti e ricco di stimoli matematici.

I diversi approcci alla modellizzazione matematica hanno dato vita a diverse connotazioni del processo di modellizzazione stesso, focalizzandosi maggiormente ora sulla soluzione del problema di partenza, ora sullo sviluppo di concetti matematici. Corrispondentemente, sono stati realizzati vari cicli di modellizzazione (per una panoramica dettagliata si veda Borromeo Ferri, 2006). Il ciclo di modellizzazione è un ciclo ideale esplicitato tramite diverse fasi che descrivono il processo di modellizzazione per risolvere problemi reali (Kaiser, 2017). Esso non è solamente uno strumento teorico, ma può essere utilizzato dagli studenti nel processo di apprendimento e dall'insegnante come strumento diagnostico (Borromeo Ferri, 2018). Riportiamo in Figura 1 il ciclo di modellizzazione realizzato da Kaiser e Stender (2013), nel quale le caratteristiche fondamentali sono le seguenti:

- la situazione reale di partenza, dopo essere stata compresa, viene semplificata e strutturata per costruire un modello reale della situazione stessa, facendo assunzioni, formulando ipotesi, e identificando dati e fattori rilevanti;
- il modello reale viene tradotto in termini matematici in un modello matematico (*matematizzazione*);
- a partire dal modello matematico realizzato segue una fase di lavoro con la matematica stessa per trovare dei risultati matematici come soluzione del problema;
- i risultati matematici ottenuti vengono interpretati come risultati reali, i quali a loro volta devono essere validati rispetto al contesto inziale. Da qui eventualmente può aver inizio un nuovo ciclo, totale o parziale.

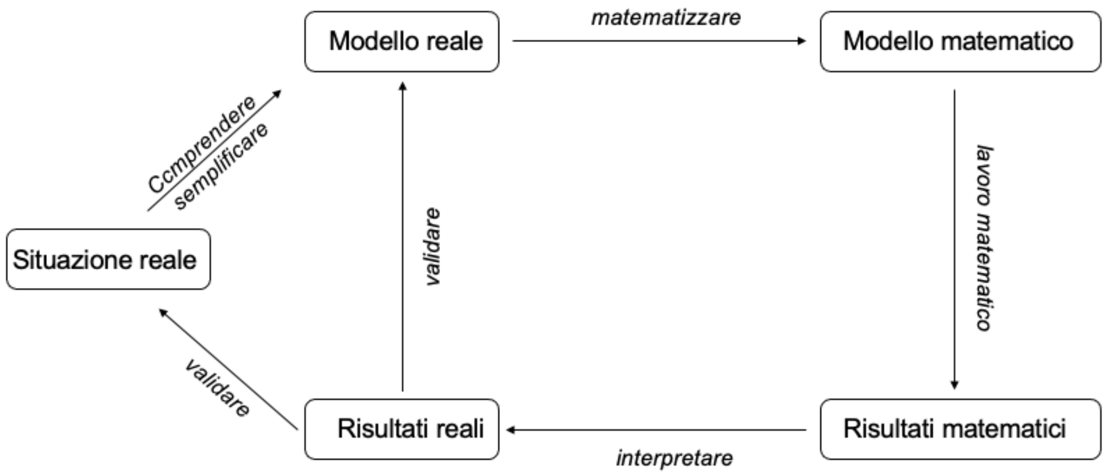


Figura 1. Ciclo di modellizzazione di Kaiser e Stender (2013).

2.2 Matematizzazione

Nel ciclo di modellizzazione riportato in **Figura 1**, il processo di matematizzazione viene considerato solo come una delle fasi che compongono l'intero processo di modellizzazione, e precisamente la fase di traduzione in termini matematici del modello reale della situazione di partenza. Tuttavia, in letteratura, con il termine matematizzazione ci si riferisce anche ad altri processi, che ricordiamo di seguito.

Una definizione di matematizzazione viene proposta da Jupri e Drijvers (2016), riferendosi a un'attività di organizzazione e analisi di una situazione reale con l'utilizzo di strumenti matematici. Tale definizione si rispecchia nel ciclo di matematizzazione (**Figura 2**) delineato in OECD (2004), ripreso e sottolineato in OECD (2013, 2016), e descritto ampiamente in Franchini et al. (2017). Tale ciclo in effetti rievoca il ciclo di modellizzazione presentato nel paragrafo precedente, anche se con alcune differenze terminologiche:

- il punto di partenza è un problema reale, qui chiamato *problema nel contesto*. A partire da questa situazione problema reale, tramite un processo di *formulazione* si estrapolano le informazioni necessarie per tradurre il problema nel contesto in un problema matematico;
- strategie risolutive note o elaborate nel corso del processo stesso vengono *utilizzate* per risolvere il problema matematico, giungendo a dei risultati matematici del problema;
- le soluzioni matematiche dapprima vengono *interpretate* in funzione del contesto reale, ed infine *valutate* come accettabili o meno in base alle condizioni reali poste dal problema.

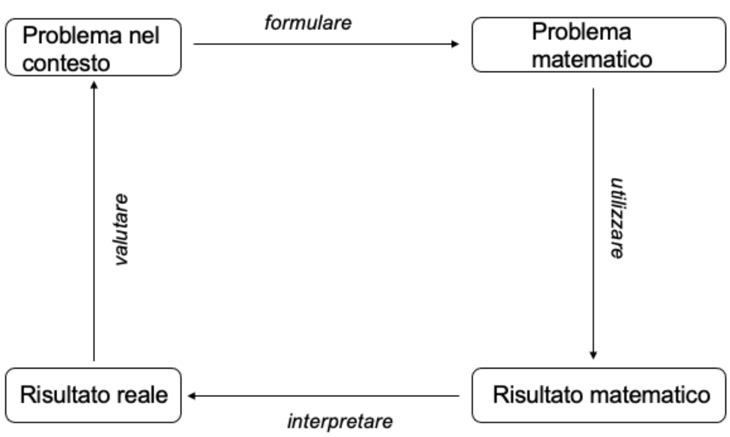


Figura 2. Ciclo di matematizzazione da OECD (2013).

Il ciclo di matematizzazione può avere diverse funzioni. Ad esempio, Franchini et al. (2017) hanno utilizzato tale ciclo per analizzare possibili difficoltà degli studenti nella comprensione di quesiti dalle Prove Standardizzate di Matematica in Canton Ticino, mostrandone così le potenzialità come un utile strumento diagnostico e di suggerimento di possibili interventi futuri.

La definizione precedente di matematizzazione, e il ciclo in Figura 2, possono essere ulteriormente specificati in termini di processi matematici. Infatti, la teoria della RME, già citata in precedenza, riguardo alle relazioni reciproche tra matematica e mondo reale descrive due tipi di matematizzazione: *matematizzazione orizzontale* e *matematizzazione verticale* (Treffers, 1987). Nella matematizzazione orizzontale gli studenti usano strumenti e oggetti matematici per organizzare e risolvere problemi situati nel mondo reale, rispecchiando il movimento dal mondo reale alla matematica e viceversa. La matematizzazione verticale, invece, rappresenta un movimento interno a un mondo specifico; si riferisce cioè a processi che avvengono all'interno del mondo matematico quando occorre riconoscere relazioni tra oggetti interni alla matematica, mobilitando o eventualmente re-inventando nuovi concetti o strategie (Freudenthal, 1991), oppure all'interno del mondo reale quando un certo dato o una certa soluzione vanno validati nel contesto reale in cui si opera. In relazione ai cicli di modellizzazione e matematizzazione presentati, quindi, i processi di matematizzazione orizzontale e verticale si riferiscono a specifiche fasi di tali cicli (Tabella 1).

	Ciclo di modellizzazione	Ciclo di matematizzazione
Matematizzazione orizzontale	Comprendere e semplificare Matematizzare Interpretare	Formulare Interpretare
Matematizzazione verticale	Lavoro matematico Validare	Utilizzare Valutare

Tabella 1. Matematizzazione orizzontale e verticale nelle fasi del ciclo di modellizzazione e del ciclo di matematizzazione.

2.3 Una visione di sintesi

Nei paragrafi precedenti si sono presentati i principali riferimenti teorici relativi alla modellizzazione matematica e alla matematizzazione, mostrando punti di similitudine e differenze, e sottolineando quei processi di matematizzazione orizzontale e verticale all'interno dei cicli di modellizzazione e matematizzazione (Tabella 1). In questo paragrafo si vuole dare una sintesi dei concetti presentati in precedenza, con lo scopo di specificare in quale modo i termini utilizzati nel resto di questo contributo siano stati considerati. Nello specifico in questo lavoro si adotterà la prospettiva della modellizzazione emergente (Gravemeijer, 1999), la quale come descritto in precedenza considera il processo di modellizzazione matematica come un processo di costruzione, o meglio re-invenzione, di concetti, strumenti, strategie matematiche a partire da contesti reali informali. Congiuntamente, si considererà il ciclo di modellizzazione emergente proposto in Figura 3. In particolare, con matematizzazione qui si intendono le due componenti di matematizzazione orizzontale e verticale, anch'esse evidenziate in Figura 3. Si precisa come nello schema proposto si sia deciso di inglobare le fasi di *validare* e *valutare* nel processo di matematizzazione orizzontale, essendo in stretta relazione con la fase precedente di interpretazione. Nel ciclo di modellizzazione emergente, che rappresenta una sintesi terminologica di quanto visto in precedenza, il punto fondamentale è il processo di matematizzazione verticale, rappresentato dalla fase di lavoro matematico. In particolare, in questa fase l'enfasi sta nel processo di re-invenzione (Freudenthal, 1991) da parte degli studenti di concetti matematici.

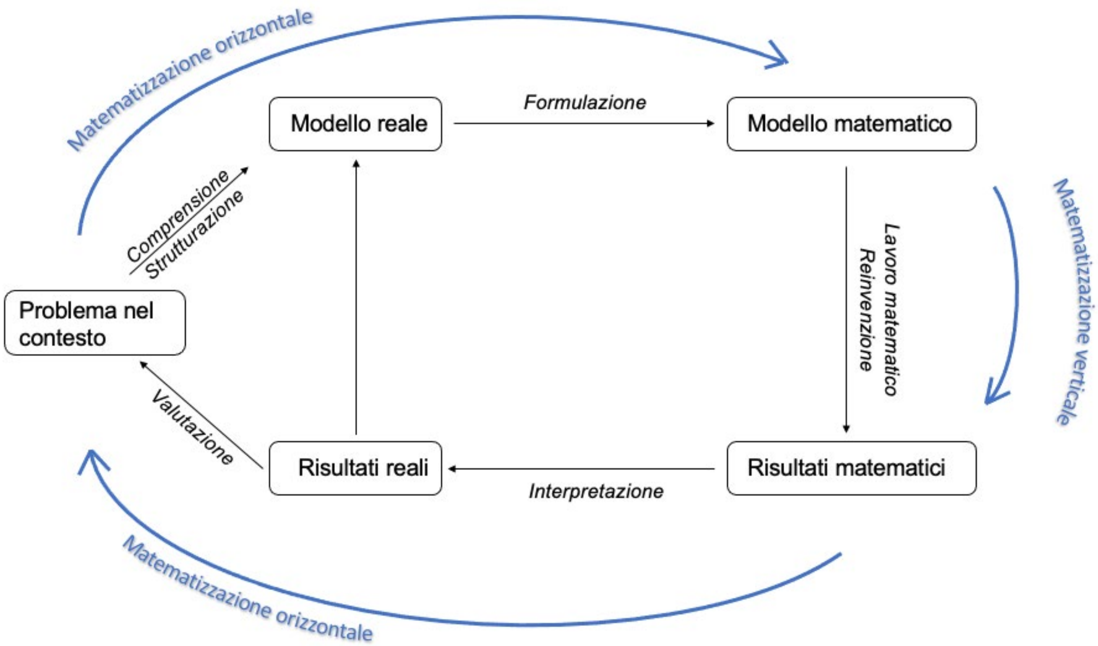


Figura 3. Ciclo di modellizzazione emergente.

Nelle esperienze presentate di seguito, al fine di identificare un contesto e problemi nel contesto per un'attività di modellizzazione emergente il cui scopo è quello di re-inventare un determinato concetto matematico, si adotterà l'euristica della *fenomenologia didattica* (*didactical phenomenology*) della RME. Secondo Freudenthal (1983), i concetti e oggetti matematici servono per organizzare fenomeni (*phainomena*), sia della vita reale che della matematica stessa (Bakker, 2004). La fenomenologia di un concetto matematico consiste nell'analisi di quel concetto in relazione ai fenomeni che organizza. Nello specifico, la fenomenologia didattica è lo studio di concetti (matematici) in relazione ai fenomeni con un interesse didattico. In questa prospettiva, la sfida è ricercare quei fenomeni che meglio sono organizzati dai concetti matematici che vogliamo che gli studenti apprendano, o meglio re-inventino. Nelle esperienze didattiche proposte l'individuazione di problemi nel contesto ha seguito una fenomenologia didattica, dove lo scopo è di trovare situazioni problema che possano rappresentare un punto di partenza per lo sviluppo di concetti o strumenti matematici che vogliamo che gli studenti sviluppino.

3 Esempi di esperienze didattiche

Si propongono di seguito due esperienze didattiche di modellizzazione emergente, realizzate una alla scuola primaria[1] e l'altra alla secondaria di secondo grado.[2] Tale scelta ha voluto mostrare come attività di modellizzazione emergente possano essere realizzate in diversi livelli scolastici, dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado, evidenziando come si possano attivare processi di matematizzazione orizzontale e verticale negli studenti. Entrambe le esperienze sono state progettate e realizzate dal ricercatore, autore di questo articolo, dopo un confronto con gli insegnanti titolari di

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

matematica. Gli stessi insegnanti hanno partecipato alla presentazione e alla gestione delle attività in classe rispondendo a eventuali dubbi o richieste di chiarimento degli studenti, e prendendo parte alla discussione finale. Le attività di modellizzazione emergente qui descritte sono state divise in tre fasi principali, che hanno richiesto per il loro svolgimento circa 8 ore suddivise in due settimane. Nella prima fase introduttiva, di circa 2 ore, agli studenti è stato dato il testo del problema che avrebbero dovuto risolvere, assieme ai relativi materiali. Il ricercatore con l'aiuto dell'insegnante di matematica ha letto assieme agli studenti il testo e i vari materiali, assicurandosi che gli studenti avessero compreso cosa avrebbero dovuto fare nelle lezioni successive. La seconda fase ha previsto un lavoro di gruppo in cui gli studenti hanno realizzato i loro modelli per risolvere il problema che era stato loro posto. Questa fase, centrale nell'attività di modellizzazione, ha richiesto 4 ore per il suo svolgimento. Il ricercatore e l'insegnante erano a disposizione per chiarire eventuali dubbi. L'ultima fase, di 2 ore, ha previsto la presentazione del proprio lavoro da parte di ogni gruppo alla classe. A questo è seguito un momento di discussione guidato dal ricercatore in cui si è fatto il punto sulle strategie proposte dagli studenti e sui concetti matematici emersi durante l'attività. Nell'esperienza realizzata alla scuola secondaria, infine, si è dedicato un momento finale alla riflessione individuale in forma scritta, in cui è stato chiesto agli studenti di ripercorrere l'intera attività svolta, di riportarne eventuali punti di forza o debolezza e dichiarare se avrebbero voluto ripetere o meno un'attività simile in futuro. Nella presentazione delle due esperienze didattiche, dopo aver esposto i rispettivi obiettivi di apprendimento e le situazioni problema, si porrà l'attenzione sui processi di matematizzazione orizzontale e verticale che tali situazioni hanno attivato negli studenti.

3.1 Un'esperienza di modellizzazione emergente nella scuola primaria

3.1.1 Obiettivo di apprendimento

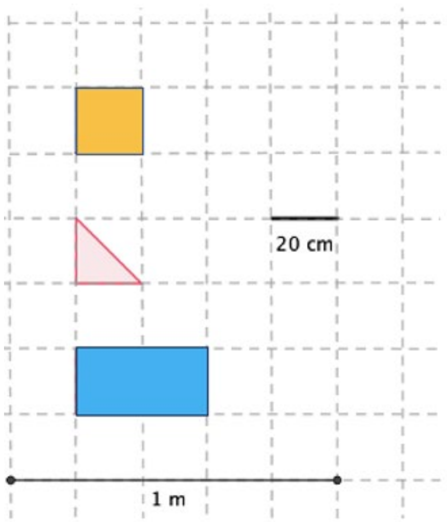
La prima esperienza didattica che si propone è stata presentata in dettaglio in Passarella (2021). Qui il focus sarà sulle fasi di matematizzazione orizzontale e verticale attivate negli studenti. L'esperienza didattica in questione è stata realizzata in una classe seconda primaria composta da 18 alunni. Al momento dell'esperienza didattica la classe stava lavorando sulla moltiplicazione. Nello specifico, l'insegnante aveva introdotto da circa due settimane la moltiplicazione come somma ripetuta. Tale nozione era chiara agli studenti al momento dell'attività di modellizzazione, fatto rilevato con un test iniziale, che però esula dallo scopo di questo contributo. In particolare, gli studenti sapevano effettuare operazioni tra numeri naturali a una cifra e moltiplicazioni con multipli di 10. L'obiettivo di apprendimento per questa attività di modellizzazione emergente è stato identificato nella proprietà distributiva (nel seguito P. D.) della moltiplicazione rispetto all'addizione: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, con a, b, c numeri naturali. Si ricorda brevemente come la P. D. sia fondamentale in algebra, per lo studio dei polinomi e spazi vettoriali, e caratterizzi le operazioni tra numeri interi, e per tale motivo sia importante introdurla sin dai primi anni della scuola primaria (Maffia & Mariotti, 2020).

3.1.2 Problema nel contesto

Partendo dalle conoscenze degli studenti sulla moltiplicazione tra numeri naturali, e seguendo l'approccio della fenomenologia didattica (si veda il par. 2.3), si è considerato uno specifico contesto e una serie di attività che guidassero gli studenti a re-inventare la P. D. A tal fine, si è deciso di creare un problema in cui gli studenti incontrassero la necessità di svolgere operazioni tra due numeri naturali, uno a una cifra e uno a due cifre. Infatti, se consideriamo ad esempio la moltiplicazione 25 × 4, dove il primo termine è un numero naturale a due cifre e il secondo a una cifra, un approccio per svolgere questa moltiplicazione potrebbe essere il seguente. Innanzitutto, 25 può essere scomposto come 20 + 5. Poi, si può moltiplicare 20 × 4 e 5 × 4. Nella prima moltiplicazione il termine 20 è un multiplo di 10 (20 = 2 × 10), e gli studenti al momento dell'attività sapevano come svolgere moltiplicazioni di questo tipo. La seconda moltiplicazione, 5 × 4, è tra numeri naturali a una cifra. Quindi, riassumendo 25 × 4 = (20 + 5) × 4 = (20 × 4) + (5 × 4), che è proprio la P. D. Al fine di tradurre queste prime ipotesi in concrete attività in classe, si è scelto un contesto che fosse vicino alla realtà degli studenti e che allo stesso tempo prevedesse il fatto che nella sua risoluzione fosse necessario svolgere moltiplicazioni come quella descritta. Dato che al momento dell'attività la scuola era in ristrutturazione, si è deciso di creare il seguente problema:

> Il Direttore della scuola ha deciso di ristrutturare la scuola. Gli studenti potranno realizzare la piastrellazione del pavimento della loro aula. Il pavimento della vostra classe è stato diviso in sei strisce uguali. Ogni gruppo di studenti può piastrellare una di queste strisce utilizzando tutte le tipologie di piastrelle disponibili. Vi chiedo di creare un poster dove realizzate la piastrellazione della striscia assegnata al vostro gruppo, specificando il costo totale per la sua realizzazione e spiegando il procedimento che avete seguito.

Assieme al problema è stata data agli studenti una lista di piastrelle con il relativo costo (Figura 4), e con il vincolo di dover utilizzare tutte le tipologie per progettare la loro piastrellazione. In questo modo, si è pensato che una possibile strategia risolutiva potesse essere la seguente: (i) raggruppare e contare quante piastrelle dello stesso tipo erano state utilizzate; (ii) calcolare il costo associato a ogni tipo di piastrella utilizzato; (iii) sommare i costi relativi a ogni tipo di piastrella per ottenere il costo totale della piastrellazione realizzata. In particolare, dato che agli studenti è stato chiesto di piastrellare un'intera striscia della classe utilizzando tutte le tipologie di piastrelle disponibili, a un certo punto si suppone che il numero di piastrelle di uno stesso tipo sia dato da un numero naturale a due cifre, che dovrà essere moltiplicato per un numero naturale a una cifra dato dal costo relativo a quella tipologia di piastrella.



piastrella	costo
Quadrata	6 euro
Triangolare	4 euro
Rettangolare	10 euro

Figura 4. Piastrelle che devono essere utilizzate dagli studenti e relativi costi.

3.1.3 Processi di matematizzazione orizzontale e verticale

Dopo un momento iniziale collettivo dedicato alla comprensione del problema, gli studenti sono stati divisi in sei gruppi dall'insegnante. Ad ogni gruppo è stato dato un poster con già disegnata in scala la striscia di cui avrebbero dovuto realizzare la piastrellazione (Figura 5). Si osservi che la striscia è stata suddivisa ulteriormente in quadrati 5 × 5, con l'idea di facilitare gli studenti inducendoli a concentrarsi su una porzione più piccola della striscia, la cui piastrellazione si sarebbe eventualmente potuta ripetere uguale. In realtà nessun gruppo ha ripetuto lo stesso schema, anzi in alcuni casi gli studenti hanno posizionato delle piastrelle rettangolari a cavallo della linea tratteggiata. In futuro, quindi, tale suddivisione potrebbe essere omessa.

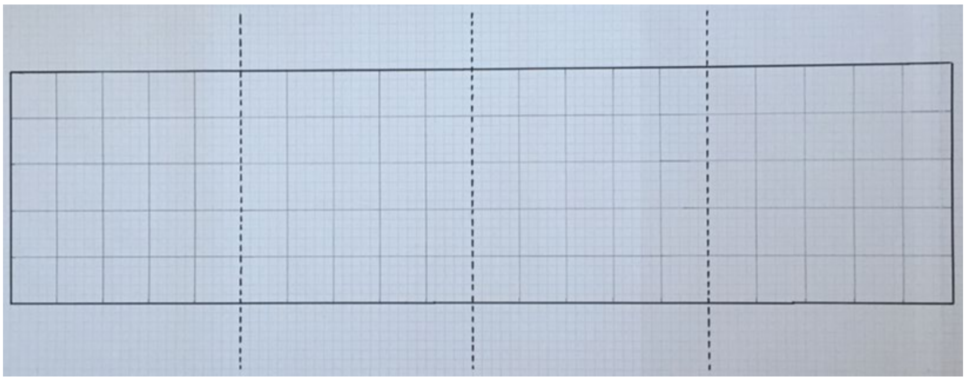


Figura 5. Poster dato a ogni gruppo di studenti.

Gli studenti si sono approcciati al problema in modi differenti: chi prima ha realizzato uno schema con tutte le piastrelle, chi ha creato dei prototipi di piastrelle e le ha riportate nel poster (**Figura 6**).

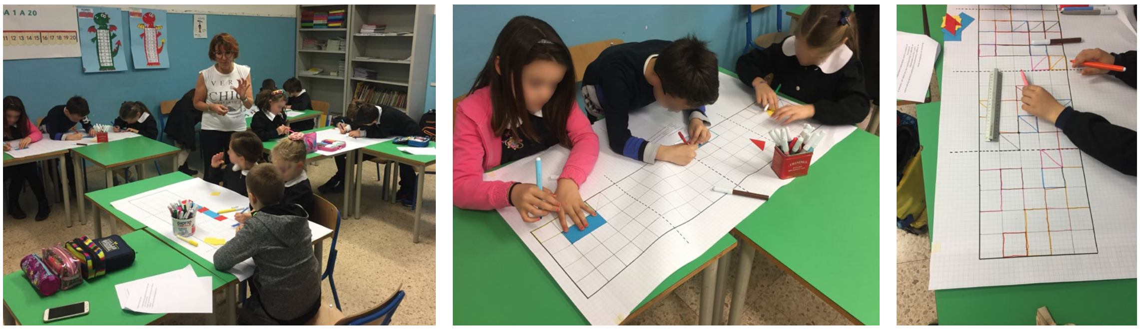


Figura 6. Studenti al lavoro.

Per risolvere il problema assegnato, gli studenti dei vari gruppi hanno sviluppato una strategia simile, e in accordo con le ipotesi formulate in fase di progettazione. Si riporta di seguito come esempio quanto realizzato da un gruppo. Il primo step è stato quello di contare il numero di piastrelle dello stesso tipo. In questo esempio gli studenti hanno utilizzato 50 piastrelle quadrate, 26 triangolari e 15 rettangolari. Successivamente, il numero di piastrelle dello stesso tipo è stato moltiplicato per il relativo costo, cioè nel nostro esempio: 50×6, 26×4, 15×10. Si nota come gli studenti siano così giunti a dover eseguire moltiplicazioni in cui uno dei due termini è un numero naturale a due cifre. In due casi (50×6 e 15×10) tale termine è dato da un multiplo di 10, che gli studenti già sapevano come trattare, ma nel restante caso (26×4) hanno dovuto sviluppare una nuova strategia. In particolare, uno degli studenti di questo gruppo ha suggerito di considerare il numero 26 come $20 + 6$, e successivamente moltiplicare 20×4 e 6×4, riconducendosi così a due moltiplicazioni note. Infine, sommare i due risultati ottenuti, giungendo quindi a una prima formulazione operativa informale della P. D. In **Figura 7** è riportata la strategia adottata dagli studenti di questo gruppo.

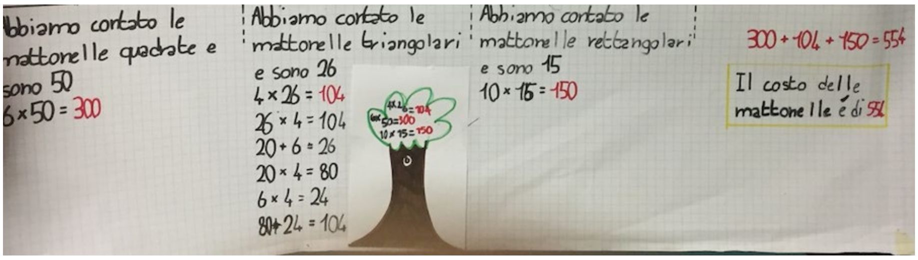


Figura 7. Strategia risolutiva realizzata da un gruppo di studenti.

Analizzando nel dettaglio la strategia sviluppata dagli studenti per risolvere il problema assegnato, si possono evidenziare chiaramente processi di matematizzazione sia orizzontale che verticale. Per quanto riguarda la matematizzazione orizzontale, questa è evidente inizialmente nelle fasi di *comprensione-strutturazione* del problema e di *formulazione* di un modello matematico. Dapprima gli studenti hanno realizzato un modello reale del problema, tramite una piastrellazione in termini di prototipi di piastrelle. Tale modello reale è stato realizzato dai diversi gruppi in maniera differente. Come mostrato in **Figura 6**, ad esempio, un gruppo ha costruito dei prototipi di piastrelle con dei cartoncini a forma di quadrato, triangolo e rettangolo. Tali prototipi sono stati utilizzati dagli studenti per ricoprire la striscia da piastrellare, riportandone il contorno. Dopo la realizzazione di un modello reale, che rappresenta la strutturazione del problema nel contesto di partenza, si è passati alla fase di *formulazione* di un modello matematico: i prototipi di piastrelle, infatti, sono stati interpretati in base alla loro forma, considerando quindi non più un pavimento piastrellato ma uno schema, o meglio un modello (matematico) costituito da diverse figure geometriche (quadrati, rettangoli e triangoli) che riempivano un rettangolo (la striscia). A questo punto ha inizio il processo di matematizzazione verticale, in cui gli studenti, lavorando con la matematica, hanno sviluppato una strategia risolutiva in due fasi: (i) contare le piastrelle dello stesso tipo, rappresentate da figure geometriche della stessa forma, e calcolarne il costo; (ii) sommare i risultati ottenuti per trovare il costo totale. In questa fase gli studenti sono stati in grado di re-inventare la P. D. a partire da una loro strategia risolutiva (la schematizzazione, ricostruita in fase di analisi, di tale strategia è presentata in **Figura 8**). Tuttavia, si può notare come la fase di *interpretazione* dei risultati matematici ottenuti non sia completa. Nell'esempio descritto, gli studenti danno come costo totale quello di 554, che manca dell'unità di misura. Gli studenti, quindi, arrivano a un risultato matematico che faticano a interpretare in maniera completa in relazione al contesto reale di partenza. In **Figura 9** è rappresentato il ciclo di modellizzazione per l'esempio descritto, che mette in evidenza i processi critici come quello dell'interpretazione dei risultati matematici in relazione al contesto reale di partenza che, come detto, non risulta completo.

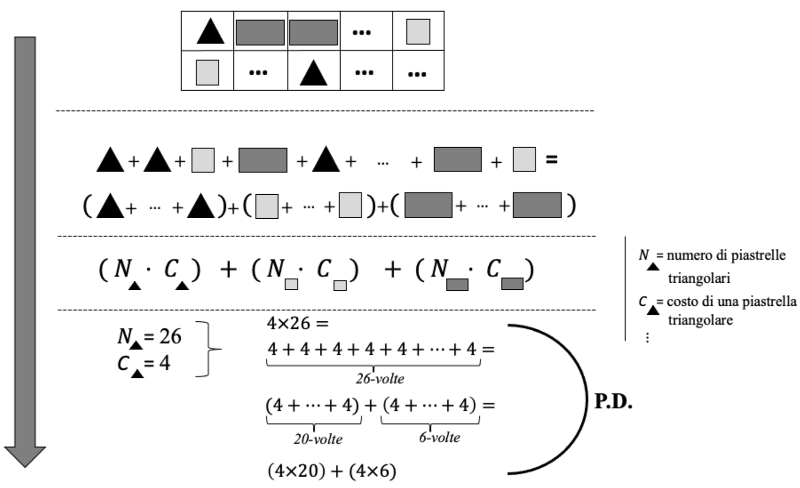


Figura 8. Processo di matematizzazione verticale.

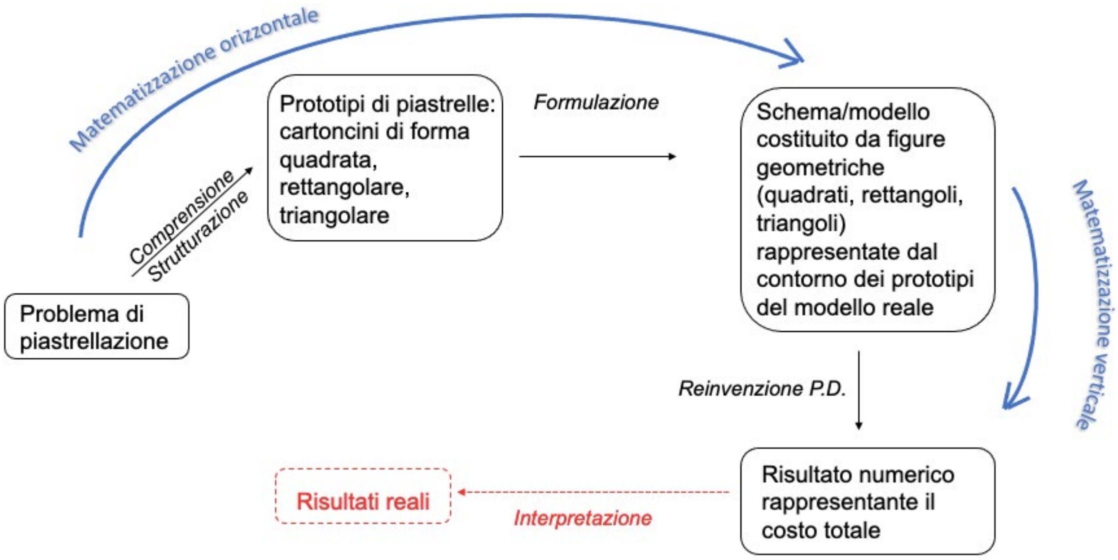


Figura 9. Ciclo di modellizzazione emergente relativo a una strategia utilizzata dagli studenti.

In conclusione, il contesto e il problema considerati hanno favorito la modellizzazione emergente, scandita al suo interno da processi di matematizzazione orizzontale e verticale. A partire dall'attività di modellizzazione proposta, l'insegnante può successivamente riprendere il concetto di P. D. sfruttando le strategie risolutive degli alunni, proponendo altri esempi e arrivando a una precisa formalizzazione di tale proprietà.

3.2 Un'esperienza di modellizzazione emergente nella scuola secondaria di secondo grado

3.2.1 Obiettivo di apprendimento

L'esperienza didattica di modellizzazione emergente di seguito riportata è stata realizzata in una classe quarta di una scuola secondaria di secondo grado (in particolare, Liceo Scientifico), composta da 25 studenti. Come argomento è stato scelto assieme all'insegnante di matematica di dedicarsi alla geometria euclidea tridimensionale, in linea con le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico (MIUR, 2010). Nello specifico, ci si è concentrati sul calcolo del volume di solidi come somma di volumi di solidi noti. Tale proprietà non è altro che la natura additiva della funzione volume, per la quale scomponendo un solido nell'unione di più solidi, il suo volume è la somma dei volumi di questi. Per semplicità ci si riferirà nel seguito a tale proprietà con il nome di *principio di scomponibilità* (abbreviato in P. S.), scelto come obiettivo di apprendimento per questa attività. Da quanto rilevato con un test iniziale, al momento dell'attività gli studenti non conoscevano tale principio, o almeno non lo sapevano utilizzare per calcolare il volume di solidi non noti.

3.2.2 Problema nel contesto

Secondo l'euristica della fenomenologia didattica, la domanda chiave è la seguente: quale problema può stimolare lo studente a re-inventare il P. S.? Nelle lezioni precedenti all'attività, l'insegnante di matematica aveva introdotto alcuni concetti di base di geometria euclidea dello spazio tramite alcune attività di gruppo con l'utilizzo di materiali quali cannucce, lattine, bottiglie. Conseguentemente, è stato proposto come problema per l'attività di modellizzazione quello riportato in Figura 10:

Bevandeitalia.srl
Corso Stati Uniti, Padova

Oggetto: assunzione a tempo indeterminato addetto reparto imballaggi.

Bevandeitalia, leader mondiale nella produzione e distribuzione di bevande, ricerca addetto per reparto imballaggi. Contratto a tempo indeterminato di 19 630 euro lordi annui. Per candidarsi è necessario presentare un progetto con allegato il proprio curriculum vitae. Il progetto richiede una stima del capitale necessario per la realizzazione di imballaggi per bevande, rispettando i seguenti vincoli:

- Litri iniziali da imballare di

Acqua	Succo di frutta	Bibita gassata
1000	500	350

- Diversificazione delle tipologie di imballaggio, secondo forma (almeno due per ogni bevanda) e materiali utilizzati.

Presentazione domanda: 18/01/19, presso Liceo Curiel, via Durer 14 Padova.

Figura 10. Problema per l'attività di modellizzazione emergente.

Assieme al testo del problema, agli studenti è stata fornita una brochure (**Figura 11**), in cui erano riportati alcuni materiali utili per la risoluzione del problema stesso. In questa brochure sono stati omessi alcuni dati, come la capacità delle bottiglie di vetro, al fine di incentivare il processo di re-invenzione del P. S. In questo modo gli studenti, per determinare la capacità delle bottiglie, avrebbero dovuto sviluppare una qualche strategia risolutiva che li avrebbe portati a riflettere sul concetto di scomponibilità.

Figura 11. Brochure data agli studenti assieme al testo del problema.

3.2.3 Processi di matematizzazione orizzontale e verticale

Durante lo svolgimento del problema, gli studenti sono stati suddivisi in sei gruppi. Ogni gruppo è stato quindi invitato a presentare il progetto richiesto dal problema per candidarsi come addetto al reparto imballaggi. In particolare, ogni gruppo doveva realizzare almeno due tipologie di imballaggio per imballare 1000 litri di acqua, 500 litri di succo e 350 litri di bibita gassata. Al termine dell'attività ciascun gruppo ha dovuto presentare al resto della classe il proprio lavoro. Nella risoluzione del problema, alcuni gruppi di studenti hanno iniziato calcolando la capacità di diverse tipologie di imballaggi e scegliendo quelle la cui realizzazione fosse più economica. Altri, invece, si sono focalizzati su criteri di praticità, realizzando imballaggi per uso domestico o fuori casa. Tutti i gruppi, comunque, nei loro progetti finali, hanno incluso come tipologia di imballaggio per l'acqua diversi tipi di bottiglie tra quelle proposte nella brochure (Figura 11). Tutti i gruppi, in accordo con quanto ipotizzato nella progettazione dell'attività, hanno prima scomposto ogni bottiglia come somma di solidi noti di cui erano in grado di calcolare il volume, per poi sommare i volumi ottenuti e ricavare un'approssimazione del volume della bottiglia considerata, giungendo così a reinventare il P. S. Un esempio è riportato in Figura 12, dove la bottiglia modello green è stata scomposta come un cono più un cilindro, della stessa altezza. Il volume totale ottenuto dalla somma dei volumi del cono e del cilindro era di 0,59 L, che è stato infine approssimato a 0,50 L. La giustificazione di tale approssimazione è dovuta, come riportano gli studenti, sia ad approssimazioni in fase di calcolo, sia al confronto del risultato ottenuto con i modelli già presenti sul mercato, sottolineando quindi l'attenzione dei ragazzi alla fase di valutazione dei risultati ottenuti in funzione del contesto reale del problema.

Figura 12. Strategia di un gruppo di ragazzi per calcolare la capacità della bottiglia green.

Analizzando questo esempio, si possono evidenziare anche in questa strategia processi di matematizzazione orizzontale e verticale. Dapprima, secondo un processo di matematizzazione orizzontale, la situazione problema è stata *strutturata*, considerando diverse tipologie di bottiglie di vetro presenti nella brochure come tipologie di imballaggio adatte per l'acqua. Successivamente, gli studenti hanno *formulato* un modello matematico: ogni bottiglia può essere considerata come un solido non noto. Qui ha inizio un processo di matematizzazione verticale, nel quale studenti hanno sviluppato una strategia risolutiva che li ha portati a decomporre il solido rappresentante la bottiglia considerata in più solidi noti, riuscendone così a calcolare il volume, o meglio una sua approssimazione. Questo processo di matematizzazione verticale ha reso possibile la re-invenzione del P. S., supportando quindi il processo di modellizzazione emergente. Infine, gli studenti hanno previsto un ultimo processo di matematizzazione orizzontale, tramite l'*interpretazione* e *valutazione* del risultato ottenuto in termini del contesto reale di partenza. Questo è evidente, ad esempio, dall'approssimazione descritta in precedenza, dove gli studenti hanno tenuto in considerazione elementi della vita quotidiana, come la presenza sul mercato di bottiglie di acqua da mezzo litro. Il ciclo di modellizzazione appena descritto è rappresentato in **Figura 13**.

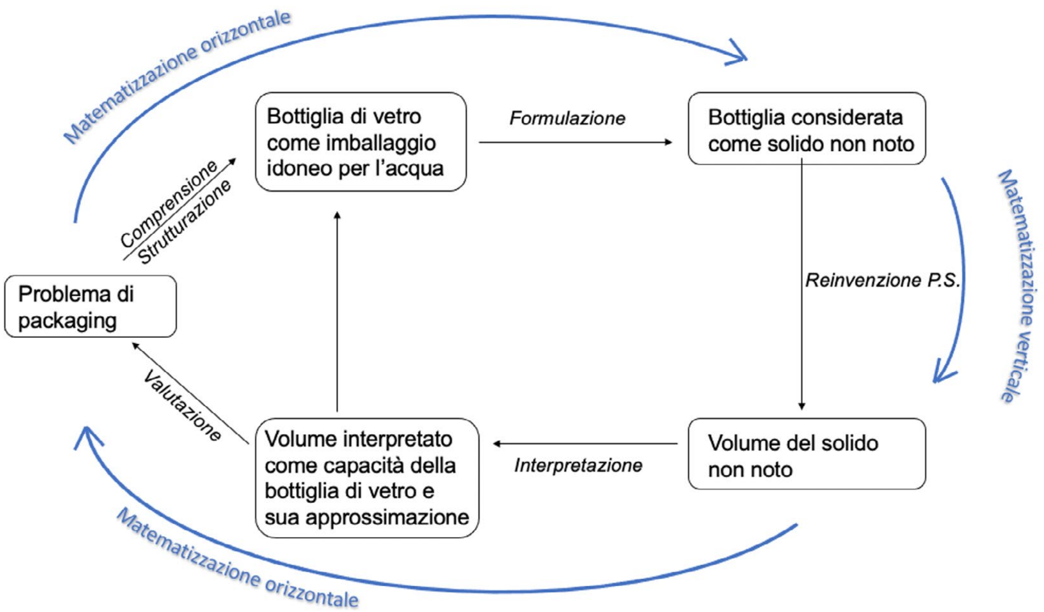


Figura 13. Ciclo di modellizzazione emergente relativo a una strategia utilizzata dagli studenti.

Analizzando altri risultati di questa esperienza didattica, si può notare che in effetti i processi di matematizzazione orizzontale e verticale non sono sempre sequenziali come descritto in precedenza. Invece, essi risultano essere interconnessi durante tutto il ciclo di modellizzazione. Ad esempio, un gruppo di studenti nello scegliere alcuni modelli di imballaggio per imballare il quantitativo di bibita gassata, ha effettuato una ricerca storica che li ha portati a ragionare sulla presenza nel mercato di due tipologie di lattine, con la stessa capacità ma con costi di produzione differenti (**Figura 14**).

Figura 14. Confronto tra due tipologie di lattine presenti sul mercato.

Il processo di re-invenzione del P. S. attuato da tutti i gruppi e promosso dall'attività di modellizzazione emergente, come descritto nel caso del calcolo del volume delle bottiglie di vetro presenti nella brochure, è stato rilevato anche dagli studenti stessi. In alcune delle loro considerazioni riportate durante il momento finale di riflessione individuale, alcuni di loro hanno scritto:

> «Nella realizzazione del progetto ho scoperto e usato il principio di scomponibilità».

> «Per calcolare il volume delle bottiglie le abbiamo decomposte in solidi noti, usato proporzioni e formule per trovare i dati mancanti ed i volumi di questi solidi».

> «Il lavoro è stato interessante e stimolante ed attraverso lo studio ed analisi degli imballaggi richiesti sono stato in grado di espandere la mia conoscenza matematica».

Si osservi che nella prima delle riflessioni riportate lo studente fa esplicito riferimento al P. S. Tale nome è stato introdotto dal ricercatore nella fase di presentazione dei gruppi, riferendosi alla strategia risolutiva sviluppata dagli studenti di calcolare il volume di un solido composto come somma di volumi di solidi noti.

4 Conclusioni

Il presente contributo si è concentrato su alcune esperienze didattiche di modellizzazione matematica. Nella prima parte del contributo si sono ricordati i più significativi costrutti teorici relativi alla modellizzazione matematica e alla matematizzazione. Un'attenzione particolare è stata data al costrutto della modellizzazione emergente (Gravemeijer, 1999), cioè a quel processo in cui gli studenti, partendo da situazioni reali, iniziano a modellizzare le proprie strategie matematiche informali, giungendo a re-inventare concetti matematici e applicazioni di cui hanno bisogno. Parallelamente si è discusso il concetto di matematizzazione, con le sue diverse accezioni all'interno del ciclo di modellizzazione stesso e alle sue componenti di matematizzazione orizzontale e verticale (Treffers, 1987). A partire dai riferimenti teorici, si è proposta una sintesi, al fine di chiarire l'accezione data ai costrutti utilizzati in questo contributo. In particolare, in Figura 3 si è proposto il ciclo di modellizzazione emergente con particolare attenzione ai processi di matematizzazione orizzontale e verticale che lo caratterizzano. La seconda parte del contributo si è concentrata nel presentare alcune esperienze didattiche di modellizzazione emergente. La prima esperienza proposta è stata condotta in una classe seconda primaria e ha riguardato la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. La seconda esperienza didattica presentata è stata condotta in una classe quarta di una scuola secondaria di secondo grado e ha riguardato il principio di scomponibilità. In particolare, nel riportare queste esperienze ci si è concentrati su tre punti chiave per un'attività di modellizzazione, in accordo con Gravemeijer (2020): l'individuazione dell'obiettivo di apprendimento; l'individuazione del problema nel contesto; i processi di matematizzazione orizzontale e verticale nelle strategie risolutive degli studenti. In entrambe le esperienze, le proposte hanno permesso agli studenti di re-inventare alcuni concetti matematici (proprietà distributiva e principio di scomponibilità) a partire dalla risoluzione di un problema situato in un contesto reale che li ha stimolati ad attivare processi di matematizzazione orizzontale e verticale. Come evidenziato in particolare nella seconda esperienza proposta, tali processi non sono necessariamente consecutivi (*matematizzazione orizzontale → matematizzazione verticale → matematizzazione orizzontale*), ma possono anche essere intrecciati tra loro durante la risoluzione di un problema di modellizzazione.

Nelle esperienze descritte, i problemi proposti agli studenti, assieme ai materiali e vincoli forniti, hanno promosso il processo di re-invenzione auspicato in fase di progettazione. Tuttavia, si vuole prestare attenzione all'eventualità che le attività progettate non portino alla re-invenzione del concetto target, o che non tutte le soluzioni degli studenti conducano a tale re-invenzione. In quest'ultimo caso, un ruolo fondamentale è svolto dal docente nella discussione collettiva al termine dell'attività. Dopo che gli studenti hanno presentato i loro progetti, è bene quindi che si dedichi del tempo al confronto delle varie strategie risolutive, riflettendo su di esse e confrontandole, ed eventualmente sottolineando i concetti matematici che si volevano far emergere dall'attività di modellizzazione. Questo aspetto non è stato sviluppato in questo articolo, il cui scopo, si ricorda, era quello di analizzare i processi di matematizzazione orizzontale e verticale emersi nelle strategie risolutive ideate autonomamente dagli studenti nelle due esperienze di modellizzazione emergente. Il ruolo dell'insegnante può rappresentare una posizione centrale nel favorire processi di matematizzazione sia orizzontale che verticale, e per tale motivo si ritiene necessario realizzare degli studi di caso in cui il ruolo dell'insegnante sia delineato chiaramente, in una prospettiva di re-invenzione guidata (Freudenthal, 1991) della matematica. Inoltre, risulta fondamentale riflettere sulla fase iniziale di progettazione. In particolare, nel caso in cui gli studenti non dovessero giungere alla re-invenzione dei concetti ipotizzati, si potrebbe scegliere di utilizzare un problema più focalizzato o aggiungere un vincolo al problema. Si ritiene quindi che un aspetto fondamentale sia rappresentato dalla fase di progettazione di un'attività di modellizzazione emergente, che in effetti è una fase fondamentale per la realizzazione di una qualsiasi attività didattica. Questo è in linea con la ricerca in didattica della matematica relativa al *task design* (Watson & Ohtani, 2015). In questa prospettiva, infatti, la progettazione di un'attività non consiste solo nel creare problemi, ma è un processo complesso, che inizia con l'individuazione di uno o più obiettivi di apprendimento, l'individuazione di contesti e problemi che permettano il raggiungimento di tali obiettivi; la realizzazione di materiali e attività didattiche che concretizzino le precedenti ipotesi; la riflessione su quanto avvenuto effettivamente in classe.

In conclusione, le esperienze descritte rappresentano un esempio significativo dell'importanza di proporre agli studenti attività di *modellizzazione emergente*. Tali attività, infatti, possono supportare gli studenti in un processo di re-invenzione (Freudenthal, 1991) di concetti matematici a partire dalle loro informali strategie risolutive, come evidenziato nei due esempi riportati, in cui gli studenti sono giunti a re-inventare da un lato la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, dall'altro il principio di scomponibilità per il calcolo di volumi di solidi non noti. In questo modo gli studenti danno senso al loro fare matematica, poiché ancorato a un'attività per loro esperienzialmente significativa. A partire dalle strategie risolutive degli studenti, i concetti matematici emersi possono essere successivamente generalizzati ad altre situazioni, giungendo a costituire una realtà matematica formale significativa per lo studente.

Bibliografia

Bakker, A. (2004). *Design research in statistic education: on symbolizing and computer tools*. CD-Bèta Press.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Bonotto, C., & Passarella, S. (2019). Modellizzazione e problem-posing come strumenti e traguardi dell'educazione matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *42A*(4), 469–488.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht.

Eurydice. (2011). *Mathematics education in Europe: Common challenges and national policies*. Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *1*, 38–63.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Kluwer.

Gravemeijer, K. (1999). *How emergent models may foster the construction of formal mathematics. Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. (2020). Emergent Modeling: an RME Design Heuristic Elaborated in a Series of Examples. *Educational Designer*, *4*(13), 1–31.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example, *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 111–129.

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay. (2007). Modelling for life: mathematics and children's experience. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education (ICMI 14th study)* (pp. 89–98). Springer.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481–2502.

Kaiser, G. (2017). The Teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267–291). National Council of Teachers of Mathematics.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310.

Kaiser, G., & Stender, P. (2013). Complex modelling problems in a co-operative, self-directed learning environment. In G. Stillman, W. Blum, J. Brown & G. Kaiser (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 277–293). Springer.

Kaiser-Messner, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht. Vol.1-Theoretische Konzeptionen. Vol.2-Empirische Unteruschungen*. Franzbecker.

Maffia, A., & Mariotti, A. (2020). From action to symbols: giving meaning to the symbolic representation of the distributive law in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *104*, 25–40.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni Nazionali per Licei*. https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione*. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2018). *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari. Documento a cura del Comitato Scientifico Nazionale per le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principle and Standard for School Mathematics*. NCTM.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OECD Publishing.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. OECD Publishing.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Passarella, S. (2021). Emergent modelling to introduce the distributivity property of multiplication: a design research study in a primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1910869

Pollak, H. O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1/2), 24–30.

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *2*, 393–404.

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (Ed.), *New Trends in mathematics teaching IV* (pp. 241–248). UNESCO.

Richardson, K. (2004). *A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron (Mathematics as an activity and the reality as a source). *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant)*, *5*(1), 60–67.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction-the Wiskobas project.* Reidel Publishing.

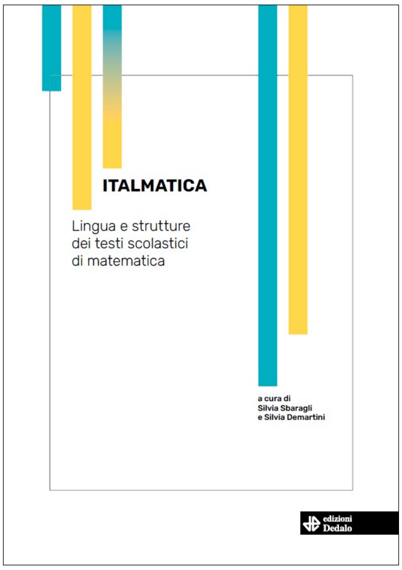
Watson, A., & Ohtani, M. (2015). *Task Design in Mathematics Education: An ICMI study 22*. Springer.

Recensioni

DdM

Recensioni[1]

Sbaragli, S., & Demartini, S. (A cura di). (2021). *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica*. Edizioni Dedalo.[2]



Ho letto il poderoso volume curato da Silvia Sbaragli e Silvia Demartini, quasi 400 pagine dense di dati (l'utile bibliografia ne occupa solo 12, quindi il grosso sono senz'altro i testi), da storico della lingua appassionato alla lingua italiana della scienza e al suo insegnamento. Sapevo bene che il percorso recente della didattica della matematica è stato caratterizzato da un assiduo impegno di studiose e studiosi che hanno saputo conciliare con intelligenza i risultati della ricerca e l'esperienza della loro applicazione in aula. Ma la didattica è fatta anche di comunicazione, e dunque di lingua, e con la lingua naturale deve per forza confrontarsi; anche se matematica e linguistica sono «considerate dal senso comune assai distanti» (p. 9), matematiche e matematici hanno saputo dialogare con linguiste e linguisti meglio di altri specialisti. I motivi, a mio modo di vedere, sono due: il comune interesse per gli aspetti pratici delle rispettive discipline e la consapevolezza che è necessario lavorare insieme sul terreno comune dell'apprendimento scolastico, un terreno che non conosce barriere disciplinari, soprattutto negli anni della scuola elementare e media.

Il volume *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica* ha tanti pregi, ed è impossibile condensarli in una breve scheda; mi limito di nuovo a indicarne due: l'attenzione con cui è stato selezionato il campione di testi sottoposti ad analisi e la concentrazione su uno specifico argomento di geometria, i poligoni. Queste scelte hanno come effetto l'alta rappresentatività dei risultati e la finezza del dettaglio (oggi si direbbe *granularità*) sia dal punto di vista qualitativo sia da quello quantitativo.

Al centro della ricerca c'è il libro di testo scolastico, sottoposto a vaglio critico dalla linguistica almeno dalla fine degli anni Ottanta del secolo scorso, prima nei convegni dei Gruppi d'intervento per la scuola e l'educazione linguistica (GISCEL), poi, più di recente, anche nei convegni promossi dalla

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).
2. Acquistabile in versione cartacea presso la casa editrice Dedalo o scaricabile gratuitamente dal sito http://landing.edizioni-dedalo.it/italmatica-digitale/

sezione Scuola dell'Associazione per la storia della lingua italiana (ASLI): nel volume passano sotto la lente dei ricercatori le forme comunicative adottate nei libri per la scuola, il modo in cui sono affrontati gli aspetti matematici e didattici e la qualità della loro coerenza nel testo. Va riconosciuto alle curatrici anche il merito non piccolo di aver saputo armonizzare le voci dei tanti studiosi che hanno collaborato al progetto, provenienti dai diversi mondi della matematica, della linguistica e dell'informatica. Non solo accade, spesso, che chi parla di scuola non ha mai fatto esperienza concreta della didattica in aula, ma è vero pure che talvolta «chi idealizza il lavoro interdisciplinare è forse perché non l'ha mai provato davvero, giorno per giorno, nelle asperità di un dialogo non per forza immediato» (p. 12). In questo caso l'interdisciplinarità si tocca con mano, e non sto usando una metafora, come proverò a mostrare.

Il progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* è stato finanziato per il triennio 2018-21 dal Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica (con un prolungamento fino a febbraio 2022) e sostenuto dal Dipartimento formazione e apprendimento (DFA) della SUPSI (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana). È l'esito di un lavoro di collaborazione avviato da almeno 10 anni, che ha visto un suo punto di snodo in un convegno svoltosi nel 2015 a Locarno. La parte iniziale del volume dà conto di come la ricerca si è sviluppata e articolata. Dopo un importante lavoro di preparazione teorica e di scelta degli strumenti e dei modelli di analisi lessicale (descritto alle pp. 57-65), si è allestito un corpus digitale ricavato da un campione di libri di testo scolastici di matematica; da questo campione, nel quale erano rappresentate tutte le classi del primo e del secondo ciclo scolastico, sono stati estratti – come dicevo – solo i testi dedicati al tema dei poligoni, per un insieme di circa 380'000 parole grafiche, a sua volta suddiviso in 3 subcorpora; il più ampio è tratto da testi usati in Italia (circa 355'000 parole), i due più piccoli sono tratti da testi usati nei cantoni Ticino e Grigioni (rispettivamente, circa 18'000 e circa 7'500 parole, cfr. pp. 240-41); il *corpus* è stato annotato in formato XML con il software UAM Corpus Tool (www.corpustool.com). Molto interessante è la descrizione del software Atlas.ti scelto per catalogare e schedare le categorie d'analisi dei testi, uno strumento progredito che simula – potenziandolo – il lavoro manuale di chi legge un testo prendendo nota dei fenomeni che gli interessano (pp. 67-70).

La scelta di un argomento di geometria non è casuale, perché nel testo scientifico (come e forse più che in altri testi dotati di apparati iconografici) è stretto il legame tra testo verbale e figure; anzi, sin dalla scuola elementare l'elemento figurale (nel volume si preferisce *registro figurale*, sul modello del francese *registre* usato da Raymond Duval) è componente essenziale della didattica della geometria. Una figura ben fatta e ben armonizzata con parole e simboli può «facilitare l'interpretazione e la codifica di informazioni fornite dal testo […] e può allo stesso tempo aiutare il processo di costruzione di un modello mentale della situazione descritta dal testo» (p. 31 e più nello specifico l'analisi svolta nel par. 5.5, alle pp. 146 ss.). Come mai càpita, invece, che gli aspetti multimodali della comunicazione, tra i quali le illustrazioni hanno uno spazio prevalente, interferiscano con la comprensione piuttosto che aiutarla? Non solo, direi, perché sono sottovalutati da chi prepara le figure dei libri di testo (è importante invece dare il giusto merito ai grafici e agli illustratori come produttori di significato), ma anche perché manca, nella scuola italiana come – a quel che sembra – anche in quella svizzera, un addestramento alla lettura delle immagini che è invece essenziale perché chi legge sappia farle interagire attivamente e proficuamente con i testi verbali. Il rapporto tra figura e messaggio verbale dev'essere integrativo e complementare, come già aveva compreso bene Leonardo da Vinci nei suoi studi e disegni di anatomia più che negli eleganti poliedri regolari disegnati per il trattato di matematica di Luca Pacioli. Dunque, l'illustrazione va ben progettata e l'occhio degli studenti va addestrato a interpretarla correttamente.

La non semplice annotazione linguistica dei testi, che permette di calcolare quanti sostantivi, quanti aggettivi, quanti verbi ecc. compaiono complessivamente nel corpus e singolarmente nelle sue parti, comprende anche l'etichettatura dei *macroatti*. Un macroatto è un movimento testuale fatto di più enunciati che formano un insieme unitario; in genere corrisponde a un capoverso, e nei testi scolastici

può essere una porzione di testo individuata con espedienti grafici, come riquadri incorniciati da linee o evidenziati da fondini colorati (cfr. par. 4.3.1 e in particolare pp. 58 e 72). Le etichette di annotazione rispecchiano le principali funzioni svolte dall'atto linguistico: dichiarativa, logico-argomentativa, narrativa, direttiva, ben spiegate, con chiara esemplificazione, nel cap. 5 del volume.
Spicca per il suo interesse l'etichetta "relazione con figura", applicata ogni volta che una parte linguistica richiamasse contenuti collegati a una figura. Le relazioni tra parti linguistiche del testo e figure sono esaminate nel dettaglio nel par. 5.5 (pp. 146 e ss.). Grazie all'etichettatura è stato possibile quantificare il numero di tali relazioni e confrontarlo con il numero di macroatti e verificare per il corpus italiano una media di ben 192 relazioni tra formulazioni linguistiche e figure per ogni macroatto (questo rapporto cala molto nel *subcorpus* ticinese: 120 per macroatto, ma è più alto nel più piccolo *subcorpus* grigionese: 198 cfr. p. 146). Un dato rilevante è che l'uso di figure aumenta nelle prime due classi della scuola media: in un campione ridotto di 6 libri di testo per ciascun anno dalla II classe della scuola elementare alla II della scuola media sono state individuate 457 relazioni. I risultati (pp. 147-148) sono che nei libri per la scuola elementare le figure sono prevalentemente in relazione con movimenti testuali di tipo dichiarativo, e solo in pochi casi di tipo logico-argomentativo, mentre dalla I classe della scuola media aumenta il movimento logico-argomentativo in particolare legato all'immaginare (unico movimento testuale in cui sono presenti relazioni con figure). Particolarmente notevole un dato analizzato a p. 149 e ss.: nella stragrande maggioranza dei casi (89,72%) le figure sono certamente utili per visualizzare i concetti matematici, ma non sono strettamente necessarie per la completezza informativa del testo, cioè non forniscono informazioni aggiuntive alla parte linguistica. Tuttavia (pp. 150-151) nel 53,84% dei casi le relazioni tra parti linguistiche e figure favoriscono le conversioni, cioè la complementarità informativa. È possibile catalogare gli estratti di testo che favoriscono le conversioni, in tutto 246, in base al tipo di enunciato: definizione, denominazione, proposizione (es. «due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso», cfr. p. 97) più gli enunciati di tipo procedurale, che cioè descrivono una sequenza di azioni. Questi i risultati:

definizione: 24,80% denominazione: 40,24% proposizione: 32,52% procedurale: 2,44%.

Dunque, quasi 2/3 degli enunciati che entrano in rapporto con le figure servono a definire e a denominare, mentre poco più di 1/3 ha valore logico o procedurale. Provo a dare un'interpretazione di queste percentuali: la conversione, ridondanza o più semplice cooperazione tra parola e immagine, è sfruttata soprattutto per definire i concetti e i loro nomi, molto meno per aiutare la comprensione globale del testo; ma è proprio questa comprensione globale che è soprattutto necessaria. Scolari e scolare, ma anche studenti e studentesse tendono a una lettura selettiva, locale, dei testi; una tendenza accentuata dall'uso delle tecnologie digitali. Sarebbe dunque auspicabile aumentare l'uso della ridondanza informativa tra testo e immagine per educare al ragionamento logico e procedurale.
Se le figure contano, le parole, d'altra parte, orientano la costruzione del pensiero, e dunque anche i testi verbali meritano cura particolare. Devono rispettare coerenza e coesione e devono essere adeguati alle conoscenze linguistiche dei lettori. Sotto questo aspetto la collaborazione con chi insegna lingua italiana è essenziale, e bisogna sempre tener presente che senza una buona padronanza linguistica della lingua non mai è possibile costruire nessun solido sapere specialistico (p. 33). Attenzione, dunque, ma ci tornerò tra poco, a una corretta valutazione delle lingue da usare in rapporto alla classe e agli studenti che ne fanno parte; e attenzione anche, se non soprattutto, alla sinergia tra i codici, che non esclude l'aiuto di altri sensi, come il tatto e i movimenti del corpo nella manipolazione di oggetti e modelli di oggetti geometrici.
Il volume sottolinea l'importanza dell'apprendimento del lessico specifico della matematica e della geometria (*bisecare*, *monomio*, *cateto* ecc.) e di quelli che le curatrici chiamano *termini parole*, cioè le molte parole d'uso comune che hanno nel lessico matematico un significato specifico (*contorno*,

figura, *punto* ecc.); ma misura e tiene sotto controllo (cfr. par. 2.1, pp. 15 e ss.) anche la ricorsività di regole morfologiche e sintattiche, dovuta vuoi a ragioni di economia e di sintesi (per es. le nominalizzazioni, testimoniate dal netto prevalere di sostantivi tra le categorie lessicali presenti nei testi, cfr. p. 241, le costruzioni impersonali con cancellazione dell'agente, usi particolari di tempi e modi del verbo), vuoi al riprodursi di prassi consolidate, quelle che generano il cosiddetto *matematichese* (p. 36). Dall'analisi del corpus risulta che il discorso, già molto specialistico all'avvio della scuola elementare, «si "tecnifica" e si specializza completamente al crescere della scolarità» (p. 251). Il libro di testo deve accompagnare i lettori in questa progressiva specializzazione, guidarli e sostenerli, altrimenti rischia di alzare ostacoli via via più alti e difficili da superare.
Oltre ai poligoni, alle loro definizioni e rappresentazioni figurali, e al corredo di strumenti simbolici utile a "parlare" di queste entità geometriche e a indicarle nel testo, c'è un altro attore che entra spesso in scena nelle pagine del libro: il problema di matematica. Che la comprensione dell'enunciato di un problema fosse ostacolata dalla sua espressione linguistica era noto da tempo (ricordo un'analisi di Silvana Ferreri, risalente al 1988): gli studi e le esperienze recenti su questo argomento hanno avvalorato questo dato. La recente prassi didattica orientata allo sviluppo delle competenze e delle capacità metacognitive focalizza spesso l'attenzione sull'attualizzazione pratica del problema, e così sembra che nel didattichese (o scolastichese) italiano degli ultimi anni la stessa parola *problema* è addirittura stata sostituita da "situazione problematica", versione un po' discutibile del discutibilissimo *problem solving*. In parte questa chiamata alla concretezza è senz'altro opportuna; ma può essere fuorviante, come qualsiasi modello didattico, se è troppo enfatizzata a danno dello sviluppo graduale delle capacità di astrazione.
C'è infine un'altra difficoltà che si aggiunge a quelle che ho già ricordato: già da qualche anno circa il 10% degli scolari e degli studenti in Italia proviene da famiglie non italiane. Per chi, pur nato in Italia e perfettamente capace di parlare italiano, non ha in casa genitori italiani e nell'ambiente familiare è abituato a parlare lingue diverse, anche molto diverse, dall'italiano, il lavoro sui libri di testo è oggettivamente più difficile. Come ha mostrato Matteo Viale, docente di linguistica italiana all'Università di Bologna e da tempo impegnato in progetti di didattica della matematica, soprattutto negli anni cruciali della scuola media la formulazione di alcuni problemi produce un gap di risposte tra studenti italiani e stranieri che può arrivare al 13%. Questo anche perché nei libri di testo aumenta la percentuale di termini che si riferiscono a concetti astratti e di frasi costruite con verbi di modo indefinito (infiniti, participi, gerundi), come hanno mostrato alcune recenti ricerche di Michele Cortelazzo, docente di linguistica italiana a Padova e tra i massimi esperti italiani di linguaggi specialistici.
Non molti anni fa, un quattordicenne bengalese residente da 6 anni a Palermo, in grado di parlare l'italiano e altre tre lingue oltre a quella materna, ha risposto così a una domanda sulla sua esperienza scolastica (si faccia attenzione alla padronanza che dimostra nel gioco di parole con l'espressione idiomatica *essere un libro aperto*):

Domanda: Hai difficoltà nel comprendere il tipo di italiano che trovi nei libri di testo?
Risposta: [ride] Il libro di matematica è "un libro chiuso"! Cose semplici sono più complicate.

Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica non si occupa della didattica nelle classi con studenti di origine non italiana, né delle classi in cui ci sono studenti con abilità differenziate. Ma è un volume che tutti gli insegnanti dovrebbero leggere perché spiega in modo eccellente, con grande chiarezza e rigore, cosa deve fare e cosa non deve fare un libro di testo di matematica per "funzionare" bene in qualsiasi tipo di classe.

Riccardo Gualdo
Università degli studi della Tuscia, Italia

D'Amore, B. (2020). *La matematica nell'opera di Dante Alighieri. Spunti biografici a scopo didattico*. Pitagora.

È da tenere presente che tra le diverse iniziative per celebrare i settecento anni della morte di Dante una certa attenzione da un po' di tempo si sta dando alla sua visione della scienza, tematica quasi del tutto assente nella critica letteraria di impronta crociana. Ma per capire meglio il ruolo che ha avuto nel percorso dantesco occorre prendere in considerazione il fatto che il tema dei rapporti fra arte e matematica, soprattutto, è diventato strategico nel corso del Novecento, già a partire con l'arte astratta inspiegabile se non si tiene presente la visione del mondo introdotta dalle geometrie non euclidee e dalla teoria degli insiemi di Cantor che, ben metabolizzate a livello artistico, hanno permesso di rinnovare *ab imis* linguaggi e stili. In seguito, nella seconda metà del secolo, la geometria dei frattali e poi la matematica delle tassellature, prima con Roger Penrose ed ultimamente con Robert Fathaver nel suo importante lavoro del 2020 *Tessellations: Mathematics, Art and Recreation*, hanno riproposto con forza il tema dell'unità della cultura, il superamento del dilemma delle due culture, quella umanistica e quella scientifica, artificiosa divisione che solo in Italia, pur essendo stata la culla dell'Umanesimo e del Rinascimento dove scienza e arte erano strettamente connesse, ha raggiunto livelli a dir poco nefasti con conseguenze culturali e istituzionali ancora presenti e non facilmente superabili.
Non è un caso che il matematico Godfrey H. Hardy (1877-1947), sulla scia di Leonardo, abbia parlato di "estetica matematica" col scrivere che «il matematico, come il pittore o il poeta, è un creatore di forme» e di simmetrie analoghe a quelle create in campo poetico e artistico, come anche lo stesso scrittore francese Paul Valéry aveva evidenziato nel suo continuo abbeverarsi alle stesse fonti, quelle di Leonardo e della matematica del suo tempo; se le forme in campo artistico si servono di parole, schizzi, pezzi e suoni, in campo matematico danno origine ad idee ma tutte trovano nelle rugosità del reale e nell'esperienza del mondo il loro continuo nutrimento che poi costituiscono il plafond dell'unità della cultura che nessun sano pensiero filosofico può disconoscere. Alla luce di tali acquisizioni che hanno trovato una giusta collocazione anche in alcuni settori non marginali della stessa critica letteraria, non è un caso che, già nel 1995, uscì uno dei primi significativi lavori orientati in tal senso su *Dante e la scienza*, a cura di P. Boyle e V. Russo, dove i vari contributi erano indirizzati a cogliere il ruolo e la funzione del mondo della scienza del suo tempo sino a parlare di "epistemologia di Dante", se per epistemologia si vuole però intendere l'immagine della scienza in generale e così come essa si

presentava nel variegato universo medievale. Dopo l'importante evento internazionale tenutosi nel 2015 a Friburgo con la pubblicazione dei relativi atti su *Dante e la critica letteraria. Una riflessione epistemologica* (a cura di T. Kleinkeit e A. Malzacher), è da tenere presente il più recente Focus dell'Ufficio Stampa del CNR, *Almanacco della Scienza. 1321-2021 Dante 700* (n. 22, dicembre 2020), dove diversi studiosi e scienziati si sono confrontati col mondo di Dante e la sua visione religiosa, politica e scientifica con illustrare finalità e modi di intendere la scienza cosmologica del suo tempo.

Questi studi nel loro complesso chiariscono meglio e ancora una volta che l'interesse di Dante per la scienza era funzionale alla sua concezione poetico-religiosa finalizzata a dare risalto alla divinità come fonte della creazione dove l'uomo «dee traere a le divine cose quanto può»; nello stesso tempo sottolineano il fatto che il poeta fiorentino era ben documentato sui dibattiti filosofico-scientifici del suo tempo sino a farsi quasi loro portavoce e ad interrogarli nelle diverse pieghe col fare del pensiero aristotelico e della visione tolemaica del mondo una vera propria Weltanschauung chiaramente in senso poetico alla pari di quella di impronta teoretica presente nella *Summa Theologiae* dell'Aquinate.

In tale contesto viene ad inserirsi, ma con una particolare attenzione verso le conoscenze matematiche possedute da Dante e con un approccio diverso, il recente lavoro del matematico e storico delle matematiche Bruno D'Amore, *La matematica nell'opera di Dante* (con prefazioni di Umberto Bottazzini ed Emilio Pasquini, Bologna, Pitagora Ed. 2020); già in diversi studi sulla *Divina Commedia*, come quello apparso nel volume del 1995 e di altri successivi, D'Amore ha spiegato la profonda simmetria di origine matematica che ne regge l'intero impianto dalle strutture geometriche dell'*Inferno* al complesso intreccio delle sfere, l'una dentro l'altra, del *Paradiso*. Tutto questo lungo e non comune percorso di continuo e contemporaneo abbeveramento alle fonti della matematica e dell'arte lo ha portato ultimamente a scrivere *Arte e Matematica* del 2015, lavoro dove si analizzano le metafore, le analogie e le identità "tra i due mondi".

Impegnato per diverso tempo anche nel difficile ambito della didattica delle matematiche che gli ha permesso di sviscerarne meglio sul terreno storico-epistemologico le complesse concettualizzazioni che le hanno caratterizzate, D'Amore ci offre un lucido esempio di concreto superamento delle due culture nel senso che in quest'ultimo testo innanzitutto, per capire l'universo poetico ed esistenziale di Dante, si fa suo "contemporaneo", come ha fatto Hélène Metzger negli anni '20 di questo secolo nei confronti di alcuni scienziati come Newton e Lavoisier, per entrare nel vivo delle questioni e dello spirito del tempo che visti alle luce del presente possono sembrare stravaganti e tipiche di un mondo prescientifico; ma soprattutto si fa narratore, quasi fedele compagno di viaggio di Dante e di Guido Cavalcanti nelle diverse città da Siena a Ravenna, li segue nelle taverne e negli accesi dibattiti avuti, nelle "dispute aperte" in campo filosofico, nei diversi incontri con personaggi e figure come ad esempio Lauretta che gli ha permesso di avere delle preziose idee per affrontare il grosso problema della quadratura del cerchio quando stava per portare a termine la terza cantica. Seguono con uno stile non letterario le due appendici finali che affrontano la presenza dei matematici contemporanei di Dante da Paolo dell'Abbaco e Pietro Ispano, le cui opere erano ben conosciute come quella sull'ottica che avranno un ruolo non secondario nella visione della luce nel *Paradiso*, a Guido Bonatto, Michele Scotto e Roberto Grossatesta e quella degli antichi da Pitagora, Euclide e Isidoro di Siviglia, e tematiche attinenti l'aritmetica e la probabilità, la logica formale e la geometria, l'incontro a volte non sulla stessa linea con le idee di Aristotele.

D'Amore, pertanto, ci offre uno spaccato poetico-scientifico non comune del mondo di Dante e nel farsi narratore dei suoi interessi e aspirazioni ne sviscera le diverse articolazioni, operazione che permette una particolare esegesi di alcuni passi della *Commedia* in quanto lo scopo del lavoro, pur con uno stile letterario, è quello di chiarire i problemi scientifici legati al testo dalla "magia della scrittura posizionale dei numeri" grazie all'incontro con le lezioni di Paolo dell'Abbaco a quella delle leggi dell'ottica di Ispano, dalla logica modale studiata da ragazzo a quella dell'infinità dei numeri oggetto di "dispute aperte" a Firenze dai "giovani aspiranti filosofi" nelle loro continue sfide davanti alle chiese; non a caso le pagine dedicate alla questione dell'infinito, croce e delizia secolari di poeti

e matematici, sono quelle più pregnanti anche perché tale tema è stato affrontato nel *Convivio* dove si afferma che «'l numero quant'è in sé considerato, è infinito, e questo non potremo mai intendere». D'Amore, nel sottolineare che solo a fine Ottocento G. Cantor ci "regalò l'infinito attuale" e la capacità di renderlo più abbordabile "all'occhio dell'intelletto", si sofferma sul ruolo nella Commedia degli "angeli, tanti ma tanti angeli, angeli non infiniti ma certo di numero superiore a qualsiasi estro umano"; così pure ci aiuta a capire meglio il senso del dialogo con Lauretta e la soluzione poetica che Dante apporta al problema della stessa quadratura del cerchio nel XXXIII canto del *Paradiso* con l'espressione «Qual è il geomètra che tutto s'affige, per misurar lo cerchio, e non lo trova, pensando, quel principio ond'elli…».
Così i diversi episodi che hanno come oggetto "angoli", "triangoli", "piramide", "la taverna", "gli asini che volano", "la tabellina", "Pitagora e l'armonia" prendono in esame con piglio narrativo i dubbi, le difficoltà e le capacità di Dante di metabolizzare in senso poetico questioni secolari oggetto di discussione da parte dei matematici occidentali e anche il suo modo di capire e di riconoscere i contributi apportati da altri popoli come "le figure degli Indi" ed il modo con cui gli "infedeli", gli arabi, siano arrivati a scrivere i numeri; questo ricco ventaglio di conoscenze del mondo delle matematiche e la capacità di farle dialogare in maniera armonica da una parte colle dinamiche del mondo poetico e dall'altra con le verità della fede da parte di Dante offre l'occasione a D'Amore di mettere in atto a sua volta un gioco della finzione non comune col raggiungere, come dice Umberto Bottazzini nella prefazione, un "felice equilibrio tra realtà storica ed immaginazione". In tal modo si rende il poeta fiorentino un fine interprete di quell'anima cosmopolitica di cui era portatore un certo Medioevo, dove culture diverse pur scontrandosi contribuivano a potenziare il patrimonio conoscitivo dell'umanità.
Questo modo particolare di ricordare Dante, di viverlo e soprattutto di attraversarlo da parte di Bruno D'Amore ce lo fa sentire più nostro, ce lo rende compagno di viaggio, un navigatore che ci avverte che le stesse acque della conoscenza non sono lineari ma frutto del continuo scontrarsi con le onde del reale, dove i problemi scientifici sono veri e propri problemi umani con tutto il loro corredo esistenziale e non avulsi dalla vita quotidiana; in tal modo le stesse inquietudini e titubanze di Dante di fronte ai misteri della vita le sentiamo nostre e la *Divina Commedia*, come ogni espressione artistica e scientifica, può essere vista come un continuo e sofferto prendere atto delle nostre miserie e fragilità, dei nostri limiti e nello stesso tempo della necessità di fare tentativi per uscirne pur sapendo razionalmente il più delle volte di rimanere sconfitti. Bruno D'Amore nell'entrare in comunione con Dante e le sue traversie, cioè le nostre, ci offre pertanto un percorso poetico-scientifico ed insieme ermeneutico dove ragioni della vita e ragioni dell'arte-scienza non sono scisse, ma si incontrano coll'arricchirsi reciprocamente di ulteriori significati anche per l'uomo del XXI secolo, assetato soprattutto di testimonianze di vita coerente tra pensiero ed azione come indicava Simone Weil, figura quest'ultima che potrebbe essere il novello Virgilio per chi voglia avventurarsi nei meandri dell'esistenza e costruire quella che chiamava "architettura dell'anima".

Mario Castellana
Dipartimento di storia, società e studi sull'uomo
Università del Salento, Italia

Fandiño Pinilla, M. I. (2021). *Le frazioni. Matematica, storia e didattica*. Pitagora.

Quando ho detto a un mio amico, non matematico ma intelligente, che stavo leggendo un libro sulle frazioni, le sue folte sopracciglia si sono alzate in modo eloquente. La domanda inespressa era "Un intero libro sulle frazioni? C'è tanto da dire?". Bene, se avete lo stesso dubbio vi consiglio di buttare subito un'occhiata al capitolo 5, dove Martha Fandiño Pinilla smonta ed esamina metodicamente ogni possibile concezione intuitiva di frazione: se vi sembrava che fosse un concetto tanto semplice e che fossero scemi i vostri allievi con i loro errori, adesso avete perso qualche ingannevole certezza.
Ora che siete corsi alla cassa e vi siete accaparrati questo gioiellino, potete ripartire dall'inizio. Le tre prefazioni vi confortano sul vostro acquisto, poi l'autrice saggiamente pone le basi strettamente matematiche per la costruzione degli insiemi numerici pertinenti. Martha predispone un percorso semplificato per chi non ha una laurea in matematica; sono convinto, però, che anche lettrici e lettori prudenti torneranno sui passi saltati in prima lettura: sono scritti in modo assai chiaro e dicono molto senza farlo pesare. Trovo opportuna la scelta di assegnare ai razionali non negativi il ruolo di protagonisti. Lo sfuggente concetto di "parti uguali" in cui dividere un'altrettanta sfuggente unità viene attentamente considerato qui e per tutta l'opera. I cenni letterari e le osservazioni sulla notazione usata in altri paesi dànno un respiro piacevole a questo capitolo formale.
Il secondo capitolo è un'approfondita (32 pagine!) analisi storica del concetto di frazione, ben contestualizzato e ad ampio raggio geografico; è un capitolo interessante per chi legge, ma lo sarà anche, a cascata, per gli allievi: il contesto storico, la faticosa evoluzione di un concetto lo rendono umano, affrontabile.
Terzo e quarto capitolo sono dedicati alle frazioni in ambito didattico e alle ricerche pertinenti; qui l'autrice si preoccupa di chi non ha dimestichezza con la didattica come disciplina scientifica: ogni termine tecnico è segnalato con un asterisco, confortandoci se non ne abbiamo un immediato riscontro intuitivo e rimandandoci ai testi opportuni o al Capitolo 7. Per me (didatta sì, ma ruspante) sono i capitoli più ostici, però ci sono tutti i riferimenti bibliografici che possano soddisfare curiosità e necessità di maggiore comprensione.
Ho già accennato al quinto capitolo *Vari modi di intendere il concetto di "frazione"*, che trovo sorprendente e magnifico: Martha elenca 12 punti di vista comuni e due più tecnici. Qui nasce anche una prima analisi degli errori frequenti, trattati come preziose fonti d'informazione invece che storture mentali o frutto di pigra indifferenza.

Il Capitolo 6 chiarisce il significato di noetica e semiotica. Se avevo una certa idea del secondo termine, il primo mi era estraneo; e questo è paradossale, visto che ho dedicato decenni della mia vita proprio alla noetica, cioè all'apprendimento di concetti da parte mia e soprattutto dei miei studenti. L'autrice ci mette davanti a una realtà scomoda: gli oggetti della matematica non esistono nella realtà; si possono appoggiare anche ampiamente a situazioni reali, ma sono eminentemente astratti. Al di là di motivazioni ed esempi concreti, giunti al dunque dobbiamo presentare ai discenti dei simboli e loro manipolazioni che speriamo convoglino un concetto. L'acquisizione di quelle rappresentazioni semiotiche garantisce il passaggio alla noetica, l'acquisizione del concetto o costituisce solo una elaborata illusione per noi e per loro? Le frazioni si prestano a fornire degli esempi lampanti di questo problema. Nota personale: qui finalmente mi è risultato chiaro cosa sono i "registri semiotici".
Nel settimo capitolo arriviamo al cuore del problema: gli errori; convergono qui le considerazioni e le analisi dei capitoli precedenti. Prima vengono esaminate le caratteristiche oggettive degli errori frequenti, ma poi si passa dall'osservazione alla costruzione di modelli, alla ricerca di spiegazioni. Si chiama metodo scientifico. Finalmente ho capito in cosa consiste il malefico "contratto didattico", cosa sono i "modelli parassiti". Come dopo tutte le spiegazioni azzeccate, viene da dire: è logico, naturale, come mai non c'ho pensato prima? Risposta: occorreva che ci pensassero scientificamente degli esperti. Un utile ultimo capitolo tira le somme e azzarda, con prudenza e modestia, qualche suggerimento.
Ho imparato molto da questo libro. Dovrebbero leggerlo quelle "menti eccelse" che nei corridoi ridacchiano delle risposte assurde e contraddittorie dei loro allievi; non si accorgono, poveretti, che i malcapitati studenti hanno offerto loro delle strabilianti finestre su quei concetti che gli eccelsi credono di conoscere così bene. Martha Isabel Fandiño Pinilla ha confezionato uno studio accurato in ogni dettaglio, basato su un'ampia esperienza sul campo (sua e di altri), con 12 fitte pagine di bibliografia, con spunti di approfondimento matematico, psicologico, pedagogico. Va bene, è quello che ci si aspetta da un professionista! Ma c'è una qualità che va al di là delle aspettative, una qualità sempre più importante e sempre più rara: il rispetto.
Martha mostra un enorme rispetto per tutti: per il lettore in generale, per gli studenti soprattutto quando sbagliano, per la faticosa conquista, nei secoli, della conoscenza; importantissimo: per gli errori degli stessi docenti! Ha rispetto per il maestro che può avere difficoltà con strutture, passaggi a quoziente ecc.; ha rispetto per chi insegna (magari da decenni, come me!) ma non si era mai curato di imparare a farlo scientificamente. Ha rispetto per il bambino che non conteggia l'area di quello stretto pezzo di prato, perché la mucca di cui parla l'esercizio non ci può passare; anzi, ritiene questa un'osservazione fruttifera per il rapporto fra modello concreto e astrazione. Questo bellissimo passo è, per me, quello che meglio rappresenta il rispettoso rapporto dell'autrice con la matematica e con noi. Grazie, Martha!

Massimo Ferri
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna, Italia

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET Università.

Pier Luigi Ferrari è un matematico e ricercatore in didattica della matematica, famoso per aver condotto buona parte della sua ricerca attorno ai possibili rapporti fra lingua, linguaggi e apprendimento della matematica.

Questa sua ultima fatica editoriale raccoglie spunti e riflessioni che provengono da decenni di esperienze di insegnamento universitario e di ricerca condotta sempre a fianco di insegnanti di ogni ordine scolastico.

Il volume è suddiviso in tre parti. La prima affronta il delicato tema del rapporto tra lingua e matematica da diversi punti di vista: la quantità di approcci possibili viene presentata in modo da fornire al lettore alcune coordinate indispensabili per orientarsi all'interno di un panorama complesso. In particolare, molto interessanti sono le riflessioni sull'idea di competenza linguistica e la presentazione dettagliata dell'approccio funzionalista di M. A. K. Halliday, i cui strumenti si rilevano indispensabili per riuscire a entrare nell'ottica dell'autore del volume. La seconda parte è interamente dedicata al linguaggio della matematica, intendendo con questa espressione «un sistema multimodale (che include testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali) e multivariato (che include un ampio spettro di registri)» (p. 53). In questa sezione vengono affrontati elementi tipici della matematica come le notazioni simboliche, il gergo matematico, le rappresentazioni figurali, inserendoli all'interno di aree tipicamente linguistiche quali il lessico, le metafore, la nominalizzazione e la coesione.

Infine, la terza parte è quella più squisitamente didattica: si affronta l'ampio tema della mediazione semiotica, e si presentano da un lato una panoramica delle difficoltà linguistiche associate all'apprendimento della matematica, dall'altro il tema delle classi multilingue. L'ultimo capitolo di questa parte presenta utilissime e profonde idee per la didattica, tutte focalizzate sull'attenzione nell'educazione matematica verso gli aspetti linguistici.

Tutto il volume è costantemente percorso da esempi tratti da situazioni d'aula, debitamente commentati in funzione dei temi di volta in volta trattati.

Si tratta di un libro molto utile, sia per gli insegnanti sia per i ricercatori che volessero avere una panoramica chiara e allo stesso tempo ricca di riferimenti dalla letteratura di ricerca sul tema, spunti di riflessione su cui impostare esperienze didattiche o ricerche, o anche solo iniziare a guardare il mondo dell'apprendimento linguistico e matematico con un sempre più necessario approccio interdisciplinare.

Michele Canducci
Liceo Scientifico "A. Einstein" di Rimini, Italia

Maroscia, P., Toffalori, C., Tortoriello, F. S., & Vincenzi, G. (2018). *Parole, formule, emozioni. Tra matematica e letteratura*. UTET Università.

Dovrebbe essere ormai noto ed evidente a chiunque che tra matematica e letteratura, così come tra scienza e arte più in generale, esistono numerosi punti di contatto. A sostegno di questa tesi si portano spesso i molti esempi di scrittori con alle spalle una formazione matematica e di romanzi o racconti che fanno uso – in modo più o meno evidente, a livello tematico o strutturale – di concetti presi in prestito dalla matematica. Tali dimostrazioni, per quanto significative, sembrano tuttavia insufficienti a confutare del tutto la credenza nella separazione delle cosiddette due culture, quella scientifica e quella umanistica, che continuano a essere viste talvolta come entità autonome e impermeabili a qualunque influenza reciproca. Del resto, anche il fatto che qualcuno cerchi ancora di affermare che una persona possa essere più o meno adatta allo studio di una certa disciplina a seconda del proprio genere, sebbene si inserisca in un discorso più complesso e che va oltre i temi qui trattati, è espressione – tra le altre cose – della volontà di alzare barriere tra le diverse forme del sapere, occultando le molteplici interconnessioni. Ben venga, dunque, qualsiasi nuovo tentativo di portare alla luce queste connessioni, non limitandosi ad arricchire e commentare l'elenco dei matematici scrittori o dei pezzi di matematica presenti in testi letterari cui si accennava prima, ma osservando in profondità e da diversi punti di vista questi mondi e i loro protagonisti, fino a scoprirne le radici, i metodi e gli obiettivi comuni.
Tentativo – riuscito – che è alla base di questo libro, come già del precedente *Matematica e letteratura. Analogie e convergenze* (2016), degli stessi autori; entrambi i testi appartengono alla collana *Nuove convergenze* curata dal Comitato Scientifico UMI-CIIM (Unione Matematica Italiana-Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica).
Attraverso una raccolta di brevi saggi, i cui autori provengono da esperienze disparate e trattano quindi aspetti diversi del ricco tema generale e con differenti stili (sono in prevalenza matematici, impegnati in vari settori della disciplina, ma non mancano rappresentanti dell'ambito letterario), emerge chiaramente che matematica e letteratura sono sì due modi distinti di esplorare e cercare di capire il mondo e la realtà, ma non agiscono come «componenti "complementari" della cultura, [...] ciascuna per suo conto, quindi sostanzialmente disgiunte o comunque prive di legami radicati»; bensì, esse «sono intrinsecamente connesse» e «rappresentano [...] quel valore comune che si chiama "cultura"», come si legge nell'introduzione. La stessa introduzione si apre con una citazione di Voltaire, in cui il filosofo afferma che «Archimede era dotato di tanta immaginazione almeno quanto Omero», ed è forse proprio l'immaginazione il principale tratto comune che fa da filo conduttore alla scoperta

di questo prolifico legame, la materia prima condivisa i cui frutti vengono raccolti e poi espressi dalla matematica e dalla letteratura attraverso strumenti di comunicazione diversi, rappresentati dalle formule per la prima e dalle parole per la seconda, ma ottenendo lo stesso effetto di suscitare emozioni, da cui il sottotitolo del libro.

Si tratta di una lettura utile e certamente stimolante anche per chi sia già fermamente convinto della verità di quanto sin qui affermato. Così come spesso non è inutile osservare o elaborare per un teorema già noto nuove dimostrazioni, che possono offrire uno sguardo diverso sull'argomento illuminando aspetti rimasti precedentemente nascosti, oppure semplicemente per apprezzarne la bellezza e l'eleganza, allo stesso modo attraverso i capitoli di questo libro si scoprono altrettante sfaccettature del rapporto tra matematica e letteratura, visto da angolature che sono tutte necessarie (poiché non sovrapponibili tra di loro o ad altro che sia già stato detto o scritto) ma nel complesso forse ancora non sufficienti ad averne una visione totale: resterà sempre dello spazio per continuare a esplorare.

La prova più evidente di questa inesauribilità del tema è la presenza di un capitolo ispirato al famoso racconto *La biblioteca di Babele* di Jorge Luis Borges, su cui è già stato detto molto, ma che probabilmente non finirà mai di offrire spunti per discussioni e interpretazioni matematiche. Vi sono poi numerosi ritratti di personaggi che hanno attraversato i due mondi con modalità estremamente variegate: si parla ad esempio di Sant'Agostino, con il quale la trattazione si allarga al tentativo di conciliare la fede con una conoscenza matematica davvero notevole per la sua epoca, e di Dante, andando ben oltre la nota simbologia dei numeri riguardanti la struttura della Divina Commedia e i celebri versi del Paradiso sulla quadratura del cerchio; particolarmente interessante è poi il capitolo su Galileo Galilei, in cui non viene affermato tanto l'indubbio valore della sua scrittura, ma piuttosto si spiegano le ragioni pratiche per le quali fosse utile allo scienziato dare una forma letteraria ai suoi studi. Infine, per gli insegnanti o chiunque sia interessato agli aspetti prettamente didattici, è presente in chiusura una chicca sugli aspetti linguistici più critici nell'apprendimento della matematica, con alcuni spunti per lavorarci.

Alla luce di ciò, «perché non sperare, anzi "immaginare", che i nuovi orizzonti della didattica, allontanandosi dall'esposizione separata e settaria di tanti singoli "saperi", sappiano sempre meglio evidenziarne l'intrinseca unità e la comune bellezza?», si chiedono gli autori. Questo libro mostra che è possibile farlo, l'auspicio è che nelle scuole tutto questo sia, oltre che immaginato, sempre più anche realizzato.

Dario Raffaele
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Bohórquez Arenas, L. Á. (2020). *Concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y sus cambios en estudiantes para profesor en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas*. DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas.[3]

La formazione degli insegnanti di matematica è sempre stato un problema teorico e istituzionale, dibattuto sia a livello accademico, sia ministeriale. Le persone riconosciute per vari motivi come esperti venivano chiamati dai responsabili istituzionali (per esempio politici) di questi temi a dare pareri. Si è cominciato banalmente con il pretendere una formazione professionale idonea dal punto di vista matematico, poi si è diffusa l'idea di far seguire a questa dei corsi di pedagogia e/o psicologia. Fino a quando è nata, negli anni '80, la disciplina accademica didattica della matematica. A questo punto, gli esperti sono diventati gli studiosi di didattica (confondendo talvolta la didattica della matematica con la didattica generale). Spesso, in vari Paesi del mondo, questi esperti hanno proposto l'idea che la formazione dovesse, sì, avvenire dopo l'acquisizione di un titolo idoneo di studio ma che a questo dovesse seguire una formazione specifica almeno biennale in didattica della matematica (includendo laboratori sperimentali in aule reali, seguiti da docenti di scuola selezionati in base all'esperienza e conoscitori della didattica della matematica). Va ricordato esplicitamente che la didattica della matematica già ha incluso in sé stessa quegli elementi di base di pedagogia, psicologia, semiotica, filosofia eccetera necessari a chi deve, come professionista, insegnare matematica. Alcuni Paesi hanno seguito questa linea, come Francia e Italia; altri hanno preferito modificare la formazione stessa degli insegnanti, fin dagli esordi di base, cambiando la struttura dei corsi universitari, passando da una laurea in matematica che forma matematici alle "licenze in matematica", 10 semestri di studio che includono sì la formazione matematica ma anche la continua riflessione sugli aspetti didattici di questa, come il Messico e la Colombia.
Ma la base di tutto ciò, in entrambi i versanti, è stata sempre l'esperienza, il buon senso, i risultati di alcune ricerche: gli esperti, cioè i didatti della matematica, sulla base della loro buona fede e del buon senso, hanno creato questi percorsi (gli uni o gli altri), ma senza avere una solida base di ricerca specifica sul settore della formazione degli insegnanti.
Da qualche anno, invece, la voce "formazione degli insegnanti di matematica" è diventata un vero e proprio tema di ricerca specifica, tanto da costituire spesso una delle basi epistemologiche di ricerca

3. Scaricabile gratuitamente dal sito: http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/concepciones_sobre_gestion_proceso_ensenanza_aprendizaje_cambios_estudiantes_para_profesor_ambientes_aprendizaje_fundamentados_resolucion_problemas

scientifica nella formazione dottorale. Questa linea è quella che ha spinto il dottor Ángel Bohórquez a scegliere il proprio tema di ricerca, che lo ha portato a vari anni di studio e di ricerca, e poi a conseguire un dottorato, presentare una tesi specifica e infine a scrivere questo libro che offre un'interessante testimonianza sulla sua attività di ricerca, fortemente intrecciata con l'esperienza di docente universitario in una "licenciatura".

Come in ogni vera attività di ricerca, preliminare a ogni presentazione è capire bene l'ambito nel quale essa si è svolta.

Ángel è professore titolare di un corso nell'ambito della "licenciatura en matemática". L'ambito nel quale insegna si chiama "risoluzione dei problemi", dunque i suoi studenti sono tutti inseriti in questo contesto. Lui agisce, dunque, proponendo problemi (problemi veri, non esercizi) abbastanza complessi, in modo che si mettano in atto strategie risolutive ma, soprattutto, che il gruppo dei suoi allievi discuta proprio di questo, delle strategie risolutive proposte, analizzate, accettate, infine messe in atto. Si suppone che un futuro docente di matematica sappia dominare e valutare le proposte che un giorno emergeranno dal lavoro dei suoi studenti in aula, con professionalità e non solo per intuizione, che abbia cioè raggiunto una vera competenza piena. Che cosa di meglio si può proporre, se non cominciare a esaminare le proprie proposte personali in modo critico?

Ma Ángel non si limita a questo; seguace della scuola di Alicante, creata dal collega e amico Salvador Llinares (che Ángel ha visitato durante la sua permanenza di studio e ricerca all'estero, partecipando ai lavori di ricerca del gruppo alicantino e sottoponendo ad analisi continua i risultati sperimentali e teorici della sua stessa ricerca), propone esplicitamente ai suoi studenti una meta-analisi, quella del ruolo del docente in aula e soprattutto della sua gestione dell'aula quando l'oggetto di studio è la matematica anzi, in modo più specifico, la risoluzione di problemi di matematica. Non si parla qui di gestione dal punto di vista burocratico o formale, ovviamente, ma di gestione come attività professionale, considerando il docente come un professionista che attua in una minisocietà che, in qualche modo, non solo istituzionalmente ma anche umanamente, dipende da lui, dalla sua gestione, dalla sua sensibilità, dalla sua cultura.

La gestione dell'aula è un tema non del tutto nuovo, dato che proprio la scuola di Alicante ha proposto tematiche di analisi e ricerca in questa direzione ben note nel contesto internazionale della ricerca in didattica della matematica (da qui la scelta ovvia del luogo della permanenza di studio all'estero).

Ma non è finita qui; Ángel ha voluto indagare se e come gli studenti futuri docenti di matematica, grazie alla propria esperienza personale autoriflessiva, siano in grado di descrivere, in via preliminare, quel che intendono in fase iniziale con questo termine: "gestione della classe nelle ore di matematica"; e se, grazie all'attività didattica che vivono, come studenti, lungo il corso seguito siano in grado di riflettere, anzi di meta-riflettere, e cambino eventualmente opinione sul tema della gestione, fino a rendersene conto. In modo tale che, alla fine del percorso semestrale, riconoscano (o no) di aver cambiato opinione sull'idea di gestione. Ángel sfrutta a questo proposito ricerche già effettuate su temi simili, la formidabile idea di competenza proposta negli anni da Llinares, le metodologie di analisi tipiche della scuola di Alicante. E, per la metodologia di ricerca, si serve di quella di D'Amore - Fandiño Pinilla della coppia di lettere "prima - dopo" scritte dai singoli studenti, prima e dopo la durata del seminario semestrale, strumento che costringe lo studente (futuro docente) a riflettere sui suoi propri cambi.

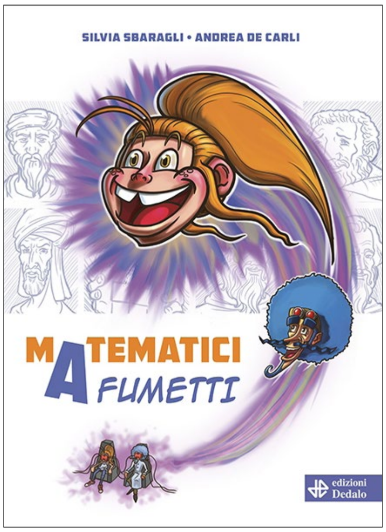
Il risultato raggiunto e descritto in questo libro è eccellente e non potrà che costituire un tassello importante di base, d'ora in poi, nel campo della costruzione di strategie (accademiche e istituzionali) per la formazione dei futuri insegnanti di matematica.

Gli studenti accettano l'evidenza: seguendo la strada scelta dal loro docente Ángel, essi riescono a compiere analisi introspettive sulle modifiche avvenute in sé stessi, per esempio una definizione personale di gestione della classe quando il tema è l'apprendimento attraverso la risoluzione di problemi di matematica, e sui cambi a volte molto notevoli fra quelle che erano *prima* e sono *ora* le loro convinzioni personali.

Arrivare a trasformare quello che sembra un percorso puramente sperimentale in una vera e propria ricerca scientifica anche teorica ha costretto Ángel a una difficile successione di scelte, definizioni, analisi, prese di posizione personali, per esempio quelle relative all'idea ancora così dibattuta e confusa di competenza e la coppia creencias/convicciones (credenze/convinzioni) che, fino a poco tempo fa, veniva affrontata in modo superficiale dai ricercatori e che invece costituisce in questa ricerca una chiave di volta di estremo interesse.
Auspico che questo libro possa finire fra le mani di coloro che istituzionalmente si occupano della formazione dei futuri insegnanti (di matematica, ma non solo) affinché le scelte anche amministrative possano essere prese in funzione dei sorprendenti e profondi risultati di ricerca raggiunti in questo lavoro.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Sbaragli, S., & De Carli, A. (2021). *Matematici a fumetti*. Dedalo.

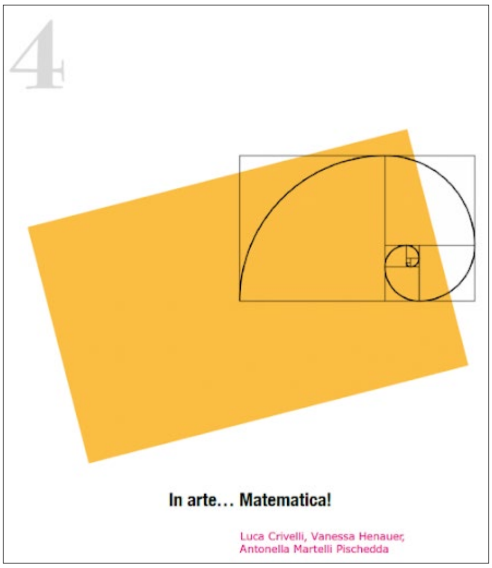


L'incontro tra la storia della matematica e il fumetto, come strumento attraverso cui raccontarla, rende unica e originale la nuova impresa editoriale di Silvia Sbaragli, didatta della matematica, e Andrea De Carli, illustratore e docente di arti visive. L'efficace collaborazione tra i due autori, che hanno unito le loro competenze e incrociato i loro sguardi, ha permesso di creare un connubio vincente tra matematica e fumetto. Le ultime pagine del libro raccontano proprio come nasce una storia, svelando qualche segreto e tecnica per invitare il lettore, e in particolare i docenti con i propri allievi, a creare fumetti nuovi attorno a un personaggio o a un aneddoto della storia della matematica.
Questa raccolta di fumetti si propone infatti come uno strumento didattico per supportare l'introduzione o l'acquisizione di concetti pregnanti della matematica di base per allievi del secondo e terzo ciclo della scuola dell'obbligo (8-14 anni). E, più in generale, la finalità di un tale progetto editoriale è quella di dare un volto umano a scoperte e teorie matematiche, che prendono vita tra queste pagine arricchendosi di un fascino storico e anche emotivo. Come si fa a non empatizzare con il distratto Talete che cade in un pozzo mentre è immerso nelle sue riflessioni, o a trattenere un sorriso guardando Archimede che corre nudo per le strade di Siracusa gridando «Eureka!»? E ancora, come si può non commuoversi leggendo il discorso di Maryam Mirzakhani, mentre riceve la medaglia Fields?
Si scoprono così interessanti dettagli della vita di alcuni dei più grandi matematici: Platone era anche un grande lottatore, Ippocrate aveva abbandonato la sua vita da mercante per dedicarsi totalmente alla matematica, Turing era un abilissimo maratoneta, … tutte caratteristiche che rendono più vicini agli allievi del presente i matematici del passato, svelandone i lati più umani e intriganti.
È proprio ciò che accade a Ellie, la protagonista di questo libro. Ellie è una ragazzina che frequenta la scuola media ed è poco motivata a studiare matematica, a tal punto che, nel fumetto introduttivo, afferma: «La geometria è una barba assurda, nessun essere umano potrebbe avere inventato una cosa così noiosa». Lo esclama mentre implora suo zio Angelo, stravagante scienziato, perché la lasci giocare ai videogiochi invece di fare i compiti. Lo zio Angelo non demorde, anzi le mostra subito la sua nuova invenzione con la quale cercherà di farle cambiare idea sulla matematica: i fantasmagorici occhiali matematici virtuali, indossando i quali è possibile viaggiare nel tempo e nello spazio come proiezioni virtuali per "spiare" i momenti salienti della vita dei più grandi matematici della storia.
Così Ellie e Angelo iniziano un entusiasmante viaggio, percorrendo più di due millenni di storia, alla ricerca di venti importanti matematici: Didone, Talete, Pitagora, Socrate, Ippocrate, Platone, Euclide, Archimede, Ipazia, Al-Khwārizmī, Fibonacci, Pacioli (e Leonardo Da Vinci), Galileo, Euler, Gauss, Möbius, Cantor, von Neumann, Turing, e Mirzakhani.

Da ogni incontro, Ellie si porta a casa un messaggio; emblematico è il suo incontro con Pacioli da cui si allontana, osservando: «Beh, se perfino Leonardo Da Vinci ha avuto bisogno di aiuto per capire la matematica, allora non mi devo vergognare a chiedere una mano». Pian piano Ellie si appassiona ai temi matematici trattati e diventa sempre più curiosa e riflessiva. È questo l'atteggiamento che gli autori auspicano possa svilupparsi anche nel giovane lettore di questa raccolta di fumetti affinché, come si legge nella prefazione, la matematica possa diventare ai suoi occhi «sempre più affascinante, importante e utile».
Con l'auspicio che l'attegg~~iamento positivo di Ellie nei confronti della matematica si diffonda~~ in modo capillare, gli autori hanno inviato una copia cartacea gratuita in ogni scuola elementare e media del Canton Ticino, e hanno reso i singoli episodi scaricabili gratuitamente anche in versione digitale al seguente link: https://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/matematici-a-fumetti/. Si tratta, infatti, di uno strumento didattico fortemente raccomandabile a tutti i docenti: basti pensare, ad esempio, all'efficacia di studiare le relazioni tra area e perimetro di figure piane attraverso la leggenda di Didone; o alla sorpresa di lavorare in modo interdisciplinare tra matematica e musica, approfittando del fumetto di Pitagora.
Se ci si chiedeva come la storia della matematica potesse essere efficacemente integrata nella didattica, per rendere l'insegnamento e l'apprendimento di questa disciplina ancora più ricco e solido, ecco una proposta innovativa, concreta ed efficacemente utilizzabile nella pratica scolastica.

Monica Panero
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Crivelli, L., Henauer, V., & Martelli Pischedda, A. (2021). *In arte... Matematica!* Collana Praticamente. DECS-SUPSI.[4]



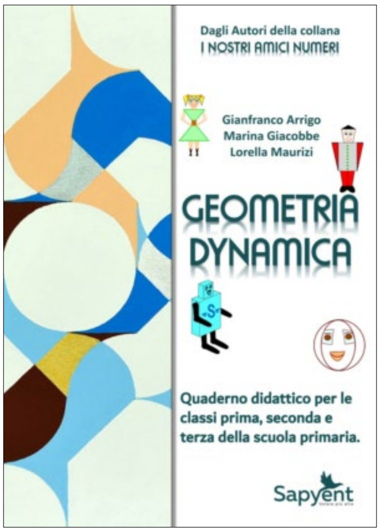
Due mondi apparentemente lontani, due approcci per molti antitetici: arte e matematica, due facce della creatività umana, che permettono di vedere e capire meglio il nostro mondo, integrando intelligenze diverse della mente. La libertà e l'immaginazione dell'una, il rigore e la genialità dell'altra, attributi che spesso si scambiano e si confondono in un unico atto creativo. Quando poi questi mondi entrano insieme in classe, i bambini ne rimangono affascinati e si scoprono artisti con la voglia di capire quali sono le regole nascoste di questo gioco.
Ne sono ben consapevoli gli autori di questa pubblicazione, maestri che hanno portato nelle proprie classi la magia di questo incontro inaspettato tra discipline così diverse; dal loro lavoro nasce questo libretto, quarta uscita della collana *Praticamente* curata del Centro competenze didattica della matematica (DDM) del Dipartimento formazione e apprendimento (DFA) della SUPSI (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana), Canton Ticino.
L'intento del libro è di raccontare alcuni dei percorsi progettati, sviluppati e realizzati all'interno della scuola elementare e proposti anche in occasione del festival Matematicando (https://www.matematicando.supsi.ch/eventi/matematicando-festival-2018/), nell'ottica di condividere, con i colleghi interessati, esperienze vissute nell'ambito di questo appassionante viaggio, facendo cogliere l'arte nella matematica e la matematica nell'arte.
Gli autori si ispirano al libro di Bruno D'Amore *Arte e matematica*, edito dalla casa editrice Dedalo, e traspongono nella realtà scolastica le riflessioni e i punti nodali che emergono da questa lettura, progettando attività che avvicinano anche i più piccoli a questa duplice visione della realtà. Si indossano gli "occhiali della matematica", che mostrano un mondo fatto di numeri e forme geometriche: un'operazione metaforica ideata da Silvia Sbaragli fin dal 1997, che permette ad esempio di far emergere la matematica da un'opera artistica. Non sempre l'operazione è evidente: a volte i numeri fuoriescono in modo chiaro e ben visibili anche agli occhi di bambini inesperti (come ad esempio nelle opere di Paolo Grassi), e la geometria è riconoscibile ad un primo sguardo (come nelle collezioni di Max Bill); altre volte, invece, la matematica si nasconde tra le linee marcate, nelle proporzioni sottese e ben studiate dall'artista, nella struttura intrinseca di un'opera, nel suo significato.

4. Anteprima disponibile a questo Link.

I percorsi proposti in questo libro vogliono rendere attenti i bambini anche a ciò che non è immediatamente palese, e spronarli a cimentarsi in qualità di artisti che, a partire da numeri e forme, possono creare qualcosa di originale, unico, artistico.
Le proposte, dunque, sono quelle di usare la linea in tutte le tipologie geometriche viste in classe per ricreare opere di Kandinsky, Picasso o Calder, oppure tassellare superfici con figure geometriche di vario genere per immedesimarsi nel genio estroso di Escher, o ancora giocare con il concetto di parallelismo e perpendicolarità come faceva Mondrian, stupirsi davanti a numeri "magici" che si nascondono dietro ogni struttura perfettamente armoniosa.
I bambini osservano, riproducono, creano e riflettono su tanti aspetti matematici e geometrici che spesso la scuola propone come realtà date, predefinite, con cui non si può interagire ma solo guardare da lontano.
L'arte diventa un mezzo per avvicinare i bambini al fantastico mondo della matematica e far toccare con mano alcuni fenomeni che acquistano un senso solo se visti e vissuti in prima persona. Ogni pagina e immagine (meravigliose le opere d'arte dei bambini!) di questo libro è una preziosa risorsa che ogni docente dalla scuola dell'obbligo (ma non solo dell'obbligo) dovrebbe sfruttare nella propria pratica di insegnamento, per far capire ai propri allievi che dietro ogni numero e ogni forma c'è un'opera d'arte!

Elena Franchini
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Arrigo, G., Giacobbe, M., & Maurizi, L. (2021). *Geometria dynamica*. Sapyent.



Dopo il successo ottenuto con una loro precedente pubblicazione destinata allo stesso livello scolastico, la scuola elementare, sul tema dell'aritmetica, questa volta i tre autori propongono, sempre per la casa editrice Sapyent, una coppia di quaderni dedicati alla geometria, un primo destinato alle classi I, II e III e un secondo alle classi successive.
Ma, così com'era già successo per i numeri, anche nel caso della geometria la scelta non è banale e scontata; sempre, nella tradizione, sia storica che didattica, prima si affronta la geometria per così dire statica, cioè delle figure in sé, mostrandone, scoprendone, studiandone, analizzandone le proprietà per così dire statiche, e poi si passa a quelle che la geometria ufficiale ha chiamato trasformazioni geometriche ma che molti autori, fra i quali i nostri, preferiscono chiamare geometria dinamica. In questo testo si tende a ribaltare un modo di fare tradizionale, il che spiega il titolo dell'opera.
Grazie a divertenti personaggi di fantasia coinvolgenti, gli autori accompagnano i bambini a scoperte affascinanti spesso legate al reale; per esempio, la sfida a riconoscere, come prima attività (sì, proprio quella iniziale) fra diverse forme tridimensionali quali sono quelle che si possono individuare come scatole che rotolano facilmente, una sorta di introduzione dinamica e concreta alla descrizione delle forme. Voglio notare che, in attività analoghe diffusesi qualche tempo fa, alcuni autori storpiavano l'idea di figura di rotazione (cilindro, cono, sfera, per esempio) con la dizione strampalata figure che rotolano, confondendo la rotazione geometrica con aspetti fisici e dinamici legati al mondo della realtà empirica. Mi spiego meglio. Un cilindro è il solido tridimensionale che si ottiene facendo ruotare un rettangolo attorno alla retta che contiene uno dei propri lati; il rettangolo ruota, *non* rotola. La figura che si ottiene è detta "di rotazione", non oggetto "rotolante". In questo quaderno ciò non capita.
L'idea iniziale è subito illustrata fin dalle analisi dei rapporti fra i poliedri e le forme delle facce che li costituiscono e li delimitano, come la didattica degli ultimi trent'anni ha più volte tentato di suggerire. In altre parole, si è più volte spiegato ai docenti di scuola elementare che, poiché i bambini piccoli vedono meglio la tridimensionalità che la bidimensionalità, bisogna stravolgere la modalità espositiva classica euclidea, iniziando dagli oggetti cosiddetti solidi, per giungere ai piani e non viceversa. Qui l'idea è raccolta e seguita. Seguono giochi vari di riconoscimento, di descrizione, di composizione, di denominazione, di costruzione con cannucce, fino a giungere alle figure più comuni e più note, ma anche le più studiate: il cubo, i poliedri, i prismi, le piramidi, il disegno prospettico grazie a fogli punteggiati, la simmetria, il trapezio. Fra le simmetrie, quella assiale prima e quella centrale poi, la scoperta della simmetria in oggetti, figure, lettere, cifre. E finalmente, alla fine del I volume, dunque

alla fine della classe terza, arrivano le vere e proprie trasformazioni geometriche: le traslazioni, per continuare nel secondo volume, e dunque in quarta, con attività dimensionali approfittando anche di ben noti e diffusi giochi. Si passa poi a oggetti geometrici di un certo impegno, come gli angoli, e a figure piane tradizionali, come i triangoli; per passare alla circonferenza e al cerchio, alle loro misurazioni, all'uso di strumenti geometricamente appropriati troppo spesso dimenticati. Ottima l'idea di proporre le rotazioni, il che porta a costruzioni geometriche con riga e compasso, strumenti stupidamente scomparsi dalle nostre aule. Troviamo poi le similitudini con le opportune proprietà. Per tornare allo studio topologico dei poliedri, come la formula di Eulero. Ed ecco il cilindro, il cono, la sfera, tipiche figure tridimensionali di rotazione. E l'analisi di misure relative a aree, perimetri e volumi. I poligoni regolari hanno una loro sezione specifica alla fine del percorso.
Eccellente l'idea di ricorrere all'opera del formidabile artista italiano Lorenzo Bocca per mostrare la relazione eccellente fra geometria e arte figurativa. Lorenzo in questo campo è un vero creatore, come mostrano le sue opere e come ha più volte esemplificato nelle sue mostre, tra le quali mi piace ricordare la personale tenuta nella galleria Comunale di Arte Contemporanea di Castel San Pietro Terme nel giugno 2018 (con testo critico di presentazione in catalogo del sottoscritto, testo usato poi anche in altre mostre personali).
Un testo così ricco di immagini, figure e disegni, con pochissimo testo scritto, parecchie decine di proposte di esercizi e problemi da risolvere, dovrebbe riscuotere un deciso successo presso i docenti di scuola elementare, soprattutto quelli che sentono il bisogno di dare uno scossone notevole alla didattica della geometria, troppo spesso ancorata a metodologie stantie e povere di fantasia.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia