Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 11

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Impaginazione:
Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
matematica

11

Maggio 2022

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), I - II, DOI:10.33683/ddm.22.11.0 OPEN ACCESS

Editoriale

> «La teoria dell'argomentazione rifiuta le antitesi troppo nette: mostra che tra la verità assoluta e la non-verità c'è posto per le verità da sottoporsi a continua revisione mercè la tecnica dell'addurre ragioni pro e contro. Sa che quando gli uomini cessano di credere alle buone ragioni, comincia la violenza».
>
> (Bobbio, 2013, prefazione a Perelman & Olbrecht-Tyteca, 1958/2013, XIX)

Come afferma Norberto Bobbio nella citazione proposta, «quando gli uomini cessano di credere alle buone ragioni [, purtroppo,] comincia la violenza».
Questa frase, riletta anche alla luce del complesso e difficile contesto mondiale attuale, ci ricorda quanto siano importanti quelle competenze trasversali delle quali oggigiorno parlano tutti i programmi scolastici: imparare a comunicare e ad argomentare, a comprendere e accettare il punto di vista degli altri, a saper ascoltare e collaborare, a saper includere le diversità ecc. Sono tanti i valori, i principi, le conoscenze e le abilità che vorremmo trasformare in vere e proprie competenze tramite il nostro lavoro quotidiano, nell'intento di riuscire a formare una società migliore.
Può sembrare fuori luogo toccare i concetti proposti da Bobbio all'interno di una rivista che si occupa "solo" di didattica della matematica, ma ciò che ci si auspica è che questa rivista possa rappresentare un piccolissimo tassello verso il confronto, lo scambio, la condivisione di punti di vista e di percorsi didattici che possano formare generazioni sempre più consapevoli e pronte al dialogo e all'ascolto. Occorre in effetti ricordare che chi ha scelto, come gli autori dei contributi di questo numero, di spendere un po' del proprio tempo a cercare, provare, riflettere, sperimentare, scrivere, sa bene che queste attività richiedono sempre il coraggio di mettersi in discussione in un'ottica dialogica e di confronto argomentativo, prima di tutto con sé stessi, ma soprattutto con l'alterità, e altresì la volontà di donare agli altri ricerche ed esperienze considerate efficaci sul piano delle competenze da sviluppare nelle giovani generazioni.

Come di consueto, nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli. Il primo affronta la nozione di numeri negativi, contestualizzandoli all'interno del panorama che ha portato alla loro accettazione nella forma che hanno oggi. A partire dall'analisi delle difficoltà e delle misconcezioni degli allievi, nell'articolo vengono esposti alcuni degli ostacoli epistemologici comunemente osservati nella comprensione dei numeri negativi, dopodiché si affrontano e confrontano due diversi modelli utilizzati per introdurre le quattro operazioni di base. Il secondo articolo propone una riflessione riguardo l'importanza di costruire percorsi didattici mirati a favorire un collegamento tra rappresentazioni grafiche e linguaggio algebrico per la risoluzione di equazioni. Grazie ad alcuni strumenti teorici provenienti dal filone di ricerca dell'*early algebra*, vengono presentate e analizzate situazioni matematiche tramite le quali il lettore-insegnante potrà progettare percorsi didattici inclusivi ed efficaci, in cui il registro algebrico e quello visuale-geometrico saranno sempre più in comunicazione tra loro. Il terzo articolo propone due studi di caso relativi a due bambini della classe terza della scuola primaria italiana,[1] grazie ai quali si riflette sull'attività matematica individuale che hanno svolto a casa e su come l'interazione con i genitori abbia influenzato tale attività. Dopo aver presentato una breve rassegna della letteratura sul tema del "fare scuola a casa" e del rapporto dei genitori con i

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

compiti di matematica dei figli, si analizzano qualitativamente i dati raccolti durante il lockdown dovuto al Covid-19.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Il primo contributo presenta alcuni percorsi didattici incentrati su attività di scoperta, di stampo laboratoriale e ludico, finalizzati all'apprendimento numerico in prima elementare, partendo dalla ricerca e la conoscenza dei numeri con cui i bambini si confrontano nella quotidianità. Per ogni percorso vengono anche presentati alcuni possibili legami con i materiali creati all'interno del progetto *MaMa – Matematica per la scuola elementare*. Il secondo contributo illustra una sperimentazione condotta in Italia con allievi di una classe seconda primaria, il cui nodo didattico riguarda la possibilità di sviluppare un approccio al pensiero pre-algebrico. Dopo aver descritto la trasposizione didattica di alcuni problemi della scuola cinese (problemi con variazione ed equazioni figurali), si rileva come, a partire dal testo di un problema e dalla rappresentazione grafica dei suoi dati, i bambini sono in grado di comprendere e, a loro volta, costruire variazioni del problema di partenza, esplorando le potenzialità legate alla struttura della variazione stessa. Il terzo contributo descrive un'attività che si propone di stimolare, attraverso la pratica della piegatura origami, una riflessione metacognitiva sul tema dell'apprendimento. L'esperienza, da svolgersi nelle prime settimane del percorso di studi universitario, mette in luce l'importanza di sviluppare un atteggiamento consapevole nei confronti delle attività di studio e affronta due temi relazionati con l'efficacia dell'apprendimento: il ruolo della curiosità come spinta motivazionale e l'importanza della fiducia nel docente e nelle sue proposte didattiche. Infine, l'ultimo contributo presenta un percorso didattico proposto in Italia agli alunni di una classe quarta primaria incentrato sull'uso del denaro. Attraverso l'utilizzo di un approccio concreto ed esperienziale, sullo sfondo di un contesto di apprendimento significativo per gli alunni, vengono mostrate le potenzialità inclusive del percorso, in particolare per gli studenti con disabilità.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Bibliografia

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2013). *Trattato dell'argomentazione. La nuova retorica.* Giulio Einaudi editore (Titolo originale: *La nouvelle rhétorique. Traité de l'Argumentation* pubblicato nel 1958).

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), III - IV, DOI:10.33683/ddm.22.11.0
OPEN ACCESS

Editorial

> «The theory of argumentation rejects overly clear antitheses: it shows that between absolute truth and non-truth there is room for truths to be subjected to continuous revision thanks to the technique of adducing reasons for and against. It knows that when men stop believing in good reasons, violence begins».
> (Bobbio, 2013, foreword to Perelman & Olbrecht-Tyteca, 1958/2013, XIX, translated by the author)

As Norberto Bobbio states in the proposed quotation, «when men stop believing in good reasons, violence [unfortunately] begins».
This sentence, in the complex and difficult current world context, reminds us of the importance of those transversal competences which are nowadays covered in all school curricula: learning to communicate and argue, understanding and accepting the point of view of others, being able to listen and collaborate, being able to include diversity etc. There are many values, principles, knowledge and skills that we would like to transform into real competences through our daily work, with the aim of achieving a better society.
It may seem out of place to touch on the concepts proposed by Bobbio in a journal that deals "only" with the didactics of mathematics. We hope that this journal represents a very small piece towards the comparison, exchange and sharing of points of view as well as educational paths which can form generations that are increasingly aware and ready to dialogue and listen. It should be remembered that those who have chosen, like the authors of this issue, to spend some of their time searching, trying, reflecting, experimenting and writing, know well that these activities always require the courage to question themselves from a point of view of argumentative confrontation, first of all with oneself, but above all with others. Moreover, they require also the willingness to share research and experience considered effective in terms of skills to be developed in the younger generation.

As usual, there are three articles in the *Riflessione e ricerca* section. The first one deals with the notion of negative numbers, contextualizing them within the landscape that led to their acceptance in the form they have today. Starting from an analysis of the difficulties and misconceptions of the students, the article discusses some of the epistemological obstacles commonly observed in understanding negative numbers, and then discusses and compares two different models used to introduce the four basic operations. The second article proposes a reflection on the importance of constructing educational paths aimed at promoting a connection between graphical representations and algebraic language for solving equations. Thanks to some theoretical tools from the field of research of *early algebra*, the authors present and analyze some mathematical situations through which the reader-teacher will be able to design inclusive and effective didactic paths, in which the algebraic register and the visual-geometric register will be increasingly in communication with each other. The third article proposes two case studies of two children in the third grade of Italian primary school,[1] which reflect on their individual mathematical activity at home and how their interaction with their parents influenced this activity. After presenting a brief review of the literature on the subject of "home schooling" and the relationship of parents with their children's math tasks, the article proposes a qualitative analysis of the data collected during the Covid-19 lockdown.

1. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.

In the *Esperienze didattiche* section, there are four articles. The first contribution presents some didactic paths focused on discovery activities, of playful and laboratorial nature, aimed at numerical learning in first grade of primary school, starting from research and knowledge of the numbers with which children are confronted in their daily lives. For each path are also presented some possible links with the materials created within the project *MaMa – Matematica per la scuola elementare*. The second article illustrates an experiment conducted in Italy with students in the second grade of primary school, whose didactic node concerns the possibility of developing an approach to pre-algebraic thinking. After describing the didactic transposition of some problems of the Chinese school (problems with variation and figural equations), it can be noticed how, starting from the text of a problem and the graphical representation of its data, children can understand and, in turn, construct variations of the starting problem, exploring the potentialities linked to the structure of the variation itself. The third article describes an activity that aims to stimulate, through the practice of folding origami, a metacognitive reflection on the topic of learning. The experiment, to be carried out during the first weeks of an academic course, highlights the importance of developing a conscious attitude towards study activities and addresses two issues related to the effectiveness of learning: the role of curiosity as a motivational stimulus and the importance of trust in the teacher and his/her teaching proposals. Finally, the last contribution presents an educational pathway proposed in Italy to fourth grade students of a primary school focused on the use of money. Using a concrete and experiential approach, on the background of a meaningful learning context for pupils, the inclusive potential of the pathway is shown, especially for students with disabilities.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Bibliography

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2013). *Trattato dell'argomentazione. La nuova retorica.* Giulio Einaudi editore (Original work: *La nouvelle rhétorique. Traité de l'Argumentation* published 1958).

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 9 - 32, DOI: 10.33683/ddm.22.11.1

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Una revisione della ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi: una "ricerca-azione" sull'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri

A review of the research in teaching and learning the negative numbers: an "action research" concerning the application of the geometrical model of the number line

Athanasios Gagatsis• e Maria Alexandrou°
• Facoltà delle scienze sociali e dell'educazione, Università di Cipro – Nicosia, Cipro
° Insegnante di matematica di scuola secondaria, Ministero dell'Educazione, Cultura, Sport e Gioventù – Cipro

✉ gagatsis@ucy.ac.cy, maria.alexandrou@hotmail.com

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA ORIGINALE

Sunto / La nozione di numeri negativi è una delle più fondamentali della matematica. Per molti anni hanno causato confusione e sono stati oggetto di controversie tra grandi ricercatori, finché lo sviluppo dell'algebra simbolica ha portato alla loro accettazione nella forma che hanno oggi. Come prevedibile, quando gli studenti imparano per la prima volta il concetto di numeri negativi e le operazioni tra di loro, si verificano varie difficoltà e sorgono misconcezioni. La loro comprensione è uno dei compiti più impegnativi dell'insegnamento della matematica a causa della loro complessità e natura astratta. Per questo scopo, sono stati ideati e impiegati vari modelli. Nel presente studio esponiamo alcuni degli ostacoli epistemologici comunemente osservati nella comprensione dei numeri negativi, dopodiché esponiamo e confrontiamo due diversi modelli frequentemente utilizzati per introdurre le quattro operazioni di base tra loro.

Parole chiave: numeri negativi; modello geometrico; linea dei numeri; ricerca-azione.

Abstract / The notion of negative numbers is one of the most fundamental in mathematics. For many years, they have caused confusion and they have been an object of controversy among great researchers, until the development of symbolic algebra led to their acceptance in the form they have today. When students are first introduced to the concept of negative numbers and the operations between them, various difficulties occur and misconceptions arise, as expected. Their comprehension is one of the most challenging tasks of teaching mathematics due to their complexity and abstract nature. For this purpose, various models have been devised and employed. In the present study we expose some of the epistemological obstacles commonly observed in understanding negative numbers and then exhibit and compare two different models frequently used for introducing the four basic operations between them.

Keywords: negative numbers; geometrical model; number line; action research.

1 Introduzione

Questo articolo è, in un certo senso, il risultato di un corso intensivo di didattica della matematica tenuto da un ricercatore di educazione matematica a un gruppo di insegnanti della scuola secondaria con alte qualifiche accademiche esperti di matematica. Più specificamente, l'articolo è il risultato di una stretta collaborazione tra i due autori dell'articolo, cioè, un ricercatore in educazione matematica e un insegnante del corso che è anche ricercatrice in matematica. Lo scopo principale del nostro articolo è quello di cercare di trovare modi per collegare la ricerca in educazione matematica relativa ai numeri negativi con la pratica didattica nella scuola. L'articolo si presenta come un esempio di connessione tra ricerca e pratica. Consiste in una revisione della ricerca dedicata a uno studio generale della questione dell'insegnamento dei numeri negativi e una "ricerca-azione" di un insegnante di matematica. L'articolo è diviso in due sezioni:

– Nel par. 2 presentiamo una rassegna di un gran numero di pubblicazioni che sono direttamente o indirettamente collegate alla comprensione e all'apprendimento dei numeri negativi. Abbiamo anche incluso in questa prima parte alcuni articoli relativi a modelli geometrici di insegnamento della matematica che potrebbero potenzialmente essere usati dagli insegnanti di matematica coi loro studenti.
– Nel par. 3 presentiamo una breve descrizione della metodologia della "ricerca-azione". Dopodiché presentiamo i due modelli specifici di insegnamento dei numeri negativi che derivano dalla nostra rassegna della ricerca e la loro applicazione agli studenti della scuola secondaria. Infine, viene presentata la "ricerca-azione" dell'insegnante di matematica, che consiste nell'applicazione dei due modelli da parte di un insegnante di matematica coi suoi studenti.

Il secondo paragrafo è diviso in quattro sottoparagrafi. Nel par. 2.1 presentiamo alcuni concetti e metodi della didattica della matematica che sono stati applicati alla comprensione, all'apprendimento e all'insegnamento della matematica come lo studio storico di un concetto matematico, il concetto di ostacolo epistemologico, il concetto di contratto didattico, la teoria della trasformazione didattica o trasposizione didattica e la teoria delle situazioni didattiche.
Nel par. 2.2, i concetti e i metodi menzionati sopra sono specializzati in vari studi sull'evoluzione storica del concetto di numeri negativi, così come le ricerche in didattica della matematica per la comprensione e l'apprendimento dei numeri negativi. Sono anche messi in relazione al concetto di valore assoluto, la cui evoluzione storica è strettamente legata all'evoluzione storica e alla comprensione dei numeri negativi.
Nel par. 2.3, presentiamo alcuni punti di vista sul ruolo delle rappresentazioni e dei modelli nell'insegnamento della matematica. Dato che una rappresentazione non può descrivere completamente un costrutto matematico e diverse rappresentazioni hanno diversi vantaggi, insistiamo sulla necessità di usare una varietà di rappresentazioni nell'insegnamento della matematica. Diamo diversi esempi di ricerche riguardanti l'uso di rappresentazioni nell'insegnamento e nell'apprendimento di frazioni e funzioni. Inoltre, sosteniamo che l'importanza dell'uso di modelli geometrici nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica è molto alta.
Infine, nel par. 2.4, presentiamo una ricerca sull'uso della linea dei numeri nelle operazioni elementari sui numeri interi da parte degli studenti della scuola primaria.[1] Il fenomeno della compartimentazione è osservato perché la linea dei numeri è usata come una semplice rappresentazione piuttosto che come un modello geometrico.
Il terzo paragrafo è diviso in quattro sottoparagrafi. In par. 3.1 presentiamo una breve descrizione della teoria e della metodologia della ricerca-azione.
Nel par. 3.2, viene presentata un'applicazione del modello delle cariche positive e negative per l'inse-

1. La scuola primaria a Cipro dura sei anni e corrisponde alla scuola elementare più il primo anno di scuola media nel Canton Ticino.

gnamento dei numeri negativi, come è stato preparato da un insegnante di matematica.
Nel par. 3.3 presentiamo un'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri per l'insegnamento delle operazioni tra numeri negativi, così come è stato preparato dallo stesso insegnante di matematica.
Infine, nel par. 3.4 presentiamo alcuni risultati del confronto dell'applicazione dei due modelli sulla base di un'analisi statistica descrittiva.

2 Ricerca nell'educazione matematica: il caso dell'insegnamento e dell'apprendimento dei numeri negativi

2.1 Una breve descrizione di alcuni concetti, metodi e teorie della didattica della matematica

Una scienza può progredire solo se delimita costantemente l'ambito della sua ricerca e definisce più precisamente l'oggetto che intende studiare.
Perciò, l'idea che la didattica sia lo studio scientifico dell'insegnamento non è sufficiente, poiché bisogna considerare quali aspetti di questo insegnamento prenderemo in considerazione e quali ignoreremo. In questo punto preciso, la pedagogia generale si differenzia dalla pedagogia di una materia.
La didattica della matematica è una scienza sperimentale. La sua metodologia si ispira ai principi ideati per la medicina sperimentale nel XIX secolo. Una prova (esperimento) è una situazione didattica preparata che dipende da un numero limitato di variabili controllate.
La ricerca in didattica richiede ricercatori di varie specialità: matematici, insegnanti, psicologi, linguisti, statistici, programmatori, storici (della matematica) e epistemologi. Di conseguenza, implica l'intervento di gruppi multidisciplinari. Inoltre, richiede una metodologia speciale e una terminologia speciale, senza l'uso della quale molti fenomeni didattici non possono essere interpretati. Dunque, la didattica della matematica ha sviluppato un insieme di concetti e metodi che delimitano il suo campo di validità (D'Amore & Gagatsis, 1997; Gagatsis & Maier, 1996; Gagatsis & Rogers, 1996).
Di seguito facciamo riferimento ad alcuni importanti concetti e metodi.
Un metodo importante è la trasformazione didattica o trasposizione didattica che si riferisce ai processi di trasformazione delle conoscenze scientifiche in oggetti di insegnamento. Quando un contenuto della conoscenza scientifica viene selezionato come conoscenza per l'insegnamento, c'è una serie di trasformazioni di adattamento che gli permettono di prendere il suo posto tra gli oggetti di insegnamento (Chevallard, 1985; Chevallard & Bosch, 2014). Di solito, i piani di studio non sono determinati solo dalla comunità matematica. Nella maggior parte dei Paesi, queste decisioni sono il risultato di interazioni tra matematici, insegnanti e altri membri sociali. Dipendono anche dai genitori o da scelte politiche. Il sapere scolastico è l'immagine finale del sapere scientifico dopo l'influenza di tutti questi fattori e dopo una serie di trasformazioni applicate ad esso. La trasposizione didattica è stata studiata in una varietà di concetti matematici in diversi sistemi educativi e, in particolare, nel concetto di valore assoluto (Gagatsis & Thomaidis, 1994, 1995, 1996).
Il termine contratto didattico si riferisce alle varie situazioni d'insegnamento in cui si definisce esplicitamente, in piccola parte in modo implicito ciò che viene gestito da ogni "partner" in un modo o nell'altro e di ciò di cui sono responsabili l'uno rispetto all'altro (Brousseau, 1983, 1997). Il ruolo del contratto didattico è quello di regolare le interazioni tra l'insegnante e lo studente in termini di una conoscenza. L'insegnante rispetta il contratto insegnando e dando valutazioni. Cerca di far imparare agli studenti ciò che vuole, ciò che devono imparare. È colui che sa tutto e guida gli studenti a produrre la loro risposta usando ciò che sanno. Lo studente rispetta il contratto se fa le valutazioni, se impara la lezione. Cerca di capire cosa vuole l'insegnante e di dare le risposte che si aspetta. Per esempio, cercherà di dare una risposta ad un problema proposto dall'insegnante anche se il problema non ha

soluzione. Tuttavia, questo non implica la comprensione del concetto menzionato. L'apprendimento non si basa su una cieca obbedienza ai termini del contratto ma sulla "violazione" del contratto.
Un esempio caratteristico del "contratto didattico" è legato al valore assoluto: gli studenti cercano di trovare soluzioni ad alcune equazioni che sono ovviamente "impossibili". Per esempio, l'equazione: $||x-5|-12|=-5$ (Gagatsis & Panaoura, 2014; Gagatsis & Thomaidis, 1994).
Una componente chiave della ricerca relativa alla didattica in Francia è la teoria delle situazioni didattiche. Secondo Brousseau la teoria delle situazioni didattiche esprime le condizioni in cui si genera la conoscenza matematica nel contesto dell'insegnamento e ne permette lo studio. In questo senso una situazione didattica è un insieme di relazioni tra un insegnante e uno studente, in cui si può riconoscere un piano (comune) di carattere sociale che mira all'acquisizione di una conoscenza da parte dello studente (Brousseau, 1997). Di conseguenza, l'insegnamento di una nozione matematica non può essere fatto in questa forma strutturale astratta che si incontra nella matematica pura. Deve essere insegnata nell'ambiente scolastico; deve assumere la forma specifica di un problema interessante ed essere trasformata in modo che il suo significato sia compreso dagli studenti. In questo modo il problema provoca varie azioni da parte loro, alcune formulazioni di possibili soluzioni, alcune spiegazioni ai compagni o all'insegnante, che in un certo senso portano alla "nascita" del concetto da apprendere. Un esempio caratteristico di situazione didattica riguarda "l'illusione della proporzionalità" (Modestou & Gagatsis, 2013).

2.2 Elementi storici e ostacoli all'apprendimento degli studenti relativi ai numeri negativi

Uno dei compiti più significativi della didattica della matematica è quello di identificare gli ostacoli che si oppongono alla comprensione e all'apprendimento di questa scienza. La ricerca indica che molti concetti matematici sono stati "segnati" dalle difficoltà dei grandi matematici. È ragionevole supporre che molte delle difficoltà che a un certo punto hanno fermato gli scienziati più ispirati, devono ancora preoccupare i nostri studenti. Lo studio storico di una nozione matematica è quindi un metodo importante della didattica della matematica, strettamente legato al concetto di ostacolo epistemologico.
In questo modo l'ostacolo epistemologico diventa un concetto importante della didattica della matematica. Tuttavia, si è osservata una grande controversia sulla nozione di ostacolo epistemologico, alla quale hanno partecipato ricercatori come Artigue, Brousseau, Duroux (Francia), Schubring (Germania), Sierpinska (Canada) ecc.
Brousseau (1983) definisce gli ostacoli nell'apprendimento come un insieme di errori che sono strettamente legati alla conoscenza precedente. Questo perché un tale errore nasce nella comprensione iniziale di un argomento da parte degli studenti, poi continua ad essere ripetuto in modo che sia incorporato nella memoria a lungo termine del sistema come conoscenza.
Brousseau (1983, 1997) afferma che gli errori e i fallimenti non hanno il ruolo semplificato che vorremmo che avessero. Gli errori non sono solo l'effetto dell'ignoranza, dell'incertezza, del caso, come sostenuto dalle teorie di apprendimento empiriste o comportamentiste, ma l'effetto di una conoscenza precedente che era interessante e di successo, ma che ora si rivela falsa o semplicemente inadatta. Errori di questo tipo non sono erratici e inaspettati, ma costituiscono degli ostacoli. Tanto nel funzionamento dell'insegnante quanto in quello dello studente, l'errore è una componente del significato del sapere acquisito. Secondo le percezioni di cui sopra, "l'ostacolo" deve avere le seguenti caratteristiche:

- È una conoscenza che funziona così com'è in un insieme di situazioni e per certi valori delle variabili di queste situazioni.
- Si tratta di una conoscenza che, nello sforzo di essere adattata ad altre situazioni o ad altri valori delle variabili, causerà errori specifici che possono essere osservati e analizzati.
- È una conoscenza solida. In situazioni che sfuggono al campo della sua validità, il suo rifiuto costerà agli studenti più di un tentativo per il suo adattamento.
- Possiamo superare l'ostacolo solo in situazioni speciali di rifiuto e questo rifiuto è una componente della conoscenza.

Un ostacolo è reso evidente dagli errori, ma questi errori non sono dovuti al caso, sono riproducibili, persistenti e non necessariamente spiegabili (Brousseau, 1997).
Un problema importante nella comprensione dei numeri negativi è la regola dei segni. Glaeser (1981) nel suo articolo *Epistémologie des nombres relatives* fa una ricerca storica e mostra che anche i grandi matematici, che hanno accettato i numeri negativi e li hanno usati nei loro calcoli, hanno incontrato problemi nel comprendere il concetto dietro di essi e soprattutto la regola dei segni.
La seguente regola, che veniva usata nelle scuole britanniche, dà un'idea del problema:

> Meno per Meno uguale a Più. Quale ne sia il motivo, non c'è bisogno di discuterne.

Glaeser ha iniziato la sua ricerca dopo aver letto il libro *Life of Henry Brulard* [autobiografia di Stendhal (1783-1843)].

> «Cosa potevo immaginare quando nessuno poteva spiegarmi come mai un meno per un meno è uguale a un più (– · – = +)? Alla fine, sono giunto a quello che dico ancora oggi: la regola "– · – = +" deve essere vera, perché è ovvio che, usando questa regola ogni volta nei calcoli, si arriva a risultati "veri e indiscutibili". La mia grande sfortuna è stata la seguente figura:

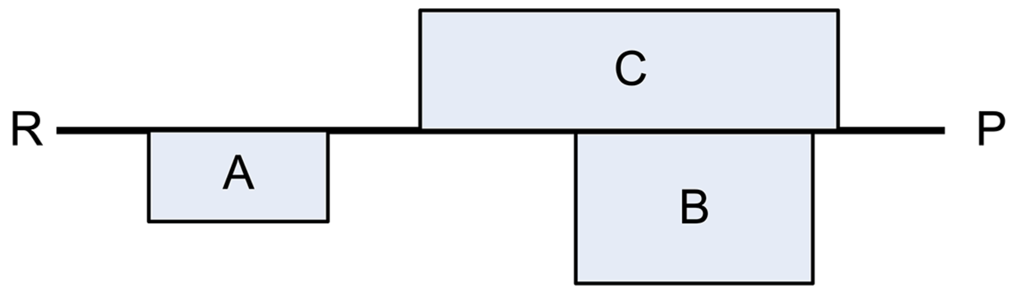


Figura 1. Quantità positive e negative.

> Sia RP la linea che separa il positivo dal negativo, tutto ciò che sta sopra è positivo, così come tutto ciò che sta sotto è negativo; prendendo il quadrato B tante volte quante sono le unità nel quadrato A, come posso riuscire a cambiare lato giungendo al quadrato C? Supponiamo che le quantità negative siano i debiti di un uomo, come, moltiplicando 10'000 franchi di debito per 500 franchi, riuscirà o può riuscire ad acquisire una fortuna di 5'000'000, cinque milioni?»

Glaeser inizia il suo studio con i testi di Diofanto di Alessandria (fine del III secolo), ai quali viene generalmente attribuito il "seme" della regola dei segni. Anche se questo autore non si riferisce chiaramente ai numeri rilevanti, all'inizio del suo libro Arithmetica I, fa un'implicazione allo sviluppo del prodotto di due differenze e scrive: «La carenza moltiplicata per la carenza produce la disponibilità; la carenza moltiplicata per la disponibilità produce la carenza».
Sulla base dello studio di un gran numero di testi matematici relativi ai numeri negativi, Glaeser propone una lista provvisoria di ostacoli riguardanti i numeri negativi:

1. Incapacità di manipolare quantità negative isolate.
2. Difficoltà nell'unificare la linea dei numeri.
   Questo si verifica, per esempio, quando si insiste sulle differenze qualitative tra quantità negative e numeri positivi o quando si descrive la linea come una giustapposizione di semirette opposte

che coinvolgono simboli eterogenei o quando si rifiuta di esaminare le caratteristiche dinamiche e statiche dei numeri allo stesso tempo.
3. L'ambiguità dei due "zeri".
4. La stagnazione allo stadio dei processi specifici (in contrasto con lo stadio dei processi standard).
5. La difficoltà di dissociarsi dal significato specifico dato ai numeri.
6. Il desiderio di un modello unificante: vogliamo applicare un buon modello additivo, ugualmente valido per spiegare il modello moltiplicativo, dove questo modello è funzionale.

(Glaeser, 1981, traduzione dell'autore)

La ricerca di Glaeser ha quindi dimostrato che abbiamo dovuto aspettare più di 1500 anni perché la "regola dei segni" fosse considerata come qualcosa di molto facile per la matematica. La seguente tabella fornisce una breve panoramica dei risultati della ricerca di Glaeser e dà luogo a un'intensa discussione tra i ricercatori per la "natura" del concetto di ostacolo epistemologico.

AUTORI	OSTACOLI 1	2	3	4	5	6
Diophantus	+					
Simon Stevin	+	–	–	–	–	–
René Descartes	+	?	–	?	+	+
Colin McLaurin	+	+	–	–	+	+
Léonard Euler	+	+	+	?	–	–
d'Alembert	+	–	–	–	–	–
Lazare Carnot	+	–	–	–		
Pierre de Laplace	+	+	–	–	+	?
Augustin Cauchy	+	+	–	–	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Tabella 1. Ostacoli legati ai numeri negativi.

Bishop et al. (2014) concludono che i matematici hanno storicamente affrontato quelli che noi descriviamo come tre ostacoli cognitivi legati ai numeri negativi: la mancanza di una rappresentazione fisica, tangibile e concreta per quantità inferiori a zero; il problema di togliere più di quanto si ha; e situazioni controintuitive alle interpretazioni di addizione e sottrazione come unire e separare.

Un altro grande ostacolo epistemologico legato alla nozione di numeri negativi è la difficoltà di comprenderli come oggetti intellettuali. Gli studenti comprendono intuitivamente i numeri naturali contrariamente ai numeri negativi. Lo studente deve necessariamente essere in grado di pensare ai numeri naturali in modo formale prima di poter iniziare con i numeri negativi (Streefland, 1996).

Anche se ci sono differenze tra i punti di vista dei ricercatori sul concetto di ostacolo epistemologico, Sierpinska sostiene che nonostante queste difficoltà e indipendentemente dalla metodologia, l'utilità dell'analisi epistemologica della matematica insegnata ai vari livelli scolastici, non sembra discutibile, né per la pratica didattica né per la scrittura di libri di testo, o come riferimento per qualsiasi tipo di ricerca in educazione matematica.

I ricercatori hanno rivelato molte altre difficoltà degli studenti legate ai numeri negativi. Per esempio, Bofferding sostiene che alcuni degli errori e malintesi che si verificano nei calcoli che coinvolgono i numeri negativi sono legati al modo in cui sono denotati. Più precisamente, dopo aver introdotto i numeri negativi il segno meno "–" ottiene tre significati e cioè: binario, simmetrico e unario (Bofferding, 2014). La funzione binaria si riferisce a qualsiasi situazione in cui il segno meno indica che l'operazione è una sottrazione (un segno di operazione). Nella funzione simmetrica il segno meno indica che il numero è l'opposto del suo numero correlato, come nell'esempio di 5 e –5. Nella funzione unaria il segno meno agisce come guida per il lettore che il numero è effettivamente negativo, come in –10 che è "*10 negativo*". Secondo una ricerca condotta da Bofferding (2010), gli studenti tendono il più delle volte a usare l'interpretazione binaria del segno meno, a volte usano l'interpretazione simmetrica e meno spesso l'interpretazione unaria.

Inoltre, le difficoltà si verificano quando si sottraggono numeri interi. Gli studenti a volte hanno dubbi quando interpretano situazioni della forma $a - (-b)$, nonostante ottengano soluzioni corrette ai problemi (Bruno & Martinón, 1999). Fanno fatica a capire che nei problemi di sottrazione di numeri negativi il risultato è un numero maggiore del minuendo, poiché è stato insegnato loro solo come eseguire la sottrazione tra numeri positivi con il sottraendo che è sempre minore del minuendo. Inoltre, l'idea di sottrarre un numero negativo che dà lo stesso risultato che sommare il contrario del numero negativo, è difficile da comprendere per molti studenti (Badarudin & Khalid, 2008). Quando gli studenti imparano che esistono i numeri interi negativi, potrebbero accettare che i numeri interi negativi sono minori di zero ma potrebbero sostenere che –5 è maggiore di –3 perché –5 è più lontano da zero di quanto lo sia –3, così come 5 è più lontano da zero di quanto lo sia 3 (Bofferding, 2014).

I numeri negativi oggi si possono trovare ogni volta che c'è una situazione con due direzioni: profitto-perdita, avanti-indietro, deposito-ritiro, est-ovest, sopra il livello del mare-sotto il livello del mare ecc. Le operazioni su questi numeri appaiono quando vogliamo combinare cambiamenti, confrontarli, trasformarli o calcolare tassi e questi modelli funzionano sufficientemente solo per l'addizione (Freudenthal, 1983). La maggior parte dei modelli usati per insegnare i numeri negativi funzionano per le operazioni di addizione e sottrazione. La moltiplicazione e la divisione possono richiedere un approccio puramente algebrico e i modelli concreti tradizionalmente usati dovrebbero essere abbandonati (Williams & Kutscher, 2008).

Secondo Ekol (2010), gli studenti non possono pensare a una corrispondenza uno-a-uno tra i numeri negativi e gli oggetti fisici, come hanno imparato a fare con i numeri naturali, e così cercano di memorizzare le regole per eseguire le operazioni tra di loro. La comprensione dei numeri negativi è, infatti, il passaggio dalla matematica concreta a quella astratta, qualcosa per cui non tutti gli studenti sono pronti nello stesso periodo, poiché richiede un'elevata capacità di pensiero astratto (Thomaidis, 2009).

Lo stesso ricercatore ha studiato, in collaborazione con Gagatsis, i numeri negativi nel contesto di uno studio storico del concetto di valore assoluto e ha rivelato una serie di ostacoli epistemologici legati alla nozione di numero naturale come risultato della misurazione (Gagatsis & Thomaidis, 1994, 1995, 1996). Infatti Gagatsis e Thomaidis hanno condotto un'analisi storica del valore assoluto basata su quattro fasi. Nella prima fase il valore assoluto appare come un concetto implicito, strettamente legato alla percezione del numero in questione come un numero comune dotato di segno. Ad esempio, Viète, nel suo testo del 1591, *In artem analyticen isagoge*, introduce una simbologia speciale per il "minus incerto": "A quadrato = B piano", "B piano = A quadrato". Nel XVII secolo i numeri negativi appaiono come estensioni dei numeri "reali" a nuovi oggetti "fantastici". Nella seconda fase il valore

assoluto svolge una funzione esplicativa nel contesto del calcolo algebrico e principalmente a livello dell'algebra delle disequazioni. Il valore assoluto viene visualizzato come "un numero senza segno" o come "una distanza dallo zero". Secondo Cartesio, «La somma di un'equazione che ha alcune soluzioni è sempre divisa per un binomio che consiste nella quantità incognita ridotta del valore di una soluzione "vera" o aumentata del valore di una soluzione "falsa"» (R. Descartes, 1637 - *La Géométrie*, citato da Gagatsis & Thomaidis, 1995, traduzione dell'autore). Egli prosegue: «[...] aumentando le soluzioni di una quantità maggiore di qualsiasi radice falsa, tutte le soluzioni diventeranno vere» (R. Descartes, 1637 - *La Géométrie*, citato da Gagatsis & Thomaidis, 1995, traduzione dell'autore). Prendiamo, per esempio, l'equazione: $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ che secondo la terminologia di Cartesio ha la radice 1 "vera" (soluzione positiva) e le radici 2 e 3 "false" (soluzioni negative). Cartesio propone una trasformazione: aumentiamo le radici con una quantità maggiore di una radice falsa, per esempio sostituendo $y = x + 4$, trasformando così l'equazione originale in un'equazione con le soluzioni "vere" 5, 2 e 1 (Gagatsis & Thomaidis, 1995). Nella terza fase, si osserva una stretta connessione con il fondamentale cambiamento concettuale relativo al concetto di numero, cioè il progressivo passaggio dalla comprensione empirica del numero come mezzo di misurazione delle quantità, al concetto astratto di numero come elemento di un sistema matematico caratterizzato dalle proprietà dei suoi elementi e dall'assenza di contraddizione. Per esempio, per Leibniz $a - b$ significa la differenza tra a e b quando a è maggiore di b, $b - a$ quando b è maggiore e questo valore assoluto (moli) può essere chiamato $| a - b |$ (C. W. Leibniz, *Monitum De Characterisebus Algebraicis*, traduzione dell'autore). Infine la quarta fase corrisponde al formalismo reso necessario dall'evoluzione dell'analisi complessa. Uno studio più recente di Gagatsis e Panaoura (2014) si è basato sull'analisi storica di Gagatsis e Thomaidis (1994, 1995, 1996) e si è concentrato sulle somiglianze delle interpretazioni personali degli studenti del valore assoluto con i diversi tipi di concezioni emerse nell'evoluzione storica della nozione. La loro analisi si basava anche sui concetti e metodi della didattica della matematica come la trasposizione didattica, il contratto didattico e l'ostacolo epistemologico presentati nei par. 2.1 e 2.2. Infatti hanno esaminato le prestazioni degli studenti in problemi sul valore assoluto e le sue relazioni con gli ostacoli didattici o gli ostacoli epistemologici e le connessioni tra le concezioni degli studenti sul valore assoluto (definizioni di valore assoluto) e le loro prestazioni nella risoluzione di equazioni e disequazioni che incorporano la nozione. Questo studio particolare ha esaminato studenti del secondo anno della scuola secondaria superiore (grado 11) ed è stato condotto a Cipro.[2]
Infine, Elia et al. (2016) cercano di cogliere la complessità matematica e cognitiva quando gli studenti affrontano il concetto di valore assoluto sulla base del Mathematical Working Space (MWS) (Kuzniak & Richard, 2014). Il MWS comprende una rete di due livelli, uno cognitivo e uno epistemologico, e questa rete si basa su tre genesi, ovvero semiotica (tra rappresentazioni e visualizzazione di oggetti matematici), quella strumentale (tra artefatti e costruzione matematica), e quella discorsiva (tra il sistema di riferimento teorico e l'accesso al ragionamento, all'argomentazione e alla validazione matematica). Quest'ultimo studio estende lo studio di Gagatsis e Panaoura (2014), in primo luogo, identificando e analizzando a fondo gli errori degli studenti nella risoluzione di equazioni e disequazioni tipiche e non tipiche che incorporano il valore assoluto, esplorando il legame tra questi errori e le concezioni (definizioni) di valore assoluto degli studenti e discernendo più precisamente gli ostacoli epistemologici o didattici che intervengono nel lavoro matematico degli studenti. In secondo luogo, questa analisi si svolge nel quadro del MWS, concentrandosi sulla genesi discorsiva e le sue relazioni con la genesi semiotica nel lavoro matematico degli studenti. Questo quadro teorico è completato da altri approcci teorici basati su una prospettiva storica sul concetto di valore assoluto (Gagatsis & Thomaidis, 1994, 1995, 1996) e sulle idee di ostacoli epistemologici e didattici nel lavoro matematico. Una prospettiva storica sul valore assoluto può dare un'idea della natura epistemologica e del conte-

2. Il sistema educativo di Cipro è suddiviso in educazione primaria (gradi 1-6, dai 6 ai 12 anni), educazione secondaria inferiore (gradi 7-9, dai 12 ai 15 anni), educazione secondaria superiore (gradi 10-12, dai 15 ai 18 anni) e educazione universitaria.

nuto del sistema di riferimento matematico relativo al concetto di valore assoluto nel MWS personale degli studenti (spazio di lavoro in cui ogni studente si occupa di oggetti matematici). Un'analisi degli ostacoli che gli studenti incontrano nel loro lavoro matematico sul valore assoluto può rivelare le fonti degli errori e dei ritardi degli studenti nella genesi del significato matematico del concetto e del ragionamento discorsivo. Gli autori citati (Elia et al., 2016) sono interessati agli ostacoli sia di natura epistemologica, che possono avere punti in comune con le concezioni nell'evoluzione storica del concetto, sia di carattere didattico, relativi al processo di trasposizione didattica del valore assoluto e al fenomeno del contratto didattico nell'insegnamento. Una particolarità importante di questa ricerca è che gli errori degli studenti negli esercizi che coinvolgono il concetto di valore assoluto si osservano in diversi sistemi educativi, indipendentemente dalla lingua e dalla cultura degli studenti (Elia et al., 2016). Infatti, è stata condotta un'indagine in Turchia a seguito di un'indagine simile a Cipro in cui le prestazioni degli studenti della scuola secondaria sono state valutate utilizzando un test. I risultati hanno mostrato una discrepanza nella concezione prevalente di valore assoluto dei due Paesi, indicando le differenze tra i due paesi nei rispettivi MWS. Per la Turchia, la concezione del valore assoluto come distanza dallo zero, che era la definizione più utilizzata, ha dato un supporto positivo alla soluzione dei problemi che coinvolgono il ragionamento discorsivo. Questo non è stato il caso di Cipro, in cui la concezione più diffusa del valore assoluto era "numero senza segno". L'analisi degli errori degli studenti turchi ha rivelato una distinzione tra gli errori nella genesi discorsiva degli studenti e la genesi semiotica, che erano una conseguenza degli ostacoli didattici o epistemologici che intervenivano nel MWS personale degli studenti. Crediamo fortemente che il modello MWS dovrebbe essere applicato all'insegnamento dei numeri negativi, così come al modo in cui le percezioni degli studenti dei numeri negativi contribuiscono alla formazione della genesi semiotica, strumentale e discorsiva.

2.3 Il ruolo delle rappresentazioni e dei modelli geometrici in matematica e nell'insegnamento della matematica: il caso della linea dei numeri

Una caratteristica dell'intelligenza umana è l'uso di diversi tipi di rappresentazioni. Questa caratteristica differenzia l'intelligenza umana dall'intelligenza degli animali, così come dall'intelligenza artificiale. L'elemento che differenzia l'intelligenza umana da quella degli animali non è solo l'uso di un linguaggio, ma anche l'uso di una varietà di sistemi di rappresentazioni: linguaggio verbale, linguaggio scritto (disegni, dipinti, diagrammi ecc.) (Duval, 2002). Perché una varietà di rappresentazioni semiotiche? Il costo dell'elaborazione, le limitate capacità di rappresentazione e la necessità di almeno due rappresentazioni per la comprensione di un concetto matematico, sono alcune delle ragioni. Quindi, i sistemi di rappresentazione sono fondamentali per l'apprendimento concettuale e determinano in misura significativa ciò che viene appreso. Riconoscere lo stesso concetto in più sistemi di rappresentazione, la capacità di manipolare il concetto all'interno di queste rappresentazioni così come la capacità di convertire in modo flessibile il concetto da un sistema di rappresentazione all'altro sono necessari per l'acquisizione del concetto (Elia et al., 2008; Goldin, 2001; Lesh et al., 1987) e permettono agli studenti di vedere relazioni arricchenti. Così, i diversi tipi di rappresentazioni esterne nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica sembrano essere stati ampiamente riconosciuti dalla comunità dell'educazione matematica (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Dato che una rappresentazione non può descrivere completamente un costrutto matematico e che ogni rappresentazione ha vantaggi diversi, l'uso di rappresentazioni multiple per la stessa situazione matematica è al centro della comprensione matematica (Duval, 2002, 2006).
La necessità di utilizzare una varietà di rappresentazioni o modelli nel sostenere e valutare le costruzioni di frazioni degli studenti è sottolineata da diversi studi (Deliyianni & Gagatsis, 2013; Deliyianni et al., 2016; Gagatsis et al., 2011; Gagatsis et al., 2016).
Inoltre, il concetto di funzione è di fondamentale importanza nell'apprendimento della matematica ed è stato al centro dell'attenzione della comunità di ricerca sull'educazione matematica negli ultimi decenni. Un vasto numero di studi ha sottolineato l'importanza delle diverse rappresentazioni e la traduzione tra esse nella comprensione del concetto di funzione (Elia et al., 2007; Elia et al., 2008;

Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Panaoura et al., 2017).

D'altra parte, l'importanza dell'uso dei modelli geometrici nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica è molto alta. Patronis dà un importante contributo sulla natura e l'uso dei modelli geometrici nell'insegnamento della matematica. Utilizza una vasta bibliografia scientifica sui modelli matematici e in particolare alcuni lavori di Thom. Secondo lui, la matematizzazione (o, per alcuni, il processo di "costruzione di modelli") può essere vista come costituita da due attività umane di uguale importanza, nessuna delle quali potrebbe essere ignorata senza conseguenze infelici. La prima attività, che di solito è più sottolineata quando si parla di modelli matematici nella pratica scientifica, è la previsione. La seconda è la spiegazione. La previsione non è una spiegazione, come sottolinea Thom (1982, 1991).

Ciascuna delle due attività umane sopra citate mira a un diverso scopo della ricerca scientifica: la previsione mira a un'azione di successo, mentre la spiegazione mira a una (migliore) comprensione. Seguendo Thom, possiamo considerare questi due scopi come complementari l'uno all'altro: per agire con successo, bisogna prima capire e, viceversa, per ottenere una migliore comprensione di alcuni fenomeni – o, per ottenere una comprensione "globale" – bisogna prima fare una sorta di azione e rappresentazione "locale", in modo che un'immagine "globale" risulti dalla raccolta di quelle "locali". Tuttavia, concentrandosi su uno scopo, la mente umana tende a dimenticare l'altro, e questa complementarità è solitamente concepita come un'opposizione (Gagatsis & Patronis, 2001).

Nel procedere dall'azione "locale" alla comprensione "globale", la geometrizzazione, l'atto di costruire "modelli geometrici", si trova in una posizione intermedia. Da un lato, la rappresentazione geometrica di un sistema fornisce un'immagine "globale" (o "olistica") di esso, aiutandoci così a cogliere subito il suo significato e le sue funzioni. Questa comprensione "immediata" può essere contrapposta al processo "lineare" della lettura di un testo. D'altra parte, un "modello geometrico" nel senso di Thom collega le singolarità (locali) del sistema con la sua struttura (globale) e spiega la struttura in termini di singolarità (Thom, 1982, 1991).

Il concetto di modello geometrico non sembra essere stato esplorato sistematicamente da filosofi ed epistemologi (con la possibile eccezione di Bachelard, 1986).

In uno studio precedente, Gagatsis e Patronis (1990) hanno esaminato il ruolo dei modelli geometrici nell'educazione matematica, in relazione allo sviluppo di un processo di pensiero riflessivo, che può essere osservato nell'attività degli studenti, degli insegnanti e dei matematici nelle loro ricerche. La conclusione principale di quello studio era che i bambini piccoli sviluppano serie di forme geometriche simili o continuamente deformate di triangoli, rettangoli e quadrati, che possono essere approssimativamente identificati a percorsi continui in uno spazio di politopi. Tali serie di forme sono state utilizzate per insegnare e spiegare l'idea delle trasformazioni in geometria, così come per rappresentare geometricamente le relazioni algebriche $x + y = s$, $x \cdot y = p$.

Emma Castelnuovo giustificava in un certo senso queste pratiche di insegnamento, poiché i modelli geometrici esplicativi utilizzati dagli insegnanti apparivano implicitamente nella percezione e nell'azione del pensiero dei bambini. Ciò che infatti significa questa conclusione quasi-empirica, alla luce delle precedenti osservazioni teoriche, è che, almeno alcuni degli "universi" geometrici, che sono stati utilizzati da scienziati e insegnanti in modelli di vari "sistemi", potrebbero anche essere considerati come modelli dell'attività umana o culturale nel suo primo aspetto informale (Gagatsis & Patronis, 1990).

Gli autori di cui sopra suggeriscono una definizione del modello geometrico:

> «Diremo che una collezione S di punti, linee o altre figure nello spazio euclideo n-dimensionale, che rappresenta un sistema Σ di oggetti o una situazione o un processo, è un modello geometrico (teorico) di Σ, se le proprietà geometriche intrinseche degli elementi di S sono tutte rilevanti in questa rappresentazione, cioè corrispondono a proprietà del sistema Σ. Se questa condizione è soddisfatta solo per le proprietà topologiche delle linee o figure in S, allora parleremo di un modello geometrico in senso ampio (o topologico)».
>
> (Gagatsis & Patronis, 1990, traduzione dell'autore)

Secondo Fischbein, un modello deve avere un carattere generatore, cioè deve generare (produrre) e rappresentare un numero illimitato di proprietà, partendo da un numero limitato di elementi e di regole per combinarle. Inoltre, un modello deve avere un carattere euristico, cioè condurci facilmente, e indipendentemente dal sistema iniziale che rappresenta, a nuove informazioni su quel sistema (Fischbein, 1972).

2.3.1 Qual è la differenza tra una rappresentazione e un modello geometrico?

È importante distinguere tra i termini "rappresentazione" e "modello": un modello è un modo di rappresentazione (come il linguaggio), ma una rappresentazione non è un modello, a meno che non abbia un carattere generatore ed euristico. La rappresentazione può contenere più elementi o omettere alcuni elementi dell'insieme da rappresentare. Mentre nel modello geometrico tutti i suoi elementi danno qualche informazione sull'insieme da rappresentare: ha carattere generatore ed euristico.
Sulla base di quanto detto pocanzi e delle opinioni di Patronis diamo la seguente definizione per il modello geometrico della linea dei numeri:
Sia Σ l'anello dei numeri interi o il campo dei numeri razionali – o un campo che contiene il campo dei numeri razionali – con le seguenti operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.
Sia S una linea numerata, cioè una linea con un insieme distinto di punti, che corrispondono a numeri interi o razionali. S è un modello geometrico per Σ.
Esiste un isomorfismo tra Σ e S, in modo che le operazioni tra i numeri, appartenenti a Σ, corrispondano alle operazioni tra segmenti di linea orientati o alle operazioni tra numeri e segmenti di linea.
Esempio: il prodotto di un numero e un segmento di linea orientato.

2.4 Una ricerca sull'uso della linea dei numeri nelle operazioni elementari sui numeri interi da parte degli studenti della scuola primaria

Molti testi di metodi matematici elementari raccomandano l'uso di diagrammi di linee di numeri per insegnare l'addizione e la sottrazione di numeri interi. Chi si occupa di stendere il piano degli studi per la scuola elementare include tra gli obiettivi la capacità di eseguire semplici calcoli di addizione e sottrazione di numeri interi con l'aiuto di un diagramma della linea dei numeri. Alcuni pedagoghi della matematica mettono in relazione la capacità di usare un diagramma della linea dei numeri con la comprensione delle operazioni elementari sui numeri interi. Al contrario, altri rifiutano questa idea: per esempio, Hart (1981, citato da Gagatsis et al., 2003) sostiene che il modello della linea dei numeri dovrebbe essere abbandonato. Liebeck (1984, citato da Gagatsis et al., 2003) sostiene che la linea dei numeri non è un aiuto visivo utile per aiutare i bambini più piccoli ad aggiungere e sottrarre numeri interi. D'altra parte, Ernest (1985, citato da Gagatsis et al., 2003) osserva che ci può essere una discrepanza tra la comprensione degli studenti dell'addizione di numeri interi e la loro comprensione della linea dei numeri usata per questa operazione (Gagatsis et al., 2003).
Gagatsis et al. (2003), motivati dalle critiche sull'uso della linea dei numeri per eseguire semplici calcoli di addizione e sottrazione tra numeri interi, hanno condotto un'indagine quantitativa con degli studenti della scuola elementare. Hanno dato agli studenti quattro questionari sui numeri interi. Il questionario A includeva calcoli di addizione e sottrazione di numeri interi in forma simbolica. Il questionario B includeva calcoli simili o identici con addizione e sottrazione di numeri interi in forma simbolica, ma permetteva anche agli studenti di usare la linea dei numeri. Il questionario C includeva calcoli simili o identici con addizione e sottrazione di numeri interi in forma simbolica, ma gli studenti erano obbligati a usare la linea dei numeri e a mostrare il risultato e il processo su di essa. Infine, il questionario D conteneva diagrammi di una linea dei numeri su cui le operazioni tra numeri interi erano rappresentate con archi e gli studenti dovevano trovare le relazioni numeriche delle operazioni così come i loro risultati. Nei seguenti diagrammi osserviamo i risultati.

2.4.1 Risultati dei questionari A e B

Osserviamo che in tutti i casi il punteggio nelle domande del questionario B è migliore del punteggio nelle domande del questionario A (eccezione A1-B1).

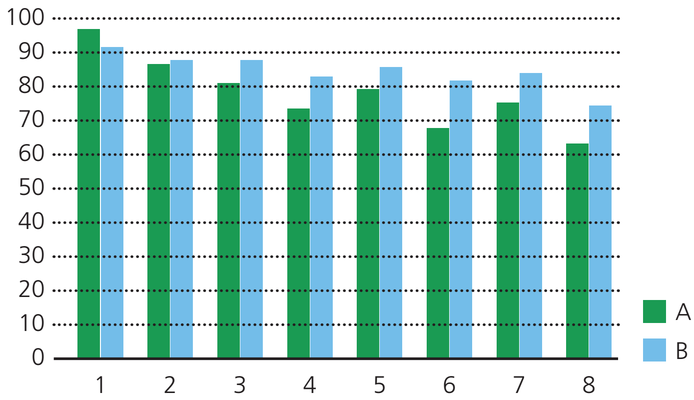


Figura 2. Confronto tra i punteggi dei questionari A e B.

2.4.2 Risultati dei questionari C e D

Non c'è una differenza significativa tra i punteggi nelle domande dei questionari C e D.

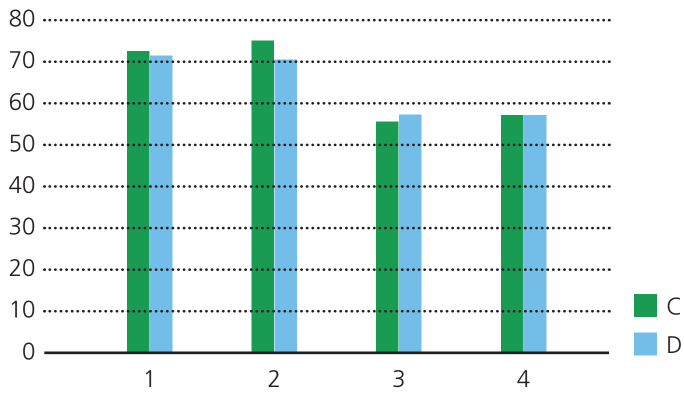


Figura 3. Confronto tra i punteggi dei questionari C e D.

2.4.3 Applicazione dell'analisi statistica implicativa di Gras

Gras ha sviluppato un metodo statistico molto utile ed efficace per i problemi di insegnamento-apprendimento e non solo, che attraverso il software CHIC fornisce diagrammi implicativi, cioè relazioni gerarchiche tra le variabili (Gras, 1979; Gras & Couturier, 2013). Quando una freccia collega due variabili, significa che il successo degli studenti in una delle variabili (problemi, domande ecc.) implica il successo nell'altra. L'importanza di tali implicazioni è notevole non solo per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, ma anche per altre materie. Inoltre, l'uso di questo metodo è diffuso in varie altre scienze come la psicologia, le scienze sociali, la medicina ecc.
Abbiamo applicato questo metodo alle risposte degli studenti ai questionari A, B, C, D, e come possiamo vedere nel diagramma sottostante, ci sono implicazioni solo tra i compiti del questionario C e del questionario D. Questo significa che gli studenti che hanno risolto correttamente gli esercizi dei questionari C e D non raggiungeranno risposte corrette in alcuni degli esercizi dei questionari A e B. In effetti, osserviamo il fenomeno della compartimentazione e la ragione di ciò è l'esistenza della linea dei numeri su cui gli studenti devono lavorare in C e D. Cioè, i giovani studenti usano la linea dei

numeri come una semplice rappresentazione e non come un modello geometrico. Questo fenomeno di compartimentazione è stato osservato anche in altre ricerche (Elia et al., 2005; Gagatsis et al., 2011; Shiakalli & Gagatsis, 2005a, 2005b).

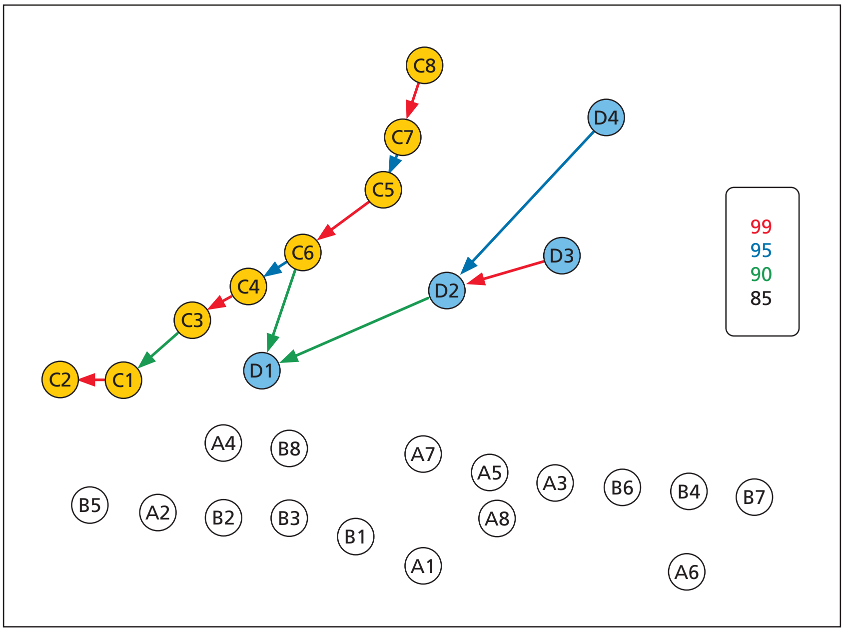


Figura 4. Diagramma statistico implicativo dei questionari A, B, C e D.

Infine, dobbiamo menzionare che la stessa ricerca è stata ripetuta in Grecia e in Italia e lo stesso fenomeno di compartimentazione è stato osservato nonostante le differenze tra i sistemi educativi, la lingua e la cultura dei tre Paesi (Gagatsis et al., 2004). Sulla base dei risultati della ricerca di cui sopra possiamo capire le opinioni di alcuni ricercatori secondo cui la linea dei numeri non è un aiuto visivo utile per aiutare i bambini più piccoli ad aggiungere e sottrarre numeri interi. La linea dei numeri è un modello geometrico che aiuta gli studenti a sviluppare una varietà di abilità che possono essere applicate non solo alle operazioni tra numeri interi ma anche ad altri concetti.

3 Un confronto tra due modelli per l'insegnamento dei numeri negativi: una ricerca-azione

3.1 Alcuni elementi della metodologia della ricerca-azione

La ricerca-azione è il processo di studio di un problema o di una situazione scolastica reale. In altre parole, la ricerca-azione è un metodo di indagine sistematica che gli insegnanti intraprendono come ricercatori della loro stessa pratica (Efron & Ravid, 2020; Mertler, 2009). Lo sviluppo professionale degli insegnanti può essere facilitato dalla ricerca-azione. Infatti, la ricerca-azione può essere utilizzata come un sostituto delle tradizionali formazioni continue per migliorare la crescita e lo sviluppo professionale degli insegnanti. Inoltre, l'obiettivo della ricerca-azione è quello di migliorare la propria pratica di insegnamento o di migliorare il funzionamento di una scuola. Johnson propone alcuni passi essenziali della ricerca-azione (Johnson, 2012). Il primo passo è la definizione di una domanda o di una area di studio; nel nostro caso è l'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi. Il secondo passo è la decisione dell'insegnante sul metodo di raccolta dei dati. Infatti, possono essere

utilizzati diversi metodi: l'osservazione di individui o gruppi; l'uso di registrazioni audio e video; l'uso di interviste strutturate o semi-strutturate; la distribuzione di sondaggi o questionari ecc. Il terzo passo è la raccolta e l'analisi dei dati: esistono diversi metodi di analisi dei dati qualitativi o quantitativi. Il quarto passo è la descrizione dei diversi modi di utilizzo e applicazione dei risultati (Johnson, 2012). Una revisione della letteratura pertinente relativa all'argomento o alla domanda di ricerca potrebbe anche essere inclusa nella ricerca-azione.
Nel nostro caso, l'uso di modelli è stato un punto centrale per l'insegnamento dei numeri negativi ed è stato studiato da vari ricercatori. La rassegna della letteratura relativa è stata presentata nella prima parte dell'articolo. Secondo alcuni studi (Battista, 1983; Liebeck, 1990; Stephan & Akyuz, 2012), esistono due modelli per l'insegnamento dei numeri interi, ovvero quello con contatori o cariche di due tipi e quello con le linee di numeri. Per quanto riguarda la metodologia, nella nostra ricerca-azione abbiamo utilizzato due questionari che corrispondono ai due modelli di cui sopra per l'insegnamento dei numeri negativi. Abbiamo applicato la statistica descrittiva per analizzare i nostri dati.

3.2 Il modello delle cariche positive e negative per insegnare i numeri negativi

Nel primo modello usiamo una rappresentazione specifica per i due tipi di cariche, ognuna delle quali corrisponde a un'unità positiva o negativa. Una carica positiva è rappresentata dal simbolo "+" in un cerchio. Allo stesso modo, una carica negativa è rappresentata dal simbolo "–" in un cerchio. Le operazioni tra i numeri sono associate alla manipolazione delle cariche e al calcolo della carica totale. Sia l'addizione che la sottrazione si basano sull'uso dell'elemento neutro. L'elemento neutro di un'operazione è un elemento che, se combinato con un altro numero usando quell'operazione, lascia il numero invariato. Per l'addizione e la sottrazione questo è il numero zero. Gli studenti devono capire che due cariche di tipo diverso corrispondono al numero zero, che si traduce nel calcolo (+1) + (–1) = 0. Questo può essere esteso come segue: aggiungere qualsiasi numero di cariche che possono essere messe in coppie di tipo opposto non cambia la carica totale che avevamo inizialmente, quindi $v + 0 = v$. Dunque, possiamo disegnare o cancellare qualsiasi numero di tali coppie per facilitare i calcoli.
Quando sommiamo disegniamo le cariche che rappresentano i due numeri da aggiungere, usando i simboli appropriati a seconda che siano positive o negative. Poi troviamo tutte le possibili coppie di cariche opposte e le cancelliamo (dato che il loro valore è zero) e infine contiamo le cariche rimanenti (che devono essere dello stesso tipo). Per esempio, per eseguire l'addizione 4 + 3 disegniamo quattro cariche positive e poi altre tre cariche positive. Pertanto, in totale abbiamo sette cariche positive e la somma deve essere sette. Per l'addizione di due numeri negativi si lavora in modo simile. Per sommare due numeri con segni diversi usiamo la proprietà dello zero come elemento di identità. Per esempio, per eseguire il calcolo (–4) + (+3) disegniamo prima quattro cariche negative e poi tre cariche positive. Osserviamo che abbiamo tre coppie di cariche opposte, di cui non teniamo conto. Così, ci ritroviamo con una sola carica negativa (Tabella 2).

Operazione	Rappresentazione simbolica	Risposta
(–4) + (+3)	⊖⊖⊖⊖ ⊕⊕⊕	(–4) + (+3) = –1

Tabella 2. Somma (–4) + (+3).

L'operazione di sottrazione funziona come segue: si disegnano le cariche corrispondenti al numero da sottrarre e poi si cancellano le cariche che corrispondono al numero da sottrarre. Nei casi in cui non ci sono abbastanza cariche da depennare, si disegnano cariche addizionali. Per ogni carica aggiuntiva disegniamo anche un'altra carica del tipo opposto, in modo che la carica iniziale rimanga la stessa. Infine, contiamo le cariche rimanenti. Per esempio, per eseguire la sottrazione (–4) – (+3), iniziamo disegnando quattro cariche negative. Poi dobbiamo cancellare tre cariche positive, che non esistono. Per trovare la differenza disegniamo tre cariche positive e tre negative. Dopo di che cancelliamo le tre cariche positive e così alla fine ci ritroviamo con sette cariche negative (**Tabella 3**).

Operazione	Rappresentazione simbolica	Risposta
(–4) – (+3)	$\ominus\ominus\ominus\ominus\ominus\ominus\ominus$ $\cancel{\oplus}\cancel{\oplus}\cancel{\oplus}$	(–4) – (+3) = –7

Tabella 3. Differenza (–4) – (+3).

Per capire la moltiplicazione, gli studenti devono solo capire che questa operazione è equivalente all'addizione ripetuta. Per esempio, per fare la moltiplicazione 3 · (–2) dobbiamo disegnare tre volte due cariche negative, quindi in totale abbiamo sei cariche negative. Il caso più difficile con la moltiplicazione è quello in cui abbiamo due fattori negativi. Dobbiamo disegnare coppie di cariche opposte (abbastanza per cancellare le cariche negative) e poi cancellare tante cariche negative quanto il valore del modulo del secondo fattore per tante volte quanto il modulo del primo fattore. In altre parole, cancelliamo tante cariche negative quanto il prodotto dei moduli dei due fattori. Infine, contiamo le cariche rimanenti (non teniamo conto di eventuali coppie di cariche opposte). Di conseguenza, il prodotto di due numeri negativi è sempre positivo. Per esempio, per eseguire il calcolo (–3) · (–2) si disegnano coppie di cariche opposte e poi si cancellano due cariche negative, ripetendo tre volte. Perciò, cancelliamo sei cariche negative in totale e rimangono sei cariche positive (ed eventualmente alcune coppie di cariche opposte), il che implica che il prodotto è sei.
Quando si divide si cerca di ottenere tante cariche quante sono quelle del dividendo, disegnando o cancellando ripetutamente le cariche. Nei casi in cui il divisore è un numero positivo, si disegnano gruppi di cariche con cardinalità uguale al divisore. In questi casi, il segno del risultato dipende dal segno del divisore. Se abbiamo per esempio la divisione (+6) : (+2), disegniamo coppie di cariche positive fino ad ottenere sei cariche. Dobbiamo disegnare tre di queste coppie e quindi il quoziente è +3. Se ora abbiamo la divisione (–6) : (+2), disegniamo coppie di cariche negative fino ad ottenerne sei. Dobbiamo ripetere questo processo tre volte e quindi il quoziente è –3. Nei casi in cui il divisore è negativo il processo cambia. In pratica cerchiamo di creare e cancellare tanti gruppi di cariche equivalenti a quanto è il divisore, in modo da finire con tante cariche quanto è il valore del dividendo. Se abbiamo la divisione, (+6) : (–2), cancelliamo due gruppi equivalenti di cariche in modo da avere 6 cariche positive. Dunque, inizialmente disegniamo sei coppie di cariche opposte e cancelliamo due triple di cariche negative. Quindi il quoziente è –3, poiché cancelliamo le triple di cariche negative. Allo stesso modo, eseguiamo la divisione (–6) : (–2). Disegniamo sei coppie di cariche opposte e cancelliamo due triple di cariche positive. Pertanto, il quoziente è +3, poiché cancelliamo le triple di cariche positive.

3.3 L'applicazione della linea dei numeri per l'insegnamento delle operazioni tra numeri negativi

Sulla base dell'esame da un lato della ricerca sugli ostacoli dei matematici e degli studenti relativi ai numeri negativi e dall'altro lato sui vantaggi dell'uso di modelli geometrici nell'insegnamento della matematica, proponiamo il modello della linea dei numeri per l'insegnamento dei numeri negativi.
Questa è una linea che contiene tutti i numeri reali ed è composta da tre parti fondamentali. Al centro, abbiamo l'origine solitamente segnata con il numero zero, i numeri positivi sono segnati a destra dell'origine mentre i numeri negativi sono segnati a sinistra dell'origine. Le frecce sono messe alle estremità della linea orizzontale per mostrare che la linea continua all'infinito. I vettori sono usati per la rappresentazione dei numeri. Per i numeri positivi si usano vettori diretti a destra, mentre per i numeri negativi si usano vettori diretti a sinistra. La lunghezza di un vettore corrisponde al valore assoluto del numero che rappresenta. Per esempio, il numero 4 è rappresentato da un vettore di lunghezza quattro diretto a destra, mentre il numero –4 è rappresentato da un vettore di lunghezza quattro diretto a sinistra.
In questo modello l'addizione si esegue come segue: partendo da zero si disegna un vettore corrispondente al primo numero. Poi, partendo dal punto finale di questo vettore si disegna un altro vettore corrispondente al secondo numero. La somma dei due numeri è rappresentata da un vettore che parte dall'inizio del primo vettore (cioè zero) e si estende fino alla fine del secondo vettore. Per esempio, se dobbiamo fare il calcolo (+2) + (+3), disegniamo prima un vettore che si estende da zero a 2 e poi partendo da 2 disegniamo un vettore di lunghezza tre, diretto a destra che quindi si estende fino a 5. La somma dei due numeri è rappresentata da un vettore che parte da zero e si estende fino a 5 e rappresenta quindi il numero 5 (**Figura 5**). In modo simile, possiamo sommare due numeri negativi, con la differenza che questa volta i vettori sono entrambi diretti a sinistra. Se dobbiamo sommare due numeri di segno opposto, per esempio con il calcolo (+2) + (–3), lavoriamo come segue: disegniamo prima un vettore da zero a 2 e poi partendo da 2 disegniamo un vettore di lunghezza tre con direzione verso sinistra che quindi termina a –1. La somma dei due numeri è rappresentata da un vettore che parte da zero e si estende fino a –1 e rappresenta il numero –1 (**Figura 6**).

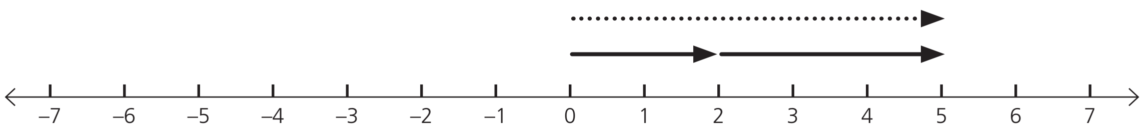


Figura 5. Somma (+2) + (+3).

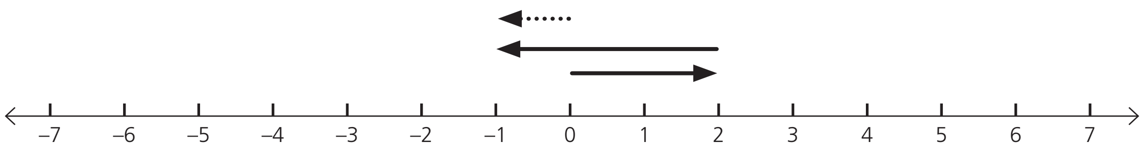


Figura 6. Somma (+2) + (–3).

La sottrazione si esegue in modo simile, come mostrato con le seguenti due differenze: il secondo vettore viene posto in modo che il suo punto finale sia uguale a quello del primo vettore e la differenza dei due numeri viene rappresentata da un vettore che inizia dal punto iniziale del primo vettore e finisce nel punto iniziale del secondo vettore.
Per esempio, se abbiamo il calcolo (+7) – (+3) lavoriamo come segue: disegniamo un vettore che inizia da zero e termina a 7. Poi, disegniamo un altro vettore che termina anch'esso a 7, di lunghezza 3 e diretto verso destra, il quale, quindi, deve avere il suo punto di partenza a 4. La differenza tra i due numeri dati è rappresentata da un vettore che inizia da zero e si estende fino a 4, quindi è il numero

positivo 4 (**Figura 7**). Nel caso di due numeri con segno opposto, come per esempio nella sottrazione (–7) – (+3) si fa così: si disegna un vettore che parte da zero e si estende fino a –7. Dopo di che disegniamo un altro vettore che termina anch'esso a –7 e ha una lunghezza di tre. Il secondo vettore è diretto a destra, quindi deve partire da –10. La differenza dei due numeri corrisponde a un vettore che parte da 0 e si estende fino a –10, quindi è il numero negativo –10 (**Figura 8**). Infine, se dobbiamo sottrarre un numero negativo come, per esempio, nel calcolo (+7) – (–3) lavoriamo nello stesso modo: disegniamo un vettore che parte da zero e si estende fino a 7. Poi disegniamo un altro vettore che termina a 7 e ha una lunghezza di 3. Il secondo vettore è diretto a sinistra e quindi deve partire da 10. La differenza tra i due numeri corrisponde a un vettore che parte da zero e si estende fino a 10, quindi rappresenta il numero positivo 10 (**Figura 9**).

Figura 7. Differenza (+7) – (+3).

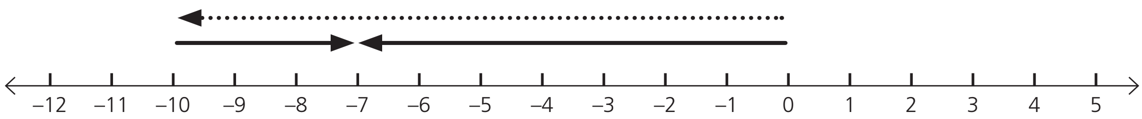


Figura 8. Differenza (–7) – (+3).

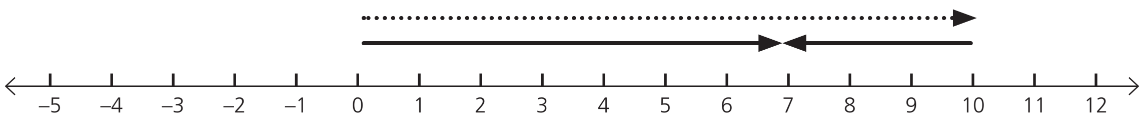


Figura 9. Differenza (+7) – (–3).

La moltiplicazione tra numeri positivi si ottiene per addizione ripetuta. La moltiplicazione di un numero positivo per un numero negativo si esegue allo stesso modo. Per esempio, per la moltiplicazione (+2) · (–3) seguiamo i seguenti passi: disegniamo un vettore con punto iniziale a zero e punto finale a –3 e poi un altro vettore con punto iniziale a –3, di lunghezza 3 che deve estendersi fino a –6 e quindi il prodotto è –6 (**Figura 10**). Nel caso in cui il primo fattore sia un numero negativo, l'operazione di moltiplicazione implica una sottrazione ripetuta da zero, cioè il secondo fattore viene sottratto da zero tante volte quanto indicato dal modulo del primo fattore. Se, per esempio, abbiamo la moltiplicazione (–2) · (–3) facciamo così: disegniamo due vettori consecutivi di lunghezza 3 e diretti a sinistra (che rappresentano il numero –3). Di conseguenza, questi vettori devono iniziare a 6. Così, il prodotto dei due numeri è rappresentato da un vettore che ha il suo punto iniziale a zero e il suo punto finale (al punto iniziale dei due vettori) a 6 (**Figura 11**). Quindi, il prodotto di –2 e –3 è 6.

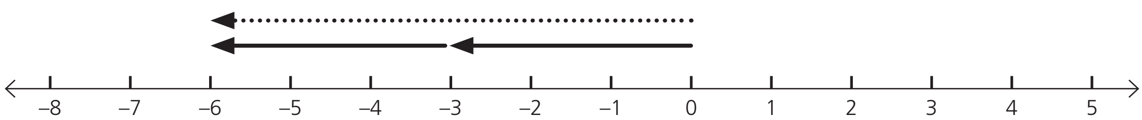


Figura 10. Prodotto (+2) · (–3).

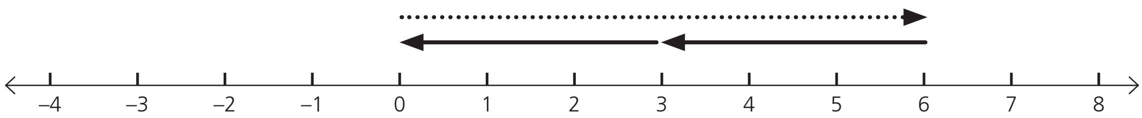


Figura 11. Prodotto (–2) · (–3).

La divisione si ottiene o per addizione ripetuta o per sottrazione ripetuta del divisore da zero tante volte quanto necessario per ottenere il dividendo. Per eseguire la divisione (+10) : (+2) disegniamo un vettore da zero a 2, poi un vettore da 2 a 4 e ripetiamo questo processo altre tre volte fino a raggiungere 10. Poiché dobbiamo disegnare 5 vettori consecutivi di lunghezza 2 per raggiungere 10, il quoziente di questa divisione è 5 (**Figura 12**). Per la divisione (–10) : (+2) sottraiamo ripetutamente da zero: disegniamo un vettore che termina a zero e parte da –2 (poiché ha una lunghezza di due ed è diretto a destra), poi un altro vettore che termina a –2 e parte da –4 e ripetiamo questo processo altre tre volte fino a raggiungere –10. Poiché dobbiamo sottrarre da zero cinque vettori di lunghezza 2 per raggiungere –10, il quoziente di questa divisione è –5 (**Figura 13**).

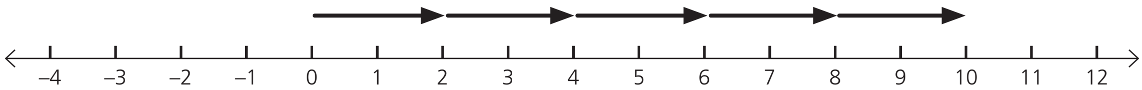


Figura 12. Quoziente (+10) : (+2).

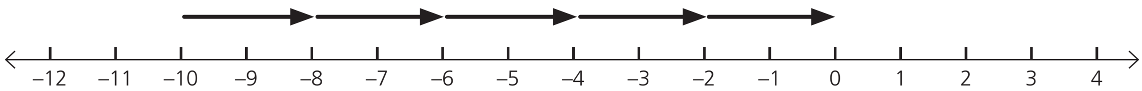


Figura 13. Quoziente (–10) : (+2).

3.4 Risultati del confronto dell'applicazione dei due modelli

Lo scopo di questo studio è confrontare il modello delle cariche positive e negative e il modello della linea dei numeri, in termini di efficacia nell'insegnamento delle operazioni di addizione e sottrazione di numeri interi. La ricerca ha coinvolto 18 studenti tra i 12 e i 13 anni, che sono stati divisi in due gruppi omogenei. Al primo gruppo sono state date istruzioni su come applicare il modello delle cariche positive e negative insieme ad alcuni esempi. Al secondo gruppo sono state date istruzioni ed esempi sul modello della linea dei numeri. Ad ogni gruppo è stato dato un diverso foglio di esercizi. Nei due fogli di esercizi ai gruppi è stato chiesto di eseguire le stesse operazioni utilizzando il metodo spiegato loro.

Più precisamente, i due fogli di esercizi comprendevano due attività (Attività 1 e Attività 2) e ciascuna di esse aveva quattro sotto-domande (a, b, c, d). Le domande 1a e 1b riguardavano rispettivamente l'addizione tra due numeri positivi e due numeri negativi. Le domande 1c e 1d riguardavano l'addizione di un numero positivo e uno negativo. In 1c il valore assoluto del numero positivo era maggiore di quello del numero negativo e in 1d avveniva l'inverso. Le domande 2a e 2b riguardavano la sottrazione tra numeri positivi. In 2a il minuendo era maggiore del sottraendo e in 2b il contrario. La domanda 2c riguardava la sottrazione tra due numeri di segno opposto con il sottraendo che era negativo. La domanda 2d riguardava la sottrazione tra numeri negativi. Di seguito (**Tabella 4**) sono riportate le percentuali di successo per domanda in ogni foglio di esercizi.

Domanda	Operazione	Modello cariche positive e negative	Modello linea dei numeri
1a	(+5) + (+1)	78%	78%
1b	(–2) + (–3)	78%	67%
1c	(+5) + (–1)	56%	44%
1d	(+2) + (–6)	33%	44%
2a	(+6) – (+4)	44%	33%
2b	(+1) – (+4)	22%	11%
2c	(+2) – (–4)	11%	0%
2d	(–1) – (–5)	11%	0%

Tabella 4. Tassi di successo per domanda nei due fogli di esercizi.

Osserviamo che le percentuali di successo nella domanda 1a sono le stesse per entrambi i gruppi. Una piccola differenza nelle percentuali di successo si osserva nelle domande 1b, 1c e 1d. Il modello delle cariche prevale nelle domande 1b e 1c e il modello della linea dei numeri ha una percentuale maggiore nella domanda 1d. C'è una differenza nelle percentuali di successo nelle domande 2a, 2b, 2c e 2d con il modello delle cariche che ha le percentuali più alte in tutte.
Da quanto sopra si evince che il modello della linea dei numeri è meno efficace per l'operazione di sottrazione rispetto al modello delle cariche. Questo può essere dovuto al fatto che ci sono due differenze nella procedura seguita nella sottrazione rispetto a quella seguita nell'addizione (la freccia corrispondente al sottraendo è posizionata in modo che finisca nello stesso punto della freccia corrispondente al minuendo invece di iniziare da dove la freccia corrispondente al minuendo finiva e la freccia corrispondente alla differenza comincia all'inizio della prima freccia e finisce all'inizio della seconda in contrasto con quella della somma che inizia all'inizio della prima freccia e finisce alla fine della seconda). Queste differenze possono confondere gli studenti che cercano di applicare per la sottrazione la stessa procedura usata per l'addizione.
Le percentuali di successo nelle domande 2a-2d che riguardano la sottrazione sono generalmente inferiori a quelle delle domande 1a-1d che riguardano l'addizione per entrambi i modelli. Quindi, concludiamo che è più difficile per gli studenti capire la sottrazione. Gli studenti hanno incontrato una particolare difficoltà nei casi in cui il minuendo era un numero negativo.
Diversi ricercatori hanno tentato il confronto tra questi due modelli. Secondo Bofferding (2014) i due modelli primari per l'insegnamento dei numeri negativi sono il modello delle cariche positive e negative e il modello della linea dei numeri. Il modello delle cariche positive e negative è un modello del primo tipo in quanto la sua funzionalità si basa sul fatto che una carica positiva e una negativa si annullano a vicenda. Il modello delle cariche positive e negative implica l'uso del principio dell'inverso additivo, che potrebbe aiutare la comprensione parziale del segno meno unario, ma non sottolinea l'ordine; e in alcuni casi, la sottrazione implica sia l'addizione che la sottrazione, confondendo potenzialmente il significato binario del segno meno. D'altra parte, il modello della linea dei numeri

evidenzia l'ordine dei numeri negativi rispetto ai numeri positivi, e i valori dei numeri possono essere interpretati come distanze dallo zero in direzioni opposte, fornendo un senso al significato unario del segno meno e alle grandezze orientate.
Nonostante i vantaggi del modello della linea dei numeri, questo metodo non è utile se lo studente non ha una chiara comprensione di una linea dei numeri astratta. Inoltre, un errore comune degli studenti quando applicano questo modello è che contano i numeri stessi piuttosto che gli spazi tra i numeri. Freudenthal (1983) ha sottolineato altri due svantaggi del modello della linea dei numeri. Il primo difetto del modello è l'asimmetria didattica tra numeri positivi e negativi. I numeri positivi sono più concreti nel senso di una maggiore originalità; così, si può operare con loro; i numeri negativi sono secondari, introdotti come risultati di operazioni che prima erano impossibili, adatti ad essere adoperati se necessario, ma inadatti ad avere operazioni eseguite con loro. In secondo luogo, in questo modello un punto *a* sulla linea dei numeri è allo stesso tempo interpretato come una freccia da 0 ad *a* e ci sono autori di libri di testo che tacitamente passano da questa interpretazione alla visione delle frecce come numeri e in questo modo suggeriscono più di quanto la prima interpretazione possa rendere.

4 Conclusioni

La comprensione dei numeri negativi e delle operazioni tra di essi è un compito piuttosto impegnativo, a causa della loro natura. Le difficoltà sorgono non solo nel concepire la loro esistenza ma anche nel capire come usarli. Cioè, errori comuni si verificano sia nei calcoli che coinvolgono i numeri negativi, sia nel concettualizzare e dare un senso ad essi e alle loro operazioni. È chiaro che l'esiguo numero di alunni ai quali sono stati applicati il modello delle cariche positive e negative e il modello geometrico della linea dei numeri, non ci permette di utilizzare l'analisi statistica implicativa, come è stato fatto nell'indagine sugli alunni della scuola primaria.
Tuttavia, con l'approccio didattico appropriato, in particolare quello basato sul modello geometrico della linea dei numeri, possiamo superare questi ostacoli e misconcezioni persistenti che sono stati incontrati sia da grandi matematici che da studenti. Infatti, il modello geometrico della linea dei numeri ha un carattere generatore, cioè produce e rappresenta un numero illimitato di proprietà, a partire da un numero limitato di elementi e di regole per combinarli. Inoltre, questo modello ha ovviamente un carattere euristico, cioè ci porta facilmente a nuove informazioni su quel sistema, indipendentemente dal sistema iniziale che rappresenta.
Ciononostante, il modello geometrico della linea dei numeri ci sembra più adatto agli studenti più avanzati. I risultati dell'applicazione della linea dei numeri in semplici compiti di addizione e sottrazione di numeri interi in studenti della scuola primaria supporta questo punto di vista. Inoltre, questo modello, che è in definitiva un caso speciale di un modello di linea affine con calcolo vettoriale, dovrebbe essere più generalmente integrato in un piano affine con vettori. Anche se la presente "ricerca-azione" è basata su una metodologia semplice e sulla presentazione statistica descrittiva dei risultati, crediamo che sia un buon esempio concreto di relazione tra la "ricerca" nell'educazione matematica e la "pratica" nelle scuole. Sosteniamo che la ricerca-azione può essere utilizzata per colmare il divario tra la ricerca sull'educazione matematica e la pratica dell'insegnamento della matematica.
Infine, crediamo fortemente che il modello del Mathematical Working Space (MWS) dovrebbe essere applicato all'insegnamento dei numeri negativi così come al modo in cui la percezione dei numeri negativi da parte degli studenti contribuisce alla formazione delle genesi semiotiche, strumentali e discorsive.

Bibliografia

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique.* Libr Philosophique J. Vrin.

Badarudin, B. P. H., & Khalid, M. (2008). Using the Jar model to improve students' understanding of operations on integers. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, 85–94.

Battista, M. T. (1983). A complete model for operations on integers. *Arithmetic Teacher, 30*(9), 26–31.

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B., & Lewis, M. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: an analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*, 19–61. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0019

Bofferding, L. (2010). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *6*, 703–710.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders. *National Council of Teachers of Mathematics*, *45*, 194–245.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165–198.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Mathematics Education Library* (Vol. 19). Kluwer.

Bruno, A., & Martinón, A. (1999). The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*, 789–809.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée sauvage.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 170–174). Springer.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 153–166). SpringerLink.

D'Amore, B., & Gagatsis, A., (1997). *Didactics of Mathematics - Technology in Education.* ERASMUS, Art of Text.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *33*(4), 427–442.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 397–417.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1–16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Ekol, G. (2010). Operations with negative integers in a dynamic geometry environment. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 337–344). PME.

Efron, S. E., & Ravid, R. (2020). *Action research in education: A practical guide.* Guilford Press.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one step additive problem. *Learning and Instruction*, *17*, 658–672.

Elia., I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we "trace" the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis* (pp. 175–185). Università degli Studi di Palermo.

Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., & Özel, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 895–907.

Elia, I., Panaoura A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *8*(1), 49–69.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105–121.

Fischbein, E. (1972). Les modèles génératifs et le développement intellectuel. *Activités – Recherches Pédagogiques*, *5*, 10–14.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Kluwer Academic Publishers.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité: le cas du domaine numerique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 21–38.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Panaoura, A., & Michael-Chrysanthou, P. (2016). Fostering representational flexibility in the mathematical working space of rational numbers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 287–307.

Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the cross-cultural applicability of number line in conducting arithmetic operations using structural equation modeling: A comparative study between Cypriot, Italian and Greek primary pupils. *World Studies in Education*, *5*(1), 85–101.

Gagatsis, A., & Maier, H. E. (1996). *Texte zur Didaktik der Mathematik*. ERASMUS, University of Regensburg.

Gagatsis, A., & Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(1), 29–54.

Gagatsis, A., & Patronis, T. (2001). Geometrical models in mathematics and in mathematics teaching. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, *1* (pp. 333–336). Intercollege Press.

Gagatsis, A., & Rogers, L. E. (1996). *Didactics and History of Mathematics.* Art of Text.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.

Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *8*, 95–112.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1994). Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. In M. Artigue, C. Laborde & R. Gras (Eds.), *20 ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 343–348). La Pensée Sauvage.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1995). Eine Studie zur historischen Enwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs "absoluter Betrag". *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *16*, 3–46.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1996). Eine studie zur historischen Enwicklung und didaktischen transposition des Begriffs "absoluter Betrag". In A. Gagatsis & H. Maier (Eds.), *Texte zur Didaktik der Mathematik* (pp. 153–200). ERASMUS.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatives. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(3), 303–346.

Goldin, G. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

Gras, R. (1979). *Contribution étude expérimental et l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs en didactique des mathématiques.* Thèse de doctorat, Université de Rennes 1.

Gras, R., & Couturier, R. (2013). Spécificités de l'Analyse Statistique Implicative par rapport à d'autres mesures de qualité de règles d'association. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(2), 249–291.

Johnson, A. (2012). *A short guide to action research.* Pearson.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Les Espaces de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *Relime, 17*(4-I), 14–27.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates.

Liebeck, P. (1990). Scores and forfeits: An intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *21*, 221–239.

Mertler, C. A. (2009). *Action research: Teachers as researchers in the classroom.* SAGE.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2013). Didactical Situation for the Enhancement of Meta-Analogical Awareness. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 160–172.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 723–740.

Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2005a). The number line as a geometrical model for teaching whole number addition and subtraction. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education:* Vol. I (pp. 329–339). University of Palermo, Cyprus Mathematical Society.

Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2005b). The geometrical model of the number line in the teaching of whole number addition and subtraction. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *42*, 167–184.

Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2006). Compartmentalization of representation in tasks related to addition and subtraction using the number line. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: Vol. 5 (pp. 105–112). Charles University of Prague.

Stephan, M., & Akyuz, D. (2012). A proposed instructional theory for integer addition and subtraction. *National Council of Teachers of Mathematics*, *43*, 428–464.

Streefland, L. (1996). Negative numbers: reflections of a learning researcher. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 57–77.

Thom, R., (1982), Mathématique et théorisation scientifique. In J. Dieudonné, J.-P. Descles, R. Apery & M. Caveing (Eds.), *Penser les mathématiques* (pp. 252–273). Seuil.

Thom, R. (1991). *Prédire n'est pas expliquer.* Eshel.

Thomaidis, I. (2009). Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών [The History of Mathematics as a source of ideas and material for teaching options and activities: The case of negative numbers]. In Scientific Association for the Teaching of Mathematics (Eds.), *Συλλογικός Τόμος Αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* [Collective volume of the exploitation of the History of Mathematics in the teaching of Mathematics] (pp. 193–219). Ziti Publisher.

Williams, J. S., Linchevski, L., & Kutscher, B. (2008). Situated intuition and activity theory fills the gap: the cases of integers and two-digit subtraction. In A. Watson & P. Winbourne (Eds.), *Directions in Situated Cognition in Mathematics Education* (pp. 153–178). Springer Nature.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 33 - 51, DOI: 10.33683/ddm.22.11.2
OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

La risoluzione di equazioni: tra rappresentazioni grafiche e linguaggio algebrico

Solving equations: within graphical representations and algebraic symbols

Rosalia Maria Lo Sapio•, Maria Mellone° e Cristina Coppola•
•Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno – Italia
°Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Italia

rlosapio@unisa.it, maria.mellone@unina.it, ccoppola@unisa.it

Sunto / In questo lavoro si propone una riflessione riguardo l'importanza di costruire percorsi didattici mirati a favorire un collegamento tra rappresentazioni grafiche e linguaggio algebrico per la risoluzione delle equazioni. In particolare, gli studi sul ruolo della visualizzazione nell'apprendimento della matematica e sul Early algebra apriranno ad una riflessione sull'utilizzo di rappresentazioni grafiche per la risoluzione di equazioni di primo e secondo grado. Inoltre, facendo riferimento alla tecnica delle "costruzioni in linee" di Rafael Bombelli in cui vengono utilizzate delle rappresentazioni geometriche per la costruzione della formula risolutiva di particolari equazioni di terzo grado, verrà presentato un esempio di situazione matematica in cui le tecniche risolutive saranno supportate proprio dalle costruzioni geometriche proposte dal matematico bolognese. Le situazioni matematiche presentate non saranno da intendersi come una proposta didattica, l'auspicio è che gli esempi mostrati e gli studi di ricerca presi in considerazione possano essere utili al lettore-insegnante per la costruzione di percorsi didattici inclusivi ed efficaci, in cui il registro algebrico e quello visuale-geometrico siano sempre più in comunicazione tra loro.

Parole chiave: rappresentazioni grafiche; pensiero algebrico; equazioni.

Abstract / In this paper we propose a reflection on the importance of designing didactic paths to create a connection between graphic representations and algebraic language for the solution of equations. In particular, studies on the role of visualization in learning mathematics and on Early Algebra will open up a reflection on the use of graphical representations for solving first and second degree equations. Furthermore, referring to the technique of "*costruzioni in linee*" by Rafael Bombelli in which geometric representations are used for the construction of the solution formula of particular third degree equations, it will be presented an example of a mathematical situation in which the solving techniques will be supported by the geometric constructions proposed by the Bolognese mathematician. The mathematical situations presented will not be intended as a didactic proposal, the hope is that the examples shown and the research studies taken into consideration can be useful to the reader-teacher for the construction of inclusive and effective didactic paths, in which the algebraic and the visual-geometrical registers are more and more in communication with each other.

Keywords: graphic representations; algebraic thinking; equations.

1 Quadro teorico

In questo lavoro vorremmo provare a collegare il filone di ricerca dell'Early Algebra (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011), in particolare la sua attenzione all'uso di rappresentazioni grafiche e geometriche, con la ricerca sviluppata nell'ambito della didattica della matematica riguardante i processi di visualizzazione (si veda, ad esempio, Bishop, 1973; Presmeg, 1986). Questo tentativo ci appare interessante perché, sebbene l'interesse per i processi di visualizzazione nell'apprendimento della matematica sia nato e si sia sviluppato in maniera completamente indipendente dall'Early Algebra, crediamo che ci siano dei punti di contatto cruciali potenzialmente utili a cogliere nuove suggestioni nell'ambito della didattica della matematica.
I primi studi sulla visualizzazione e sulle capacità spaziali risalgono allo studioso Alan Bishop (1973) per poi proseguire con le ricerche di Norma Presmeg (si veda, ad esempio, Presmeg, 1986; Presmeg & Bergsten, 1995) sul ruolo dei processi visivi nell'apprendimento della matematica. Le ricerche iniziali di Presmeg, risalenti al 1982, prendono ispirazione dai lavori di ricerca dello psicologo russo Vadim Andreyevich Krutetskii. Il libro di Krutetskii, *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, pubblicato nel 1968 e tradotto in lingua inglese nel 1976, ha rappresentato per l'epoca un'enorme novità dal punto di vista della ricerca, dal momento che le osservazioni e le indagini condotte miravano a risultati qualitativi piuttosto che quantitativi, i soli ad occupare in quel periodo storico un rilievo scientifico. L'indagine di Krutetskii (1968/1976) riguardava i processi di pensiero di coloro che egli definiva "adolescenti matematicamente capaci" ed "incapaci" e le differenze tra essi. Attraverso queste indagini Krutetskii individua alcune abilità, ossia dei tratti personali che consentono la corretta e rapida esecuzione di un compito matematico, e le distingue in:
- Abilità analitica, in cui predomina la componente logico-verbale, mentre le componenti visive-pittoriche e i concetti spaziali sono poco sviluppati.
- Abilità geometrica, in cui predomina la componente visivo-pittorica rispetto a quella logico-verbale. In tal caso, gli studenti sentono il bisogno di pensare visivamente.
- Abilità armonica, in cui le componenti logico-verbali e visive-pittoriche sono in equilibrio. Per tale abilità Krutetskii individua altre due sottocategorie in base all'utilizzo di supporti visivi: astratto-armonica, in cui questi ultimi non sono d'aiuto, e pittorico-armonica, in cui invece, lo sono.

Dal 1988, come risulta dagli atti della dodicesima Conferenza Annuale del Gruppo Internazionale di Psicologia dell'Educazione Matematica (PME12) (Borbas, 1988), inizia a manifestarsi un maggiore interesse nei confronti del pensiero visivo nei processi di apprendimento della matematica. Negli anni '90, poi, la ricerca in questo ambito assume un ruolo fondamentale ai fini dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica: emerge un maggiore interesse per gli aspetti e le teorie semiotiche, per l'uso dei gesti e dei segni come indicatori della presenza di un pensiero visivo. Le ricerche di Norma Presmeg (si veda, ad esempio, Presmeg, 2006) illustrano l'importanza in ambito matematico dell'interpretazione di informazioni attraverso l'elaborazione visiva e la conseguente costruzione di metafore personali, non solo per una memorizzazione di un significato individuale ma anche per una generalizzazione matematica. Comincia, inoltre, a emergere una caratterizzazione della visualizzazione come strumento per la risoluzione di problemi algebrici. Le rappresentazioni matematiche, in particolare quelle grafiche, cominciano ad essere concepite, da un lato, come portatrici di significati ben precisi storicamente costituiti, dall'altro, come strumenti che permettono lo sviluppo di significati ed usi personali (Radford, 2000).
Più recentemente, lo studio delle riflessioni degli studenti sui loro processi di pensiero, raccolte attraverso delle apposite interviste, ha permesso di approfondire la comprensione dei processi di pensiero matematico e di delineare le abilità di cui parlava Krutetskii attraverso la formulazione di un modello (Presmeg, 2014, 2019). Il modello propone di rappresentare la dicotomia logica-visualizzazione in

forma cartesiana: la forza delle abilità logico verbali è rappresentata sull'asse delle ascisse, mentre le capacità di visualizzazione matematica sono rappresentate come ortogonali ad esse sull'asse delle ordinate, e potrebbero essere presenti o meno. In base alla forza della logica e alla presenza o meno di rappresentazioni interne (immagini mentali) o rappresentazioni esterne (rappresentazioni di vario tipo), le ricerche di Presmeg individuano la presenza di studenti in tutti e quattro i quadranti del modello in **Figura 1**.

Figura 1. Il modello[1] proposto da Presmeg (2019, p. 24).

Dobbiamo sottolineare che i processi di visualizzazione e il loro sviluppo all'interno della mente umana sono stati oggetto di studio anche della psicologia cognitiva e, più recentemente, anche delle moderne neuroscienze. Secondo alcuni di questi studi (si veda, ad esempio, Zago et al., 2010), la costruzione e l'elaborazione di un'immagine mentale avvengono a partire da un complesso processo di acquisizione di dati provenienti dalla realtà circostante e da un altrettanto complesso processo di organizzazione degli stessi in memoria. Secondo questi studi le immagini mentali prodotte, sempre esaminabili e soggette a trasformazioni, ingloberebbero tutte le componenti che le hanno generate e possono essere comunicate agli altri attraverso, ad esempio, descrizioni verbali o scritte, ma anche servendosi di disegni o schemi grafici. Ogni individuo attraverso la propria esperienza personale, le proprie reazioni, la propria percezione del mondo e gli stimoli che da esso ne derivano, mette in atto, quindi, un complesso processo cognitivo che permette la creazione di immagini mentali a cui può accedere in un qualsiasi momento per eventualmente trasformarle, attribuire loro significati specifici o rievocare concetti ad esse collegati (Di Nuovo, 1999). Secondo questi studi, quindi, le immagini mentali che ciascun individuo utilizza non sono solo frutto della percezione visiva, ma piuttosto esse rappresentano una sintesi dell'esperienza personale, della sua percezione del mondo e degli stimoli che da esso ne derivano. In questa direzione le rappresentazioni grafiche che gli studenti incontrano e imparano a utilizzare nella loro esperienza scolastica possono quindi contribuire allo sviluppo di capacità di visualizzazione matematica, utilizzando l'espressione degli studi di Presmeg (1986), ma anche alla generazione di ricche immagini mentali, per usare un termine proveniente invece dall'ambito neuropsicologico (si veda, ad esempio, Zago et al., 2010). Ad ogni modo va sottolineato che, sia che si parli di visualizzazione matematica che di immagini mentali, non si tratta di processi legati solo alle esperienze di percezione visiva della realtà, ma più in generale entrambi i processi si riferiscono ad un'esperienza "multisensoriale" della realtà.

1. Il modello utilizza una rappresentazione cartesiana in cui sull'asse delle ascisse vengono rappresentate le abilità logiche analitiche degli studenti, mentre su quello delle ordinate le loro abilità di visualizzazione.

A livello internazionale e nazionale, da diversi decenni si sta sviluppando il filone di ricerca noto con il nome di Early Algebra (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011). Nelle ricerche che si collocano in questo ambito di indagine viene evidenziata l'importanza di promuovere negli alunni forme di pensiero algebrico fin dalla scuola dell'infanzia. Sebbene ci siano degli approcci didattici che prevedono l'introduzione del linguaggio algebrico fin dalla prima primaria[2] (si veda, ad esempio, Davydov, 1982), il presupposto della maggior parte di questi studi non è quello di anticipare le attività di trattamento del linguaggio algebrico tipiche della scuola secondaria, ma piuttosto di guardare all'aritmetica e alla geometria in una prospettiva algebrica. Si tratta quindi di cercare di guidare gli studenti a individuare relazioni, proprietà e analogie conducendoli gradualmente al riconoscimento di strutture. In anni recenti si sono sviluppate molte ricerche in questa direzione, secondo prospettive differenti e con diversi approcci, ma nella maggior parte dei casi si fa ampio uso di quelle che Davydov (1982) chiama *mezzi intermedi di rappresentazione grafica* (si veda, ad esempio, Figura 5): particolari rappresentazioni grafiche che, grazie alle loro caratteristiche percettive e olistiche, possono costituire strumenti cruciali per riconoscere e/o esprimere relazioni e supportare il riconoscimento di strutture aritmetiche predisponendo il terreno all'introduzione del linguaggio algebrico formale.
Le ricerche sull'Early Algebra che abbiamo richiamato e gli studi sulla visualizzazione che abbiamo illustrato all'inizio di questo paragrafo sottolineano, a nostro avviso, quanto sia importante riflettere, in ambito didattico, su come arricchire con rappresentazioni grafiche efficaci le attività matematiche che vengono proposte agli studenti in modo che queste li aiutino a orientarsi in diverse situazioni problematiche offrendo esperienze più inclusive ed efficaci. In particolare, in questo lavoro approfondiremo l'utilizzo di rappresentazioni grafiche e geometriche proponendo esempi, in parte classici in parte nuovi, di attività di educazione matematica che riguardano la risoluzione di equazioni algebriche.
Le situazioni matematiche che presenteremo nelle sezioni successive, relativamente alla risoluzione di equazioni di primo, secondo e terzo grado, possono essere trattate tanto dal punto di vista visuale-geometrico quanto da quello algebrico. In alcuni casi ci limiteremo a descrivere nel dettaglio i collegamenti tra i due registri semiotici, in altri evidenzieremo alcune delle potenzialità didattiche di un approccio integrato, sperando che possano essere di ispirazione per il lettore-insegnante per una possibile trattazione in aula.

2 Equazioni di primo e secondo grado

2.1 Metodi grafici per la risoluzione di equazioni di primo grado

Tradizionalmente a livello scolastico lo studio dell'aritmetica è separato da quello dell'algebra, e quest'ultimo è affrontato solo a partire dalla scuola secondaria di primo grado.[3] Alcuni studi hanno evidenziato come tale separazione possa provocare in molti allievi l'emergere di difficoltà nel passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico, mettendo in luce l'importanza di permettere agli allievi di avere delle prime esperienze in campo algebrico già a livello di scuola primaria (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011). L'approccio precoce all'algebra, non inteso solo come studio del linguaggio algebrico formale, può, quindi, determinare una svolta cruciale nell'apprendimento matematico degli studenti anche nei livelli scolastici successivi. In questa direzione il testo di Cai e Knuth (2011) presenta un'interessante rassegna di alcuni approcci precoci all'algebra implementati in diversi paesi. Da questa rassegna emerge che nei paesi orientali la principale finalità dei curriculum di ma-

2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

tematica dei primi anni di scuola è la comprensione delle relazioni tra quantità e tale obiettivo viene perseguito, tra le altre cose, proprio attraverso l'utilizzo consapevole di particolari rappresentazioni grafiche. A tal proposito, tra gli altri, facciamo riferimento anche all'approccio dello psicologo russo Vasili V. Davydov (1982) che propone, nella scuola primaria, di guidare inizialmente i bambini all'analisi di alcune caratteristiche di oggetti reali, a loro familiari e a cui possono accedere visivamente e tattilmente, studiandone e confrontandone lunghezza, peso, area o volume; attraverso l'esplorazione, quindi, di relazioni quantitative, di passare poi alla misurazione e solo successivamente alla definizione di numero come strumento per misurare quantità. Così facendo, l'algebra non viene presentata come generalizzazione dell'aritmetica ma come generalizzazione delle relazioni tra quantità e delle azioni sulle quantità al fine di favorire negli studenti una comprensione più generale e una capacità di astrazione già a partire dalla scuola primaria (Schmittau, 2011). L'approccio di Davydov (1982) prevede quindi, in maniera del tutto rivoluzionaria l'inversione dell'ordine usualmente seguito a scuola, suggerendo di presentare l'algebra già dalla scuola primaria e soprattutto prima dell'aritmetica (si veda anche Venenciano et al., 2021).
Tenendo conto che gli studenti di scuola primaria non dispongono di conoscenze matematiche sofisticate per affrontare lo studio dell'algebra da un punto di vista formale, ciò che proponiamo è lo sviluppo di idee algebriche attraverso l'introduzione di strumenti più percettivi che permettano una maggiore comprensione delle relazioni matematiche e il supporto di nuove modalità di pensiero che riguardano l'osservazione della struttura, l'attenzione al cambiamento e l'analisi delle relazioni tra quantità. Una volta che i bambini prendono confidenza con gli oggetti reali, si passa a lavorare con "schemi" e quindi a coinvolgere processi visivi che permettono di sintetizzare ed esprimere le azioni matematiche in cui gli oggetti reali risultano coinvolti.
Un esempio di schema in tal senso è quello introdotto da Davydov (1982) e rappresentato in Figura 2, dove vengono messe in relazione tre quantità A, B e C di cui la A rappresenta l'unione delle altre due.

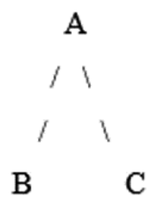


Figura 2. Schema proposto nell'approccio matematico di Davydov (Schmittau, 2011, p. 77).

Tali relazioni possono essere poi rappresentate graficamente, ad esempio, mediante dei segmenti, ed infine sintetizzate simbolicamente mediante delle equazioni, come mostrato in Figura 3.

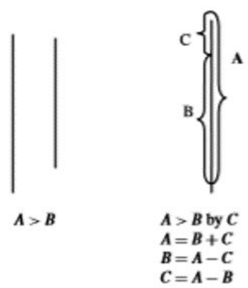


Figura 3. Schema proposto da Davydov che sintetizza il caso in cui A è maggiore di B, e C è la loro differenza (Schmittau, 2011, p. 76).

L'idea è dunque di partire da situazioni reali e familiari al bambino e di giungere poi ad una generalizzazione attraverso diverse rappresentazioni grafiche e algebriche.
In una delle attività proposte per la prima primaria (Davydov, 1982), si considerano due contenitori cilindrici uguali, ciascuno contenente diverse quantità d'acqua che i bambini sono invitati a indicare con le lettere A e B. Dopo avere condiviso e rappresentato opportunamente la relazione tra le due quantità A e B in termini di disuguaglianze, si propone ai bambini di determinare la quantità d'acqua (X) da aggiungere a B, in modo da ottenere la quantità d'acqua A (**Figura 4**).

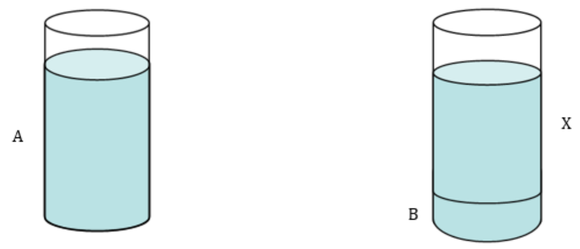


Figura 4. Rappresentazione di contenitori cilindrici ispirata all'attività proposta da Davydov.

Per la risoluzione di tale problema, Davydov propone di utilizzare quelli che egli stesso definisce *mezzi intermedi di rappresentazione grafica*, suggerendo di tradurre i volumi d'acqua in segmenti, come illustrato in **Figura 5**.

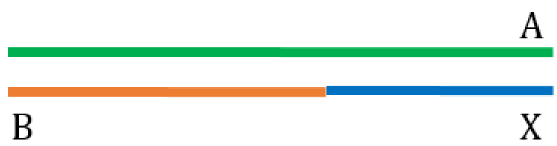


Figura 5. Metafora spaziale che permette di visualizzare la relazione tra le quantità A e B e il ruolo della quantità X. Rappresentazione ispirata a quella proposta da Mellone et al. (2013).

Attraverso questa rappresentazione grafica, dunque, si può riconoscere che la quantità da aggiungere a B è la differenza tra A e B, cioè X.
È possibile riconoscere la rappresentazione grafica in **Figura 5**, con piccole varianti, anche negli approcci precoci all'algebra implementati in altri paesi orientali come Cina e Singapore. Questa rappresentazione in Cina viene chiamata *equazione figurale* mentre a Singapore *Bar model* (o *Drawing model*). È possibile riconoscere come, con le dovute varianti, l'obiettivo didattico nell'utilizzo di una rappresentazione di questo tipo è quello di aiutare gli studenti a visualizzare e riconoscere in maniera più immediata le relazioni tra le quantità in gioco (Mellone et al., 2019; Mellone et al., 2020).

L'equazione figurale, in Cina, è introdotta a partire dalla seconda primaria per la risoluzione dei cosiddetti "problemi a parole" che prevedono, nei casi più semplici, una rappresentazione grafica riconducibile agli oggetti reali coinvolti nel problema (**Figura 6a**) e nei casi più complessi, quando ad esempio le quantità in gioco sono maggiori, una rappresentazione analoga ma continua (**Figura 6b**) e sempre più distaccata dal contesto (**Figura 6c**).

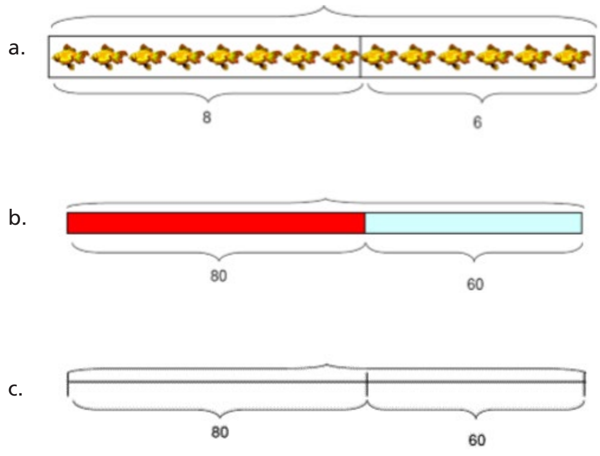


Figura 6. Esempio di rappresentazioni grafiche (Bartolini Bussi, 2009, p. 555).

Un altro strumento metodologico molto importante utilizzato nella scuola cinese è quello dei "problemi con variazione": si tratta di diversi problemi a parole, tipicamente contenuti in una stessa pagina del libro, a cui è associata un'equazione figurale. Questi problemi riguardano lo stesso contesto reale, hanno le stesse quantità in gioco e la stessa struttura aritmetica; la richiesta agli alunni non è solo quella di risolvere i problemi, ma anche di riconoscere le caratteristiche comuni. Proprio nel processo di riconoscimento, le equazioni figurali sono dei potenti strumenti di supporto.
Anche il curriculum di matematica singaporiano per la scuola primaria offre agli studenti numerose esperienze per supportare lo sviluppo di competenze algebriche, partendo dalla risoluzione di problemi che coinvolgono quantità incognite e che vengono risolti attraverso l'uso di rappresentazioni grafiche e successivamente anche del linguaggio algebrico. Le equazioni, ancor prima di essere presentate da un punto di vista formale e simbolico, vengono introdotte attraverso le immagini del *Bar model* che permettono di visualizzare le relazioni quantitative del problema in esame prima di cimentarsi nel calcolo numerico. Il *Bar model* è una strategia di rappresentazione grafica, sviluppata a Singapore, per aiutare gli studenti nella comprensione e nella risoluzione di problemi a parole. Essa si serve di una rappresentazione mediante barre rettangolari. Questa scelta rappresentativa deriva dal fatto che inizialmente gli studenti sono invitati a manipolare dei piccoli parallelepipedi per rappresentare le quantità e le relazioni descritte nei problemi. Successivamente, i parallelepipedi vengono raffigurati sul foglio come dei rettangoli che sono più facili da disegnare e da suddividere e che, anche in caso di quantità elevate di oggetti, si prestano bene per rappresentare e visualizzare le relazioni tra le quantità in gioco.
In Figura 7 viene riportato un tipico problema a parole proposto per gli studenti di quinta della scuola primaria singaporiana, in cui risulta evidente il grande potenziale del *Bar model* (Cai et al., 2011).

"Raju e Samy hanno in totale 410$. Raju possiede 100$ in più rispetto a Samy. Quanti soldi possiede Samy?"

Figura 7. Testo di un problema a parole (Cai et al., 2011, p. 33).

La modellizzazione proposta attraverso la rappresentazione grafica del *Bar model* (Figura 8), permette agli studenti di visualizzare efficacemente le relazioni tra le quantità descritte nel problema e supporta l'ulteriore modellizzazione attraverso il linguaggio algebrico.

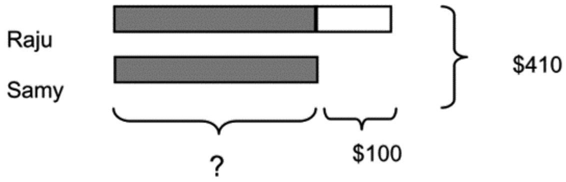


Figura 8. Esempio di *Bar model* (Cai et al., 2011, p. 33).

Dalla rappresentazione grafica in Figura 8, risulta evidente che i rettangoli, utilizzati sia per rappresentare valori noti che valori sconosciuti, sono costruiti in modo tale da restituire le relazioni tra quantità descritte dalle parole del testo del problema. Attraverso il *Bar model*, gli studenti sono accompagnati nella scrittura dell'equazione in linguaggio algebrico: sostituendo la rappresentazione della somma di denaro di Samy attraverso il relativo rettangolo del *Bar model* con la rappresentazione in linguaggio algebrico attraverso la lettera x, giungono a scrivere l'equazione $x + x + 100\$ = 410\$$.
In tutti i casi presentati, le rappresentazioni grafiche, in accordo con gli studi di ambito neuropsicologico accennati, rendono possibile modellizzare in chiave simbolica, e talvolta anticipare, fenomeni, oggetti ed eventi concreti della realtà circostante (Di Nuovo, 1999). L'utilizzo di questo tipo di rappresentazione grafica, quindi, può supportare lo sviluppo del pensiero algebrico, attivando processi di visualizzazione connessi all'utilizzo di semplici espressioni algebriche in contesti di significato, ed aiuta gli studenti a prepararsi allo studio formale vero e proprio del linguaggio algebrico nei gradi scolastici successivi.
L'analisi delle proposte educative e degli approcci precoci all'algebra implementati in Russia, Cina e Singapore, permette di riflettere sui possibili vantaggi di una preparazione al pensiero algebrico ad un livello scolastico primario e sulle modalità di applicazione di tali pratiche didattiche nel contesto scolastico italiano. È tuttavia importante precisare che la metodologia educativa e gli strumenti didattici cinesi e singaporiani rappresentano il prodotto di un complesso sistema che non prescinde dall'aspetto storico, culturale e linguistico del contesto di appartenenza (si veda, ad esempio, Bartolini Bussi & Ramploud, 2018; Mellone et al., 2019; Mellone et al., 2020).

2.2 Metodi grafici per la risoluzione di equazioni di secondo grado

Anche per la risoluzione di equazioni di secondo grado, è possibile trovare già tra gli scritti matematici e i documenti più significativi di popoli antichi, tracce di tecniche risolutive che usino proficuamente la rappresentazione grafica. Alcune tavolette in terracotta risalenti alla prima metà del secondo millennio a.C., su cui risultano incisi, mediante scrittura cuneiforme, calcoli aritmetici, problemi e procedimenti matematici, testimoniano che nella cultura babilonese era già diffuso un metodo grafico per la risoluzione di problemi matematici, che nell'approccio contemporaneo si potrebbero modellizzare attraverso equazioni di secondo grado. Il metodo grafico babilonese è oggi noto come *Geometria Naive* (Høyrup, 1990a) e si propone di ricercare una soluzione ad un dato problema algebrico, attraverso la costruzione e la manipolazione di figure geometriche.
I passaggi utilizzati per la risoluzione di alcuni dei problemi babilonesi sopra citati (Radford & Guérette, 2000) si presentano come una "lista di istruzioni" contenente una sequenza di calcoli da effettuare per giungere alla soluzione. Per tale ragione, per qualche tempo si è supposto che i Babilonesi conoscessero le attuali formule risolutive per le equazioni di secondo grado e che attraverso di esse riuscissero ad ottenere una soluzione esatta ai vari problemi matematici. Questa ipotesi è stata poi superata, dal momento che, analizzando più accuratamente i testi matematici babilonesi, risulta evidente la mancanza di simboli algebrici: proprio a causa della mancanza di rappresentazioni simboliche, l'"algebra babilonese" viene considerata differente dall'algebra elementare moderna (Radford, 1996). È stato il danese Jens Høyrup (1986), storico della matematica, a eliminare ogni sorta di dubbio a tal proposito, e a suggerire che alle

sequenze di calcoli proposte dai Babilonesi per la risoluzione dei problemi matematici era sottesa una rappresentazione grafica ed una spiegazione orale. Un esempio è il problema noto come "Problema 1" (**Figura 9**), presente sulla tavoletta babilonese BM 13901 conservata al British Museum di Londra:

> "Determinare la lunghezza del lato di un quadrato, sapendo che la somma di quest'ultimo e dell'area del quadrato è 3/4".

Figura 9. Testo del "Problema 1" (Radford & Guérette, 2000, p. 69).

Ad ogni istruzione presente sulla tavoletta babilonese, è possibile affiancare una rappresentazione grafica ed un ragionamento legato alla costruzione della rappresentazione stessa, come mostrato di seguito (le **Figure 10-12** sono tratte da Radford & Guérette, 2000, p. 70; le **Figure 13-15** sono variazioni nella rappresentazione della **Figura 12**):

– Istruzione 1: Si consideri il coefficiente 1

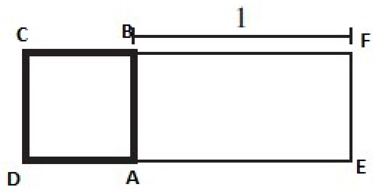


Figura 10. Viene aggiunto al quadrato ABCD, il rettangolo EFBA, di dimensioni 1 ed *s* (lato incognito del quadrato). L'intero rettangolo EFCD ha area $\frac{3}{4}$.

– Istruzione 2: Si prenda la metà di 1

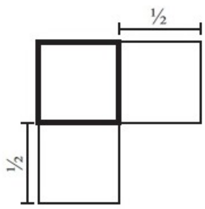


Figura 11. Si divide il lato di lunghezza 1 del rettangolo ABFE a metà e si trasporta uno dei due rettangoli, di dimensioni $\frac{1}{2}$ ed *s*, al di sotto del quadrato iniziale in modo da "incollare" le due figure lungo i lati di lunghezza *s*.

– Istruzione 3: Si moltiplichi $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{2}$

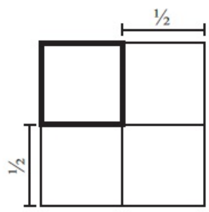


Figura 12. Si completa il quadrato aggiungendo un quadrato di lato $\frac{1}{2}$, che ha area uguale ad $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, cioè $\frac{1}{4}$.

– Istruzione 4: Si sommi $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$

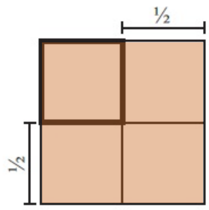


Figura 13. L'area totale del nuovo quadrato ottenuto è $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

– Istruzione 5: Si calcoli la radice di 1

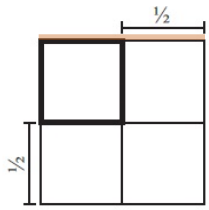


Figura 14. Il lato del nuovo quadrato più grande è dato dalla radice di 1.

– Istruzione 6: Si sottragga $\frac{1}{2}$ ad 1

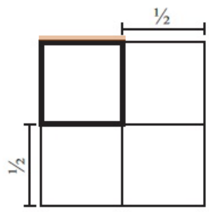


Figura 15. Al fine di ottenere la lunghezza del lato del quadrato originario, si sottrae $\frac{1}{2}$ dal lato di lunghezza 1. La lunghezza cercata risulta, quindi, essere uguale ad $\frac{1}{2}$.

Seguendo questa sequenza di istruzioni, viene determinata, attraverso un procedimento prettamente geometrico, la lunghezza del lato del quadrato originario. È possibile riconoscere una corrispondenza tra la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado e le operazioni geometriche indicate dal metodo babilonese. Il problema, infatti, può essere modellizzato attraverso un'equazione di secondo grado:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

da cui

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

È interessante notare come la somma tra la superficie del quadrato e il suo lato venga trattata come somma di superfici guardando al lato del quadrato come dotato di una "proiezione", il che permette la costruzione di un rettangolo, avente una dimensione uguale al lato del quadrato e l'altra dimensione uguale a 1 (Høyrup, 1990b). L'idea chiave su cui si basa la costruzione geometrica del metodo babilonese per la risoluzione di questi problemi, modellizzabili attraverso equazioni di secondo grado, consiste nel completamento del quadrato geometrico, che ha un'interessante corrispondenza, nella modellizzazione algebrica, con il completamento del quadrato algebrico.

Lo studio condotto da Høyrup (1990b) basato su un'attenta investigazione delle procedure, della

struttura e della terminologia propria della *Geometria Naive* babilonese, mette in evidenza come le parole "area" e "lato", utilizzate nei problemi, indichino relazioni aritmetiche che sussistono con la quantità numerica sconosciuta e come i calcoli aritmetici, che verrebbero fatti attraverso uno svolgimento "classico" del problema, corrispondano in tal caso a trasformazioni geometriche. Dal punto di vista storico risulta difficile tracciare i confini tra l'aspetto geometrico e quello aritmetico nell'algebra babilonese (Høyrup, 1990b), come risulta difficoltoso anche accertare le influenze che questi aspetti hanno avuto nelle diverse pratiche algebriche e geometriche, dal momento che numerosi lavori successivi non contengono riferimenti espliciti a queste fonti (Radford, 1996).
Si può osservare che le figure geometriche presentate da Radford & Guérette (2000) (Figure 10-15), che sono state costruite scegliendo specifiche relazioni tra le dimensioni delle loro componenti, già incorporano la soluzione al problema stesso. Infatti, il rettangolo EFBA, costruito in Figura 10, è rappresentato con la dimensione 1 (segmento BF) doppia rispetto ad *s* (lato incognito del quadrato), anticipando così, da un punto di vista grafico, il risultato ottenuto a seguito dell'analisi della costruzione. In questo modo le rappresentazioni del metodo geometrico babilonese possono suggerire una strategia didattica per un primo approccio alla risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado: le costruzioni geometriche potrebbero essere presentate in modo che i rapporti stessi tra le dimensioni delle parti anticipino e diano senso alla soluzione a cui si giunge per via algebrica. È possibile, però, pensare di utilizzare la sequenza di rappresentazioni geometriche descritte nelle tavolette anche senza conoscere in anticipo le relazioni tra le dimensioni delle figure, impostando una rappresentazione per cui alcune dimensioni potrebbero risultare, per così dire, "sbagliate" alla fine della procedura, utilizzando quindi le rappresentazioni in maniera più qualitativa, ma anche più algebrica.
Nell'ottica della progettazione di un percorso didattico o di un'attività in aula, il metodo risolutivo mostrato consente di riflettere sulla possibilità di trattare anche da un punto di vista geometrico un'equazione di secondo grado. La rappresentazione grafica, o nello specifico la rappresentazione geometrica, funge da mediatore che permette di giungere al contesto algebrico in cui il simbolo sintetizza le esperienze numeriche e geometriche sperimentate in precedenza. Sicuramente questo tipo di processo richiede, sia agli insegnanti che agli studenti, un maggiore tempo di lavoro rispetto a quello previsto per l'introduzione "classica" delle equazioni di secondo grado, che solitamente viene giustificata attraverso delle manipolazioni algebriche (basate appunto sull'idea del completamento del quadrato algebrico). D'altra parte la proposta di Radford e Guérette (2000) punta a fornire un contesto utile agli studenti che permetta loro di sviluppare un significato per i simboli. Si giunge a utilizzare il linguaggio algebrico a seguito di un'operazione di astrazione e generalizzazione: attraverso l'aggiunta di dettagli, gli studenti riescono ad avere più rappresentazioni di uno stesso oggetto, arrivando così ad "astrarlo". Con l'utilizzo del simbolo, essi riescono a riassumere e a rendere generali i procedimenti di costruzione geometrica adoperati per la ricerca della soluzione. Secondo la visione di Radford infatti, l'astrazione non consiste nel rimuovere delle caratteristiche da un dato oggetto, ma nell'aggiungerne di nuove (Radford & Guérette, 2000): attraverso la rappresentazione grafica, supportata in tal caso dalla tecnica della *Geometria Naive*, agli studenti viene fornito un nuovo modo di guardare alle equazioni di secondo grado. Le rappresentazioni grafiche costruite per la risoluzione del problema, possono essere manipolate ed esplorate, fornendo in tal modo agli studenti una modalità per dare significato ai simboli e comprendere e giustificare le formule risolutive per le equazioni di secondo grado.

3 Rappresentazioni geometriche nella risoluzione di equazioni di terzo grado

Il problema riguardante la risoluzione di equazioni algebriche rappresenta un tassello fondamentale della matematica anche da un punto di vista storico. Nel sedicesimo secolo, il matematico bolognese

Rafael Bombelli, studiando alcune equazioni di terzo grado mediante il metodo esplorato da Cardano, del Ferro e Tartaglia, propone un'interpretazione geometrica delle formule algebriche utilizzate per la loro risoluzione. Essa è basata su quelle che egli definisce "costruzioni in linee", ossia delle rappresentazioni bidimensionali e tridimensionali che prevedono la scomposizione di un solido in vari solidi (**Figura 16**) (Bagni, 2008).

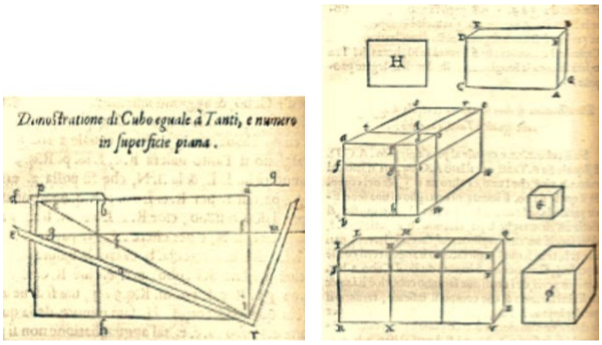


Figura 16. Esempio di costruzioni in linee proposte da Bombelli (Bagni, 2008, p. 409).

Seguendo le tracce di Radford e Guérette (2000) e tenendo conto delle suggestioni storiche di Bombelli, proponiamo una riflessione sull'introduzione della formula risolutiva per l'equazione cubica $x^3 + px = q$, usando una rappresentazione grafica, in particolare geometrica, che possa promuovere un utilizzo più consapevole del linguaggio simbolico e, dunque, supportare l'evoluzione del pensiero algebrico. L'esempio matematico preso in considerazione (Lo Sapio, 2019), pensato per studenti di scuola secondaria di secondo grado,[4] consiste nella risoluzione attraverso rappresentazioni e manipolazioni geometriche di un particolare problema di geometria solida (**Figura 17**) modellizzabile attraverso un'equazione di terzo grado.

"La lunghezza (incognita) dello spigolo di un cubo coincide con l'altezza di un parallelepipedo rettangolo.
Uno spigolo di base del parallelepipedo rettangolo misura 6 unità mentre la lunghezza dell'altro supera quella dello spigolo del cubo di 2 unità.
Sapendo che la somma dei volumi dei due solidi è 19 unità cubiche, determina la lunghezza dello spigolo del cubo."

Figura 17. Testo del problema proposto.

Al fine di "visualizzare" la situazione problematica, possono essere presi in considerazione alcuni solidi di cartoncino (due cubi e sei parallelepipedi rettangoli); tra le lunghezze degli spigoli dei solidi devono sussistere le relazioni esplicitate nella traccia del problema (**Figura 17**). Di seguito riportiamo una proposta di misure che possono essere intese come esempio-guida per l'eventuale realizzazione degli artefatti:
- 1 cubo con spigolo di 11 cm;
- 1 cubo con spigolo di 5 cm;
- 3 parallelepipedi rettangoli ognuno con altezza 11 cm, lunghezza 5 cm, larghezza 11 cm;
- 3 parallelepipedi rettangoli ognuno con altezza 5 cm, lunghezza 5 cm, larghezza 11 cm.

4. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

I solidi di cartoncino, che fungono da mediatori, vengono disposti per ricreare la situazione descritta dal problema (**Figura 18**): si accostano i 6 parallelepipedi a formare il parallelepipedo rettangolo oggetto del problema, il cubo con spigolo lungo 11 cm rappresenta il cubo oggetto del problema.

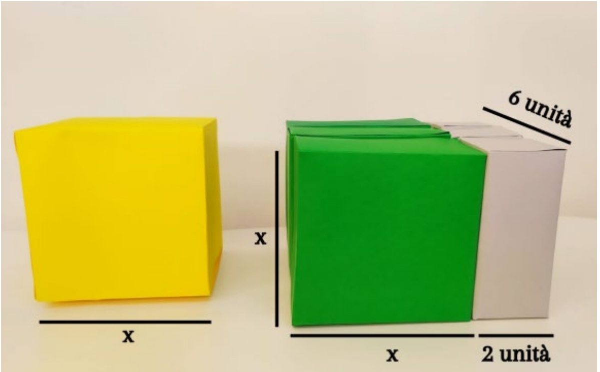


Figura 18. Solidi di cartoncino disposti a rappresentare il problema.

Le manipolazioni dei solidi di cartoncino, utili per arrivare ad una risoluzione geometrica del problema proposto, ricalcano quelle previste per le costruzioni geometriche del metodo babilonese, tenendo presente che in questo caso bisogna lavorare nel tridimensionale. Analogamente alla risoluzione illustrata in precedenza, si effettuano particolari "tagli" e spostamenti dei solidi che compongono il parallelepipedo rettangolo come descritto di seguito:

- si divide lo spigolo del parallelepipedo rettangolo lungo 6 unità in tre parti uguali ed in corrispondenza si effettuano dei tagli che permettono di ottenere tre nuovi parallelepipedi rettangoli, ciascuno di altezza incognita x e spigoli di base lunghi rispettivamente 2 unità e $x + 2$ unità (**Figura 19** – tagli blu);
- il taglio successivo è mirato ad ottenere tre parallelepipedi a base quadrata con spigolo lungo 2 unità, ciascuno di altezza incognita x, e tre parallelepipedi a base rettangolare, ciascuno di altezza incognita x e spigoli di base lunghi rispettivamente x e 2 unità (**Figura 19** – taglio rosso).

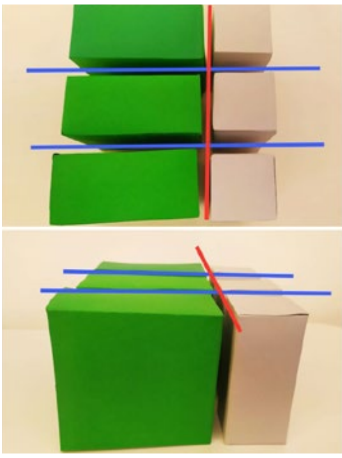


Figura 19. I segmenti in blu e rosso indicano le divisioni da effettuare al fine di ottenere tre parallelepipedi a base quadrata (parallelepipedi grigi) e tre parallelepipedi a base rettangolare (parallelepipedi verdi).

Adoperando le lettere al posto dei numeri, la **Figura 20** mostra i solidi di cui si dispone.

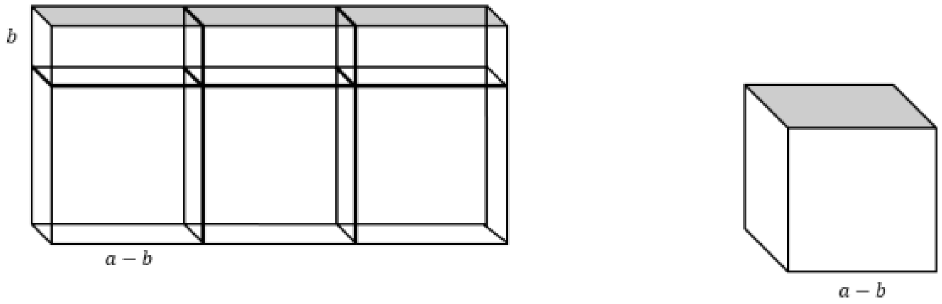


Figura 20. Rappresentazione grafica dei solidi di cui si dispone e delle dimensioni degli spigoli (Lo Sapio, 2019, p. 73).

Disponendo i parallelepipedi ottenuti attorno al cubo, come mostrato in **Figura 21**, si ottiene un nuovo solido:

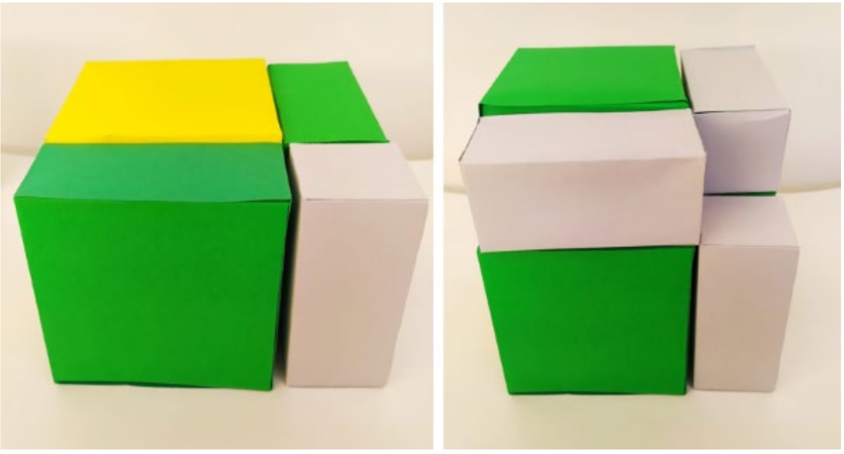


Figura 21. L'immagine a sinistra mostra il primo step da eseguire, quella a destra, il secondo e ultimo step.

Il solido ottenuto ha volume pari a 19 unità cubiche, come dichiarato nel problema iniziale, e può essere completato in un cubo aggiungendo un cubetto di spigolo 2 unità (cubetto arancione in **Figura 22**).

Figura 22. In arancione è raffigurato il cubetto di spigolo 2 unità da aggiungere al solido, al fine di ottenere un cubo di spigolo $x + 2$ unità.

Il volume del cubetto aggiunto è uguale a 8 unità cubiche; pertanto, il volume del nuovo cubo risulta essere uguale a 19 + 8 = 27 unità cubiche. Da qui si deduce che lo spigolo del nuovo cubo misura 3 unità. Dunque, la lunghezza dello spigolo incognito x è 1 unità.
Con le notazioni introdotte precedentemente, il cubo e il parallelepipedo rettangolo di partenza hanno volume rispettivamente uguale ad $(a-b)^3$ e a $3(a-b)b \cdot (a-b) + 3(a-b)b \cdot b$.
Il cubetto aggiunto al fine di "completare" il cubo ha volume b^3. Il nuovo cubo ottenuto, di spigolo a, è mostrato in **Figura 23**.

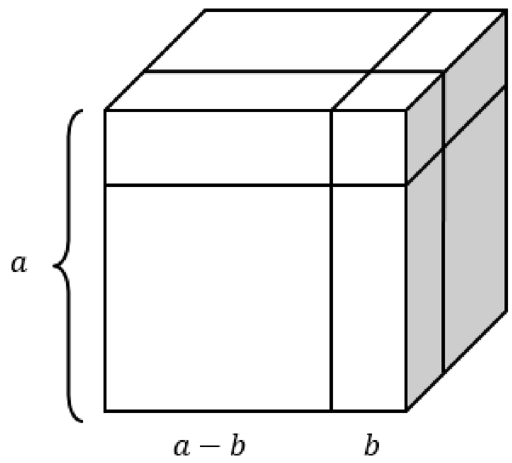


Figura 23. Cubo ottenuto a partire dai "tagli" effettuati e dalle manipolazioni descritte (Lo Sapio, 2019, p. 71).

A questo punto, si osserva che il volume del cubo ottenuto, a^3, può essere calcolato mediante la somma dei volumi dei tre solidi di cui esso si compone.

$$a^3 = (a-b)^3 + b^3 + 3b(a-b)^2 + 3(a-b)b^2,$$

da cui, si ottiene:

$$a^3 = (a-b)^3 + b^3 + 3ba^2 + 3b^3 - 6ab^2 + 3ab^2 - 3b^3.$$

Effettuando alcuni calcoli si ha:

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3.$$

Ponendo x uguale ad $a-b$, si ha:

$$x^3 + 3abx = a^3 - b^3.$$

L'equazione appena ottenuta è della forma:

$$x^3 + px = q\ ,$$

dove $p = 3ab$, da cui si ricava $ab = \frac{p}{3}$, e $q = a^3 - b^3$.

L'equazione $x^3 + px = q$ viene trasformata nel sistema:

$$\begin{cases} a - b = x \\ ab = \frac{p}{3} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Elevando al cubo la seconda equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} a - b = x \\ a^3b^3 = \frac{p^3}{27} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Le ultime due equazioni del sistema equivalgono al problema della determinazione di due numeri il cui prodotto e la cui differenza sono noti. Nel dettaglio, i due numeri la cui differenza è q e il cui prodotto è $\frac{p^3}{27}$ risolvono l'equazione di secondo grado $y^2 - qy - \frac{p^3}{27} = 0$, pertanto:

$$y = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

da cui:

$$a^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad b^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Ricordando che $x = a - b$, si ottiene:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

giungendo alla soluzione in forma algebrica dell'equazione cubica considerata.

4 Discussione e conclusioni

Le ricerche sull'Early Algebra (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011) richiamate all'inizio di questo lavoro hanno permesso di evidenziare come le rappresentazioni grafiche possano giocare un ruolo importante nell'avvio dei processi di riconoscimento della struttura matematica fin dai primi anni scolastici. Come anticipato, in questo studio abbiamo provato a collegare il filone di ricerca dell'Early Algebra, in particolare la sua attenzione all'uso di rappresentazioni grafiche, con la ricerca sviluppata sempre nell'ambito della didattica della matematica riguardo ai processi di visualizzazione. Abbiamo quindi evidenziato come le ricerche iniziali di Presmeg (si veda Presmeg, 1986; Presmeg & Bergsten, 1995) riguardanti la visualizzazione ed il pensiero visivo come risorsa nell'apprendimento della matematica, abbiano avuto come nucleo teorico di base i risultati ottenuti dallo psicologo sovietico Krutetskii (1968/1976). Gli studi di Presmeg hanno permesso l'evoluzione della ricerca riguardante la visualizzazione, evoluzione che ha comportato cambiamenti anche in relazione ai paradigmi teorici e alle metodologie di ricerca comunemente ritenute legittime. In questo scenario, emerge con sempre più chiarezza la necessità di integrare a livello didattico metodologie e innovazioni capaci di includere e potenziare approcci cognitivi differenti e complementari.
Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato, attraverso gli studi di ricerca citati e gli esempi di situa-

zioni matematiche differenti, come le rappresentazioni grafiche e geometriche forniscano una risorsa didattica importante per inglobare e sintetizzare precisi ragionamenti e come esse siano in grado di aiutare la costruzione di significati personali da parte degli studenti. In particolare, è stato mostrato come in alcuni approcci orientali sia previsto, già a partire dalla scuola primaria, di proporre agli allievi esperienze basate sull'utilizzo di rappresentazioni grafiche connesse a problemi di natura algebrica che permettono una maggiore comprensione delle relazioni quantitative a supporto del passaggio a un successivo studio più formale dell'algebra. L'ipotesi alla base di questi approcci didattici è che lo studio delle relazioni quantitative attraverso l'utilizzo di immagini, grafici e schemi e la successiva trasformazione di tali strutture in simboli algebrici, permetta all'allievo di radicare idee astratte in eventi significativi e concreti. L'idea è che questo tipo di esperienze, se proposte durante i primi anni di scuola, possano preparare gli allievi in modo più efficace ad affrontare un successivo studio più formale del linguaggio algebrico (Blanton & Kaput, 2011).
Nell'attuale pratica didattica italiana, l'uso di rappresentazioni grafiche o geometriche ed i processi di visualizzazione ad esso connessi non sempre vengono valorizzati per la risoluzione di problemi algebrici. Le difficoltà che spesso si riscontrano nell'utilizzo di rappresentazioni grafiche in matematica e la risultante non attivazione di processi di visualizzazione, in particolar modo nel contesto algebrico, possono essere in parte attribuite alla scarsa abitudine nell'uso scolastico di utilizzare, ove possibile, rappresentazioni grafiche da affiancare alle espressioni algebriche. Non a caso, come evidenziato ad esempio in Bagni (1997), gli studenti italiani nel risolvere problemi algebrici appaiono timorosi nello scegliere una risoluzione che si basi su costruzioni geometriche o rappresentazioni grafiche, ed invece più propensi a procedere in maniera analitica attraverso trattamenti simbolici che considerano come più affidabili e tradizionalmente più sicuri. Nelle Indicazioni Nazionali per i Licei (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010, pp. 19–20), d'altra parte, si legge: «Fermo restando l'importanza della acquisizione delle tecniche, saranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi». In conclusione dunque, all'aspetto esclusivamente tecnico e procedurale con cui vengono spesso affrontate le equazioni algebriche a scuola, potrebbe essere opportuno affiancare anche quello basato sulla costruzione di rappresentazioni grafiche per giungere ad una manipolazione consapevole dei simboli.
In questa prospettiva abbiamo cercato di mostrare come le rappresentazioni grafiche possano essere un valido strumento per introdurre lo studio più formale del linguaggio algebrico a partire dal caso più semplice, previsto dalle equazioni figurali per le equazioni di primo grado, passando ai metodi della *Geometria Naive* babilonese per le equazioni di secondo grado, fino a giungere alla risoluzione di alcune equazioni di terzo grado attraverso l'uso di particolari rappresentazioni che prendono ispirazione dalle costruzioni in linee di Bombelli. Speriamo quindi che gli esempi di rappresentazioni grafiche presentati in questo articolo possano essere di ispirazione per la pratica didattica d'aula e, d'altra parte, aprire la strada a sperimentazioni più analitiche che puntino a indagare la connessione tra l'uso di rappresentazioni grafiche durante le lezioni di matematica e le abilità di visualizzazione degli studenti.

Bibliografia

Bagni, G. T. (1997). Visualizzazione e didattica della matematica nella scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20B*(4), 309–335.

Bagni, G. T. (2008). La nascita di un concetto matematico: Rafael Bombelli e gli immaginari. *Progetto Alice, 27*, 405–418.

Bartolini Bussi, M. G. (2009). Una metodologia didattica della scuola cinese: i problemi con variazione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32A*(5), 545–564.

Bartolini Bussi, M. G., & Ramploud, A. (2018). *Il lesson study per la formazione degli insegnanti.* Carocci Faber.

Bishop, A. J. (1973). Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education, 9*, 43–49.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5–23). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Borbas, A. (Ed.) (1988). *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (12th, Veszprem, Hungary, July 20-25, 1988), Volume 1.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives.* Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Cai, J., Ng, S. F., & Moyer, J. C. (2011). Developing students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China to Singapore. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 25–41). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_3

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 224–238). Lawrence Erlbaum Associates.

Di Nuovo, S. (1999). *I processi immaginativi: componenti e sviluppo. Mente e immaginazione. La progettualità creativa in educazione e terapia.* FrancoAngeli. http://www.fmag.unict.it/Public/Uploads/links/Immaginimentali.pdf

Høyrup, J. (1986). Al-Khwarizmi, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra. *Erdem*, 2, 445–484.

Høyrup, J. (1990a). Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought. *Altorientalische Forschungen*, *17*(1), 27–69 & *17*(2), 262–354.

Høyrup, J. (1990b). Algebraic traditions behind Ibn Turk and Al-Khwarizmi. In *Proceedings of the International Symposium on Ibn Turk, Khwârezmî, Fârâbî, Beyrûnî and Ibn Sînâ* (Ankara, 9–12 September, 1985), 247–268.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press. (Edizione originale in russo pubblicata nel 1968. Tradotto da Joan Teller, a cura di J. Kilpatrick & I. Wirszup).

Lo Sapio, R. M. (2019). *Rappresentazioni grafiche come risorsa didattica per la risoluzione di equazioni.* Tesi Magistrale in Matematica. Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Mellone, M., Punzo, C., & Tortora, R. (2013). Un percorso per riscoprire i significati algebrici lavorando con le quantità. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 36A*(1), 53–84.

Mellone, M., Ramploud, A., & Carotenuto, G. (2020). An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 379–396. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09942-7

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM Mathematics Education, 51*, 199–212. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0992-7

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali". http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297–311.

Presmeg, N. C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Sense publishers.

Presmeg, N. C. (2014). Mathematics at the center of distinct fields: A response to Michael and Ted. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics and mathematics education: Searching for common ground* (pp. 45–53). Springer.

Presmeg, N. C. (2019). The evolution of mathematics education research: Russia's place in this global movement. In A. Shvarts (Ed.), *Proceedings of the PME and Yandex Russian conference: Technology and Psychology for Mathematics Education* (pp. 19–31). HSE Publishing House.

Presmeg, N. C., & Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: An international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 58–65). PME.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 39–53). Springer.

Radford, L. (2000). Students' processes of symbolizing in algebra: A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81–88). PME.

Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second degree equations in the classroom: A Babylonian approach. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics. An international perspective* (pp. 69–75). The Mathematical Association of America.

Schmittau, J. (2011). The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: A vygotskian perspective. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 71–85). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_5

Venenciano, L., Polotskaia, E., Mellone, M., & Radford, L. (2021). An introduction to multiple perspectives on Davydov's approach in the XXI century. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 323–326. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10040-5

Zago, S., Allegri, N., Cristoffanini, M., Porta, M., Ferrucci, R., & Priori, A. (2010). La perdita dell'immagine mentale visiva tra neurologia e psichiatria: una rivisitazione critica del caso di Charcot e Bernard del 1883. *Giornale Italiano di Psicopatologia, 16*, 346–361.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 52 - 67, DOI:10.33683/ddm.22.11.3 OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Fare scuola a casa in tempi di lockdown: l'esempio dei problemi moltiplicativi

Schooling at home during lockdown: the example of multiplicative problems

Andrea Maffia
Università di Pavia – Italia

andrea.maffia@unipv.it

Sunto / Attraverso due studi di caso, si propone una riflessione sull'attività matematica individuale che i bambini della scuola primaria svolgono a casa e su come l'interazione con i genitori influenzi tale attività. Dopo aver presentato una breve rassegna della letteratura sul tema del "fare scuola a casa" e del rapporto dei genitori con i compiti di matematica dei figli, si analizzano qualitativamente dati raccolti durante il lockdown e relativi a due studenti di classe terza della scuola primaria italiana.

Parole chiave: lockdown; compiti; genitori; risorse online; moltiplicazione.

Abstract / By analyzing two case studies, we propose a reflection about primary children mathematical activity at home and how the interaction with the parents influences such activity. After presenting a short review of the literature about homeschooling and about parents' relationship with mathematics homework, we qualitatively analyze data collected during the lockdown and concerning the activity of two Italian third grade students.

Keywords: lockdown; homework; parents; online resources; multiplication.

1 Introduzione

La pandemia globale che ci ha colpiti negli ultimi anni scolastici ha avuto un effetto importante sull'educazione matematica degli studenti, in particolare sui più giovani e sui più svantaggiati (Bakker & Wagner, 2020). L'esperienza del lockdown ha modificato in modo determinante l'esperienza del "fare scuola" di bambini, insegnanti e non solo. Solitamente parliamo di scuola riferendoci a un contesto deliberatamente educativo, in cui insegnanti e studenti sono gli attori centrali, all'interno di una relazione esperto-novizio (Bronkhorst & Akkerman, 2016). L'intenzionalità educativa non è andata perduta nel contesto del lockdown, ma le modalità di relazione tra insegnanti e studenti sono state differenti e, specialmente nei primi gradi di scolarizzazione, alcuni genitori hanno avuto un ruolo prominente nell'educazione matematica dei bambini (Bakker & Wagner, 2020). Generalmente "scuola" indica anche un edificio e un certo ritmo di lavoro (Bronkhorst & Akkerman, 2016); per molti bambini l'apprendimento e lo studio sono attività definite dal luogo in cui si svolgono (la scuola appunto), mentre quello che avviene altrove è gioco o altro (Zhao, 2020). Si tratta di caratteristiche che sono state modificate profondamente nel "fare scuola a casa" che ha influenzato moltissimi Paesi, quantomeno durante il lockdown della seconda parte dell'anno scolastico 2019-20. La casa è divenuta il "dove" della scuola; i confini tra casa e scuola si sono assottigliati e le difficoltà sono state molteplici anche nella situazione ideale in cui un'ottima connessione internet era disponibile e genitori ben formati erano in grado di aiutare i propri figli (Bakker & Wagner, 2020). Alle istituzioni sono stati richiesti sforzi particolari nel tentativo di aiutare gli studenti con scarso supporto da parte dei genitori o con un ambiente domestico poco adatto allo studio (Daniel, 2020). Come insegnanti ed educatori ci siamo tutti interrogati sull'efficacia degli interventi di didattica a distanza, soprattutto per la mancanza di informazioni circa il modo in cui l'apprendimento avviene a casa. Si tratta di una mancanza di conoscenza riflessa nella scarsità di letteratura di ricerca circa il modo in cui l'educazione matematica attuata nella scuola viene recepita ed estesa nei contesti extra-scolastici, scarsità particolarmente marcata a livello di scuola primaria[1] (Jackson, 2011; Stevens et al., 2005).
Vari autori hanno cercato di stimare quale sarà la perdita di apprendimenti causata dal lockdown: dalla letteratura relativa a più brevi periodi di interruzione (si veda, ad esempio, Carlsson et al., 2015) e alle pause estive (si veda, ad esempio, Lavy, 2015), sappiamo che sicuramente è andata persa una buona porzione di anno scolastico (le stime vanno da un quinto fino a metà dell'anno, si vedano Burgess & Sievertsen, 2020; Engzell et al., 2020; Kuhfeld et al., 2020), con un effetto particolarmente importante per la matematica (Kuhfeld et al., 2020). Sappiamo che tutte queste stime devono essere amplificate per i contesti svantaggiati da un punto di vista socioeconomico (Engzell et al., 2020; Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione [INVALSI], 2021; Kuhfeld et al., 2020). Oltre a prendere atto di queste inevitabili perdite, possiamo però domandarci se questo difficile periodo può aiutarci a riflettere sul modo in cui facciamo didattica normalmente (Zhao, 2020).
In questo contributo ci interrogheremo sul modo in cui i nostri studenti di scuola primaria studiano a casa. Anche nel futuro non mancheranno le occasioni in cui singoli studenti o intere classi saranno costretti a "fare scuola da casa". Inoltre, è una prassi abituale per molti insegnanti quella di assegnare compiti da svolgere a casa. In che modo i genitori influenzano lo svolgimento delle consegne date?
La pandemia ha creato l'occasione per raccogliere dati sul modo in cui i bambini studiano a casa. Per esempio, nel contesto italiano, sappiamo che il 71% degli studenti di quinta primaria ha a casa un computer connesso alla rete, ma solo il 45% ha una postazione adatta allo studio in cui sia disponibile anche un PC (Argentin, 2021). In che modo la postazione di studio disponibile può influenzare lo svolgimento di consegne fornite in formato digitale?
In questo articolo faremo uso di dati raccolti durante il lockdown italiano (aprile 2020) per effettuare un'analisi di tipo qualitativo. Attraverso due studi di caso, ci interrogheremo sul ruolo svolto dai genitori; sia sul ruolo

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

che hanno avuto durante il lockdown, sia su quello che potrebbero continuare ad avere dopo la pandemia. Prima di descrivere lo studio, dedicheremo due paragrafi a una breve rassegna della letteratura già esistente sull'apprendimento a distanza della matematica – in generale – e poi sul ruolo dei genitori – in particolare.

2 Fare scuola a casa

L'insegnamento a distanza non è certamente una novità legata all'emergenza pandemica. L'uso didattico di video nella scuola dell'obbligo è documentato negli Stati Uniti già agli inizi del XX secolo (Saettler, 2004, citato in Barbour, 2018). Si tratta di un fenomeno con larga diffusione in Nord America (Cavanaugh et al., 2009): nell'anno scolastico 2016-17 gli studenti in età dell'obbligo coinvolti in programmi di didattica online erano circa due milioni (Barbour, 2018). Gli studenti che fanno ricorso a tale modalità d'insegnamento possono avere ragioni diverse: studenti che vivono in aree remote, studenti ospedalizzati, atleti professionisti, studenti incarcerati, studenti che hanno bisogno di orari flessibili o con bisogni educativi speciali.
Nella letteratura di ricerca sono svariate le pubblicazioni circa *distance learning, e-learning, web-based education* ecc. Queste metodologie vengono distinte dallo studio individuale in quanto organizzate istituzionalmente e perché comprendono modalità di telecomunicazione tra studenti e con i docenti che solitamente si trovano geograficamente distanti tra loro (Schlosser & Simonson, 2002). La comunicazione può avvenire sia in modo sincrono, quando gli studenti comunicano con gli insegnanti in diretta, sia in modo asincrono o in una combinazione delle due modalità (Romiszowski & Mason, 2004).
Sebbene le documentazioni di programmi d'istruzione online non scarseggino, la letteratura a disposizione è spesso di tipo aneddotico più che di ricerca (Cavanaugh et al., 2009), gli esempi legati alla scuola primaria sono pochissimi (Barbour, 2018; Cavanaugh et al., 2009; Di Pietro, 2010; Ferdig et al., 2009; Rice, 2006) e mancano studi specifici rispetto al contenuto d'insegnamento (Di Pietro et al., 2008).
Per quanto riguarda la matematica, i corsi online documentati riguardano soprattutto l'algebra dato che molte scuole rurali nord-americane non avrebbero altrimenti accesso ad insegnanti qualificati (Kosko et al., 2014). Tali ricerche mostrano che le differenze (in termini di risultati di apprendimento) tra questi corsi online e quelli svolti in presenza sono trascurabili (Kosko et al., 2014). Tali risultati confermano la tendenza più generale osservata in ricerche analoghe su altre discipline (Rice, 2006). Esistono studi che testimoniano, per la matematica, risultati migliori nel contesto a distanza rispetto a quello in presenza (si veda, ad esempio, Hughes et al., 2007), ma per via di limiti metodologici, tali risultati sono scarsamente generalizzabili (Rice, 2006). In generale, si osservano risultati particolarmente positivi nel caso di corsi di recupero, mentre la scuola online a tempo pieno sembra avere scarsa efficacia rispetto a quella in presenza (Barbour, 2018).
Vari ricercatori concordano sul fatto che non è tanto il mezzo elettronico a fare la differenza nell'efficacia di un corso, quanto il ruolo del docente, dell'apprendente e delle modalità di apprendimento-insegnamento all'interno del particolare contesto dato dall'educazione a distanza (Cavanaugh et al., 2009; Kosko et al., 2014; Rice, 2006). Una delle caratteristiche che incide maggiormente sull'efficacia di un programma di apprendimento a distanza è la capacità dello studente di organizzare il proprio studio (Kosko et al., 2014; Roblyer et al., 2008) a ovvio discapito degli studenti più giovani. Frid e Soden (2001) hanno osservato che gli studenti che non sono supervisionati da un adulto hanno una partecipazione quantitativamente e qualitativamente più scarsa.
La letteratura sembra suggerire che la presenza di un adulto, e il coinvolgimento dei genitori in particolare, sia ancora più importante nel contesto dell'educazione a distanza (Borup et al., 2013). Fan e Chen (2001) hanno notato che non sono tanto le pratiche di controllo (come la riduzione delle possibili distrazioni) da parte dei genitori a fare la differenza negli esiti di apprendimento degli studenti,

quanto le loro aspettative. Boulton (2008) ha intervistato studenti di scuola superiore coinvolti in un corso online e ha notato che gli studenti si aspettano dai propri genitori il ruolo di motivatori e supervisori svolto dagli insegnanti nel contesto di insegnamento tradizionale. Rilevando l'importanza di tale ruolo, lo stesso autore ne conclude la necessità di considerare la pianificazione del coinvolgimento dei genitori in ogni situazione in cui gli studenti lavorano da casa.

3 Genitori e compiti di matematica

L'importanza del ruolo dei genitori non è evidenziata solo dalla letteratura sull'apprendimento a distanza, ma anche da quei pochi studi che si sono occupati di indagare le modalità e i motivi del coinvolgimento degli adulti di riferimento nei compiti di matematica dei bambini. Olympia et al. (1994) definiscono i compiti come «lavoro accademico assegnato a scuola che è progettato per estendere la pratica delle abilità accademiche in altri ambienti durante l'orario extra-scolastico» (p. 62, traduzione dell'autore). Secondo Lee e Pruitt (1979) i compiti possono comprendere esercizi (di ripetizione), attività di preparazione a una successiva lezione, approfondimenti ed estensioni (per es. l'applicazione di abilità apprese a nuove consegne) e produzioni creative (usi originali delle abilità apprese). In tutti questi casi, i compiti hanno sicuramente l'effetto di legittimare l'ingresso in casa delle pratiche scolastiche; sono oggetti di confine tra la comunità scolastica e quella familiare (Bronkhorst & Akkerman, 2016; Hughes & Greenhough, 2008).
Alcuni autori sostengono che, mediamente, la matematica è una delle discipline per cui vengono richiesti più compiti a casa (Fan et al., 2017; Pezdek et al., 2002). Da un punto di vista pedagogico, le consegne date per casa potrebbero fornire l'occasione per creare collegamenti tra gli apprendimenti scolastici e quelli extra-scolastici, tuttavia la ricerca sembra suggerire che questo avviene raramente (Hughes, 2001; Winter et al., 2004).
I genitori sono soliti intervenire nei compiti assegnati dagli insegnanti ai loro figli, perché è diffusa la convinzione che gli altri (inclusi i figli) lo vedano come un dovere parentale. Inoltre, molti genitori dichiarano di credere che il loro supporto avrà un effetto positivo sugli apprendimenti dei figli, specialmente se hanno un alto senso di autoefficacia (Hoover-Dempsey et al., 2001). Queste convinzioni non sono supportate da risultati empirici (Olympia et al., 1994), anche se un effetto positivo viene registrato, per la matematica e per le scienze, nel caso delle scuole superiori ed elementari (Fan et al., 2017). L'intervento dei genitori sembra influire positivamente in termini di motivazione, senso di autoefficacia e miglioramento dell'atteggiamento nei confronti della matematica (Hoover-Dempsey et al., 2001; Jackson, 2011; Olympia et al., 1994).
L'intervento dei genitori può anche essere causa di tensioni, per via delle diverse letture che i figli danno alle consegne. I genitori, infatti, potrebbero trovare una discrepanza rispetto alla loro esperienza scolastica oppure potrebbero non comprendere gli obiettivi che l'insegnante ha nel dare un certo esercizio (Jackson, 2011; Lacasa et al., 2002). Ancora, i genitori possono ricorrere a ricerche su internet e trovare procedure risolutive diverse rispetto a quelle che gli studenti hanno appreso a scuola; tali discrepanze possono essere fonte di conflitto e spingere il bambino a dubitare della competenza matematica dei genitori (Hughes & Greenhough, 2008; Jackson, 2011). D'altra parte, non solo i genitori possono mal interpretare le consegne date dagli insegnanti; anche gli insegnanti possono interpretare erroneamente le intenzioni che hanno i genitori quando forniscono aiuto ai propri figli con i compiti di matematica (Jackson, 2011).
Secondo Hoover-Dempsey et al. (2001) i comportamenti dei genitori dipendono da vari fattori che includono le loro convinzioni sull'educazione dei figli, la loro comprensione degli obiettivi del compito, le conoscenze personali. In base a questi fattori, è possibile osservare diversi tipi di comportamento

da parte dei genitori quando aiutano i loro figli con i compiti. Una prima modalità di approccio è definita da Lacasa et al. (2002) di tipo *meccanico* e consiste nel valutare solo l'apparenza della consegna attivando procedure memorizzate a prescindere dal significato effettivo del testo della consegna. Lo scopo è solitamente quello di terminare il compito rapidamente, rispettando le aspettative del docente. Il secondo tipo di approccio viene chiamato *pedagogico* (Lacasa et al., 2002) e si manifesta nel caso in cui il genitore assume il ruolo del "trasmettitore" di conoscenza. In queste situazioni l'adulto divide la consegna in singole parti e istruisce il bambino su come procedere in ciascuna; impone la propria modalità risolutiva al bambino. L'ultimo approccio prende il nome di *costruzione condivisa di conoscenza* e si realizza quando la responsabilità della consegna è condivisa tra bambino e adulto.
Nello specifico caso della matematica, nel contesto in cui le conoscenze matematiche dei genitori sono limitate, Jackson (2011) osserva due tipi di comportamento diverso. A volte il bambino cerca il genitore per avere consigli e quindi il genitore agisce da tutore; in altre occasioni il bambino e i familiari lavorano insieme (alla pari) nella risoluzione delle consegne.
Analizzando i dati relativi ai due studi di caso proposti di seguito, analizzeremo il comportamento dei genitori per comprendere se il loro approccio è meccanico, pedagogico o di costruzione condivisa di conoscenza.

4 Il contesto: video per apprendere la moltiplicazione

I due studi di caso presentati riguardano l'uso di un video che presenta una situazione problematica di tipo moltiplicativo, appositamente progettato per il periodo di lockdown. L'insegnante ha scelto questo video tra quelli raccolti sul sito www.moltiplicazione.it, un repository progettato in modo collaborativo da ricercatori in didattica della matematica e docenti italiani di scuola primaria. Si tratta di numerosi video in cui i realizzatori propongono attività (giochi, situazioni problematiche, esplorazioni) pensate per bambini delle classi seconda e terza. Non trovando in letteratura dei criteri prestabiliti per la produzione di video adatti all'uso asincrono per la particolare fascia d'età, i realizzatori dei video hanno discusso e stabilito dei criteri (principi di design) in base alle loro conoscenze e alla loro esperienza. Vista la rilevanza di tali scelte sull'attività dei bambini, di seguito si descrivono tali caratteristiche.
Un primo criterio rispettato nella progettazione di tutti i video presenti su moltiplicazione.it è la durata dei video: tutti devono avere una durata inferiore a 10 minuti, per consentire al bambino di poter mantenere alta l'attenzione per tutta la durata del video. Tale durata è stata stabilita in base all'esperienza dei docenti coinvolti e facendo riferimento al lavoro di Carotenuto e Sbaragli (2018) secondo cui studenti di età maggiore preferiscono video della durata minore di 20-25 minuti. Durante il video, inoltre, viene proposto (una o più volte) al bambino di mettere in pausa e prendersi il tempo di riflettere sulla consegna data. In questo modo, il tempo di attenzione continuativa verso il video è ridotto e si richiede un lavoro attivo da parte del discente. Un'altra importante caratteristica dei materiali di moltiplicazione.it è infatti quella di proporre sempre attività il più vicine possibili a quelle laboratoriali, ovvero in cui l'alunno può fare ipotesi e testarle, raccogliere informazioni sulla particolare situazione problematica per poi discuterla insieme all'insegnante o ai compagni in eventuali attività sincrone successive. I materiali richiesti in queste attività devono sempre essere facilmente reperibili in casa, in modo da essere effettivamente realizzabili durante il lockdown.
Da parte del gruppo di progettazione dei materiali vi era una grande preoccupazione rispetto al senso di isolamento che il bambino potrebbe aver provato nel ricevere istruzioni solo attraverso materiale digitale. Per questo, è stato deciso che all'interno del video la faccia dello speaker deve sempre essere visibile; che lo speaker si deve presentare all'inizio del video; che le consegne devono sempre essere

rivolte al bambino. L'obiettivo è quello di creare un maggiore coinvolgimento del bambino nell'interazione, seppur asincrona. Studi relativi agli studenti universitari hanno mostrato risultati di apprendimento migliori nel caso di video in cui il relatore è visibile per discipline diverse dalla matematica (Chen & Wu, 2015); per quanto riguarda la matematica, i risultati sono equivalenti nel caso in cui l'istruttore sia visibile o meno, ma il gradimento del video da parte degli studenti – così come la loro motivazione a guardarne altri – è maggiore quando le espressioni e i gesti di chi parla sono disponibili (Lui, 2021) e studi con *eye-tracking* mostrano che gli studenti spesso guardano l'insegnante mostrato nel video e non solo le slide (Kizilcec et al., 2014).
Secondo Olympia et al. (1994), tra le variabili che più influenzano qualitativamente una consegna vi sono la chiarezza dello scopo della consegna e delle istruzioni. Si è deciso quindi di fare uso del linguaggio tecnico solo a "piccole dosi" e di utilizzare più modalità di rappresentazione (grafica, simbolica, verbale) delle informazioni. Rau et al. (2009) hanno messo in evidenza, per altri contenuti matematici, come l'accesso a tutte e tre le modalità di rappresentazione garantisca maggiore successo in termini di apprendimento nel contesto di risorse digitali. La multimodalità (nel senso di Kress, 2004) è stata garantita anche in termini di tipologie di risorse rese disponibili: ad ogni video è allegato un file PDF che riporta le istruzioni delle consegne presentate nel video stesso. Si è scelto di caricare i video su YouTube e di fornire i file in modalità PDF per rendere facilmente consultabili le risorse anche attraverso smartphone e tablet, a volte unici dispositivi disponibili nelle famiglie dei bambini.
Le statistiche di visualizzazione del sito mostrano numerosi accessi a partire dal registro elettronico della scuola; gli insegnanti hanno quindi inserito i link ai video direttamente nel registro affinché le famiglie potessero accedervi. Il sito moltiplicazione.it è stato visitato da insegnanti e studenti distribuiti su tutto il territorio italiano e non solo, con il picco massimo nel mese di aprile (**Figura 1**).

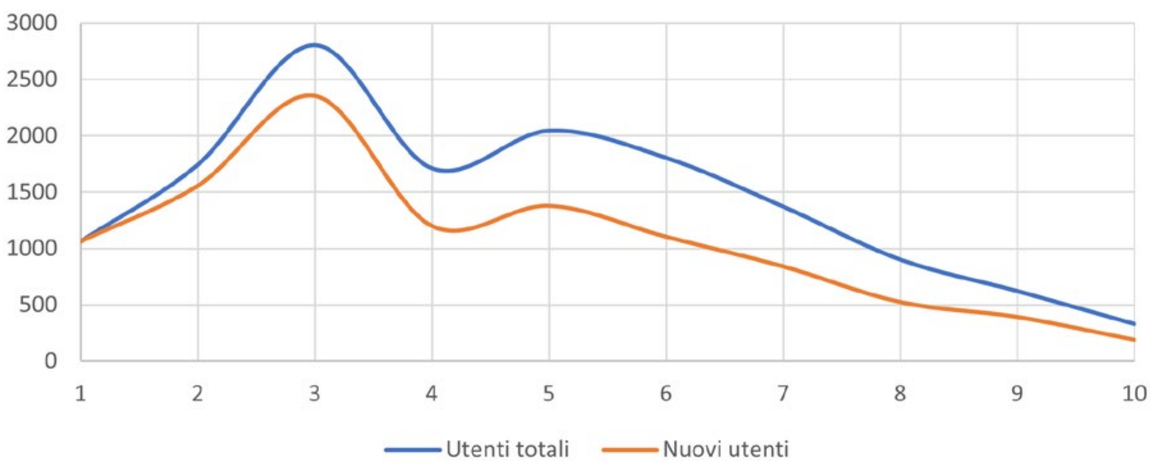


Figura 1. Numero di utenti che hanno visualizzato il sito moltiplicazione.it nelle 10 settimane comprese tra la sua apertura (30/03/21) e la fine dell'anno scolastico nella maggior parte delle regioni italiane (07/06/21).

Nel corso delle settimane è aumentata la percentuale di utenti che sono tornati a visionare il sito che è passata dal 23,2% al termine della prima settimana fino al 46,6% dell'ultima settimana dell'anno scolastico. Gli stessi utenti hanno visualizzato più volte il sito, probabilmente per visionare più di uno dei video presenti.

5 Uno studio di caso: Guido, Fabio e le vetrate

Lo studio presentato è uno studio di caso doppio: vengono analizzati i dati relativi a due studenti della stessa classe che affrontano lo stesso problema, in due contesti familiari diversi. Si tratta di uno studio di caso parallelo, in cui i dati relativi ai due casi sono messi a confronto (Thomas, 2011). Gli studenti – che chiameremo con gli pseudonimi Guido e Fabio – frequentavano la classe terza primaria al momento della raccolta dati (aprile 2020). La loro insegnante non è una delle autrici dei video di moltiplicazione.it e non è quindi lo speaker del video; insegna in Emilia-Romagna. Nei seguenti sottoparagrafi verrà prima presentato il video che la docente ha inviato ai due, si indicheranno poi le modalità con cui i dati sono stati raccolti e analizzati. Infine, si procederà a illustrare i risultati.

5.1 Il problema delle vetrate

Il problema utilizzato è tratto dalla finale della 26ª edizione del Rally Matematico Transalpino. Nel testo del problema[2] viene mostrata l'immagine del progetto di una vetrata realizzata da un personaggio fittizio di nome Clara (**Figura 2**). Nel testo del problema si spiega che «il numero scritto in ciascun rettangolo è uguale al numero di quadretti che lo compongono». I rettangoli colorati non devono sovrapporsi.
Nel video viene letto il testo del problema e mostrato l'esempio di vetrata. Sono poi mostrati altri due progetti (**Figura 3**) che lo studente è invitato a colorare. Nel video (della durata complessiva di 4:02 minuti) sono dedicati 1:20 minuti alla presentazione dello speaker e alla lettura del testo del problema. Il primo progetto di vetrata da completare viene poi mostrato a video per un minuto e si invita lo studente a mettere in pausa il video mentre ricopia la griglia 6×6 e colora. Un altro minuto è quindi dedicato a mostrare e commentare l'unica soluzione possibile. Nell'ultima parte del video viene mostrato un altro progetto di vetrata e lo speaker afferma esplicitamente che tale progetto può essere colorato correttamente in modi differenti. Il bambino è invitato a copiare più volte la vetrata per provare soluzioni differenti e a condividerle con il proprio insegnante e i propri compagni di classe.

Figura 2. Screenshot del video in cui viene presentato il problema "La vetrata".
Viene mostrato un esempio di vetrata completato correttamente.

In entrambi i casi al bambino è richiesto di individuare le possibili dimensioni del rettangolo in modo che l'area corrisponda al valore indicato sul progetto. Deve quindi individuare coppie di numeri che, moltiplicati tra loro, forniscano il prodotto richiesto. Nel caso di numeri primi (come 2, 3 o 5) lo studente deve solo scegliere l'orientazione del rettangolo; lo stesso nel caso del numero 9 che può essere rappresentato solo come quadrato 3 × 3 dato che la dimensione massima

2. Il video completo può essere trovato all'indirizzo www.moltiplicazione.it/problemi/vetrata oppure youtu.be/3LslrjHRC7s.

della griglia è 6. Prodotti come 4, 6 e 12 possono invece essere rappresentati da vari rettangoli con dimensioni differenti.

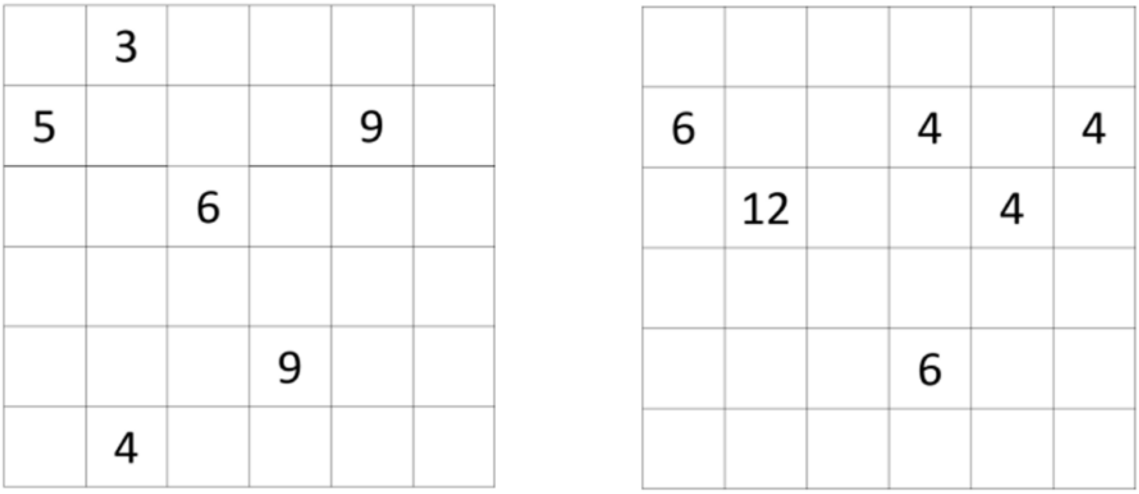


Figura 3. Due progetti di vetrata che sono mostrati (uno dopo l'altro) nel video e che i bambini devono copiare e colorare.

5.2 Raccolta e analisi dei dati

Il video è stato condiviso dall'insegnante attraverso il registro elettronico in modo che il link fosse disponibile a tutti gli studenti della classe. In accordo con l'autore di questo contributo, l'insegnante ha richiesto ai genitori di alcuni allievi la disponibilità a filmare proprio figlio durante la visione del video e l'attività risolutiva. I genitori di Guido e Fabio hanno partecipato intenzionalmente allo studio e sono essi stessi gli autori delle registrazioni effettuate, in entrambi i casi, nell'ambiente casalingo. Tra i genitori e l'insegnante esiste (già da prima del lockdown) un contratto didattico per cui gli interventi da parte loro nei compiti dei figli devono essere minimi. La docente ha inoltre condiviso con i genitori il desiderio di voler lavorare maggiormente sui processi che sui prodotti e ha sottolineato con loro l'importanza che desidera dare agli aspetti argomentativi dell'attività matematica.
I video sono stati condivisi con l'insegnante e con il ricercatore che ha trascritto fedelmente i dialoghi tra il bambino e i suoi genitori. Tali dialoghi sono riportati in questo articolo in forma anonimizzata: i bambini sono indicati con l'iniziale degli pseudonimi scelti, la lettera M indica un intervento della madre, mentre la lettera P indica un intervento del padre. Le trascrizioni sono state integrate con screenshot del video laddove sono effettuati dei gesti o mostrati i disegni dei bambini.
Guido è descritto dalla sua maestra come un bambino con una competenza matematica nella media. Il video registrato dai genitori dura 12:31 minuti ed entrambi i genitori interagiscono col bambino mentre affronta il problema della vetrata. Fabio è indicato come un bambino con una competenza matematica medio-alta e nel video (della durata complessiva di 29:34 minuti) interagisce solo con il padre.
I diversi episodi della trascrizione sono stati etichettati sia in base al tipo di intervento fatto dal genitore (o dai genitori) sia in base alle interazioni del bambino con il video. Queste ultime sono state classificate in base alle caratteristiche desiderate nel design del video (presentate nel par. 4), così come esemplificato nei risultati riportati di seguito.

5.3 Risultati

In entrambi i casi, i bambini iniziano la loro attività ascoltando la voce dello speaker che si presenta. Riusciamo ad osservare il contesto in cui lavorano: entrambi stanno visionando il video a tutto schermo su un portatile. Come possiamo vedere nella Figura 4, Guido si trova nella sua cameretta e ha di fronte a sé un foglio con quadretti da 1 cm, una matita, una penna e un righello. Di fianco a sé ha il proprio astuccio. Fabio lavora invece sul tavolo della cucina di casa sua. Ha di fronte a sé il quaderno di matematica (con quadretti da 5 mm), alcune penne e una matita, l'astuccio con i colori.

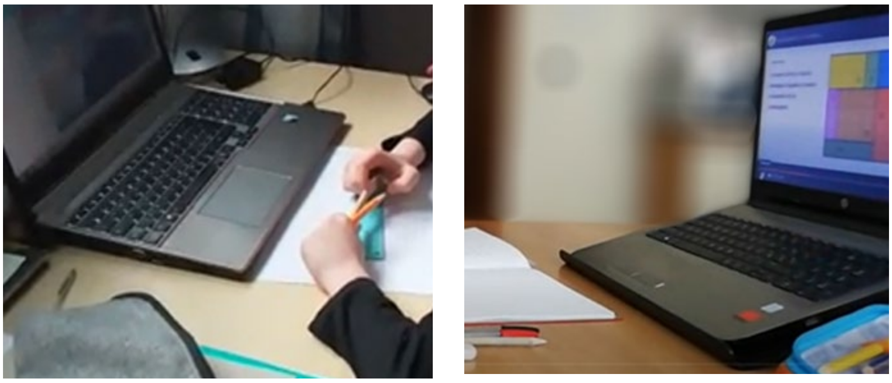


Figura 4. Le postazioni di lavoro di Guido (a sinistra) e di Fabio (a destra).

L'osservazione della postazione ci permette di notare che un intervento potrebbe essere stato fatto dai genitori già prima dell'inizio della registrazione. La presenza di un foglio con quadrettatura da 1 cm (diversa rispetto a quella del quaderno di matematica) e di un righello nel caso di Guido potrebbe essere frutto di una visione preliminare del video da parte dei genitori che hanno quindi organizzato il materiale sulla scrivania. In entrambi i casi i bambini si trovano nella fortunata situazione in cui il materiale necessario per eseguire il compito a casa è disponibile (incluso uno schermo grande su cui visionare il video) e in cui i genitori sono disponibili a stare insieme al figlio durante la risoluzione del compito. Tuttavia, queste prime piccole differenze ci fanno già notare come il ruolo del genitore possa essere importante addirittura prima che il bambino inizi ad affrontare la consegna fornita dall'insegnante.
In entrambi i casi i bambini prestano molta attenzione alla fase di presentazione dello speaker e alla lettura del testo del problema; i loro sguardi non sono mai distolti dallo schermo. Fabio mantiene lo sguardo sullo schermo anche mentre il padre gli chiede se ha capito bene le istruzioni. Quando lo speaker suggerisce di mettere in pausa il video per completare la prima vetrata, Fabio mette in pausa il video autonomamente, mentre Guido chiede al padre di farlo.
Appare molto diversa la fase successiva, in cui Guido disegna immediatamente la griglia come un quadrato col lato di 6 quadretti (nel suo caso ogni quadretto ha lato 1 cm); Fabio decide invece di ingrandire la griglia facendo corrisponde l'unità della griglia a tre quadretti del suo quaderno. Una volta che i bambini hanno realizzato la griglia 6 × 6, osserviamo due dinamiche diverse. Nel caso di Guido, il dialogo con i genitori serve a chiarire la consegna.

1. G.: «Allora: li devo cerchiare, gli spazi che contengono il numero cinque».
2. M.: «Devi creare i rettangoli come ti ha detto il…».
3. P.: «Come pensi tu che vadano».
4. M.: «Devi creare i rettangoli che formano la…».
5. G.: «Ma tipo: numero cinque, conta anche questo quadretto?» [indica con la punta della matita il quadretto in cui ha scritto la cifra 5].
6. M. e P.: «Certo!»
7. M.: «Certo, anche quello dove c'hai scritto il numero».
8. G.: «Uno, due, tre… Si può fare anche così tipo?» [con la punta della matita sembra tracciare una sorta di L].
9. P.: «Deve essere un rettangolo o un quadrato».

Nel caso di Fabio, invece, il padre suggerisce di mandare indietro il video per ascoltare nuovamente la consegna. Secondo la classificazione di Lacasa et al. (2002) notiamo che i genitori di Guido hanno un approccio pedagogico, come evidenziato dalle istruzioni fornite in forma di imperativi (interventi 2 e 4), mentre l'approccio del padre di Fabio sembra indicare il desiderio di avviare una costruzione condivisa di conoscenza in cui l'autorità rimane in capo allo speaker del video e non viene assunta dal genitore.
Per entrambi i bambini continua la visione del video. Alternano lo sguardo tra il foglio su cui hanno svolto il lavoro e lo schermo del computer. Quando lo speaker, dopo aver descritto la soluzione, domanda «Avete fatto anche voi nello stesso modo?» Fabio risponde annuendo col capo e sussurrando «Sì». Questo suggerisce che la scelta di realizzare i video rivolgendosi direttamente allo spettatore non è neutra per il bambino che, sentendosi coinvolto nel dialogo, vi prende parte.
Il padre di Guido interrompe il video prima che venga presentato il secondo progetto di vetrata e chiede al figlio di descrivere alla maestra la procedura che ha seguito per arrivare alla soluzione. Nel caso di Fabio, invece, la visione del video prosegue e la nuova situazione problematica viene presentata. Prima ancora di iniziare a disegnare, il bambino afferma di aver compreso la soluzione. Il padre suggerisce quindi di descriverla prima di disegnarla e chiede al bambino di farlo rivolgendosi alla videocamera. In entrambi i casi possiamo interpretare questo comportamento dei genitori come un effetto del contratto didattico tra loro e la maestra, la quale ha sottolineato l'importanza dei processi (piuttosto che dei prodotti) e dell'argomentazione.
Nel momento in cui lo speaker annuncia che il secondo progetto di vetrata può prevedere diverse soluzioni, notiamo due comportamenti diversi da parte dei genitori. Nel caso di Guido, i genitori interpretano subito la consegna per lui.

10. P.: «Ok. Tu basta che ne fai uno».
11. M.: «Fai uno, poi dopo fai quello che ti viene...».
12. […] [Il video termina e il disegno che il bambino dovrebbe effettuare non è più visibile].
13. P.: «Aspetta un attimo».
14. M.: «Aspetta che…».
15. P.: «Aspetta un momento che l'ho perso».
16. M.: «Abbiamo perso la tabella».
17. P.: «Ho perso la tabella».
18. G.: «Ma è uguale» [dice mentre guarda il disegno fatto in precedenza].
19. M.: «Intanto la puoi fare…».
20. P.: «Intanto puoi fare…».
21. M.: «Intanto puoi fare lo schema».
22. […] [Il padre tenta di ritrovare il giusto video, intanto avvia altri video].
23. M.: «Adesso la ritroviamo».
24. G.: [mentre il padre sta avviando il giusto video] «Però hai messo volume zero».
25. P.: «Ma non ti serve il volume».
26. M.: «Ok. Questa… qui ci sono i numeri».

Notiamo che i genitori decidono che il bambino individuerà una sola soluzione (intervento 10) anche se sembra esserci un lieve disaccordo tra di loro (intervento 11). L'approccio adottato appare qui di tipo meccanico dato che lo scopo sembra essere quello di portare rapidamente a termine la consegna. Inoltre, la scelta del padre di rimuovere l'audio del video (interventi 24 e 25) sembra inficiare la multimodalità dell'informazione fornita: il genitore seleziona un'unica modalità di ricezione dell'informazione da parte del bambino, nonostante la sua protesta. Troviamo conferma di un approccio meccanico nella parte successiva del video in cui il padre richiede al bambino la spiegazione (rispettando sempre il contratto didattico con l'insegnante) per poi concludere il video. Al termine del video il bambino ha individuato una sola soluzione per ciascun progetto e nessuna delle due vetrate è colorata (**Figura 5**).

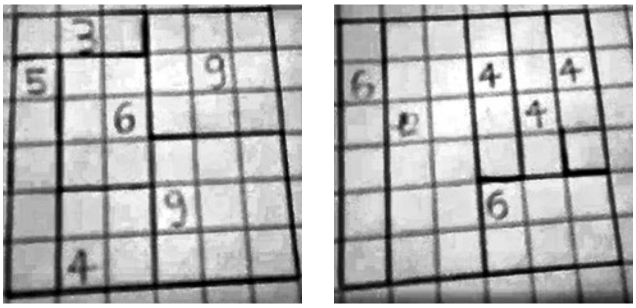


Figura 5. Produzioni di Guido al termine del video.

La situazione è piuttosto diversa nel caso di Fabio: su invito del padre, il bambino inizia a spiegare la soluzione che ha trovato per il secondo progetto. Lo fa indicando più volte la griglia rappresentata sullo schermo (**Figura 6**). Quando il bambino ha terminato la spiegazione, il padre gli risponde:

27. P.: «Bravo! [con un tono apparentemente stupito]. Il dodici potrebbe essere anche questo qui [traccia col dito indice sul monitor il contorno di un rettangolo 2 × 6, **Figura 6**] e il sei questo qui [traccia col dito il perimetro di un rettangolo 1 × 6]».
28. F.: «Eh! Va bene, ma io l'ho fatto in un altro modo».
29. P.: [ridendo] «Ok, dai».

Figura 6. Sia Fabio che suo padre rappresentano possibili soluzioni tracciandole col dito sullo schermo del computer.

Figura 7. Produzioni di Fabio al termine del video.

In questo breve stralcio notiamo che il padre suggerisce al figlio la possibilità di individuare più soluzioni e ne espone una, ponendosi alla pari del bambino in un processo di costruzione condivisa della conoscenza. Addirittura, quando il bambino afferma che quella è la propria soluzione, il padre rispetta questa presa di posizione del figlio e non insiste perché il bambino adotti la soluzione alternativa proposta. Il bambino procede quindi a disegnare la propria soluzione avendo cura di colorare i rettangoli con colori diversi. Il clima è estremamente disteso, tant'è che padre e figlio cominciano a parlare di ricordi di famiglia mentre il bambino completa la coloritura (**Figura 7**).

6 Discussione

"Fare scuola" e "fare scuola a casa" non sono sicuramente la stessa cosa e tanto la letteratura (par. 2) quanto i dati raccolti in seguito all'emergenza pandemica (INVALSI, 2021) ci fanno comprendere che possono esserci importanti limiti nell'insegnamento a distanza della matematica. Tuttavia, possiamo cercare di trarre alcuni insegnamenti dall'esperienza vissuta, insegnamenti che potrebbero esserci utili per future emergenze, ma anche per la nostra pratica didattica quotidiana (Zhao, 2020).
In questo contributo si sono presentati due studi di caso relativi a studenti di terza primaria che, in compagnia dei loro genitori, affrontano una consegna presentata attraverso un video.
Il ruolo dei genitori è risultato molto differente nei due casi proposti. Nel caso di Guido abbiamo osservato interventi sia della madre che del padre (non sempre in accordo) volti a organizzare l'ambiente (Figura 4) e i tempi di lavoro, spiegare e modificare la consegna (interventi 1-11). Si è trattato di un approccio pedagogico (nella classificazione di Lacasa et al., 2002) o di un approccio meccanico. Il padre di Fabio ha invece invitato il bambino a lavorare col video in modo autonomo, suggerendo comunque di esplorare possibili altre soluzioni (intervento 27). Inserendosi in un processo di costruzione condivisa della conoscenza, padre e figlio hanno anche utilizzato lo schermo del computer come spazio gestuale condiviso (Figura 6) su cui presentare e discutere diverse soluzioni. Questo forse non sarebbe stato possibile se il video fosse stato visionato su uno schermo più piccolo (come quello di uno smartphone). Tale osservazione ci spinge a riflettere sul fatto che questi due esempi sono casi fortunati in cui, tra i vari materiali utili al lavoro, è presente un PC connesso a Internet. Sappiamo che non è così per tutti gli studenti di scuola primaria (Argentin, 2021). Dobbiamo notare che l'analisi proposta ha l'evidente limite di essere relativa a soli due casi. Inoltre, la codifica dei dati è stata effettuata da un solo ricercatore e differenti interpretazioni sono sicuramente possibili. I risultati presentati non sono certamente generalizzabili, ma hanno il solo scopo di mettere in luce differenze e somiglianze nei possibili approcci dei genitori ai compiti di matematica dei loro figli.
In entrambi i casi abbiamo osservato la richiesta, da parte del genitore, di verbalizzare la procedura seguita per arrivare a una soluzione della situazione problematica. Abbiamo interpretato questo come una risposta al particolare contratto che la maestra ha condiviso con i genitori. Si tratta di una lezione che probabilmente non vale solo per il lockdown, ma per i compiti a casa più in generale. Come notano Hughes e Greenhough,

> «Se i compiti sono visti come un modo genuino per creare connessioni tra la casa e le pratiche scolastiche, coinvolgendo altri membri della famiglia e i pari nella soluzione collaborativa di problemi, allora ci saranno consegne molto diverse per i compiti e le interazioni saranno diverse».
> (Hughes & Greenhough, 2008, p. 149, traduzione dell'autore)

La poca letteratura disponibile riferisce di discontinuità tra l'ambiente domestico e quello scolastico, problema che si amplifica per i più deboli o marginalizzati (Bronkhorst & Akkerman, 2016). Qui abbiamo fornito un contributo condividendo ulteriori dati che confermano quanto i genitori possano essere importanti risorse per la vita accademica dei figli (Jackson, 2011). Sappiamo ancora poco di quanto il loro intervento possa essere efficace in termini di risultati accademici, in particolare per quanto riguarda la matematica alla scuola primaria. Tuttavia, l'analisi dettagliata di due brevi video ci ha permesso di mettere in luce varie tra le molte delle azioni svolte dai genitori nel supportare i propri figli nel fare i compiti che troviamo descritte in letteratura: organizzazione degli spazi e dei tempi di lavoro, monitoraggio dell'attività del bambino, correzioni e conferme, svolgimento collaborativo del compito (Hoover-Dempsey et al., 2001; Jackson, 2011).
Nel particolare esempio proposto, il video ha funzionato da oggetto di confine tra la scuola e la casa. Anche se una valutazione della bontà dei video presenti su moltiplicazione.it non è il focus di questo

studio, possiamo notare che le scelte di design fatte da esperti di didattica (ricercatori e insegnanti) si sono rivelate in buona parte efficaci. La breve durata del video (e in particolare del tempo tra l'inizio del video e la richiesta di mettere in pausa) ha permesso a entrambi gli studenti di mantenere l'attenzione verso lo schermo per tutto il tempo necessario a comprendere la consegna o confrontare la propria soluzione con quella presentata. Il momento in cui viene proposto al bambino di mettere in pausa e lavorare autonomamente è stato effettivamente utilizzato in tal senso e possiamo notare che il tempo di attività del bambino è sempre molto maggiore rispetto alla durata del video. Gli studenti hanno potuto lavorare semplicemente con carta, penna e colori, producendo soluzioni differenti (Figura 5 e Figura 7) che potrebbero diventare oggetto di un confronto e di una discussione collettiva all'interno di un'attività sincrona con la docente.
Abbiamo notato che l'attenzione a rivolgersi in prima persona al bambino viene recepita dal fruitore del video: nel caso di Fabio abbiamo potuto addirittura documentare la risposta che il bambino dà allo speaker del video. Il problema proposto è stato compreso facilmente dai bambini e le rappresentazioni proposte sono state accessibili. Notiamo che il particolare problema si prestava a conversioni dalla rappresentazione grafica (mediante rettangoli) a quella simbolica o verbale di moltiplicazioni: tuttavia, questo non è avvenuto in questi due casi. Sembra che l'intervento dell'insegnante sia necessario per una successiva fase di formalizzazione e istituzionalizzazione. La multimodalità con cui l'informazione è fornita sembra essere apprezzata dai bambini che prestano attenzione sia alle immagini a video, sia alle spiegazioni fornite verbalmente; abbiamo però notato come questa possa essere inficiata dall'intervento dei genitori.
Data la scarsa letteratura sul design di video per l'insegnamento della matematica a bambini di scuola primaria, queste osservazioni possono rappresentare un ulteriore contributo alla letteratura: i principi di design potrebbero essere utili punti di partenza per la creazione di video futuri, non solo in risposta a emergenze (lockdown, ospedalizzazioni), ma anche per la pratica didattica quotidiana. Si concorda infatti con Carotenuto e Sbaragli quando affermano che:

> «Con l'avvento di Internet e lo sviluppo delle tecnologie digitali, si sono sviluppate pratiche di comunicazione e di interazione online che sembrano ben armonizzarsi con le pratiche pedagogiche dell'attivismo e del "learning by doing". Come sostengono diversi autori, questa rivoluzione digitale fornisce gli strumenti per modificare le pratiche didattiche trasmissive rendendole più costruttive, collaborative e sociali e rendendo le fonti della conoscenza più economiche, disponibili, varie e fondate sulla condivisione».
>
> (Carotenuto & Sbaragli, 2018, p. 10)

Ringraziamenti
Un sentito ringraziamento va a tutte le insegnanti e ricercatrici che hanno collaborato alla progettazione e realizzazione dei materiali presenti su moltiplicazione.it e alla raccolta dei dati presentati in questo articolo. In particolare, si ringraziano Giusy Barbieri, Marta Benini, Maita Bonazzi, Antonella Castellini, Patrizia Dignatici, Daniela Iacomino, Alice Lemmo, Luisa Lenta, Monica Righetti, Giuditta Ricciardiello, Gabriella Romano, Sabrina Savasi, Cristina Trombin.

Bibliografia

Argentin, G. (2021). Bisogna essere in due per implementare la DAD. Studenti e insegnanti di fronte alle sfide poste da Covid-19 [Webinar]. *L'importanza dei dati e delle metodologie statistiche di ricerca: l'emergenza Covid-19.* https://www.youtube.com/watch?v=2sANJuyTMNo

Bakker, A., & Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics*, *104*(1), 1–4.

Barbour, M. K. (2018). The landscape of K-12 online learning: Examining what is known. In M. G. Moore (Ed.), *Handbook of distance education, 4th Edition* (pp. 574–593). Routledge.

Borup, J., Graham, C. R., & Davies, R. S. (2013). The nature of parental interactions in an online charter school. *American Journal of Distance Education*, *27*(1), 40–55.

Boulton, H. (2008). Managing e-learning: What are the real implications for schools? *The Electronic Journal of e-Learning*, *6*(1), 11–18.

Bronkhorst, L. H., & Akkerman, S. F. (2016). At the boundary of school: Continuity and discontinuity in learning across contexts. *Educational Research Review*, *19*, 18–35.

Burgess, S., & Sievertsen, H. (2020, 1 Aprile). Schools, skills, and learning: The impact of COVID-19 on education. *VoxEU – CEPR’s policy portal.* https://voxeu.org/article/impact-covid-19-education

Carlsson, M., Dahl, G. B., Öckert, B., & Rooth, D. (2015). The Effect of Schooling on Cognitive Skills. *Review of Economics and Statistics*, *97*(3), 533–554.

Carotenuto, G., & Sbaragli, S. (2018). Flipped classroom per la formazione insegnanti: una ricerca sulla percezione degli studenti. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, *3*, 7–34.

Cavanaugh, C. S., Barbour, M. K., & Clark, T. (2009). Research and practice in K-12 online learning: A review of open access literature. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning*, *10*(1), 1–21.

Chen, C. M., & Wu, C. H. (2015). Effects of different video lecture types on sustained attention, emotion, cognitive load, and learning performance. *Computers & Education*, *80*, 108–121.

Daniel, J. (2020). Education and the COVID-19 pandemic. *Prospects*, *49*(1), 91–96.

Di Pietro, M. (2010). Virtual school pedagogy: The instructional practices of K-12 virtual school teachers. *Journal of Educational Computing Research*, *42*(3), 327–354.

Di Pietro, M., Ferdig, R. E., Black, E. W., & Preston, M. (2008). Best practices in teaching K-12 online: Lessons learned from Michigan Virtual School teachers. *Journal of Interactive Online Learning*, *7*(1), 10–35.

Engzell, P., Frey, A., & Verhagen, M. (2020, 9 Novembre). The collateral damage to children’s education during lockdown. *VoxEU – CEPR’s policy portal.* https://voxeu.org/article/collateral-damage-children-s-education-during-lockdown

Fan, H., Xu, J., Cai, Z., He, J., & Fan, X. (2017). Homework and students’ achievement in math and science: A 30-year meta-analysis, 1986–2015. *Educational Research Review*, *20*, 35–54.

Fan, X., & Chen, M. (2001). Parental involvement and students’ academic achievement: A meta-analysis. *Educational Psychology*, *13*(1), 1–22.

Ferdig, R. E., Cavanaugh, C., Di Pietro, M., Black, E. W., & Dawson, K. (2009). Virtual schooling standards and best practices for teacher education. *Journal of Technology and Teacher Education*, *17*(4), 479–503.

Frid, S., & Soden, R. (2001). Supporting primary students' on-line learning in a virtual enrichment program. *Research in Education*, *66*(1), 9–27.

Hoover-Dempsey, K. V., Battiato, A. C., Walker, J. M., Reed, R. P., DeJong, J. M., & Jones, K. P. (2001). Parental involvement in homework. *Educational Psychologist*, *36*(3), 195–209.

Hughes, J. E., McLeod, S., Brown, R., Maeda, Y., & Choi, J. (2007). Academic achievement and perceptions of the learning environment in virtual and traditional secondary mathematics classrooms. *The American Journal of Distance Education*, *21*(4), 199–214.

Hughes, M. (2001). Linking home and school mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Volume 1* (pp. 5–10). IGMPE.

Hughes, M., & Greenhough, P. (2008). We do it a different way at my school. In A. Watson & P. Winbourne (Eds.), *New directions for situated cognition in mathematics education* (pp. 129–151). Springer.

Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2021). *Presentazione del Rapporto delle Prove INVALSI 2021*. https://www.invalsiopen.it/risultati/risultati-prove-invalsi-2021/

Jackson, K. (2011). Approaching participation in school-based mathematics as a cross-setting phenomenon. *The Journal of the Learning Sciences*, *20*(1), 111–150.

Kizilcec, R. F., Papadopoulos, K., & Sritanyaratana, L. (2014). Showing face in video instruction: effects on information retention, visual attention, and affect. In M. Jones, P. Palanque, A. Schmidt & T. Grossman (Eds.), *Proceedings of the SIGCHI conference on human factors in computing systems* (pp. 2095–2102). Association for Computing Machinery.

Kosko, K. W., Sobolewski-McMahon, L., & Amiruzzaman, M. (2014). Growing in number: Research on mathematical teaching and learning in the online setting. In K. Kennedy & R. E. Ferdig (Eds.), *Handbook of Research on K-12 Online and Blended Learning, 2nd edition* (pp. 289–302). Carnegie Mellon University: ETC Press.

Kress, G. (2004). Reading images: Multimodality, representation and new media. *Information Design Journal*, *12*(2), 110–119.

Kuhfeld, M., Soland, J., Tarasawa, B., Johnson, A., Ruzek, E., & Liu, J. (2020). Projecting the potential impact of COVID-19 school closures on academic achievement. *Educational Researcher*, *49*(8), 549–565.

Lacasa, P., Reina, A., & Alburquerque, M. (2002). Adults and children share literacy practices: The case of homework. *Linguistics and Education*, *13*(1), 39–64.

Lavy, V. (2015). Do differences in schools' instruction time explain international achievement gaps? Evidence from developed and developing countries. *Economic Journal*, *125*(588), F397–F424.

Lee, J. F., & Pruitt, K. W. (1979). Homework assignments: Classroom games or teaching tools? *The Clearing House*, *53*(1), 31–35.

Lui, R. (2021, 11–18 July). *Effects of instructional videos on students learning* [Conference session]. ICME 14, Shanghai, China. https:/www.icme14.org/static/en/news/36.html?v=1626532787882

Olympia, D. E., Sheridan, S. M., & Jenson, W. R. (1994). Homework: A natural means of home-school collaboration. *School Psychology Quarterly*, *9*(1), 60–80.

Pezdek, K., Berry, T., & Renno, P. A. (2002). Children's mathematics achievement: The role of parents' perceptions and their involvement in homework. *Journal of Educational Psychology*, *94*, 771–777.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanation prompts support learning of fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings of the 14th international conference on artificial intelligence in education* (pp. 441–448). IOS Press.

Rice, K. L. (2006). A comprehensive look at distance education in the K–12 context. *Journal of Research on Technology in Education*, *38*(4), 425–448.

Roblyer, M. D., Davis, L., Mills, S. C., Marshall, J., & Pape, L. (2008). Toward practical procedures for predicting and promoting success in virtual school students. *The American Journal of Distance Education*, *22*(2), 90–109.

Romiszowski, A., & Mason, R. (2004). Computer-mediated communication. In D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 397–431). Lawrence Erlbaum Associates.

Schlosser, L., & Simonson, M. (2002). *Distance education: Definition and glossary of terms.* AECT.

Stevens, R., Wineburg, S., Herrenkohl, L., & Bell, P. L. (2005). Comparative understanding of school subjects: Past, present, and future. *Review of Educational Research*, *75*(2), 125–157.

Thomas, G. (2011). A typology for the case study in social science following a review of definition, discourse, and structure. *Qualitative inquiry*, *17*(6), 511–521.

Winter, J., Salway, L., Ching Yee, W., & Hughes, M. (2004). Linking home and school mathematics: The home school knowledge exchange project. *Research in Mathematics Education*, *6*(1), 59–75.

Zhao, Y. (2020). COVID-19 as a catalyst for educational change. *Prospects*, *49*(1), 29–33.

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 69 - 94, DOI: 10.33683/ddm.22.11.4

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Alla scoperta dei numeri che ci circondano

Discovering the numbers that surround us

Marika Catelli•[•], Angelica Di Domenico°[•], Carlo Mina••[•] e Monica Treppiedi°°[•]
•Istituto scolastico di Ascona – Svizzera
°Unità scolastiche differenziate di Muralto – Svizzera
••Istituto scolastico di Locarno, Solduno – Svizzera
°°Istituto scolastico di Minusio – Svizzera
•Gruppo Matematicando, DFA–SUPSI, Locarno – Svizzera

✉ mcatelli@gmail.com, angiedido@hotmail.com, carlo.mina@edu.ti.ch, monica.treppiedi@gmail.com

Sunto / L'articolo presenta dei percorsi didattici finalizzati all'apprendimento numerico in prima elementare, attraverso la ricerca e la conoscenza dei numeri con cui i bambini si confrontano nella quotidianità. I percorsi sono incentrati su attività di scoperta, di stampo laboratoriale e ludico, che hanno la finalità di promuovere le competenze numeriche di base, fondamentali per questo anno scolastico, proponendo anche sviluppi per ampliare e consolidare tali apprendimenti anche negli anni scolastici successivi. Per ogni percorso, vengono presentati alcuni possibili legami con i materiali creati all'interno del progetto MaMa – Matematica per la scuola elementare, che possono aiutare il docente per la progettazione di tali percorsi, consentendo di alternare attività di scoperta, concrete e manipolative, con momenti di riflessione e allenamento.

Parole chiave: scuola elementare; numeri nella realtà; numeri personali; laboratorio di matematica; materiali didattici.

Abstract / This article presents didactic paths aimed at the learning of numbers in first grade of primary school, through investigation and detection of the numbers with which children are confronted in everyday life. The experiences are centered on discovery activities, workshops and games, which intend to promote basic numerical skills, that are fundamental for this school year also in continuity with subsequent school years when this learning is extended and consolidated. For each didactic path, some possible links are proposed with the materials created within the MaMa project (*Matematica per la scuola elementare*). Such materials can help the teacher in the planning of these paths, making it possible to alternate concrete and manipulative discovery activities with moments of reflection and exercise.

Keywords: primary school; numbers in reality; personal numbers; mathematics laboratory; didactic materials.

1 Introduzione

La scoperta del mondo dei numeri, e della matematica più in generale, comincia per i bambini fin da molto piccoli tramite esperienze scolastiche ed extrascolastiche e si sviluppa ulteriormente all'ingresso nella scuola elementare. Per tale motivo i percorsi raccontati in questo articolo sono destinati ad allievi del primo anno di scuola elementare, ma sono facilmente adattabili per gli allievi della scuola dell'infanzia o per i successivi anni scolastici, allo scopo di promuovere competenze numeriche di base indispensabili per i futuri cittadini.
Lo sviluppo di queste competenze, che rientrano principalmente negli ambiti *Numeri e calcolo* e *Grandezze e misure* previsti dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (in seguito denominato Piano di studio, Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015), si basa sulla messa in situazione degli allievi, che possono così confrontarsi con esperienze pratiche e vicine alla loro realtà, al fine di potersi costruire una rappresentazione dei concetti matematici che sia concreta e ricca di significato.
I percorsi qui presentati sulla "caccia ai numeri" e sulla "carta d'identità numerica", che rappresentano una possibile continuazione di ciò che è stato proposto da Sofia Franscella e Lara Ponzio (2021) per la scuola dell'infanzia, partono dalla sfida di trovare risposte alle domande: «Cosa sono i numeri? A cosa servono? Dove li incontriamo?», e dal desiderio di creare una carta d'identità con i propri numeri personali. Per loro natura, le esperienze descritte in questo articolo si sviluppano in un susseguirsi di attività di stampo laboratoriale, di giochi, di momenti di riflessione e di lavoro individuale.

Le esperienze didattiche presentate in questo articolo sono nate da progettazioni e sperimentazioni di percorsi (Donati & Sbaragli, 2012) svolti dagli autori all'interno di corsi di formazione in didattica della matematica afferenti al gruppo Matematicando.[1] Le idee e le proposte di questi corsi di formazione sono state successivamente affinate, concretizzate e rese disponibili come materiale per il docente (linee guida, contesti di senso, pratiche didattiche, problemi, giochi e supporti) e schede per l'allievo, che sono confluiti all'interno del progetto *MaMa – Matematica per la scuola elementare*; materiali che sono gratuitamente scaricabili da dicembre 2021 sulla piattaforma online mama.edu.ti.ch.
Il progetto MaMa, iniziato a settembre 2019, è stato commissionato dal Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport al Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI, per rispondere alle esigenze manifestate da docenti e direttori del territorio. L'obiettivo del progetto è creare una raccolta di materiali didattici per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare. Tali proposte riguarderanno tutte le classi, dalla prima alla quinta, e saranno suddivise nei tre ambiti di competenza previsti dal Piano di studio (DECS, 2015): *Numeri e calcolo*, *Geometria* e *Grandezze e misure*. Al momento, sono disponibili tutti i materiali di *Numeri e calcolo* per la prima e la seconda elementare, alcuni dei quali intradisciplinari con altri ambiti e/o pensati in continuità fino alla quinta elementare.
In particolare, le attività presentate in questo articolo sono confluite, con arricchimenti e approfondimenti, in due pratiche didattiche del progetto MaMa: "A caccia di numeri" e "Carta d'identità numerica", che è possibile scaricare tramite la piattaforma. In questo articolo faremo anche riferimento ad altri materiali MaMa che possono permettere di sviluppare, riprendere, allenare e consolidare i contenuti matematici che sono oggetto delle esperienze come senso del numero, conteggio, grafici e tabelle. In particolare, i percorsi presentati si inseriscono in contesti di senso che, essendo pensati

1. Il gruppo Matematicando, afferente al Centro competenze didattica della matematica (DFA–SUPSI), è un collettivo di docenti di scuola dell'infanzia, elementare e media che si formano per formare altri docenti nell'ambito dell'insegnamento della matematica. I docenti del gruppo progettano e sperimentano attività e percorsi, rendendoli accessibili e riproducibili da parte di altri docenti, al fine di arricchire e rendere concrete le formazioni proposte nel territorio ticinese.

dalla prima alla quinta elementare, possono garantire una continuità del lavoro anche nelle classi successive, con possibili approfondimenti sui numeri razionali nel secondo ciclo.

2 Lo spirito laboratoriale delle esperienze didattiche

Le attività laboratoriali qui proposte permettono di far sperimentare agli allievi esperienze che collegano il fare con il pensare, in un'ottica collaborativa tra compagni con il fine di esplorare e affrontare una determinata situazione numerica.
Questo tipo di attività favorisce lo sviluppo di un atteggiamento positivo e attivo da parte degli allievi, i quali dovranno provare, sbagliare, ricominciare, collaborare e discutere, al fine di costruirsi una rappresentazione del sapere impregnata di senso. In questo tipo di attività il docente ha il ruolo di ideatore e regista, favorendo i momenti di discussione e di confronto e fornendo stimoli utili alla riflessione tra pari.
Secondo Polito (2000), al fine di lavorare insieme, gli allievi devono sviluppare e utilizzare una serie di abilità sociali e interpersonali indispensabili: ascoltare gli altri, fornire il proprio contributo al raggiungimento di un obiettivo, completare la propria parte di lavoro da intrecciare con quella degli altri, chiedere aiuto quando si è in difficoltà, dare aiuto a chi lo chiede, porre domande, mettersi in ascolto, permettere a tutti di contribuire, scoprire cosa pensano gli altri e saper riflettere su quanto è stato detto.
Sfruttando questa modalità di lavoro, dunque, non solo si favorisce lo sviluppo di un sapere matematico, ma si promuove anche la mobilitazione di numerose competenze sociali e trasversali. Competenze, queste, che tornano utili nel processo di acquisizione del sapere. A questo proposito, sempre Polito afferma che:

> «Il lavoro di gruppo favorisce le abilità di rielaborazione, di deduzione, d'induzione, di comunicazione, che sono molto importanti nella formazione intellettuale. Quando uno studente spiega a un compagno alcuni concetti, è stimolato a tradurli in parole, in frasi, in sequenze, in passaggi logici: tutte fasi che favoriscono la padronanza cognitiva di ciò che è stato acquisito».
> (Polito, 2000, p. 310)

La didattica laboratoriale, tuttavia, non fa riferimento unicamente alle modalità di lavoro da utilizzare, ma stravolge parzialmente anche gli spazi che abitualmente vengono utilizzati in aula. Da questo punto di vista Baldacci afferma:

> «L'aula-madre ha una prossemica pensata per la trasmissione culturale, basata sulla dinamica: insegnante che espone, alunno che ascolta. Viceversa, si può asserire che il laboratorio presenta configurazioni prossemiche "alternative" a quelle dell'aula-madre: tutto è fatto "per agire e per interagire"; ovvero: per l'alunno l'aula-madre si offre come un contesto d'ascolto, mentre il laboratorio si presenta come un contesto d'azione. […] Lo spazio laboratoriale può allora favorire la "laboratorialità" come spazialità di situazione, come atteggiamento mentale».
> (Baldacci, 2005, p. 2)

Si esce dunque da una modalità di lavoro frontale, dove il docente è alla cattedra o alla lavagna e gli studenti sono seduti al banco, e si entra in una spazialità più aperta, fatta di angoli (metaforici), isole di banchi e spazi strutturati secondo le esigenze che si presentano per affrontare un determinato problema. È dunque probabile che nello svolgimento di un'attività sull'individuazione della propria altezza i bambini si posizionino contro il muro tracciando segmenti a matita, oppure si sdraino sul pavimento. È altresì possibile che, durante un'attività di creazione di cartelloni, gruppi di bambini lavorino in piedi attorno a grandi tavoli, oppure sul pavimento, ed è pure possibile che ci siano gruppi che esprimano la necessità di lavorare all'esterno dell'aula. Questa modalità di lavoro prevede dunque una certa flessibilità da parte del docente da diversi punti di vista (spazialità, metodologia ecc.), sia in fase di progettazione, sia soprattutto in fase di realizzazione e svolgimento della situazione d'apprendimento.

3 Il ruolo del movimento nell'acquisizione delle competenze matematiche

Al fine di dare armonia al processo di apprendimento lavorando in continuità tra scuola dell'infanzia e scuola elementare, è importante che il bambino abbia l'occasione di fare esperienze percettive e motorie in ambito matematico (Santinelli & Sbaragli, 2017).
In quest'ottica, il tema dei numeri in relazione alla realtà che ci circonda e al nostro corpo potrebbe emergere in maniera spontanea durante un percorso di caccia ai numeri o di elaborazione di una carta d'identità personale. Le attività che si possono svolgere in quest'ambito sono svariate e contribuiscono in maniera significativa allo sviluppo di alcune competenze matematiche: «Come affermano le scienze, corpo e mente sono strettamente connessi e l'intelligenza non ha sede solo nella testa, ma anche nelle mani, nei sensi, nella corporeità, nell'emozionalità e nel movimento» (Ravelli, 2010, p. 12).
Per esempio, al fine di aiutare i bambini a riconoscere e a riprodurre la corretta grafia di un numero, è possibile proporre delle attività nelle quali gli allievi devono studiare la forma e l'orientamento delle varie cifre che lo costituiscono, per poi ricrearlo con il corpo, individualmente o con i compagni (**Figura 1a**). È anche possibile chiedere ai bambini di scriverli nella sabbia o sulla schiena di un compagno (**Figura 1b**), oppure di realizzarli con la plastilina, la carta vetrata, la colla calda o altro materiale che permetta di percepirli in rilievo, per poi giocare a riconoscerli tramite il tatto (**Figura 1c**).

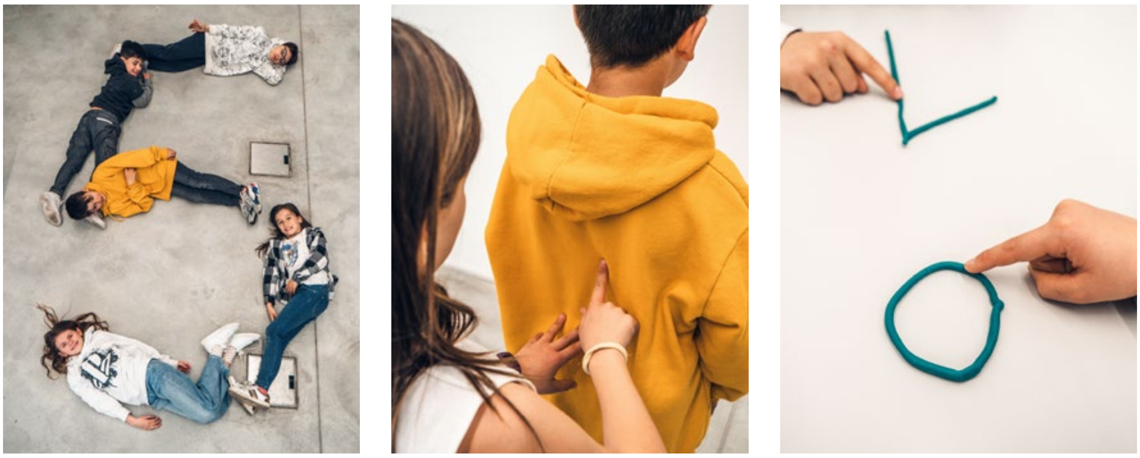


Figure 1a, 1b, 1c. I bambini sperimentano la rappresentazione dei numeri attraverso l'utilizzo del corpo e dei sensi.

Alcune proposte per lavorare sulla grafia del numero sono raccolte nelle pratiche didattiche MaMa "Impariamo a scrivere le cifre" e "Memorizzare la forma corretta delle cifre".

4 Descrizione delle attività

Il primo giorno di scuola elementare i bambini entrano in classe con tanta voglia di imparare. Entro la fine della prima settimana vorrebbero saper leggere, scrivere e fare i calcoli. Ovviamente i nostri piccoli alunni non possono realizzare nell'immediato i loro desideri; ciononostante è importante farli arrivare a fine settimana motivati e curiosi di tornare il lunedì successivo per continuare l'eccitante esperienza della scuola. Per incentivarli e tener alta la motivazione è importante iniziare da subito con proposte accattivanti, come possono essere i percorsi proposti di seguito.

4.1 A caccia di numeri

Questa prima esperienza si sviluppa in diverse fasi, che si ritrovano sinteticamente descritte nella pratica didattica MaMa intitolata "A caccia di numeri", ideata per la prima e la seconda elementare, allo scopo di portare i bambini a individuare i numeri che si trovano nella realtà circostante e a scoprire a che cosa servono. Il contesto di senso di riferimento per questa pratica didattica è "I numeri nella realtà".

4.1.1 Raccolta concezioni

Per dare avvio allo studio dei numeri, il docente può proporre una discussione a grande gruppo mostrandosi curioso di conoscere cosa i bambini già sanno dei numeri. In alternativa, si può scegliere un approccio maggiormente narrativo, facendo ricorso a un personaggio inventato che vuole conoscere i numeri. Le domande poste per sondare le conoscenze degli allievi e per incentivare la discussione possono essere le seguenti: «Cosa sono i numeri?», «A che cosa servono?».

La risposta alla prima domanda è complessa (anche matematicamente parlando) ma, si sa, i bambini hanno un'idea su tutto e le loro risposte sono sempre molto sensate e significative e spesso riescono a sorprenderci. Se la prima domanda potrebbe lasciare qualche bambino nello "sconcerto", la seconda dovrebbe dare la possibilità a tutti di rispondere, infatti a questa età i bambini hanno già fatto diverse esperienze sull'uso dei numeri. Il docente potrebbe annotare le risposte dei bambini, per poter consentire di lasciarne una traccia nei loro quaderni (**Figure 2a**, **2b**), dove potrebbero anche voler realizzare dei disegni. Per esempio, nella **Figura 3a** un'allieva risponde alla domanda «Cosa sono i numeri?» raffigurando il numero 7 come una ballerina; altri allievi, rispondendo alla domanda «A che cosa servono i numeri?», li raffigurano sull'orologio e sullo schermo del computer (**Figura 3b**) o sulle magliette dei giocatori (**Figura 3c**).

Figure 2a, 2b. Raccolta orale delle concezioni dei bambini.

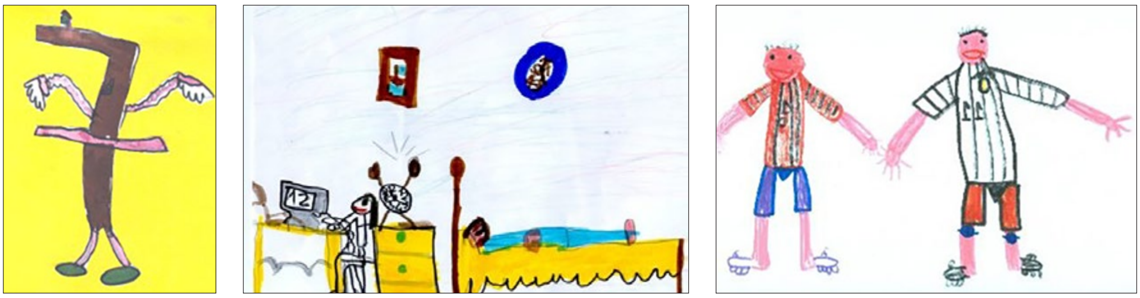


Figure 3a, 3b, 3c. Alcuni disegni dei bambini relativi ai numeri.

Sempre durante la prima settimana, con lo scopo sia di conoscere i bambini, sia di sondare le loro conoscenze sui numeri, si possono porre le seguenti domande:
- Qual è il tuo numero preferito? Perché è il tuo preferito?
- Qual è il numero più grande che conosci? E quello più piccolo?
- Qual è il numero più grande che riesci a leggere? E quello più piccolo?

È anche possibile coinvolgere i genitori o i familiari, chiedendo agli allievi di realizzare una breve intervista. Ecco alcune domande che è possibile porre:
- Qual è il numero preferito di tua mamma? Perché lo preferisce?
- Qual è il numero preferito di tuo papà? Perché lo preferisce?
- Qual è il numero più grande che conosce tuo fratello/sorella/nonno/nonna?
- Qual è il numero più piccolo che conosce tuo fratello/sorella/nonno/nonna?
- Qual è il numero più bello per tuo fratello/sorella/nonno/nonna?

Le risposte possono essere scritte su biglietti di colore o forma diversa, ad esempio, il cuore per il numero preferito, le nuvolette per il numero più grande o più piccolo ecc. (**Figura 4**).

Figura 4. I biglietti creati da un allievo: «Il numero più grande che conosco è 99999, mentre il mio preferito è l'1!».

Privilegiare la comunicazione visiva può essere un espediente per far sì che le tracce che si lasciano nei quaderni siano comprensibili e significative per i bambini, i quali probabilmente in quel momento non sanno ancora leggere.

Parallelamente al lavoro di raccolta e annotazione delle risposte degli allievi nei loro quaderni, il docente può porre un'ultima domanda per dare avvio alla prima attività, descritta nel prossimo paragrafo, ovvero «Dove si trovano i numeri attorno a noi?».
Ancora una volta il docente annota le risposte ma, a differenza di quanto fatto in precedenza, alla fine della discussione invita i bambini a verificare quello che è stato proposto. Per farlo bisogna proba-

bilmente uscire dall'aula e dalla scuola, e quindi è meglio munirsi di strumenti che aiutino a vedere e a cercare meglio: i bambini devono trasformarsi in cacciatori di numeri! Gli alunni potrebbero proporre di creare dei binocoli, degli occhiali, una lente d'ingrandimento, una macchina fotografica, … oggetti, questi, che possono essere costruiti o reperiti prima di uscire. Inoltre, il docente può consegnare ad ogni bambino una tavoletta con un blocchetto e una penna, così che possa prendere appunti, disegnare i numeri trovati e annotare la loro collocazione (Figura 5).

Figura 5. La classe è pronta per andare a caccia di numeri.

4.1.2 La caccia

A questo punto i bambini sono pronti a cacciare i numeri nella realtà: in classe, nell'intera scuola, nelle strade circostanti ecc. L'attrezzatura creata ad hoc permette loro di individuare diversi numeri che si trovano sul loro cammino. Per documentare questa ricerca, il docente ha a disposizione almeno una fotocamera digitale con la quale fotografare i numeri trovati dai bambini. I bambini si stupiscono di quanti numeri possano incontrare nella realtà che li circonda e che magari prima non avevano considerato: «Incredibile, i numeri sui pali della luce non li avevamo mai notati prima!», «È proprio vero, lo strumento che abbiamo costruito funziona, ora vedo numeri ovunque!». Per aiutare i bambini a capire che i numeri hanno funzioni diverse, conviene fermarsi e chiedersi dove si trovano e a cosa servono in quel contesto: «Il numero nel posteggio serve per capire bene in quale ho messo la macchina», «La targa di un'automobile serve per riconoscerla», «Un cartellone stradale serve per le distanze», «Il numero sulla casa serve per trovare un amico» (Figure 6a, 6b, 6c).

Figure 6a, 6b, 6c. Alcuni numeri individuati dai "cacciatori di numeri" nei dintorni della scuola.

Una particolare caccia ai numeri può essere proposta anche in un ambito specifico come quello artistico (la caccia all'interno delle opere d'arte è descritta nella pratica didattica "Matematica e arte nel primo ciclo").

Alla fine della caccia, il docente si ritrova con decine e decine di fotografie molto diverse fra loro: non unicamente numeri rappresentati in forma indo-araba, ma anche numeri iconici come nel dado oppure numeri riferiti alle quantità come tre bidoni della spazzatura. Avendo a disposizione una moltitudine di fotografie, gli allievi e il docente dovranno fare una selezione: rispetto alle funzioni dei numeri e all'uso che ne verrà fatto in classe. Nel prossimo paragrafo vengono mostrati alcuni possibili utilizzi delle fotografie selezionate.

Per lavorare in classe sulla raccolta concezioni riguardo ai numeri nella realtà, si potrebbe anche utilizzare una scheda MaMa tra quelle proposte nelle **Figure 7a**, **7b**, **7c**. Queste schede presentano delle illustrazioni di scene o di prodotti della vita quotidiana, in città, al parco o al supermercato. L'allievo deve inserire i numeri mancanti ("Numeri scomparsi", **Figura 7a**) o individuare i numeri presenti nell'immagine ("Numeri al parco", **Figura 7b**, e "A cosa servono i numeri?", **Figura 7c**) e in seguito discutere con i compagni della funzione di questi numeri, attivando prevalentemente il processo cognitivo *Comunicare e argomentare* previsto dal Piano di studio (DECS, 2015).

Figure 7a, 7b, 7c. Schede didattiche per la raccolta concezioni sui numeri nella realtà.

4.1.3 Raggruppamenti spontanei creati dai bambini

Il docente propone agli allievi di ordinare (o raggruppare) una selezione di fotografie scattate durante la caccia effettuata, secondo un criterio scelto liberamente da loro. I bambini, divisi in piccoli gruppi, ricevono delle fotografie (uguali per tutti) e decidono quali immagini mettere insieme e perché. Il compito dei bambini è quello di cercare di classificare le fotografie e in seguito di spiegare al gruppo classe la scelta delle categorie trovate.

Figure 8a, 8b. Alcuni esempi di raggruppamenti creati spontaneamente dai bambini.

Le fotografie possono essere incollate su cartelloni che serviranno poi per la presentazione davanti alla classe (Figure 8a, 8b). È importante lasciare che i bambini argomentino le proprie scelte poiché ciò permette ai docenti e ai compagni di comprendere meglio i criteri adottati per creare la suddivisione. Di seguito alcuni esempi di osservazioni e criteri scelti dagli allievi:

– «Questi sono i numeri sulle targhe, questi sulle case e poi c'è il gruppo dei numeri dei prezzi».
– «Noi abbiamo fatto due gruppi, quelli minori di 20 e quelli maggiori di 20».
– «In questo gruppo ci sono i numeri contenenti il 4».
– «Questi sono i numeri che abbiamo trovato sulle strade (cartelli stradali)».
– «Abbiamo messo da una parte i numeri neri, dall'altra quelli di tanti colori».
– «Abbiamo messo i numeri in ordine dal più piccolo al più grande. Dove c'è scritto 2-3 (23) è più piccolo del numero 1-4-6 (146) perché il numero 1-4-6 ha più "numeri" del numero 2-3».

Una classificazione potrebbe sembrare arbitraria, se osservata semplicemente sul cartellone, ma lasciando esprimere i bambini è possibile capire cosa li ha portati a delineare un determinato insieme. È così possibile far emergere in modo spontaneo dove si trovano i numeri e a che cosa servono in quel contesto (Figure 9a, 9b). Questa è anche l'occasione per gli allievi di sostenere le proprie scelte davanti ai compagni, così come di cambiare o modificare le proprie opinioni.

Figure 9a, 9b. Bambini all'opera nel raggruppare spontaneamente le immagini cacciate.

4.1.4 Un percorso che continua: alla scoperta delle funzioni dei numeri

Appassionati all'attività, i bambini solitamente continuano con molto entusiasmo a effettuare la caccia ai numeri dentro o fuori dal contesto scolastico, sia in modo spontaneo sia indirizzati dal docente. Una richiesta interessante potrebbe essere quella di cercare a casa altri esempi di numeri per ampliare i cartelloni delle funzioni creati in classe. L'insegnante chiede, per esempio, di portare altre immagini di numeri maggiori di 20 o di numeri contenenti la cifra 4, oppure potrebbe chiedere di trovare numeri che rientrano in altre categorie. Gli alunni potranno portare fotografie, disegni o oggetti concreti che successivamente verranno analizzati in classe per scoprire a cosa servono o come si usano (ad esempio, i numeri su una bilancia).
Così, il percorso della caccia ai numeri non si esaurisce in prima elementare, anzi continua negli anni successivi, ampliando e istituzionalizzando le scoperte fatte precedentemente, come ad esempio quelle relative alle diverse funzioni dei numeri. Partendo dalle categorie create dai bambini, arricchendole di nuovi esempi e raggruppando quei numeri che sembrano dare informazioni della stessa natura (ad esempio, «i numeri per misurare il peso» e «i numeri per misurare l'altezza»), si possono approcciare le diverse funzioni dei numeri, senza necessariamente usare i loro nomi specifici. Ad esempio, in seconda elementare il docente potrebbe usare una scheda MaMa molto aperta come "Caccia alle funzioni" (**Figura 10a**) oppure altre più specifiche come "Numeri al supermercato" (**Figura 10b**) che indirizzano la ricerca in un contesto preciso, nel quale il docente potrà poi organizzare, nel secondo ciclo, vere e proprie cacce ai numeri decimali.

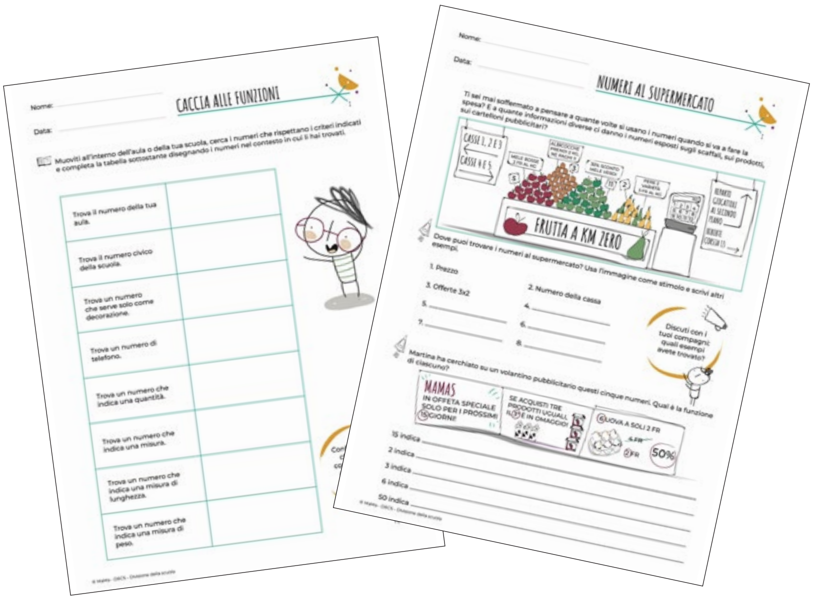


Figure 10a, 10b. Schede didattiche per raccogliere concezioni sulle diverse funzioni dei numeri.

Di seguito vengono descritte alcune tra le principali funzioni del numero, illustrandole con esempi tratti dai materiali MaMa pensati in continuità tra la prima e la seconda elementare.

Funzione conta orale. I numeri servono per contare, un contare *intransitivo* che non ha ancora lo scopo di determinare una quantità, ma di "contare per contare". Si tratta della *conta orale* che può essere esercitata imparando filastrocche numeriche (si vedano le proposte della pratica didattica "Attività tra matematica e lingua nel primo ciclo") o divertendosi con giochi come quello del *plouf*. In questo modo il bambino può arrivare ad automatizzare oralmente la sequenza delle parole-numero e interiorizzare l'idea che c'è una *ricorsività* nell'insieme dei numeri naturali: dopo un numero ne segue sempre un altro, il suo successivo che si ottiene aggiungendo 1. L'apprendimento della conta orale viene poi esteso ad altre sequenze numeriche, contando non solo a uno a uno, ma anche a due a due, a cinque a cinque, a dieci a dieci ecc. e pure contando alla rovescia. Di seguito si riportano alcuni esempi di conta creati con gli allievi.

– La balena senza denti sa contare fino a venti: 1, 2, 3, …, 20.
– La gallina lenta lenta sa contare fino a trenta: 1, 2, 3, …, 30.
– Se ti piace la Fanta conta fino a quaranta: 1, 2, 3, …, 40.
– Il leone Martino conta dal 20 allo 0 in modo divino: 20, 19, 18, …, 0.
– Ma che gran divertimento è contare fino a cento: 1, 2, 3, …, 100.
– Il coniglietto Carletto salta a 3 a 3 dallo 0 al 60 in modo perfetto: 0, 3, 9, 12, …, 60.

Alcune attività per allenare la conta orale sono descritte nella pratica didattica "Impariamo a contare", pensata appositamente per la prima elementare. Inoltre, le schede "Filastrocca dei numeri" (**Figura 11a**) e "Conto alla rovescia" (**Figura 11b**) possono essere utilizzate per memorizzare la sequenza delle parole-numero, contando in avanti e anche alla rovescia.

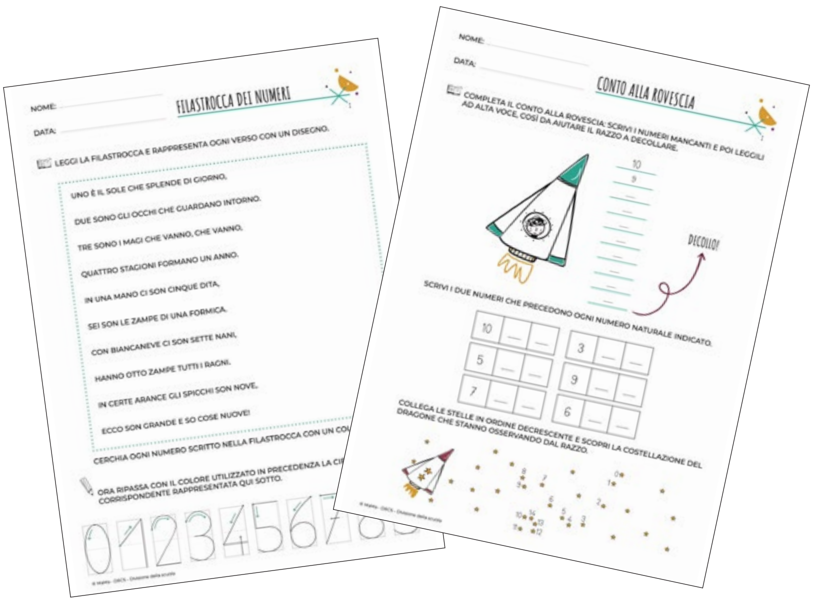


Figure 11a, 11b. Schede didattiche per memorizzare la conta orale da 1 a 9 e da 10 a 0.

Funzione cardinale. Il numero indica la cardinalità di una collezione, ovvero da quanti elementi è formata; ad esempio, il numero di pennarelli in un astuccio, il numero di biscotti in un pacco, la quantità di puntine in una scatola. Per approfondire la funzione cardinale del numero, si possono proporre delle schede MaMa come quelle riportate in **Figura 12a** ("Fiammiferi"), pensata per la prima elementare, e in **Figura 12b** ("È un numero quantità?"), pensata per la seconda. Questa funzione del numero può essere esercitata con tutto il materiale previsto per l'argomento conteggio.

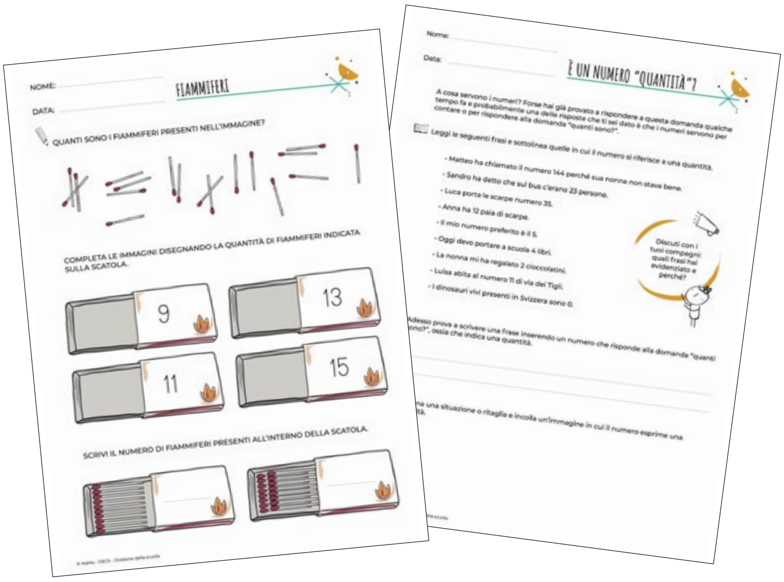


Figure 12a, 12b. Schede didattiche per esplorare la funzione cardinale del numero.

Funzione ordinale. Il numero indica la posizione di un elemento in una successione. In questa categoria possiamo trovare le posizioni d'arrivo in una classifica sportiva, i numeri civici in successione lungo una via, i numeri dei piani in un ascensore ecc. Per consolidare questa funzione del numero, si può utilizzare una delle schede MaMa proposte in Figura 13a ("I numeri delle case"), Figura 13b ("In quale posto?") e Figura 13c ("Le casse di sapone"). In particolare, le ultime due schede sono pensate per la seconda elementare.

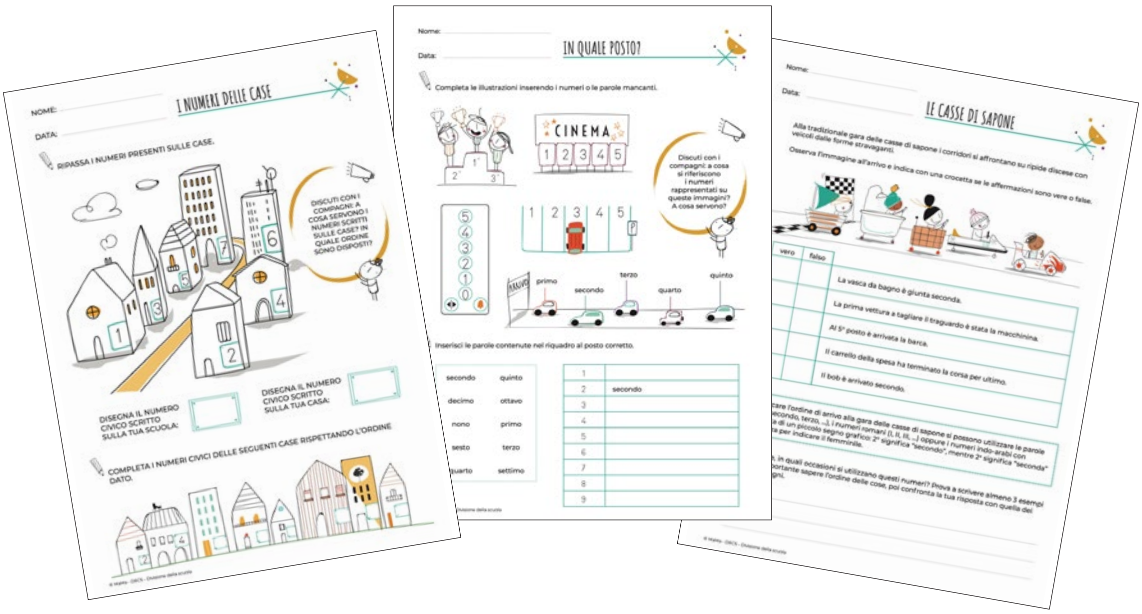
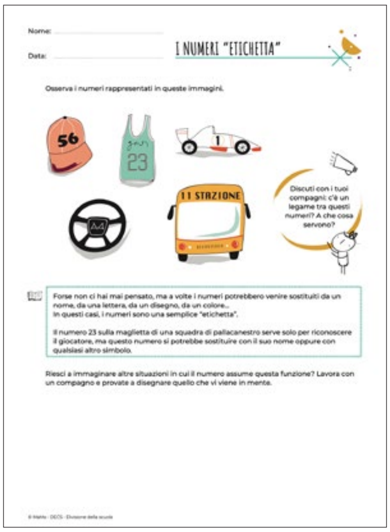


Figure 13a, 13b, 13c. Schede didattiche per esplorare la funzione ordinale del numero.

Funzione etichetta. Il numero serve per identificare un oggetto, una persona, un elemento; è un semplice contrassegno che potrebbe essere sostituito anche con una parola o un colore. In questa categoria confluiscono i numeri di linea degli autobus, le targhe delle auto, i numeri sulle maglie sportive (da non confondere con i numeri delle taglie), le sigle numeriche dei modelli delle auto (Peugeot 205), i numeri di telefono ecc. Proponendo una discussione su esempi di questo tipo, la scheda MaMa "I numeri 'etichetta'" (**Figura 14**), pensata per la seconda elementare, può essere di supporto al docente che intende istituzionalizzare le esperienze concrete svolte dai bambini su questa funzione del numero.


Nome:

Data:

I NUMERI "ETICHETTA"

Osserva i numeri rappresentati in queste immagini.

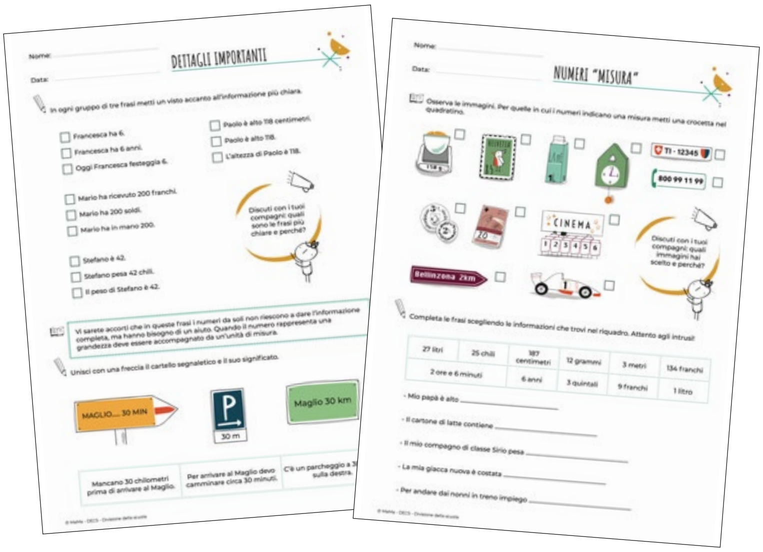
Forse non ci hai mai pensato, ma a volte i numeri potrebbero venire sostituiti da un nome, da una lettera, da un disegno, da un colore...
In questi casi, i numeri sono una semplice "etichetta".

Il numero 23 sulla maglietta di una squadra di pallacanestro serve solo per riconoscere il giocatore, ma questo numero si potrebbe sostituire con il suo nome oppure con qualsiasi altro simbolo.

Riesci a immaginare altre situazioni in cui il numero assume questa funzione? Lavora con un compagno e provate a disegnare quello che vi viene in mente.

Figura 14. Scheda didattica per esplorare la funzione etichetta del numero.

Funzione misura. Il numero indica quante volte un'unità di misura scelta come riferimento è contenuta nella grandezza che si intende misurare, e assume significato solo se è accompagnato da tale unità di misura. Sono esempi di "numeri misura" le indicazioni di distanze stradali (100 m), i limiti di velocità, il limite di altezza di un sottopassaggio, i prezzi dei prodotti al supermercato, la capacità dei sacchi dei rifiuti, la temperatura registrata quel giorno ecc.
Dopo aver familiarizzato con questi numeri nel reale, il docente potrebbe servirsi di alcune schede MaMa per la seconda elementare come "Dettagli importanti" in **Figura 15a** e "Numeri 'misura'" in **Figura 15b**, per consolidare la funzione misura del numero.


Nome:

Data:

DETTAGLI IMPORTANTI

In ogni gruppo di tre frasi metti un visto accanto all'informazione più chiara.

- [ ] Francesca ha 6.
- [ ] Francesca ha 6 anni.
- [ ] Oggi Francesca festeggia 6.

- [ ] Paolo è alto 118 centimetri.
- [ ] Paolo è alto 118.
- [ ] L'altezza di Paolo è 118.

- [ ] Mario ha ricevuto 200 franchi.
- [ ] Mario ha 200 soldi.
- [ ] Mario ha in mano 200.

- [ ] Stefano è 42.
- [ ] Stefano pesa 42 chili.
- [ ] Il peso di Stefano è 42.

Vi sarete accorti che in queste frasi i numeri da soli non riescono a dare l'informazione completa, ma hanno bisogno di un aiuto. Quando il numero rappresenta una grandezza deve essere accompagnato da un'unità di misura.

Unisci con una freccia il cartello segnaletico e il suo significato.

Mancano 30 chilometri prima di arrivare al Maglio.	Per arrivare al Maglio devo camminare circa 30 minuti.	C'è un parcheggio a 3[illegible] sulla destra.

NUMERI "MISURA"

Nome:

Data:

Osserva le immagini. Per quelle in cui i numeri indicano una misura metti una crocetta nel quadratino.

Completa le frasi scegliendo le informazioni che trovi nel riquadro. Attento agli intrusi!

27 litri	25 chili	187 centimetri	12 grammi	3 metri	134 franchi
2 ore e 6 minuti		6 anni	3 quintali	9 franchi	1 litro

- Mio papà è alto ______
- Il cartone di latte contiene ______
- Il mio compagno di classe Sirio pesa ______
- La mia giacca nuova è costata ______
- Per andare dai nonni in treno impiego ______

Figure 15a, 15b. Schede didattiche per esplorare la funzione misura del numero.

Confronto tra funzioni. Una volta che gli allievi avranno preso confidenza con i diversi ruoli che i numeri possono giocare nelle situazioni della vita quotidiana, dalla seconda elementare si possono proporre esperienze in cui tali funzioni sono messe a confronto tra loro. Anche in questo caso, le schede MaMa possono fornire un valido supporto: si vedano ad esempio le schede "Posizione o quantità?" (Figura 16a), "Lo scontrino della spesa" (Figura 16b) e "Numeri e calcio" (Figura 16c) che, chiedendo di riconoscere le diverse funzioni dei numeri in situazioni reali, attivano la risorsa cognitiva *Sapere e riconoscere*, prevista dal Piano di studio (DECS, 2015).

Figure 16a, 16b, 16c. Schede didattiche per sondare e mettere a confronto diverse funzioni del numero.

In questa esplorazione dei numeri, come esempi di varie funzioni potrebbero anche emergere i numeri personali; ad esempio, festeggiando il compleanno di un compagno i bambini potrebbero osservare il giorno del mese, oppure analizzando la bilancia i bambini potrebbero proporre come numero il proprio peso (numero misura). È quindi in modo molto naturale che ci si può collegare a un altro entusiasmante percorso: quello legato ai numeri che ci descrivono e ci identificano.

4.2 Carta d'identità numerica

Cercare, scoprire e confrontare i propri numeri personali, ossia quelli che identificano le caratteristiche di ciascuno di noi in termini numerici (età, data di nascita, numero di lettere del nome e cognome, numero di familiari, peso, altezza ecc.), è un'occasione speciale per presentarsi, parlare di sé e condividere con gli altri le proprie peculiarità. Da questa esigenza nasce la seconda esperienza didattica, spontanea prosecuzione della prima, le cui fasi si ritrovano sinteticamente descritte nella pratica didattica MaMa intitolata "Carta d'identità numerica", ideata per la prima e la seconda elementare. Questa pratica si inserisce nel contesto di senso "I numeri personali".

4.2.1 Cos'è una carta d'identità?

Una situazione problema significativa, che può essere presentata dal docente come avvio di un nuovo percorso sui numeri, consiste nel creare una carta d'identità (o un passaporto) che permetterà di entrare in un nuovo motivante contesto. Nel proporre la situazione iniziale si può chiedere ai bambini: «Sapete che cos'è una carta d'identità?». Tra le ipotesi dei bambini potrebbe emergere che la carta d'identità: «È un oggetto che parla di te», «È una cosa che ti permette di viaggiare perché dice chi sei ed è solo tua», «Dice il tuo nome, il tuo cognome e c'è scritta anche la tua data di nascita». Effettivamente, in una carta d'identità si possono trovare nome e cognome, data di nascita, indirizzo (via e numero), altezza, peso e altri indicatori che rappresentano le persone; queste informazioni variano a seconda delle convenzioni del Paese da cui è emesso il documento. Il docente può mostrare una carta d'identità ai suoi allievi o chiedere loro di fare una ricerca a casa aiutati dai loro genitori. In questa esperienza didattica viene sfruttata l'idea della carta d'identità puntando l'attenzione sugli elementi numerici. Può darsi che i bambini propongano di inserire nel documento anche altri aspetti non strettamente legati al mondo dei numeri, come l'impronta digitale, una foto di famiglia o la bandiera della nazione di provenienza, arricchendo così la proposta. Questa è l'occasione per rendere la carta d'identità uno strumento trasversale adatto a trattare altre tematiche quali ad esempio la famiglia o la multiculturalità, ma potrebbe essere unito a un percorso interdisciplinare tra matematica e italiano, agganciandolo in particolare agli aspetti di scrittura (si vedano a questo proposito le proposte della pratica didattica "Attività tra matematica e lingua nel primo ciclo", oltre al lavoro realizzato alla scuola dell'infanzia da Franscella e Ponzio, 2021).

4.2.2 I laboratori della carta d'identità

Attraverso attività laboratoriali, gli allievi possono cominciare a creare la propria carta d'identità numerica, considerando inizialmente il proprio nome e cognome, per scoprire da quante lettere sono formati, l'età, la data di nascita, il numero di componenti della propria famiglia, dopodiché si può cominciare con la scoperta delle misure corporee: numeri legati alle diverse parti del corpo, altezza, peso e altri indicatori numerici che caratterizzano la persona. Con questi dati i bambini possono anche riprendere e rinforzare attività legate alle diverse funzioni dei numeri (si veda il par. 4.1.4). I bambini avranno la possibilità di confrontarsi con numeri anche più grandi di quelli che padroneggiano solitamente, che potranno essere rappresentati concretamente tramite il supporto di materiali, così da poter essere visualizzati con maggiore facilità. In questo modo gli allievi potranno operare senza paura con numeri considerati "grandi", grazie al supporto dall'esperienza concreta con strumenti alla loro portata e alla collaborazione con i compagni (Baldazzi et al., 2011; Donati & Sbaragli, 2012; Marazzani, 2004, 2007).
Di seguito vengono selezionati e descritti in un certo ordine alcuni laboratori, illustrandoli con esempi tratti dai materiali MaMa. Sta poi al docente scegliere come condurre questo percorso: si possono proporre attività in cui i numeri diventano sempre più grandi oppure accogliere e seguire le idee che arrivano dai bambini, arricchendo il percorso con l'esplorazione di altri aspetti come il numero di denti, la lunghezza delle diverse parti del corpo (braccia, gambe, capelli ecc.), i numeri relativi al proprio domicilio (numero civico e codice di avviamento postale), l'età complessiva dei membri della famiglia, e così via.

Nome e cognome. Ogni bambino scrive il proprio nome e successivamente il cognome e, tramite il conteggio, scopre da quante lettere sono composti. Ai bambini che non padroneggiano ancora la rappresentazione indo-araba del numero, il docente può chiedere di rappresentare in forma iconica (pallini, stanghette ecc.) il numero di lettere del loro nome e del loro cognome, che quindi può risultare scritto in forma iconica e/o simbolica in cifre (Figura 17).

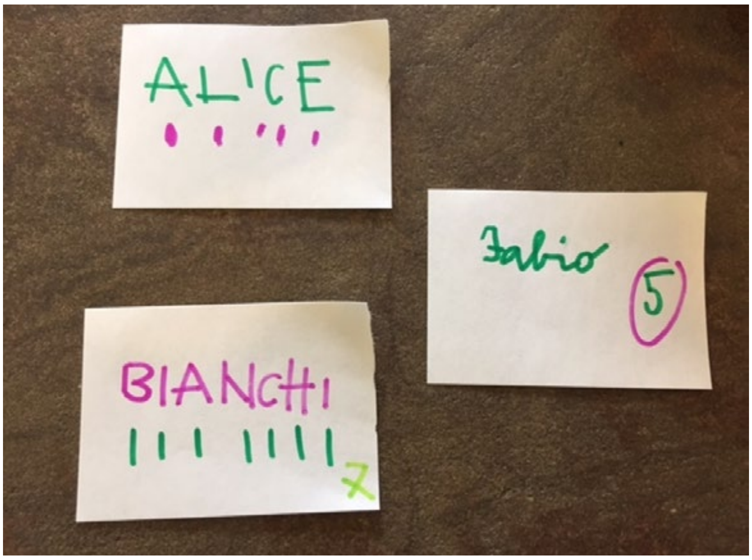


Figura 17. Alcune strategie adottate dai bambini per rappresentare il numero di lettere del nome e del cognome.

Con le informazioni raccolte è possibile porre ai bambini le seguenti domande:
– «Chi ha il nome più lungo?»
– «Chi ha il nome più corto?»
– «Quanti bambini hanno il nome formato da 6 lettere?»
– «Ordinate i nomi partendo da quelli che hanno meno lettere a quelli formati da più lettere».
– «Chi ha il cognome più lungo? E più corto?».
– «Se unite il numero di lettere del nome con quelle del cognome, chi ha più lettere? Ordinatevi da chi ha meno lettere a chi ha più lettere. L'ordinamento che ne risulta è uguale al precedente?»

I bambini confrontano le risposte date e stabiliscono chi ha il nome formato da più lettere, chi il cognome, chi il nome e cognome assieme. Riflettono così sul fatto che chi ha il nome più lungo non necessariamente ha anche il cognome più lungo degli altri.

Dati personali e data di nascita. Al fine di coinvolgere anche la famiglia nel processo di creazione della carta d'identità, è possibile chiedere ai bambini di svolgere una piccola ricerca sul tema dei dati personali. In questo modo i bambini porteranno con sé tutta una serie di dati utilizzabili per completare la propria carta d'identità (comune di domicilio, indirizzo e data di nascita).
La data di nascita è un'informazione personale di difficile comprensione per un allievo all'inizio della sua scolarizzazione, in quanto rappresenta una successione di numeri che si riferisce a informazioni temporali diverse (numero del giorno, mese e anno di nascita). Per questo motivo, chiedendo agli allievi quando sono nati le risposte che si otterranno saranno molto eterogenee e molto spesso non aderenti alla realtà. Eccone alcuni esempi:
– «Io sono nato il 26».
– «La mia data di nascita è il 12 giugno».
– «Non mi ricordo ma faccio il compleanno in dicembre».
– «Sono nato in estate come la mia mamma e sono un leone, ma non so cosa vuole dire».
– «Io sono nato il 3.3.2010 ma non so il mese».
– «Io sono nato di giovedì a Locarno».
– «Sono nato il 5.4.2011, quindi il 5 aprile».

Da queste risposte emerge la difficoltà dell'allievo di situarsi all'interno di un arco temporale così vasto come l'anno, nonostante il dato in questione sia molto vicino alla sua realtà, poiché rappresenta

il giorno in cui festeggia il compleanno.
Le attività legate alla data di nascita permettono di trattare vari importanti aspetti legati alla grandezza tempo, come la propria età, la sequenza dei giorni della settimana e dei mesi, gli anni, il corretto utilizzo del calendario e l'ordinamento delle età dei compagni (chi è nato prima, quando si festeggiano i diversi compleanni, chi è tra noi il più grande ecc.). Per un approfondimento sul tema del tempo si veda Martinelli e Martinetti (2021).

Numero di scarpe. È possibile chiedere inizialmente agli allievi di ipotizzare qual è il loro numero di scarpe. Probabilmente alcuni bambini lo conoscono, essendo scritto sulle suole delle scarpe e delle pantofole, ma non sempre è così. Alcuni bambini possono proporre di misurare il piede sfruttando gli strumenti messi a disposizione, così che, seguendo gli stimoli emersi dagli allievi, è poi possibile mettere a confronto la misura del piede in centimetri con il numero convenzionale di scarpe. Da questo confronto emerge un'incongruenza: come mai il numero della mia scarpa non corrisponde ai centimetri di lunghezza del mio piede? Questa è un'occasione per affrontare in modo intuitivo il tema delle unità di misura convenzionali, discutendo anche del fatto che, a dipendenza della parte del mondo in cui ci si trova, l'unità di misura può cambiare. È inoltre possibile presentare ai bambini lo strumento utilizzato per misurare convenzionalmente la lunghezza del piede: il pedimetro, così da ottenere una misura convenzionale da inserire all'interno della carta d'identità numerica.
Per rilevare e indicare il proprio il numero di scarpa, ogni bambino può realizzare l'impronta del proprio piede oppure dei calchi in gesso (Figure 18a, 18b, 18c, 18d).

Figure 18a, 18b, 18c, 18d. Alcune attività legate alla misura del piede: l'utilizzo del pedimetro, la stampa del piede e la sua sagoma.

Peso. Anche sul peso si possono inizialmente raccogliere le concezioni spontanee dei bambini. Alla domanda posta dal docente: «Quanto pensate di pesare?» le risposte dei bambini sono di solito molto eterogenee, come ad esempio: «Io peso 19», «Il mio dottore mi ha pesato e ha detto che peso 23», «Io peso 18 chili», «Mi peso sempre perché ho la bilancia in bagno: peso 2-2».
La bilancia è uno strumento molto comune che i bambini solitamente conoscono. Le attività sul proprio peso potrebbero anche essere l'occasione per mostrare ai bambini diversi tipi di bilancia (digitale, analogica, dinamometro, bilancia a bracci) con le quali iniziare un percorso sulla grandezza massa. È possibile far sperimentare l'utilizzo di tali strumenti agli allievi e svolgere numerose attività concrete di stima, chiedendo loro di indicare quale oggetto è più pesante tra due, per poi verificarlo con la bilancia. Queste attività potrebbero fungere anche da occasione per dare senso a termini quali "chilo" e "grammo", che piano piano possono diventare di uso comune.
Dopo una prima fase di raccolta concezioni, giunge il momento di scoprire il peso di ogni allievo, così da poterlo inserire all'interno della carta d'identità. I bambini possono scegliere autonomamente

quale tipo di bilancia utilizzare per pesarsi e quale criterio adottare. Per esempio, i bambini possono stabilire di pesarsi solo dopo essersi tolti le pantofole, i cappellini e i maglioni pesanti.

Altezza. Prima di proporre attività di sperimentazione sull'altezza, è possibile chiedere a ogni allievo di formulare ipotesi sulla propria statura. Di seguito alcune risposte dei bambini:
- «Io sono alto 10».
- «Io 20».
- «Io credo 33».
- «Io invece sono alto 60».
- «Io sono alto 1 metro e qualcosa».
- «Io sono alto 1 e 20».

Come emerge dalle risposte, la maggior parte dei bambini non ha un'idea precisa di altezza, anche se sono confrontati con tale concetto fin dalla nascita.
Partendo dalle ipotesi emerse, il docente può avviare una discussione nella quale fa riflettere i bambini sui dati raccolti, cercando di far emergere la necessità di disporre di misure precise.
La prima attività è dunque strutturata in modo da lasciar sperimentare liberamente i bambini sulla misurazione, utilizzando i materiali anche non convenzionali presenti in aula (cuscini, pennarelli, astucci ecc.) o creandone appositamente. Nella Figura 19b, ad esempio, come strumenti di misura per la lunghezza gli allievi hanno costruito dei bruchi, ispirandosi al racconto "Il Bruco Misuratutto" (Figura 19a) di Leo Lionni (2010). Questo simpatico e ricco albo illustrato tratta il tema della misura in modo non convenzionale, associando in maniera ironica il tema delle misure di lunghezza con quello delle misure di tempo.

Figure 19a, 19b. Copertina de "Il Bruco Misuratutto" (Lionni, 2010) e bruchi costruiti dagli allievi come strumenti di misura non convenzionali.

Durante l'attività, il docente ha la possibilità di osservare le strategie spontanee di misurazione. Una volta che i bambini hanno raccolto le informazioni relative alla propria altezza, è importante proporre di condividerle. Alcuni esempi emersi sono i seguenti:
- «Sono alto come 10 cuscini».
- «Io sono alto come 33 pennarelli fini».
- «Sono alto come 7 bruchi di plastilina» (vedi Figura 19b).
- «Io ho appoggiato la cannuccia 16 volte».
- «Io sono alta come Martina».
- «Io sono alto come 4 righelli e un pezzettino».
- «La mia altezza è un metro e 22».

Dopo questa messa in comune, il docente può chiedere agli allievi di mostrare come hanno fatto a misurare la propria altezza. Potrebbero emergere metodi di misurazione non molto precisi, in alcuni casi poco efficaci, che possono suscitare intense discussioni tra i bambini. È a questo punto possibile ricorrere o ritornare al racconto "Il Bruco Misuratutto", andando ad analizzare insieme ai bambini i movimenti che il bruco compie durante la misurazione degli altri animali. Il bruco sistema la propria coda in corrispondenza di un estremo del segmento da misurare; fatto questo, si distende completamente. Se non riesce a misurare tutto il segmento, il bruco deve continuare a misurare dal punto che ha raggiunto, e per questo avvicina la coda alla testa: una volta raggiunto il punto in cui poggia la testa, può nuovamente distendersi. Le distanze misurate vengono dunque sommate. Questa tecnica di misurazione, che può essere chiamata "per riporto", è quella che utilizzano spontaneamente i bambini che hanno sfruttato i pennarelli o i righelli per misurare la loro altezza. Questi bambini potrebbero aver appoggiato accanto ai compagni uno solo di questi oggetti, spingendolo in avanti e contando quante volte si ripete, senza però adottare strategie per riportare correttamente l'unità di misura. Una volta analizzato il movimento del bruco, i bambini possono raffinare il loro metodo di misurazione. A questo punto del percorso può nascere l'esigenza di mettersi d'accordo scegliendo o costruendo uno strumento di misura condiviso da tutti gli allievi (come un bruco flessibile), che verrà utilizzato per ottenere delle misure il più possibile precise e confrontabili. Può essere questa l'occasione per far scaturire un percorso sulle misure di lunghezza che continuerà negli anni successivi. Una volta affrontata questa fase, è possibile avvicinarsi alle misure convenzionali, chiedendo ai bambini: «Come fate a misurare la vostra altezza a casa?». Se non è ancora emerso, da questa discussione potrà emergere che in molti utilizzano il metro. È questa l'occasione di chiedere agli allievi di portare a scuola i metri che utilizzano a casa per misurarsi per poi stabilire in classe a piccoli gruppi quanto sono alti usando lo strumento di misura convenzionale (**Figure 20a**, **20b**, **20c**).

Figure 20a, 20b, 20c. Gli allievi collaborano per misurarsi sperimentando varie modalità.

Nasce così l'esigenza di osservarsi e discutere di quali siano gli aspetti fondamentali che aiutano a misurare l'altezza in modo preciso. Può essere utile un momento di istituzionalizzazione per fissare le modalità e le accortezze da adottare. Spesso gli allievi riconoscono inizialmente alcuni metodi errati e ne esplicitano i motivi: «Se teniamo le gambe aperte siamo più bassi» (**Figura 21a**), «Il metro deve essere tenuto diritto, non storto» (**Figura 21b**).

Figure 21a, 21b. Metodi di misurazione errati.

Successivamente i bambini potrebbero identificare alcuni aspetti da tenere in considerazione per una corretta misurazione dell'altezza: «togliersi le scarpe» (Figura 22a), «unire le gambe» (Figura 22b), «appoggiare il metro al muro» (Figura 22c), «appoggiare i talloni contro il muro» (Figura 22d), «con l'aiuto di una riga leggo l'altezza» (Figura 22e).

Figure 22a, 22b, 22c, 22d, 22e. Aspetti da considerare per una corretta misurazione dell'altezza.

Dopo aver effettuato un'ulteriore misurazione della propria altezza, considerando tutte le accortezze discusse insieme, i bambini possono verificare se i primi dati rilevati erano corretti o meno, e possono inserire la loro altezza all'interno della carta d'identità numerica (Figura 23). Da questo momento in poi i bambini possono continuare a misurare la lunghezza di diversi elementi del proprio corpo: lunghezza delle braccia, dell'avambraccio, delle gambe ecc.

Figura 23. Esempio di una scheda inserita all'interno delle carte d'identità.

Le altezze della classe. Le diverse altezze dei bambini vengono riportate su corde, strisce di cartoncino, o altri materiali che successivamente vengono appesi in aula. Questo tipo di materiale aiuta i bambini con meno esperienza a visualizzare e manipolare le altezze: accostandole fra loro riescono a confrontarle, analizzarle e ordinarle (dal più basso al più alto o viceversa). Può così nascere un confronto qualitativo piuttosto che quantitativo del tipo "più lungo di" o "più corto di" (**Figure 24a**, **24b**). I bambini con capacità numeriche più avanzate possono invece confrontare le altezze utilizzando la rappresentazione indo-araba del numero e inserirlo direttamente all'interno della retta dei numeri (**Figura 25**). Per approfondire le attività sulla retta dei numeri si può consultare la pratica didattica MaMa "La linea dei numeri", pensata per il primo ciclo, e tutti i materiali relativi all'argomento ordinamento.

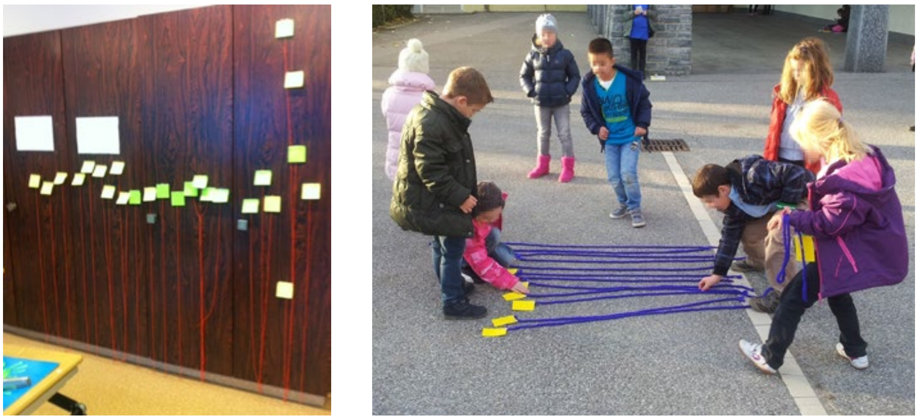


Figure 24a, 24b. Gli allievi riordinano le altezze ricavate con le corde.

Figura 25. Gli allievi riordinano le altezze inserendole all'interno della retta numerica.

4.2.3 Creare grafici

Per esercitare e affinare le tecniche di misurazione si può chiedere agli allievi di provare a misurare l'altezza dei propri familiari (papà, mamma, fratelli o sorelle, nonni). Questa richiesta permette di ampliare l'interesse dell'attività al di fuori delle mura scolastiche e di collaborare con le famiglie.
Una volta raccolte tutte le misure fatte a casa, i bambini le riportano su cartoncini colorati; ad esempio, verdi per gli allievi (**Figura 26a**), arancioni per le mamme (**Figura 26b**), blu per i papà (**Figura 26c**), bianchi per i fratelli e/o sorelle (**Figura 26d**) e possono eseguire ordinamenti: «Chi è il più basso?», «Chi è il più alto?».

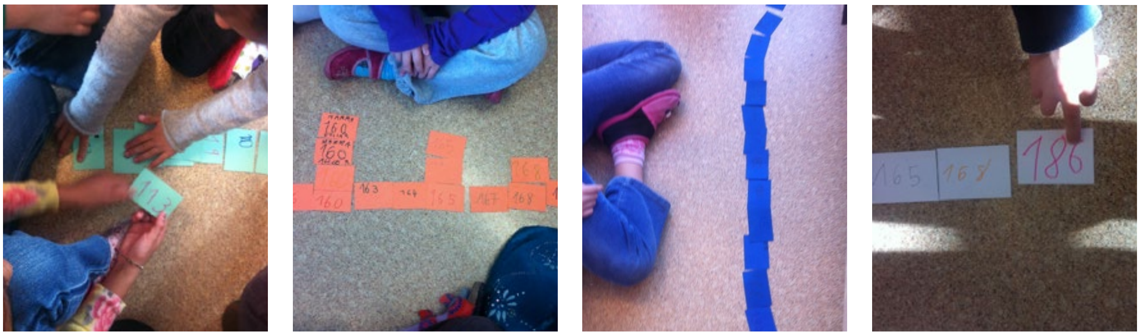


Figure 26a, 26b, 26c, 26d. Gli allievi riordinano i cartoncini con le altezze dal numero minore al numero maggiore.

In un secondo momento si può chiedere di prendere in considerazione tutti i gruppi insieme (allievi, mamme, papà, fratelli e sorelle) per effettuare confronti, e provare a ordinarli nuovamente dal numero minore al numero maggiore. Prima di far operare i bambini si potrebbe chiedere loro di ipotizzare come sarà l'ordine finale dei cartoncini. Ecco alcune ipotesi formulate dai bambini: «Prima ci saranno i cartoncini dei fratellini e delle sorelline più piccole di noi (cartoncini bianchi), poi noi (cartoncini verdi), poi i fratelli e le sorelle più grandi di noi (ancora cartoncini bianchi), le mamme (cartoncini arancioni) e alla fine i papà (cartoncini blu)».

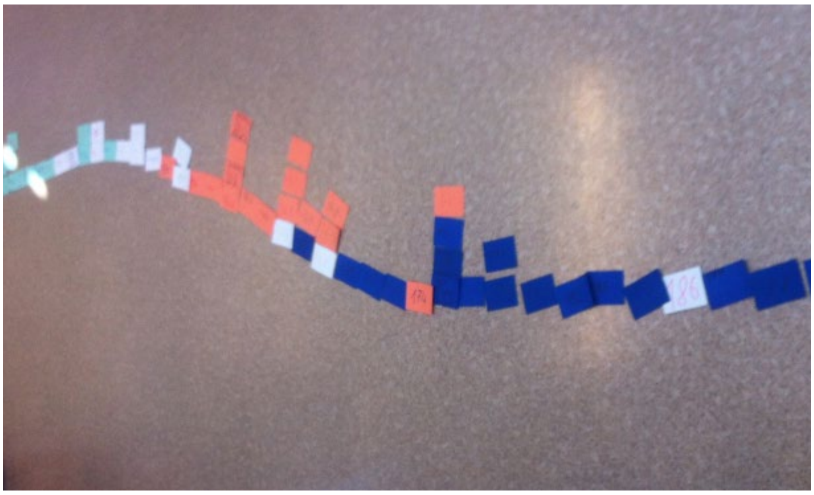


Figura 27. I bambini ordinano le altezze dei vari membri della famiglia.

Una volta ordinati i cartoncini, tenendo conto dei valori numerici, occorre verificare se l'ipotesi di partenza era attendibile: i bambini potrebbero confermare solo parte delle loro ipotesi formulate in precedenza, accorgendosi che alcuni fratelli potrebbero essere più alti di alcuni genitori (sia delle mamme, sia di alcuni papà), mentre loro sono tutti più bassi delle mamme e dei papà presi in considerazione.

A complemento di quest'attività, si potrebbe lavorare anche sui grafici a barre, a partire dalla messa in comune di ciò che ogni allievo ha svolto (Figura 24a e Figura 27). Osservando le corde appese nell'aula (Figura 24a), ci si può infatti rendere conto che la loro disposizione assomiglia molto a un particolare tipo di grafico. I bambini, basandosi sulle misure raccolte e appese all'armadio, possono così approfondire il tema dei grafici lineari (Figure 28a, 28b, 28c).

Figure 28a, 28b, 28c. I bambini trasferiscono le altezze in grafici.

Altri spunti per lavorare su grafici e tabelle, a partire dal confronto di numeri personali, possono emergere dalle schede MaMa. Se ne riportano alcuni esempi in **Figura 29a** ("Grafici di classe 1"), **Figura 29b** ("Grafici di classe 2") e **Figura 29c** ("Siamo tutti diversi"); nel primo i bambini operano su un insieme di informazioni già stabilite di una classe fittizia, mentre nelle altre due schede devono riportare dati che riguardano la loro classe.

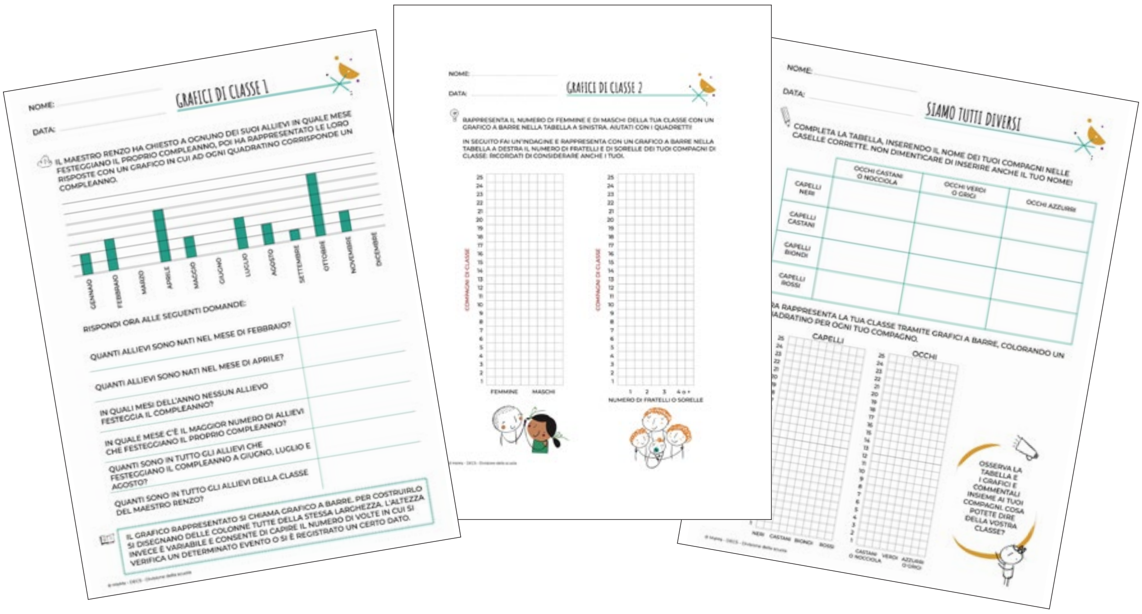


Figure 29a, 29b, 29c. Schede per lavorare su grafici e tabelle a partire da numeri personali.

Per consolidare le attività sui numeri personali e sul loro confronto, ci si può affidare anche alle schede MaMa presentate in **Figura 30a** ("Numeri mancanti"), **Figura 30b** ("La carta d'identità"), **Figura 30c** ("Indovina chi?"). Nella prima scheda gli allievi devono completare e confrontare i dati di due bambini, che potrebbero avere la loro età, mentre nelle altre due schede gli allievi hanno a disposizione delle carte d'identità numeriche di animali e, attivando il processo cognitivo *Interpretare e riflettere sui risultati* previsto dal Piano di studio (DECS, 2015), devono confrontare le informazioni.

Figure 30a, 30b, 30c. Schede per lavorare sui numeri personali o sui numeri degli animali.

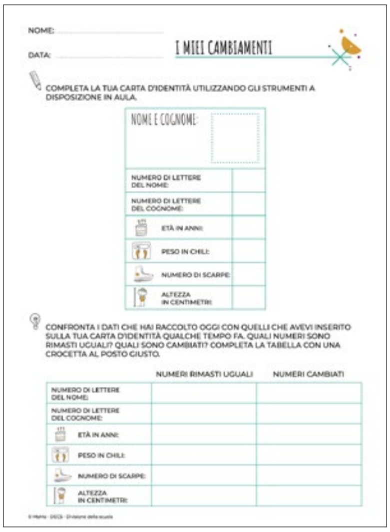
4.2.4 *Il prodotto "finale" e la sua evoluzione*

Tutti i documenti, le schede, le fotografie e le tracce prodotte durante l'itinerario potranno essere inseriti man mano all'interno di una cartelletta/carta d'identità (Figure 31a, 31b, 31c).

Figure 31a, 31b, 31c. Alcune delle cartelle finali create dagli allievi.

Con le carte d'identità create è anche possibile proporre i giochi MaMa "Battaglia con i numeri personali" e "Indovina chi con i numeri personali", in cui i protagonisti sono i bambini che si sfidano confrontando i loro numeri. Uno stimolo efficace per introdurre tali confronti potrebbe essere la lettura dell'albo illustrato "Chi mangerà la pesca?" di Ah-Aae (2008), in cui una combriccola di animali cerca di decretare chi si aggiudicherà una succosa pesca trovata nel bosco, attraverso sfide e confronti di misure corporee come, ad esempio, l'altezza e il peso.

Alcuni dei dati numerici raccolti (età, numero di piede, peso, altezza ecc.) descrivono una situazione momentanea che caratterizza i bambini in un determinato momento; altri dati numerici invece presentano una situazione stabile (numeri di lettere del nome, data di nascita ecc.) e non varieranno nel tempo. A 6-7 anni il processo di crescita dei bambini è in piena attività e dopo pochi mesi ci si accorgerà di quanto alcune misure raccolte in precedenza non siano più valide. Questo permetterà una presa di coscienza da parte degli allievi della propria crescita e renderà la carta d'identità numerica uno strumento dinamico e in continua evoluzione: man mano che ci si accorgerà di essere cresciuti è necessario tornare al lavoro per misurare nuovamente alcuni valori numerici come peso e altezza. Ripetendo questo laboratorio in diversi momenti della prima elementare o in classi successive, i bambini possono esercitare le competenze numeriche sviluppate durante questo percorso e aggiornare i dati contenuti nella propria carta d'identità. Per fare ciò, si presta bene la scheda MaMa "I miei cambiamenti" riportata in Figura 32. Dalle nuove misurazioni potrebbe emergere che gli ordinamenti delle altezze fatti in precedenza debbano essere rivisti, facendo così nascere l'esigenza di effettuarne dei nuovi.


NOME:

DATA:

I MIEI CAMBIAMENTI

COMPLETA LA TUA CARTA D'IDENTITÀ UTILIZZANDO GLI STRUMENTI A DISPOSIZIONE IN AULA.

NOME E COGNOME:

NUMERO DI LETTERE DEL NOME:	
NUMERO DI LETTERE DEL COGNOME:	
ETÀ IN ANNI:	
PESO IN CHILI:	
NUMERO DI SCARPE:	
ALTEZZA IN CENTIMETRI:	

CONFRONTA I DATI CHE HAI RACCOLTO OGGI CON QUELLI CHE AVEVI INSERITO SULLA TUA CARTA D'IDENTITÀ QUALCHE TEMPO FA. QUALI NUMERI SONO RIMASTI UGUALI? QUALI SONO CAMBIATI? COMPLETA LA TABELLA CON UNA CROCETTA AL POSTO GIUSTO.

	NUMERI RIMASTI UGUALI	NUMERI CAMBIATI
NUMERO DI LETTERE DEL NOME:		
NUMERO DI LETTERE DEL COGNOME:		
ETÀ IN ANNI:		
PESO IN CHILI:		
NUMERO DI SCARPE:		
ALTEZZA IN CENTIMETRI:		

Figura 32. Scheda MaMa per registrare i cambiamenti dei numeri personali.

5 Conclusioni

Le esperienze didattiche raccontate in questo articolo, oltre a sviluppare le prime competenze numeriche dei bambini, permettono anche di stimolare la curiosità degli allievi nei confronti della realtà in cui vivono e di agevolare lo sviluppo delle competenze sociali che si fondano su valori come l'affermazione di sé nel rispetto dell'altro, l'apertura nei confronti dei compagni e l'apertura costruttiva al pluralismo, nell'ottica di imparare a lavorare in modo collettivo. I bambini hanno l'occasione di confrontare le strategie messe in atto nel contare, misurare e rappresentare i numeri, e contemporaneamente di sostenere o modificare le proprie opinioni. La scuola, vista come luogo di apprendimento volto a chiedersi il perché delle cose e a interrogarsi sul loro funzionamento, è anche il luogo del vivere insieme, del confrontarsi e del collaborare tra pari.
Nelle esperienze descritte acquista notevole rilievo la capacità di leggere sé stessi nella relazione con gli altri: il bambino, oltre ad esprimersi e a partecipare nell'interazione con gli altri, è in grado di riconoscere le proprie caratteristiche e peculiarità. Da ultimo, ma non meno importante, questi tipi di percorsi aiutano l'allievo a relazionarsi con la diversità (fisica, di genere, di capacità ed etnica). Ci si può chiedere infatti se un lavoro che mette in risalto le differenze fisiche dei bambini, come il percorso della carta di identità numerica, non possa in qualche modo mettere in difficoltà, ad esempio, i bambini più bassi, o quelli più pesanti, favorendo involontariamente episodi di stigmatizzazione da parte dei compagni. In tutte le sperimentazioni realizzate di questi percorsi, questo non è mai successo e anzi, i bambini hanno sempre dimostrato grande sensibilità e apertura nei confronti dell'altro e del "diverso". Favorendo un atteggiamento curioso, non giudicante e aperto, i bambini imparano a

mostrarsi e a guardare gli altri per quello che sono, accettando le caratteristiche che rendono ognuno di noi diverso dagli altri e per questo unico e speciale.
Unico e speciale come viene considerato ogni allievo all'interno del progetto MaMa, i cui materiali si possono rivelare utili alleati nella fase di progettazione e di realizzazione del lavoro con gli allievi, consentendo ai docenti di delineare un percorso in cui si intrecciano e si alternano attività di vario tipo (di raccolta concezioni, di scoperta con il proprio corpo, laboratoriali, di consolidamento, …), così da fornire una varietà di stimoli in linea con i diversi stili cognitivi e le diverse modalità d'apprendimento degli allievi.

Bibliografia

Ah-Aae, Y. (2008). *Chi mangerà la pesca?*. Editoriale Scienza.

Baldacci, M. (2005). Il Laboratorio come strategia didattica. *Bambini pensati*, Newsletter n.4. Centro Multimediale di Documentazione Pedagogica.

Baldazzi, L., Lieverani, G., Magalotti, F., Monaco, A., Prosdocimi, L., & Vecchi, N. (2011). *Numeri*. Pitagora.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. DECS. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds

Donati, M., & Sbaragli, S. (2012). Chi ha paura dei numeri grandi?. *Bollettino dei docenti di matematica*, *64*, 63–78.

Franscella, S., & Ponzio, L. (2021). Il passaporto numerico: un percorso "italmatico" alla scuola dell'infanzia. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *9*, 139–167.
Lionni, L. (2010). *Il Bruco Misuratutto*. Babalibri.

Marazzani, I. (2004). *Numeri e operazioni*. Carocci.

Marazzani, I. (2007). *I numeri grandi*. Erickson.

Martinelli, S., & Martinetti, P. (2021). *Prendiamoci il tempo*. Collana Praticamente, numero 5. DECS e DFA-SUPSI. https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/prendiamoci-il-tempo/

Polito, M. (2000). *Attivare le risorse del gruppo classe. Nuove strategie per l'apprendimento reciproco e la crescita personale*. Erickson.

Ravelli, G. (2010). *Pratiche di educazione alla corporeità nella scuola dell'infanzia*. EDUCatt.

Santinelli, L., & Sbaragli, S. (2017). L'importanza della componente motoria nell'apprendimento numerico. *Scuola ticinese*, *328*, 57–61.

Sbaragli, S. (2021). *Linee guida del progetto MaMa. Impostazione metodologica, disciplinare e didattica del progetto. Ambito Numeri e calcolo*. DECS. https://mama.edu.ti.ch/wp-content/uploads/2021/11/2021-Guida-MaMa-Numeri-e-calcolo.pdf

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 95 - 120, DOI:10.33683/ddm.22.11.5 OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Problemi con variazione ed equazione figurale: strumenti della didattica cinese trasposti in una scuola primaria italiana

Problems with variation and figural equation: Chinese didactics tools transposed into an Italian primary school

Mariarita Meli• e Eugenia Taranto°
• Istituto Comprensivo "Via Ricasoli", Torino – Italia
° Dipartimento di Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Catania – Italia

mariaritameli4@gmail.com, eugenia.taranto@unito.it

Sunto / In questo lavoro viene mostrata la possibilità di sviluppare un approccio al pensiero pre-algebrico con alunni della scuola primaria che presti maggiore attenzione alle caratteristiche strutturali dei problemi additivi rispetto a quelle numeriche. In particolare, illustrando una sperimentazione condotta con allievi di una classe seconda primaria, si mira a mostrare come può concretizzarsi una trasposizione di strumenti didattici propri della didattica cinese – i problemi con variazione e l'equazione figurale – nel contesto italiano della scuola primaria. Si rileva come, a partire dal testo di un problema e dalla rappresentazione grafica dei suoi dati, i bambini sono in grado di comprendere e, a loro volta, costruire variazioni del problema di partenza, esplorando le potenzialità legate alla struttura della variazione stessa. I bambini sono così portati a sviluppare competenze d'uso di strutture di risoluzione di tipo pre-algebrico, spostando l'attenzione dal piano procedurale a quello relazionale.

Parole chiave: trasposizione culturale; scuola primaria; problemi con variazione; equazione figurale; pensiero pre-algebrico.

Abstract / This paper shows the possibility of developing an approach to pre-algebraic thinking with primary school pupils which pays more attention to the structural features of additive problems than to the numerical ones. In particular, by illustrating a teaching experiment carried out with primary school pupils (grade 2), the aim is to show how a transposition of didactic tools which are typical of Chinese didactics – problems with variation and figural equation – can be implemented in the Italian primary school context. It is shown how, starting from the text of a problem and the symbolic representation of its data, children are able to understand and, in turn, construct variations of the starting problem, by exploring the potentialities linked to the structure of the variation itself. Children are thus led to develop skills in the use of pre-algebraic resolution structures, shifting the attention from the procedural to the relational level.

Keywords: cultural transposition; primary school; variation problems; figural equation; pre-algebraic thinking.

1 Introduzione e quadro teorico

Uno dei fenomeni più vistosi che ha toccato la realtà della scuola italiana a partire dagli anni '90 in poi è stata la presenza di alunni stranieri. L'Italia presenta una certa peculiarità in termini di multiculturalismo trasformandosi, in breve tempo, da paese di emigrazione a paese di immigrazione, divenendo ambiente interculturale, multietnico e plurilingue. Con l'apertura del mondo orientale verso l'occidente, le tematiche relative allo studio dell'ambiente scolastico e delle strategie in uso si sono notevolmente diffuse, ampliando gli orizzonti delle ricerche.
In questa direzione la partecipazione di diversi paesi ai test internazionali di valutazione delle competenze degli studenti dà l'opportunità non solo di confrontare i risultati ottenuti, ma anche di riflettere sulle pratiche educative che hanno determinato queste prestazioni. In particolare, le indagini internazionali dell'OCSE-PISA 2009, 2012, 2015[1] e del TIMSS 2007, 2011, 2015[2] hanno messo in evidenza come l'Italia si collochi sempre in basso rispetto alla media degli altri Paesi; mentre nei primi posti di queste graduatorie troviamo nazioni dell'estremo oriente (con Singapore al vertice).
Iniziano a diffondersi ricerche di didattica interculturale che prendono in esame l'insegnamento-apprendimento della matematica (Barton & Frank, 2001; Bishop, 1988; Cai & Knuth, 2011; Sun, 2009). Con particolare attenzione alla Cina, nel panorama italiano sono di rilievo, tra gli altri, i lavori condotti dai gruppi di ricerca delle università di Palermo (Di Paola, 2016; Di Paola & Zanniello, 2017), di Napoli (Mellone et al., 2019, 2020) e di Modena-Reggio Emilia (Bartolini Bussi et al., 2013; Ramploud, 2015; Ramploud & Di Paola, 2013), che affrontano il problema dell'insegnamento-apprendimento della matematica attraverso una lente interculturale.
Bishop (1988) ha evidenziato l'importanza di riconoscere le pratiche di insegnamento della matematica come fenomeni sociali che sono incorporati in quelle culture e in quelle società che le hanno generate. Si è quindi ormai ben consapevoli del fatto che le diverse scelte formative e i diversi strumenti didattici discendono dalla storia, dalla cultura dei luoghi in cui sono nati e si sono sviluppati e dalla lingua in cui sono stati formulati. Diviene quindi fondamentale, quando si riflette su pratiche educative sviluppate in contesti culturali diversi dal proprio, essere anche consapevoli delle differenze che la diversità di contesti culturali porta con sé, al fine di evitare il rischio di fraintendere la logica di quel processo educativo.
Partendo dallo studio delle pratiche didattiche sviluppate nei paesi dell'area orientale, in Italia è stata sviluppata una ricerca che si basa sull'idea di *trasposizione culturale* (Ramploud, 2015). Con questo termine si intende il processo di cambiamento che si sviluppa quando vi è una messa in parallelo di pratiche didattiche di differenti culture che consentono il ripensamento delle proprie (Mellone & Ramploud, 2015). Non si tratta di "importare" metodologie didattiche da una cultura ed "imporle" ad un'altra, piuttosto si vogliono approfondire i processi di significato connessi ai diversi contesti culturali nei quali queste metodologie si sono sviluppate, al fine di rendere gli insegnanti più consapevoli del proprio contesto culturale e delle proprie pratiche didattiche. Il costrutto di trasposizione culturale definisce, quindi, una condizione di decentramento dalla pratica didattica del proprio contesto culturale, passando attraverso il contatto con pratiche didattiche di altri contesti culturali (Mellone et al., 2019).
In queste riflessioni emerse dalla letteratura si è inserito il lavoro di tesi di Laurea Magistrale in Scienze

1. Per visionare le tabelle sui risultati internazionali raggiunti dagli studenti dei Paesi che prendono parte all'indagine OCSE-PISA, è possibile consultare il sito: https://www.oecd.org/pisa/; dettagli sull'Italia sono disponibili al sito: https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2015.php?page=pisa2015_it_07
2. Per visionare le tabelle sui risultati internazionali raggiunti dagli studenti dei Paesi che prendono parte all'indagine TIMSS, è possibile consultare il sito: https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html; dettagli sull'Italia sono disponibili al sito: https://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2015/index.php?page=timss2015_it_05

della Formazione Primaria condotto da Mariarita Meli (2019), di cui Eugenia Taranto è stata relatrice, presso la Facoltà di Studi Classici, Linguistici e della Formazione dell'Università degli Studi di Enna KORE. In questo articolo si presentano i risultati di una sperimentazione, condotta in una classe seconda primaria,[3] relativa ai processi di risoluzione di problemi additivi mediante strumenti della didattica cinese – i problemi con variazione e l'equazione figurale, che descriveremo nel paragrafo successivo – per verificare le loro potenzialità in un contesto diverso da quello originale.

1.1 Problemi con variazione ed equazione figurale

Nella risoluzione di problemi matematici, alcune ricerche (ad esempio, Branchetti & Viale, 2015; Zan, 2016) hanno messo in evidenza come molte difficoltà incontrate dagli alunni derivino dalla fase preliminare di comprensione del problema, che ostacolano la messa in atto di percorsi risolutivi sensati. Il bambino è portato, fin dalle prime presentazioni dei problemi, a individuare i dati numerici ed eseguire il calcolo che sembra più opportuno senza ragionare sulla reale richiesta del problema.
Applicare una certa "variazione del problema" può essere utile per evitare che gli studenti procedano alla risoluzione dei problemi affidandosi "ciecamente" alla ricerca di "parole-chiave" (Zan, 2016), e per favorire la capacità di individuare differenze e somiglianze tra il problema d'origine e le sue variazioni e stimolare la riflessione sulle strategie da utilizzare per affrontarli, in favore di uno sviluppo del pensiero astratto (Sun, 2009). Nella didattica matematica cinese questa procedura si riscontra nei cosiddetti "problemi con variazione", meglio noti nei curricula cinesi di matematica come *多題一解*, *"Problemi multipli, una soluzione"*. Attraverso questa pratica, i bambini cinesi svolgono problemi che li aiutano a riflettere sulle relazioni fra le varie parti del problema e a verificare l'esattezza dei risultati ottenuti (Sun, 2011).
I problemi con variazione (**Figura 1**) sono costituiti da almeno una tripletta di problemi che si reggono su una struttura additiva, in cui le operazioni di addizione e sottrazione sono sempre compresenti (Bartolini Bussi et al., 2013). Tra i caratteri cinesi che compongono il testo, spiccano chiaramente i numeri arabi. Essi costituiscono i dati del problema, così come accade nei testi italiani. Gli studenti vengono aiutati nel processo di ragionamento attraverso la rappresentazione grafica dei dati, mediante la cosiddetta *equazione figurale*, che li aiuta a focalizzare l'attenzione sul dato mancante, ossia sull'incognita (Di Paola et al., 2015).

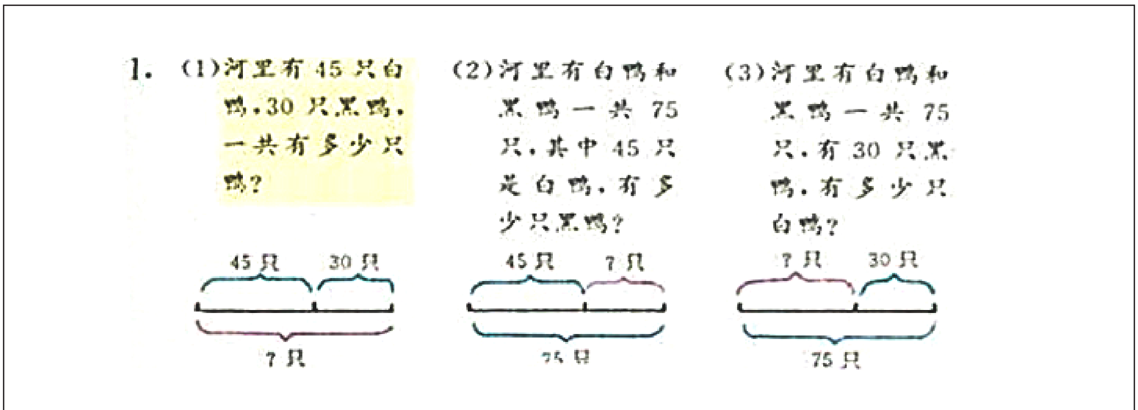


Figura 1. Esempio di problema con variazione (tratto da Mellone & Ramploud, 2015, p. 570).

L'equazione figurale è un segmento in cui vengono proporzionalmente rappresentate le quantità, note o incognite, e su cui poi si opera trattando le une e le altre nello stesso modo. Essa serve come supporto

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

per riconoscere la struttura aritmetica comune sottesa ai differenti problemi. Lo stretto legame dell'equazione figurale con il testo-problema aiuta il discente ad analizzare i singoli dati attraverso la loro rappresentazione e la loro quantificazione grafica. Grazie all'equazione figurale il bambino pone attenzione al dato mancante e mette in atto strategie logico-matematiche utili per giungere alla risoluzione. Ciò che è essenziale è proprio lo spostamento dal campo aritmetico a quello relazionale (Cai & Knuth, 2011). Questo approccio didattico, meglio conosciuto con la denominazione *Early algebra*, è diffuso già dai primi ordini scolastici nelle scuole cinesi, ma viene praticato in Italia solo da una ristretta minoranza di insegnanti (Di Paola et al., 2015). L'early algebra, come si può leggere sul sito del progetto ArAl[4] (http://www.progettoaral.it/):

> «[...] promuove l'insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica sin dai primi anni della scuola primaria, se non dalla scuola dell'infanzia. […] L'early algebra vuole dimostrare, a differenza di ciò che avviene nell'insegnamento tradizionale della matematica [italiana], in cui lo studente incontra l'algebra alla fine della scuola secondaria di primo grado, *come sia possibile ed efficace iniziare molto prima l'avvio al pensiero algebrico per favorire negli alunni la costruzione di solide basi per la comprensione del significato degli oggetti e dei processi algebrici*».

In questa ottica, i problemi con variazione possono diventare mediatori per un'introduzione all'algebra sin dai primi anni di scuola.
Acquisita la consapevolezza delle diversità che caratterizzano le pratiche di insegnamento connesse alla risoluzione dei problemi additivi in Italia e in Cina nei primi anni scolastici, il presente lavoro vuole mostrare come può avvenire la trasposizione dei problemi con variazione e dell'equazione figurale nel contesto italiano e quali risultati si possono osservare sui processi di apprendimento degli alunni coinvolti. L'intento è, infatti, quello di accompagnare il passaggio dalla rappresentazione grafica della quantità a quella simbolica del segmento (equazione figurale) per costruire un percorso di progressiva astrazione nelle rappresentazioni dei problemi, in funzione della loro comprensione e della loro risoluzione.

2 Contesto e metodologia

La sperimentazione è stata condotta in una classe seconda, di 17 alunni, della scuola primaria dell'Istituto Comprensivo Statale "A. D'Arrigo - G. Tomasi di Lampedusa" presso il plesso "G. Guazzelli" di Palma di Montechiaro (provincia di Agrigento).
La sperimentazione, la cui progettazione è stata supervisionata da Eugenia Taranto, è stata condotta da Mariarita Meli (in seguito denominata "sperimentatrice"). La durata della sperimentazione è stata di circa 4 mesi (da inizio ottobre 2018 a metà gennaio 2019), e le sono state dedicate circa 3 ore alla settimana (complessivamente 30 ore). L'intera sperimentazione si è affiancata alle attività curricolari proposte dall'insegnante di classe, la quale, alcuni mesi prima, aveva partecipato a un seminario in cui erano stati presentati i problemi con variazione e l'equazione figurale, ed era venuta a conoscenza di tutte le fasi e di tutte le attività di cui si componeva la sperimentazione. Durante lo svolgimento di quest'ultima, l'insegnante di classe ha ricoperto sia il ruolo di osservatrice, relativamente alle pratiche

4. Il progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico (responsabile scientifico Nicolina Malara, già professore ordinario presso il Dipartimento FIM dell'Università di Modena e Reggio Emilia, co-responsabile scientifico e coordinatore nazionale Giancarlo Navarra, già professore a contratto presso la stessa Università) è impegnato da quasi vent'anni in attività di ricerca, sperimentazione e formazione nell'ambito dell'early algebra.

messe in atto dalla sperimentatrice, sia il ruolo di mediatrice fra le conoscenze e le competenze che gli allievi avevano costruito con lei in precedenza e quelle mobilitate dalla sperimentatrice.
La sperimentazione è stata video-registrata. Parti di dialogo tra sperimentatrice e allievi, estratte dalle videoregistrazioni, saranno riportate nelle analisi dei dati.

2.1 Prerequisiti

I prerequisiti che gli alunni devono possedere affinché possa essere avviata una simile sperimentazione sono i seguenti:

- saper contare correttamente fino a 100;
- saper raggruppare in base 10;
- saper leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale;
- saper eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo;
- saper eseguire le operazioni di addizione e sottrazione con gli algoritmi scritti usuali;
- essere capaci di leggere e comprendere il testo di un problema;
- essere capaci di identificare i dati e la domanda di un problema.

2.2 Le fasi della sperimentazione

La sperimentazione si è articolata in sei fasi, che rispettano il principio della complessità crescente (Bonazza, 2012). La Tabella 1 riporta brevemente le fasi della sperimentazione, precisandone obiettivi didattici, metodologie e materiali utilizzati.

	Fase	Obiettivo didattico	Metodologia/Materiali
1	Attività di ice-breaking.	Verificare la conoscenza di alcuni dei prerequisiti e risolvere semplici problemi sfruttando associazioni visive e raggruppamenti.	Allestimento di un mercato dove si vende/compra frutta, pagando con monete e banconote. Frutta e denaro sono realizzati con cartoncino.
2	Esplorazione dei problemi cinesi.	Dato il testo di un problema in cinese, individuare gli elementi di somiglianza con un generico problema italiano. Successivamente, nota la traduzione, risolverlo.	Consegna del testo di un problema in cinese. Consegna del medesimo testo in italiano.
3	Approccio all'equazione figurale.	Risolvere i problemi con variazione mediante l'equazione figurale.	Consegna del problema già dato nella fase 2 e di 8 sue varianti, da risolvere mediante l'equazione figurale.
4	Inserimento dei dati.	Riflettere sulla comprensione del testo di un problema e sulle sue variazioni.	Consegna di due schede, ciascuna con un testo-problema di partenza e tre diverse riformulazioni, in cui però mancano i dati numerici.
5	Formulazione della domanda.	Creare problemi con variazione a partire da una situazione data.	Consegna di una scheda con una situazione aperta (contesto e dati) e due sue variazioni.
6	Creazione di un problema.	A partire da un'immagine, inventare un problema. Riflettere collettivamente sulle sue possibili variazioni.	Divisione della classe in 4 gruppi eterogenei, consegna di 4 diverse immagini. Discussione collettiva.

Tabella 1. Fasi della sperimentazione.

3 Conduzione della sperimentazione

3.1 Fase 1: Attività di ice-breaking

In questa fase, l'obiettivo è stato quello di osservare se tutti gli alunni fossero in grado di contare fino a 100 e, dunque, di rispettare i principi di sequenza dei primi numerali, di svolgere semplici problemi con numeri superiori al 20 e di raggruppare in base 10. Un altro obiettivo a cui si mirava, necessario per i passi successivi, era anche quello di far prendere consapevolezza del fatto che si può risolvere un problema anche concretamente, manipolando oggetti, raggruppandoli per agevolare il conteggio. L'idea è stata incentivata dalle riflessioni di Gasca, secondo cui:

> «Non è necessario neppure avere un'idea chiara delle operazioni poiché i bambini fin dai primi anni di scuola, imparano a contare fino al 100, quindi anche contando riescono a risolvere la situazione problematica proposta senza rischio di sbagliare, in quanto l'importante è riuscire a pensare lo scenario proposto».
>
> (Gasca, 2016, p. 3)

È stato, dunque, inscenato un mercato. È stato scelto un alunno come fruttivendolo; tutti gli altri, a turno, hanno ricoperto il ruolo di clienti. Sono stati disposti sulla cattedra cinque barattoli, all'interno di ognuno dei quali erano presenti 200 immagini di frutta (50 erano di pere e altrettante di mele, di banane e di pesche) e un sacchettino, dal quale ogni alunno-cliente è stato poi chiamato a pescare un biglietto, contenente un quesito che doveva risolvere per comprendere il quantitativo di frutta da comprare/pagare (**Figura 2**).

Figura 2. Attività di ice-breaking.

Prima di iniziare l'attività, sono state consegnate ad ogni alunno 50 monete, con le quali avrebbe dovuto "comprare" quanto richiesto (ogni frutto costava 1 moneta), risolvendo la richiesta espressa nel biglietto (ad esempio: «Compra 25 banane, 18 pere e 2 mele. Quante monete spendi per comprare tutta questa frutta?» o «Regala 3 banane a tre maschietti dandone una ad ognuno di loro e 2 mele a due femminucce. Quanta frutta ti è rimasta?»). Pertanto, gli alunni, in un primo momento (durante l'acquisto della frutta), hanno operato il calcolo addizionale con numeri superiori al 20 e questo ha permesso di verificare il rispetto della corrispondenza biunivoca da parte dei bambini, poiché hanno associato ad ogni frutto una e una sola moneta. In un momento immediatamente successivo, i bambini hanno operato la sottrazione con i numeri fino al 50 (regalando frutti ai compagni). Successivamente, è stato chiesto ad ogni alunno di contare le monete rimaste, eventualmente raggruppandole su base 10 per facilitare il conteggio. Ad ogni mucchietto da 10 monete (una decina) è stata consegnata una banconota da dieci, in modo da semplificare il conteggio e riprendere l'idea di scomposizione di un numero in decine e unità.

Figura 3. Classificazione della frutta e raggruppamento delle monete.

3.2 Fase 2: Esplorazione dei problemi cinesi

Si sono distribuite agli alunni fotocopie di un problema cinese nel testo originale, con annessa equazione figurale (Figura 4).[5] Non si è specificato né che si trattava di un problema, né in che lingua fosse scritto. Si è chiesto ai bambini di osservare la fotocopia e dire se si individuavano elementi di somiglianza o di differenza rispetto a un testo in italiano.

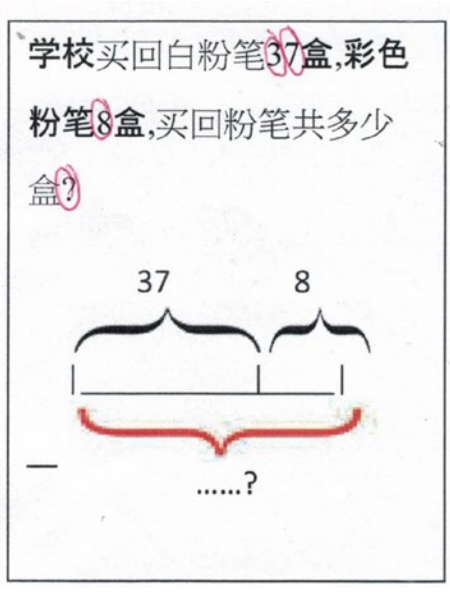


Figura 4. Testo di un problema cinese (con elementi cerchiati dalle autrici per agevolare il lettore).

Per avviare la discussione si è poi chiesto ai bambini:

- Di che scrittura si tratta?
- Avete riconosciuto qualcosa di familiare?
- Secondo voi, questi testi cosa sono?

5. La fotocopia consegnata agli alunni era priva dei cerchietti in rosso che sono invece presenti in Figura 4. La loro presenza è stata aggiunta solo per agevolare il lettore, come si osserverà in seguito.

Per i bambini non è stato difficile intuire che la lingua del testo fosse cinese (qualcuno ha anche ipotizzato fosse giapponese). Come osservato nel par. 1.1, i testi dei problemi cinesi presentano i dati numerici scritti usando numeri arabi; inoltre, nel testo si intercetta, tra i simboli, il punto interrogativo, tipico elemento associato alla domanda che pone il problema.[6] Gli elementi di somiglianza che si sperava venissero individuati dai bambini (cerchiati in Figura 4) sono stati facilmente individuati da tutti. Qualche bambino si è anche soffermato sull'equazione figurale, chiedendo:

L.: «Cosa è quello schema?»
E.: «Cosa sono le linee rosse e quelle blu?»

La sperimentatrice non si è sbilanciata nelle sue risposte:

> «Se avete osservato bene, avrete notato che questi numeri [indica il 37 e l'8 sull'equazione figurale] e anche il punto interrogativo [indica il punto interrogativo sull'equazione figurale] sono gli stessi presenti nel testo. Vedremo poi insieme che c'è un legame tra il testo e questo disegno».

Successivamente, è stata consegnata la fotocopia con la corrispondente traduzione in lingua italiana:

> La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi e 8 scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti sono state acquistate?

Il testo in italiano è stato letto, per tutta la classe, dalla sperimentatrice.
Ricordiamo, per il lettore, che i problemi con variazione offrono un'unica situazione da cui è possibile generare problemi diversi. Questo aspetto si collega a un ulteriore elemento: la rappresentazione. Quest'ultima va vista in due direzioni prospettiche:
1. la rappresentazione unica per più problemi;
2. la costruzione di un processo di formalizzazione e astrazione che consente di modellizzare e tipizzare il problema stesso, conducendo successivamente all'elaborazione e all'utilizzo dell'equazione figurale.

Concordemente con la sperimentatrice, l'insegnante di classe, terminata la lettura del problema, ha chiesto ai bambini di rappresentare graficamente la situazione in modo che si potesse trovare il numero delle scatole di gessetti acquistate. La richiesta di procedere con una rappresentazione grafica dei dati del problema non era nuova per gli alunni, abituati, già durante la classe prima, ad affrontare i problemi a parole utilizzando proprio le rappresentazioni grafiche, per sopperire ai limiti legati alle competenze di lettura e scrittura.
Nell'analisi a priori si era prefigurato un possibile nodo problematico che avrebbe potuto/dovuto emergere: il problema della rappresentazione legato all'elevato numero di oggetti da rappresentare (45 scatole di gessetti), diversamente dalla fase precedente, in cui gli oggetti da contare si avevano già (frutta e monete di cartoncino).
Di seguito vengono presentati due esempi di rappresentazioni prodotte dai bambini (Figure 5a e 5b).

6. In questa sperimentazione, in linea con il problema cinese, il punto interrogativo viene utilizzato come simbolo sia per distinguere la domanda nel testo del problema, sia per indicare l'incognita nell'equazione figurale. Si tratta di una semplificazione per affrontare inizialmente il tema, con la consapevolezza che sarà in seguito fondamentale anche lavorare su problemi in cui la domanda può non essere indicata da un punto interrogativo ed è da ricavare tramite un'attenta lettura e comprensione del testo. Occorrerà distinguere bene, tramite opportune attività successive, il punto interrogativo come segno di punteggiatura e come simbolo proto-matematico per l'incognita.

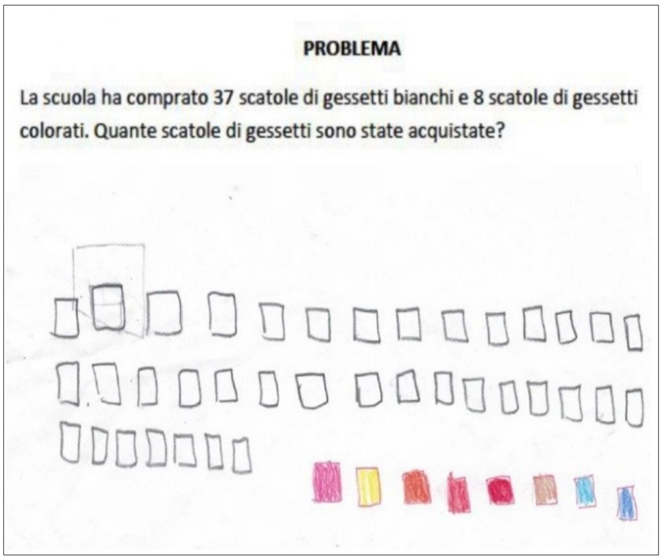


Figura 5a. Rappresentazione grafica del problema riportando i dati a uno a uno.

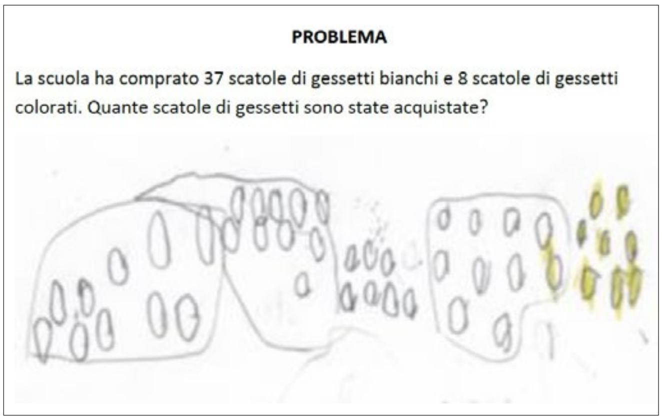


Figura 5b. Rappresentazione grafica del problema raggruppando i dati.

Analizzando le rappresentazioni grafiche proposte dai bambini, si è notato che ogni allievo ha proceduto disegnando tutti i dati del problema (ovvero le 37 scatole di gesso bianco e le 8 scatole di gesso colorato). Per rappresentare le scatole, alcuni hanno scelto dei quadrati (es. Figura 5a), altri dei cerchi (es. Figura 5b), e tutti hanno colorato quelle che rappresentavano le scatole di gesso colorato. Alcuni, memori del lavoro di raggruppamenti per 10 ripreso nella fase precedente, senza indicazioni né da parte della sperimentatrice né dell'insegnante di classe, hanno utilizzato il raggruppamento in base 10 per facilitare il conteggio delle scatole (es. Figura 5b).
La soluzione del problema si è ottenuta mediante conteggio: una ristretta minoranza di allievi ha contato a una a una tutte le scatole disegnate; molti hanno applicato la strategia del "contare da" (Fuson, 1982) partendo dalla numerosità delle scatole che hanno lasciato in bianco (37) e aggiungendo progressivamente le altre 8, ovvero «37, 38, 39, …, 45». Chi ha disegnato le scatole e ha poi cerchiato i raggruppamenti per 10 ha contato i tre raggruppamenti da dieci dicendo «10, 20, 30» e poi ha proseguito con la strategia del "contare da" (Fuson, 1982), aggiungendo a una a una le rimanenti unità, ovvero «30, 31, 32, …, 45».

3.3 Fase 3: Approccio all'equazione figurale

Dopo aver confrontato tutte le rappresentazioni prodotte dai bambini, si è discussa la possibilità di operare sulla rappresentazione per renderla uno strumento efficace per la risoluzione del problema. Infatti, era vero che le scatole erano state rappresentate con simboli grafici più semplici (quadrati o cerchi), ma era comunque laborioso disegnarle tutte. Gli stessi bambini lo avevano notato:

> L.: «Ci ho messo un po' a farle tutte».
> G.: «Mi è stancata la mano a fare tutte le scatole».
> M.: «Ma se compravano 1000 scatole, quanto tempo avremmo impiegato per farle?»

Certamente non ci si aspettava che l'equazione figurale emergesse come rappresentazione spontanea. Tuttavia, essa era apparsa agli occhi dei bambini nella prima fotocopia che era stata loro consegnata (Figura 4). La sperimentatrice ha chiesto ai bambini se ricordavano che c'era un disegno sotto il testo in cinese e cosa avevano immaginato che fosse. Ecco alcune delle risposte ricevute:

> S.: «Io ho pensato che era il modo in cui la loro maestra [dei bambini cinesi] gli diceva di scrivere i dati del problema».
> A.: «Per me significa che le scatole dei gessetti bianchi sono più grandi di quelle dei gessetti colorati. Guarda: 37 scatole tutte così [sullo schema in Figura 4 indica la lunghezza del segmento che si riferisce alle 37 scatole di gessetti bianchi] e 8 scatole grandi così [sullo schema in Figura 4 indica la lunghezza del segmento che si riferisce alle 8 scatole di gessetti colorati]».

La sperimentatrice ha chiarito subito che tutte le scatole hanno le stesse dimensioni. Poi, ha approfittato di questa osservazione per precisare che effettivamente quei due segmenti si riferivano proprio alle scatole di gessetti bianchi e dei gessetti colorati. «È un modo più schematico e immediato di rappresentare il numero delle scatole», ha aggiunto la sperimentatrice, discutendo poi con i bambini il fatto che i numeri riportati nello schema in Figura 4 fossero proprio quelli del testo del problema e che la lunghezza dei segmenti fosse diversa perché si riferivano a numerosità diverse. Si è introdotta così l'equazione figurale ai bambini. L'intento che si voleva perseguire era proprio quello di accompagnare il passaggio dalla rappresentazione grafica della quantità a quella simbolica del segmento (equazione figurale), per costruire un percorso di progressiva astrazione nella rappresentazione dei problemi, favorendone la comprensione e risoluzione.

In linea con quanto osservato nel quadro teorico a proposito della trasposizione culturale, sebbene questa strategia risolutiva sia tipicamente propria della didattica cinese, si può notare che il suo utilizzo sia coerente con i traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria, previsti dalle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola d'infanzia e del primo ciclo[7] di istruzione (in seguito denominate "Indicazioni Nazionali"): l'alunno deve saper ricavare informazioni e saper utilizzare diverse rappresentazioni per costruire strategie risolutive efficaci nella risoluzione dei problemi (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012).

Si è poi consegnata ai bambini una fotocopia in cui c'era nuovamente il problema dei gessetti che avevano appena risolto e altre otto sue varianti, tutte in italiano (Tabella 2).

7. Il primo ciclo di istruzione in Italia dura otto anni: cinque anni di scuola primaria e tre anni di scuola secondaria di primo grado, che corrispondono alla scuola elementare e ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

1. La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi e 8 scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti sono state acquistate?	**2.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Tra queste, le scatole di gessetti colorati sono 8. Quante scatole di gessetti bianchi ci sono?	**3.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Tra queste, le scatole di gessetti bianchi sono 37. Quante scatole di gessetti colorati ci sono?
4. La scuola ha comprato delle scatole di gessetti. 37 scatole di gessetti bianchi sono andate tutte perdute. Rimangono solo 8 scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti aveva comprato la scuola?	**5.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Se ne perdono alcune, ma ne restano 8. Quante scatole di gessetti si sono perse?	**6.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Se ne perdono 37, quante scatole restano ancora?
7. La scuola ha comprato 8 scatole di gessetti colorati. Il numero delle scatole di gessetti bianchi è maggiore di 29 unità rispetto al numero delle scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti bianchi ha la scuola?	**8.** La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi e 8 scatole di gessetti colorati. Di quante unità il numero delle scatole di gessetti bianchi è maggiore rispetto al numero delle scatole di gessetti colorati?	**9.** La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi. Il numero delle scatole di gessetti colorati è minore di 29 unità rispetto al numero delle scatole di gessetti bianchi. Quante scatole di gessetti colorati ci sono?

Tabella 2. Problemi con variazione consegnati ai bambini.[8]

Si è chiesto ai bambini di rappresentare le otto varianti utilizzando l'equazione figurale. L'obiettivo era di portare i bambini a riconoscere la possibilità di esprimere tutti e nove i problemi con un'unica rappresentazione che ne evidenziasse la struttura comune. Per tutti i bambini era chiaro che i dati andavano riportati tutti lungo una stessa linea, tuttavia, nonostante le riflessioni fatte precedentemente sul problema dei gessetti (problema 1, Tabella 2), non è stato semplice per i bambini staccarsi dai dati numerici e sostituirli con dei segmenti. L'insegnante di classe e la sperimentatrice hanno concordato sul fatto che era meglio non forzare verso una rappresentazione in segmenti continui. Così, la sperimentatrice ha disegnato alla lavagna un piccolo segmento indicandolo come 1 e altri 10 segmenti uniti indicando tale quantità con il 10. Ha poi fatto osservare come, piuttosto che fare 10 segmenti tutti attaccati, «per non farci stancare la mano» (riprendendo l'osservazione fatta prima da una bambina, G.), un unico segmento di lunghezza pari a 10 segmenti si sarebbe considerato ugualmente come 10. L'attenzione, a quel punto, è stata posta sulla lunghezza dei segmenti[9] e su questa nuova modalità, più pratica, con cui anche i grandi numeri potevano essere rappresentati. Quindi, se i bambini dovevano rappresentare 8 scatole, facevano 8 segmenti tutti della stessa lunghezza, mentre se dovevano rappresentare 10 scatole, ovvero una decina, facevano un segmento più lungo che aveva valore di 10 unità (Figure 6a, 6b, 6c). In questo modo, per i bambini è stato più chiaro comprendere il nesso tra la lunghezza del segmento e il suo valore.

8. Per maggiori informazioni sull'analisi strutturale della determinazione e del posizionamento dei testi dei problemi con variazione all'interno della tabella, consultare Ramploud (2015).
9. Si è anche riflettuto sul fatto che il segmento di valore 10 poteva anche essere non necessariamente lungo tanto quanto 10 segmenti, ma semplicemente "più lungo" del segmento a cui si attribuiva valore 1.

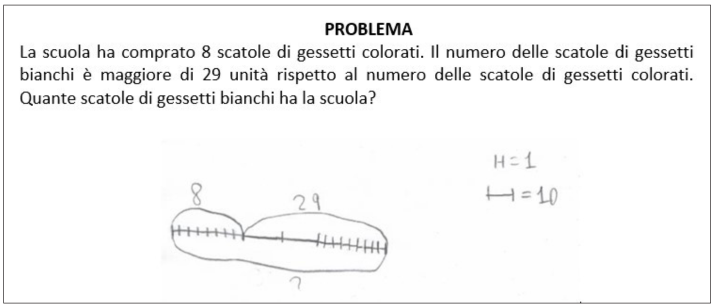


Figura 6a. Rappresentazione grafica del problema 7.

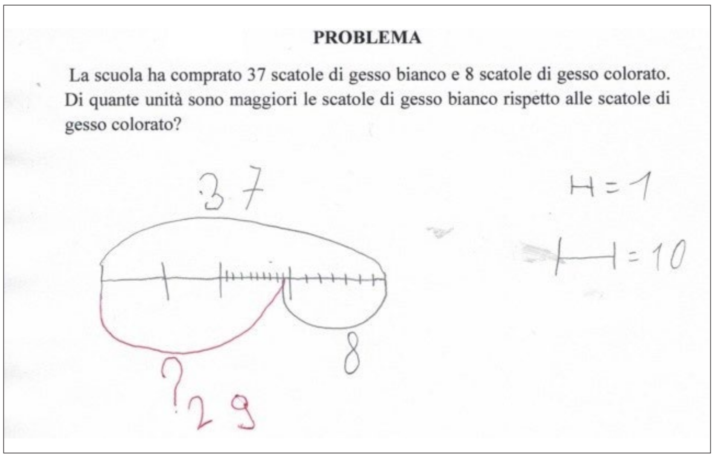


Figura 6b. Risoluzione grafica del problema 8.

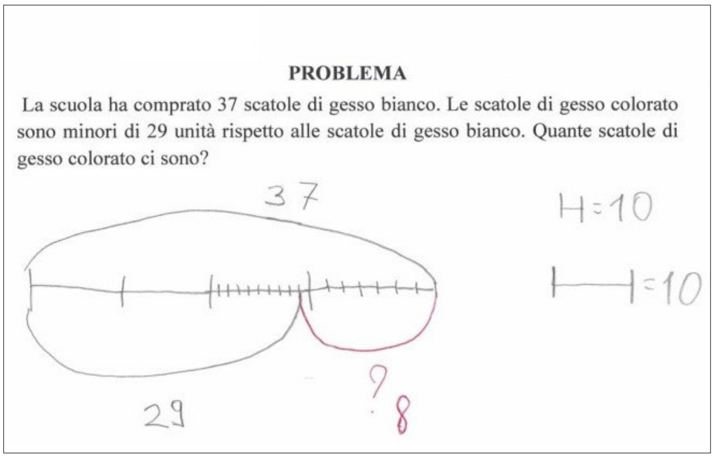


Figura 6c. Risoluzione grafica del problema 9.

Durante la rappresentazione mediante equazione figurale dei problemi con variazione, gli alunni hanno mostrato difficoltà nel problema 7 della Tabella 2 (Figura 6a) la cui complessità risultava più elevata poiché si presentava in maniera differente rispetto ai precedenti. Il blocco cognitivo dei bambini si è manifestato nel leggere «maggiore di 29 unità», perché fino a quel momento avevano lavorato solo con numeri dichiarati esplicitamente e non in relazione ad altri numeri.

Di seguito si riporta una breve conversazione avvenuta tra gli alunni e la sperimentatrice (Sper.):

> F.: «Ma dopo aver disegnato gli 8 segmenti, come devo farle le 29 unità?»
> S.: «Cosa sono 29 unità? Non potevano scrivere solo 29?»
> A.: «Devo disegnare i segmenti attaccati?»
> D.: «Devo cambiare colore per indicare quelli colorati rispetto ai gessetti bianchi?»
> F.: «*Maggiore di* vuol dire che devo aggiungere?»

La sperimentatrice ha riletto il problema per tutta la classe e, andando verso la lavagna, ha chiesto ai bambini di aiutarla a rappresentare i dati. Durante la rappresentazione il dubbio dei bambini si è focalizzato sull'uso del colore per distinguere le scatole. La sperimentatrice, allora, ha chiesto loro di riflettere:

> Sper.: «È realmente importante differenziare i gessetti colorati da quelli bianchi per poter arrivare alla soluzione del problema?»
> C.: «Non è importante, perché il grafico rimane uguale, anche se utilizziamo un altro colore!»

I bambini sono poi ritornati sulla perplessità di partenza, il «*maggiore di*». Dopo un'ulteriore rilettura del testo, viene chiesto ai bambini di riflettere:

> Sper.: «Riflettiamo insieme: cosa vuol dire che le scatole di gessetto bianco sono maggiori di 29 unità rispetto a quelle di gessetto colorato?»
> L.: «Che dobbiamo aggiungere».
> Sper.: «Che cosa dobbiamo aggiungere? A chi? Perché?»
> C.: «Perché se ci dice che le scatole dei gessetti bianchi sono maggiori, significa che alle scatole di gessetti colorati noi dobbiamo aggiungere altre 29 scatole».
> M.: «Maggiore vuol dire che è più grande. Cioè … ci sono 8 scatole di [gessetti] colorati. Poi ci sono le scatole dei [gessetti] bianchi che sono maggiori delle 8 [scatole di gessetti colorati] perché ce ne sono oltre a quelle lì [intende le 8 scatole dei gessetti colorati] altre 29 [scatole]».
> C.: «Infatti, io ho detto che agli 8 tu devi aggiungere i 29, così ce li hai tutti sulla stessa linea».

Dopo questo scambio tra C. e M., la situazione sembrava apparire più chiara anche agli occhi degli altri compagni.

> A.: «Maestra, ma è facile così, basta contare!»
> F.: «Quindi se le rappresentiamo bene e capiamo ciò che manca, basta solo che contiamo!»
> E.: «Maestra, io ho letto che le scatole di gessetti colorati sono 8, però il problema vuole sapere quante scatole sono di gessetti bianchi e quindi, se dice che sono in più di 29 unità, io ho disegnato accanto alle 8 unità altre 29 e poi ho contato tutto!»

Dalla risposta di E. si comprende come l'alunna abbia oltrepassato il limite legato solo alla lettura dei dati numerici presenti nel testo-problema: ha capito che al dato esplicito (8 scatole di gessetti colorati) si dovevano sommare 29 unità. Ha rappresentato la situazione correttamente e si è appoggiata ad essa per arrivare alla soluzione del problema. Infatti, dicendo «poi ho contato tutto», ha reso esplicito il fatto che ha applicato una procedura di conteggio sui segmenti che ha disegnato.
Anche con l'equazione figurale gli alunni hanno sfruttato processi di conteggio legati alla rappresen-

tazione che avevano fatto del problema. Come detto, i bambini non avevano prodotto l'equazione figurale canonica,[10] e la presenza dei segmenti che rendeva "visibili" le unità li induceva nel conteggio di queste ultime e nella successiva somma con le decine, applicando le strategie del "contare da" o del "contare fino a" (Fuson, 1982).

Rappresentati tutti e 9 i problemi, è seguita una discussione che ha coinvolto tutta la classe e nella quale si sono confrontate le varie rappresentazioni dei nove problemi. La sperimentatrice e gli allievi si sono soffermati sui dati numerici presenti (come esclamato da un bambino: «i numeri gira e rigira sono sempre gli stessi») e sulle operazioni utilizzate per risolvere i problemi (addizione e sottrazione). Sono così arrivati a notare che gli otto problemi assegnati erano proprio variazioni del primo, ovvero il contesto era sempre lo stesso, i dati numerici erano sempre gli stessi.

Nella rappresentazione dei dati mediante equazione figurale, i bambini si trovavano, di problema in problema, dinanzi a una parte del grafico priva di dato numerico, che indicavano, come nei testi cinesi, col punto interrogativo. In questo modo, si è incentivato lo sviluppo di un pensiero pre-algebrico già nei bambini di 7 anni, poiché il punto interrogativo dell'equazione figurale altro non è che l'incognita da determinare (la soluzione numerica è stata infatti scritta in un secondo momento, una volta trovata).

I problemi proposti hanno effettivamente dato luogo alla scrittura di un'equazione algebrica:
8 + 29 = ? (Figura 6a); 37 = ? + 8 (Figura 6b); 37 = 29 + ? (Figura 6c).

Questa scrittura, in Italia, diviene generalmente familiare agli allievi a partire dalla scuola secondaria di primo grado,[11] quando il dato sconosciuto viene indicato con x, e non più con il punto interrogativo. L'aspetto centrale di questa fase è stato far comprendere ai bambini che nella risoluzione dei problemi non è necessario conoscere a memoria delle procedure per giungere alla soluzione corretta, piuttosto è necessaria una corretta comprensione e rappresentazione grafica del testo.

Come anticipato, l'insegnante di classe e la sperimentatrice hanno deciso di non spingere verso una rappresentazione in segmenti continui, ma di mantenere le rappresentazioni dove unità e decine erano esplicite, perché con tali rappresentazioni i bambini si sentivano più a loro agio. È stata però discussa a lungo, con i bambini, la possibilità e l'utilità di utilizzare un'unica rappresentazione per tutti e nove i problemi.

Inoltre, ai bambini non si è proposto la denominazione "equazione figurale". Alcuni di loro lo hanno inizialmente chiamato "schema", poi qualcun altro ha iniziato a usare il termine "grafico", ripreso anche da insegnante di classe e sperimentatrice. Dunque, quest'ultimo termine, "grafico", è stato quello adottato dal gruppo classe.

3.4 Fase 4: Inserimento dei dati

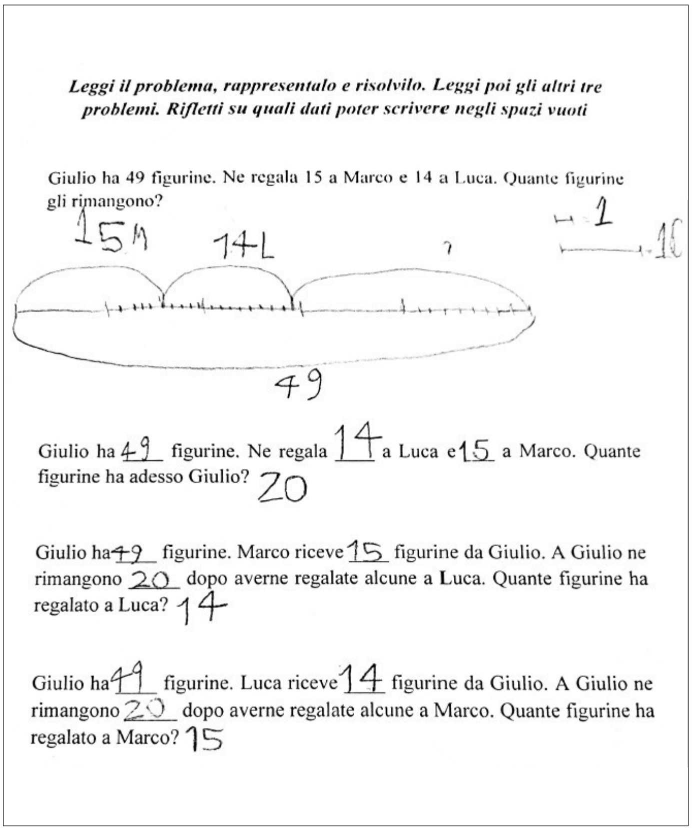
In questa fase, ai bambini sono state consegnate due schede. In ognuna di esse c'era un testo-problema di partenza e, sotto questo, tre sue variazioni, nelle quali i dati erano stati volutamente "cancellati" (sostituiti da lineette). La rimozione dei dati dalle variazioni del problema è stata fatta al fine di stimolare la riflessione, da parte degli allievi, proprio sulla dimensione relazionale che i dati hanno in questo tipo di struttura. Fondamentale è stata la richiesta di comprendere un testo-problema di partenza e poi di inserire i dati numerici in maniera corretta nelle sue diverse riformulazioni successive, affinché si mantenesse inalterato il significato del testo.

10. Per "equazione figurale canonica" si intende quella proposta sotto il problema cinese (Figura 4) in cui i segmenti sono continui e non c'è riferimento diretto alla quantità che rappresentano (cosa che invece succedeva talvolta nelle rappresentazioni degli allievi, quando ad esempio per rappresentare 8 unità venivano usati 8 piccoli segmenti).
11. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

I testi-problema proposti sono stati i due seguenti:

> Giulio ha 49 figurine. Ne regala 15 a Marco e 14 a Luca. Quante figurine gli rimangono?
> Laura ha ricevuto dalla nonna 38 monete. Per strada ne perde 17. Quante monete rimangono adesso a Laura?

Tutti i bambini si sono cimentanti con entrambi. Le **Figure 7a**, **7b** e **7c** mostrano anche esempi di risoluzione delle schede, che sono rappresentativi del modo in cui tutti i bambini hanno lavorato. Quello che è importante osservare è la riproduzione del "grafico" che prevede la presenza dei dati noti e ignoti e il riempimento degli spazi vuoti eseguito dai bambini abbastanza agevolmente, proprio perché si sono appoggiati al "grafico".[12]


Leggi il problema, rappresentalo e risolvilo. Leggi poi gli altri tre problemi. Rifletti su quali dati poter scrivere negli spazi vuoti

Giulio ha 49 figurine. Ne regala 15 a Marco e 14 a Luca. Quante figurine gli rimangono?

15 M 14 L ?

49

Giulio ha 49 figurine. Ne regala 14 a Luca e 15 a Marco. Quante figurine ha adesso Giulio? 20

Giulio ha 49 figurine. Marco riceve 15 figurine da Giulio. A Giulio ne rimangono 20 dopo averne regalate alcune a Luca. Quante figurine ha regalato a Luca? 14

Giulio ha 49 figurine. Luca riceve 14 figurine da Giulio. A Giulio ne rimangono 20 dopo averne regalate alcune a Marco. Quante figurine ha regalato a Marco? 15

Figura 7a. Inserimento dei dati per il problema delle figurine.

12. Nelle rappresentazioni grafiche delle **Figure 7a** e **7b** sono comparse anche delle lettere riferite ad elementi diversi dell'ambiente del problema, ma si è preferito glissare su questo aspetto, dato che gli alunni non avevano le competenze per riflettere collettivamente su di esse.

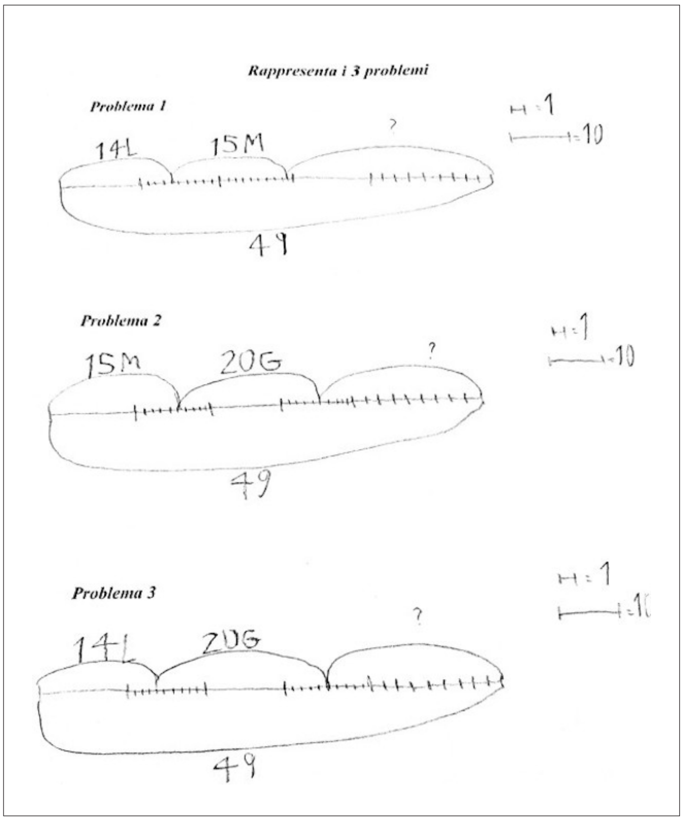
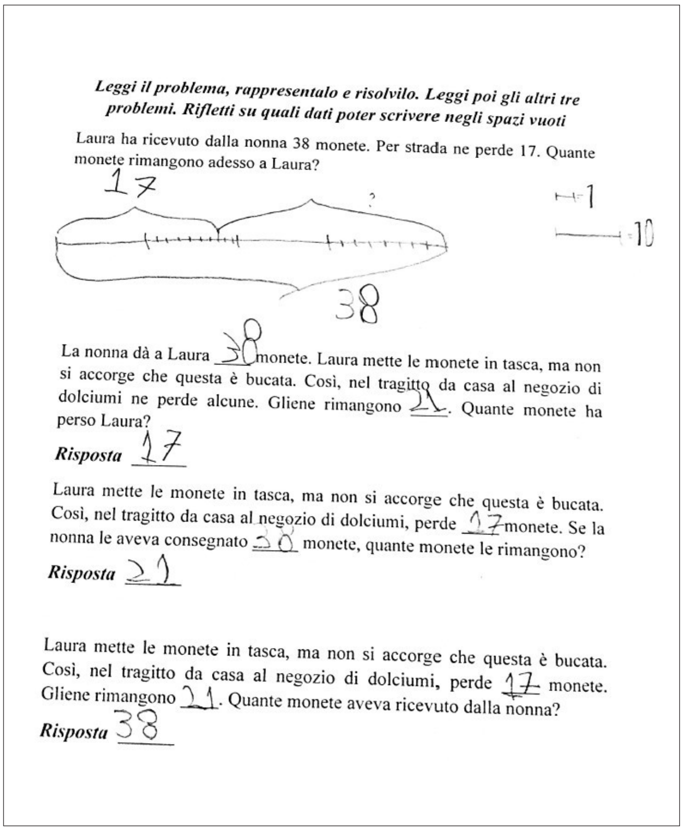


Figura 7b. Rappresentazione dei problemi delle figurine con variazione.


Leggi il problema, rappresentalo e risolvilo. Leggi poi gli altri tre problemi. Rifletti su quali dati poter scrivere negli spazi vuoti

Laura ha ricevuto dalla nonna 38 monete. Per strada ne perde 17. Quante monete rimangono adesso a Laura?

17 ? 38

La nonna dà a Laura 38 monete. Laura mette le monete in tasca, ma non si accorge che questa è bucata. Così, nel tragitto da casa al negozio di dolciumi ne perde alcune. Gliene rimangono 21. Quante monete ha perso Laura?

Risposta 17

Laura mette le monete in tasca, ma non si accorge che questa è bucata. Così, nel tragitto da casa al negozio di dolciumi, perde 17 monete. Se la nonna le aveva consegnato 38 monete, quante monete le rimangono?

Risposta 21

Laura mette le monete in tasca, ma non si accorge che questa è bucata. Così, nel tragitto da casa al negozio di dolciumi, perde 17 monete. Gliene rimangono 21. Quante monete aveva ricevuto dalla nonna?

Risposta 38

Figura 7c. Inserimento dei dati per il problema delle monete.

Si riportano anche due osservazioni espresse da due bambini durante lo svolgimento dell'attività:

> G.: «Maestra, ma la risposta è sempre il numero che manca nel testo».
> M.: «Ho capito! È come il problema dei gessetti, perché ad ogni problema c'era sempre lo stesso grafico, cambia solo la domanda, mentre i numeri con cui lavoriamo sono sempre gli stessi».

Dalle affermazioni degli allievi si desume che abbiano compreso che è possibile presentare il problema in modi diversi, invertendo i dati, ma che la rappresentazione grafica rimane la stessa. Dunque, da uno stesso grafico è possibile trarre variazioni dello stesso problema.

3.5 Fase 5: Formulazione della domanda

In questa fase è stato aumentato il livello di complessità, lasciando spazio anche alla fantasia degli allievi. È stata proposta una situazione aperta, ovvero non un problema già determinato, ma un contesto con dei dati, da cui poter generare interrogativi e due variazioni di tale situazione aperta, anch'esse presentate come situazioni aperte.
Ai bambini è stata, quindi, consegnata una scheda che riportava la seguente situazione:

> Luca ha 32 caramelle alla fragola e 14 caramelle all'arancia.

e le sue due variazioni:

> Luca ha 46 caramelle. Le caramelle all'arancia sono 14.
> Luca ha 46 caramelle. Le caramelle alla fragola sono 32.

È stato chiesto agli allievi di formulare una domanda per ciascuna delle tre situazioni, mantenendo inalterata la struttura e il significato della situazione iniziale; infine, di rappresentare e risolvere la tripletta creata. Si mirava a fortificare l'acquisizione raggiunta nella fase precedente, ovvero la comprensione che lavorando nello stesso contesto, ossia nella stessa situazione di partenza e con gli stessi dati, si possono ottenere formulazioni diverse relative a uno stesso problema.
Il lavoro è stato svolto individualmente e solo alla fine sono state lette tutte le domande formulate. Ogni domanda formulata in maniera diversa da altre precedentemente ascoltate è stata riportata alla lavagna, per fornire una panoramica complessiva di quelle che potevano essere le variazioni possibili associate a una stessa situazione di partenza. Di seguito (Figure 8a, 8b, 8c) si riportano esempi di alcune domande formulate dagli allievi.

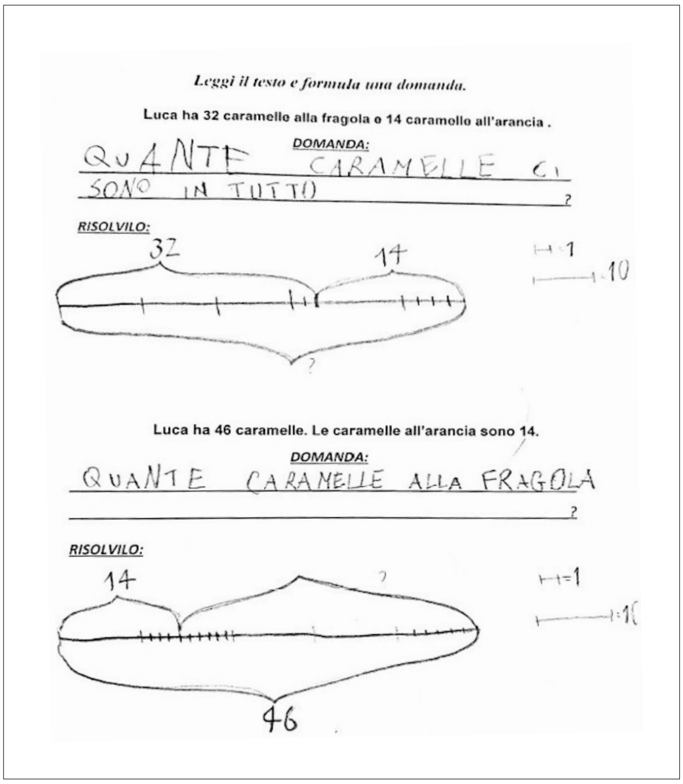


Figura 8a. Formulazione della domanda per le prime due situazioni da parte di un allievo.

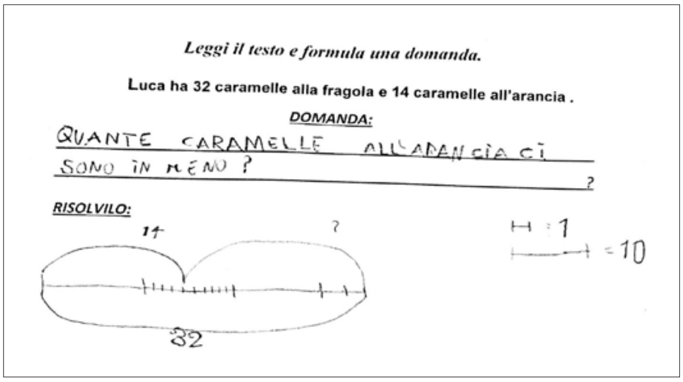


Figura 8b. Formulazione di una domanda diversa per la prima situazione proposta.

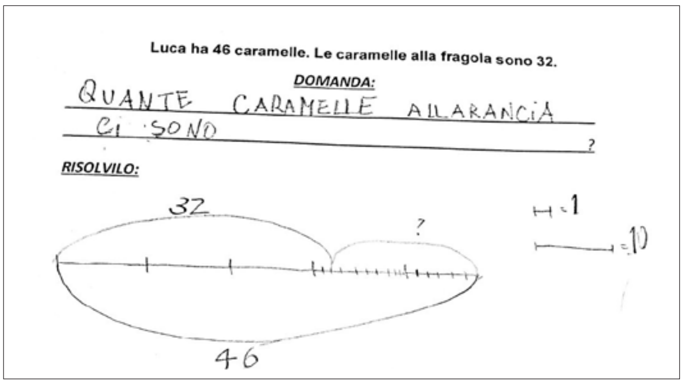


Figura 8c. Formulazione della domanda per la terza situazione proposta.

Dalla visione delle Figure 8a, 8b e 8c, è possibile notare le differenti domande proposte dagli allievi. Esse possono essere riassunte in quattro tipologie:

– Quante caramelle ci sono in tutto? (Figura 8a).
– Quante caramelle alla fragola ci sono? (Figura 8a).
– Quante caramelle all'arancia ci sono? (Figura 8c).
– Quante caramelle all'arancia ci sono in meno rispetto a quella alla fragola? (Figura 8b).

Questa attività ha permesso ai bambini di comprendere che i problemi non nascono in maniera standardizzata, bensì possono esistere molteplici riformulazioni e, nel caso specifico, che da uno stesso contesto possono emergere non solo domande formulate in maniera differente, ma anche prospettive diverse da cui vedere i dati.

3.6 Fase 6: Creazione di un problema

La sesta e ultima fase ha previsto una suddivisione della classe in quattro gruppi eterogenei, relativamente alle competenze individuali degli allievi. La suddivisione è stata fatta con l'aiuto dell'insegnante di classe, al fine di rendere i gruppi più equi possibile, bilanciando la presenza degli alunni che hanno mostrato competenze più avanzate con quelli che ancora mostravano qualche perplessità.[13]
Ogni gruppo ha ricevuto una scheda di lavoro (Figure 9a, 9b, 9c, 9d). Ogni scheda riportava un'immagine diversa, ma una medesima consegna, ovvero a partire dalla visione dell'immagine, inventare un problema. In ogni gruppo è stato individuato un capogruppo, attraverso un sorteggio, che aveva il compito di scrivere il problema ideato dal gruppo.
Si è trattato di un'attività di cooperative learning, dove i membri del gruppo erano chiamati a ricoprire diversi ruoli caratterizzati dalle seguenti attività:

– Scrivere il problema (era compito del capogruppo sorteggiato, ma tutti i membri del gruppo dovevano esprimersi per giungere alla sua formulazione).
– Rappresentare il problema mediante il grafico (l'equazione figurale).
– Risolvere il problema (un bambino scriveva, ma tutti i membri del gruppo collaboravano per ottenere la soluzione).
– Presentare il problema ideato al gruppo classe.

Una volta portate a termine queste consegne, ogni gruppo doveva poi cimentarsi nella rappresentazione e quindi nella risoluzione dei problemi creati dagli altri gruppi.
Si presentano di seguito alcuni protocolli.

13. Le perplessità, di cui si fa cenno, riguardano quelle di alcuni bambini che, una volta rappresentato il segmento "lungo" di valore 10, per svolgere i conteggi che portano alla soluzione del problema, sentivano la necessità di scomporlo in 10 parti.

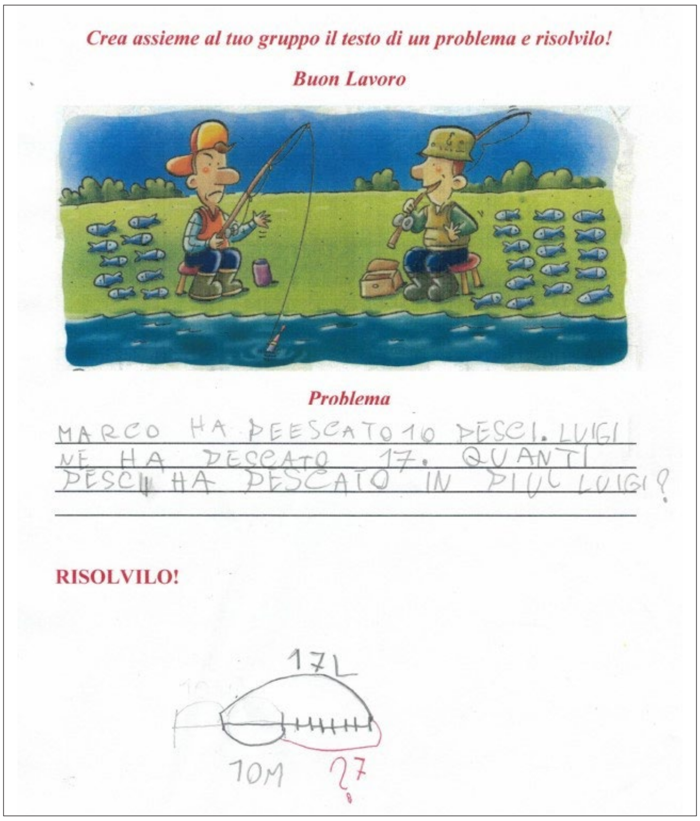


Figura 9a. Creazione di un problema.

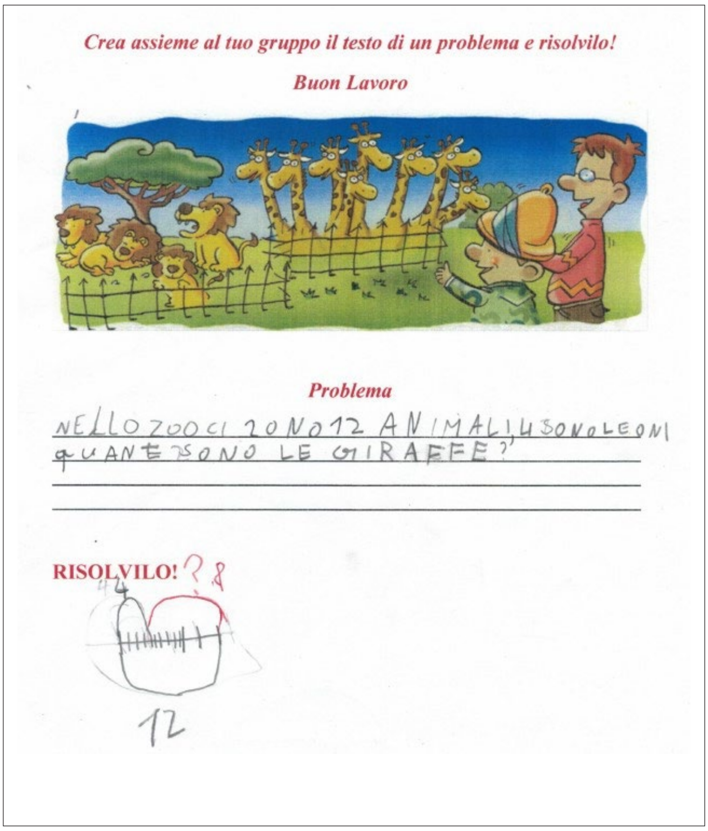


Figura 9b. Creazione di un problema.

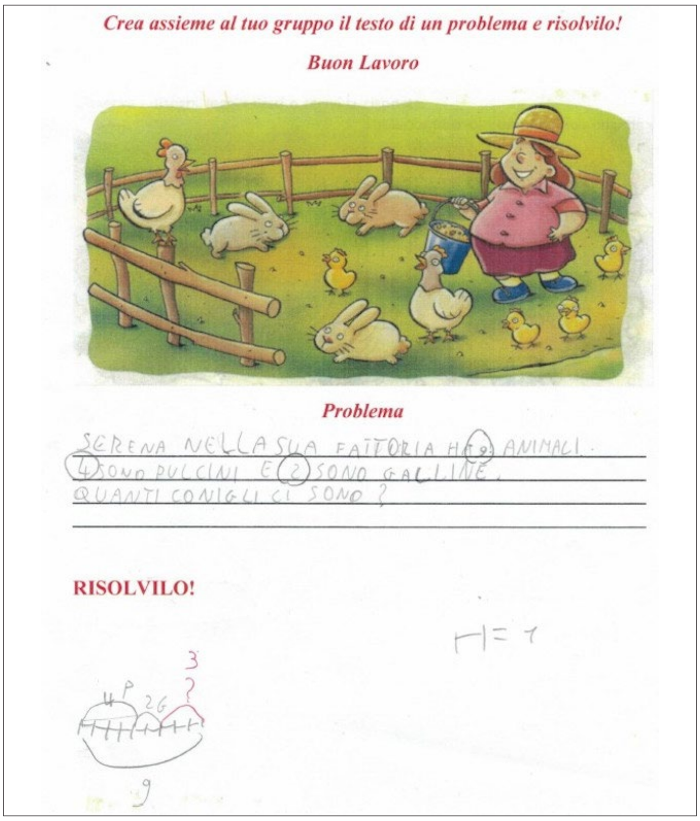


Figura 9c. Creazione di un problema.

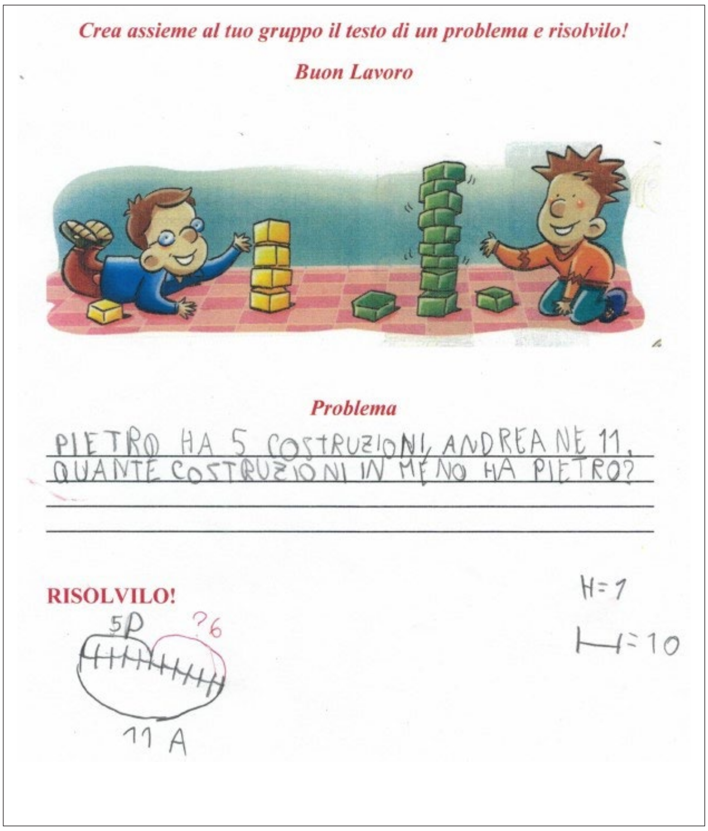


Figura 9d. Creazione di un problema.

Di seguito vengono riportati alcuni dialoghi dei bambini, durante lo svolgimento del lavoro di gruppo:

> **Gruppo 1** (Figura 9a):
> A.: «Possiamo creare un problema semplice chiedendo quanti pesci hanno pescato in tutto».
> L.: «Ma sarebbe troppo semplice per i nostri compagni risolvere il nostro problema».
> B.: «Secondo me, potremmo chiedere o quanti questo [indicando l'uomo a destra] ne ha pescati di più o quanti questo [indicando l'uomo a sinistra] ne ha pescati in meno».
> L.: «Sono d'accordo, possiamo fare una domanda come quelle che ci ha fatto fare la maestra!»
> **Gruppo 2** (Figura 9b):
> G.: «Che dite se chiediamo ai compagni di scoprire quante sono le giraffe o i leoni?»
> L., E., e R.: «Per noi va bene, però dobbiamo scriverlo bene [il problema]!»

Gli altri due gruppi hanno lavorato similmente ai due gruppi riportati sopra. Si può notare che il gruppo 3 (Figura 9c) ha formulato un problema simile al gruppo 2; mentre il gruppo 4, a differenza del gruppo 1, ha attuato la procedura inversa chiedendo «Quanti sono in meno…».
Tutti i gruppi si sono mostrati autonomi nella rappresentazione dei problemi. Il processo risolutivo è stato uguale a quello messo in atto nei problemi con variazione svolti nelle fasi precedenti, ovvero mediante conteggio dei segmenti rappresentati.
Dopo che tutti i gruppi avevano rappresentato e risolto i problemi degli altri gruppi, la sperimentatrice ha chiesto alla classe di formulare triplette di problemi sui 4 problemi ideati dai gruppi. Per ognuno dei 4 problemi, un volontario per gruppo è stato chiamato alla lavagna dalla sperimentatrice. Il bambino è stato invitato a disegnare il grafico del problema iniziale e poi la sperimentatrice chiedeva: «Al posto del punto interrogativo mettiamo il valore della soluzione che avete trovato. Facciamo prendere a un altro numero il posto del punto interrogativo. Come possiamo riformulare il problema?». Tutta la classe era invitata a intervenire.
Quest'ultima fase ha permesso di avviare una discussione matematica sulle diverse possibilità di formulazione dei testi nonostante si stesse lavorando sempre sugli stessi dati, richiamando fortemente le caratteristiche dei problemi con variazione utilizzati nelle fasi precedenti.
Riportiamo di seguito, a mo' di esempio, le variazioni ideate dai bambini per il problema della Figura 9a e della Figura 9b.

> **Problema di partenza** (Figura 9a):
> Marco ha pescato 10 pesci. Luigi ne ha pescati 17. Quanti pesci ha pescato in più Luigi?
> **Variazioni:**
> Marco ha pescato 10 pesci. Luigi ne ha pescati 17. Quanti pesci ha pescato in meno Marco?
> Marco e Luigi hanno pescato 27 pesci. Se Luigi ne ha pescati 10, quanti pesci ha pescato Marco?
> Marco e Luigi hanno pescato 27 pesci. Se Marco ne ha pescati 17, quanti pesci ha pescato Luigi?

> **Problema di partenza** (Figura 9b):
> Nello zoo ci sono 12 animali. 4 sono i leoni. Quante sono le giraffe?[14]
> **Variazioni:**
> Nello zoo ci sono 12 animali. 8 sono le giraffe. Quanti sono i leoni?
> Nello zoo ci sono 8 giraffe e 4 leoni. Quanti animali sono presenti?
> In uno zoo ci sono 12 animali. Se i leoni sono 4 e le giraffe sono maggiori di 4 rispetto a loro, quante sono?[15]

14. Nello zoo gli unici animali presenti sono leoni e giraffe (**Figura 9b**). Facciamo questa precisazione per evitare che il lettore possa immaginare soluzioni diverse per tale problema.
15. Non è stata affrontata la profonda differenza di significato tra le frasi «le giraffe sono maggiori» e «il numero delle giraffe è maggiore». Questo aspetto è stato delegato all'insegnante per un approfondimento successivo.

Osserviamo che, in questo caso, la proposta avanzata dal gruppo classe sembra richiamare i problemi svolti con la sperimentatrice in cui si presentava il numero delle scatole di gessetti bianchi (29) maggiore di quello delle scatole di gessetti colorati (8).

4 Discussione e conclusioni

In questo articolo è stata mostrata la possibilità di sviluppare un approccio al pensiero pre-algebrico con alunni della scuola primaria, che presti maggiore attenzione alle caratteristiche strutturali dei problemi additivi rispetto a quelle numeriche.
L'interesse perseguito in questo articolo è stato duplice. Da un lato si è mirato a mostrare come possa concretizzarsi una trasposizione di strumenti didattici propri della didattica cinese – i problemi con variazione e l'equazione figurale – nel contesto italiano della scuola primaria. Questo aspetto è stato mostrato mettendo in atto la sperimentazione condotta con la classe seconda primaria, descrivendo nel dettaglio tutte le fasi di cui si è composta. Dall'altro lato si volevano indagare i risultati di una simile esperienza di trasposizione culturale dal punto di vista dell'apprendimento degli allievi coinvolti.
Le attività proposte miravano a:
- stimolare la capacità di lettura e comprensione del testo;
- supportare la produzione di rappresentazioni grafiche e pre-algebriche, cogliendo i rapporti di queste rappresentazioni con il linguaggio verbale;
- individuare dati mancanti in un problema, ma desumibili dal testo e a indicare il dato mancante con il punto interrogativo come precursore dell'incognita;
- riflettere sulla comprensione del testo di un problema e delle sue variazioni per stimolare la riflessione sulla dimensione relazionale che hanno i dati in questo tipo di struttura (cioè nella variazione);
- sviluppare la capacità di risoluzione di un problema aritmetico;
- stimolare la creatività dei bambini nell'inventare variazioni di un problema.

Questi aspetti ripercorrono le fasi della sperimentazione svolta, le cui attività si sono succedute per gradi di complessità via via crescente, al fine di rendere gli allievi autonomi nella comprensione, rappresentazione, risoluzione e formulazione di problemi con variazione.
I risultati ottenuti, considerando il numero esiguo di bambini, non sono statisticamente significativi; tuttavia, possiamo mettere in evidenza i seguenti aspetti.
Nella fase 2, quando si è chiesto ai bambini di rappresentare graficamente il problema, tutti hanno proceduto disegnando i dati del problema. Nessuno ha disegnato effettivamente le scatole dei gessetti; tutti hanno fatto ricorso a una semplificazione del disegno: le scatole sono state rappresentate o con quadrati o con cerchi. Nella fase 3, si è discussa la possibilità di operare sulla rappresentazione per renderla uno strumento efficace per la risoluzione del problema. Gli stessi bambini avevano notato che era laborioso disegnare tutti gli oggetti, specialmente con numeri superiori al 10.
Tra gli intenti dichiarati nell'introduzione, rientrava anche quello di accompagnare il passaggio dalla rappresentazione grafica della quantità a quella simbolica del segmento (equazione figurale). A tal proposito, il passaggio all'equazione figurale canonica è stato avviato con gli allievi, rimanendo ancora in via di sviluppo alla fine della sperimentazione. La sperimentatrice e l'insegnante di classe hanno, infatti, preferito non forzare gli allievi e hanno scelto di adottare un modo "alternativo" di esplorare e utilizzare le potenzialità legate ai problemi con variazione e alle possibili rappresentazioni legate ad essi, ovvero quello che nel par. 3.3 è stato chiamato "grafico". Il fatto che non si sia arrivati a costruire con i bambini l'equazione figurale canonica indica un punto importante su cui vale la pena riflettere.

Infatti, è evidente che non si tratta di una rappresentazione spontanea. Sarà necessario riprendere e approfondire il passaggio all'equazione figurale canonica con attività future, che in particolare portino gli allievi ad abbandonare gradualmente l'uso dei segmenti unità. Tuttavia, è opportuno sottolineare come nella sperimentazione presentata si sia lavorato sullo sviluppo di competenze di tipo pre-algebrico, spostando l'attenzione dal piano procedurale a quello relazionale. Nel lavoro con i problemi con variazione (fase 3 e successive), per i bambini era chiaro che si trovavano dinanzi a una stessa situazione vista da differenti punti di vista e anche che più il disegno è semplificato e con una struttura ordinata, più questo consente di vedere meglio la situazione. Soprattutto, è emersa la consapevolezza che è possibile operare in modo simbolico sulla rappresentazione, per renderla uno strumento utile alla risoluzione del problema. Osserviamo ancora che le strutture testuali delle variazioni proposte dalla sperimentatrice mantengono la coerenza con le strutture cinesi dei problemi con variazione. Infatti, la consegna prevede sempre che i bambini utilizzino combinazioni numeriche fisse, per prestare più attenzione all'aspetto relazionale del problema. Il testo e la struttura hanno effettivamente un ruolo estremamente importante nel guidare i bambini verso la soluzione e questo tipo di struttura modifica l'approccio dei bambini ai problemi a parole. Si evince, infatti, che la struttura relazionale sposta l'attenzione dalla dimensione aritmetica a quella pre-algebrica e l'attenzione si sposta su ciò che connette i vari elementi, piuttosto che sulla struttura individualizzante della scoperta della singola operazione. Gli stessi bambini, nelle fasi 5 e 6, mantenendo il contesto costante (ovvero senza alterare i dati), sono stati in grado di generare variazioni del problema di partenza. Si sono posti domande sensate, in cui le operazioni messe in gioco sono sia l'addizione sia la sottrazione.
Questa sperimentazione, dunque, ha mostrato come si possa costruire, a partire dal testo di un problema, una possibile esplorazione delle potenzialità legate alla struttura della variazione. Ciò può condurre i bambini a sviluppare competenze d'uso di strutture di risoluzione di tipo pre-algebrico, spostando l'attenzione dal piano procedurale a quello relazionale. Come precisato, non sono state compiutamente introdotte le strutture segmentali cinesi (le equazioni figurali), ma si pongono le basi, in chiave di trasposizione culturale, per uno sviluppo che andrà in quella direzione, proprio come rilancio di questa esperienza, e che si realizzerà negli anni successivi. Infatti, a fine sperimentazione, l'insegnante di classe è stata intervistata al fine di fare un bilancio della sperimentazione condotta, anche relativamente alle sue impressioni. Si riporta di seguito un breve estratto dell'intervista:

> Sper.: «Cosa pensi di questo approccio: i problemi con variazione e il grafico [equazione figurale] sono stati di qualche beneficio per i tuoi allievi?»
> Insegnante: «[…] potrei sfruttare questa esperienza anche negli anni successivi, perché continuerò a seguire questa classe. […] pensavo che effettivamente non sarebbe stato semplice fare usare ai bambini i segmenti continui. […] l'anno scorso ho lavorato molto con loro su decine e unità, sui raggruppamenti in base 10. Forse questo li ha ingabbiati in qualche modo […]. Però il legame tra un problema e gli altri [le variazioni] lo hanno colto perfettamente. Grazie all'osservazione del grafico, hanno compreso questo meccanismo, se così lo possiamo chiamare, in cui i numeri, a giro, possono "sparire" dal grafico ed essere sostituiti dal punto interrogativo [l'incognita], generando un altro problema [una variazione del problema di partenza]. Ritengo che abbia senso lavorare così già dalle prime classi e il lavoro merita di proseguire negli anni successivi. Richiamando questa esperienza, l'anno prossimo potrà essere, forse, fattibile provare a passare ai segmenti continui. Ci proverò!»

L'insegnante di classe pensava fosse stato un problema il fatto che non fossimo riusciti a lavorare con l'equazione figurale canonica, ma come precisato nelle osservazioni esposte sopra, così non è stato. Ha colto le potenzialità di questo approccio, dichiarando il proprio interesse nel proseguire e mantenere questa tipologia di lavoro. In un'ottica di verticalità e di continuità nell'insegnamento della disciplina, infatti, questo approccio potrebbe favorire fin dai primi anni di scuola primaria l'acquisizione di competenze algebrico-relazionali, competenze inizialmente sottese che via via, nel corso degli studi successivi, possono diventare sempre più esplicite e formalizzate. Come sottolineato nelle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012), la costruzione del pensiero matematico è un processo progressivo di lungo termine nel quale le competenze degli studenti si intrecciano, consolidano e sviluppano a più riprese. In questo processo è fondamentale l'attività di problem-solving in cui l'alunno può riconoscere schemi ricorrenti e utilizzare diverse rappresentazioni per costruire strategie risolutive efficaci. Nei traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria si parla proprio di saper risolvere problemi e di ricavare informazioni e riconoscere e utilizzare rappresentazioni diverse. Se il ruolo del ricercatore può essere individuato nel continuo tentativo di favorire processi di ripensamento dell'impianto didattico, contemporaneamente l'insegnante procede a una reinterpretazione delle proprie metodologie didattiche della matematica, rendendole prassi quotidiana di lavoro (Di Paola et al., 2015). In quest'ottica, si rivela interessante e stimolante sia per il ricercatore sia per l'insegnante studiare approcci sviluppati in diversi contesti culturali, al fine di riflettere sulle proprie pratiche didattiche e progettare nuove sperimentazioni nelle classi. Questo non significa importare brutalmente metodologie didattiche da una cultura all'altra ma piuttosto, come fatto per mettere in atto questa sperimentazione, approfondire i processi di significato connessi ai diversi contesti culturali nei quali queste metodologie si sono sviluppate e progettare modi per trasporle nella propria pratica didattica con analisi degli effetti sugli apprendimenti degli allievi, al fine di diventare più consapevoli del proprio contesto culturale e delle proprie pratiche didattiche.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., Ramploud, A., & Baccaglini-Frank, A. (2013). *Aritmetica in pratica. Strumenti e strategie dalla tradizione cinese per l'inizio della scuola primaria*. Erickson.

Barton, B., & Frank, R. (2001). Mathematical ideas and indigenous languages. In B. Atweh, H. Forgasz & B. Nebres (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education: An international perspective* (pp. 135–150). Lawrence Erlbaum Associates.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Bonazza, V. (2012). *Programmare e valutare l'intervento didattico. Fondamenti epistemologici.* Guida Editori.

Branchetti, L., & Viale, M. (2015). Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico. In M. Ostinelli (A cura di), *Didattica dell'italiano. Problemi e prospettive* (pp. 138–148). Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Springer.

Di Paola, B. (2016). Why Asian children outperform students from other countries? Linguistic and parental influences comparing Chinese and Italian children in Preschool Education. *IEJME-Mathematics Education*, *11*(9), 3351–3359.

Di Paola, B., Mellone, M., Martignone, F., & Ramploud, A. (2015). Esperienza educativa di trasposizione culturale nella scuola primaria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *38*(3), 363–387.

Di Paola, B., & Zanniello, G. (2017). Research in multicultural educational context with Chinese students: the Chinese written language as a bridge to an informal beginning of the algebraic-relational thought. *Italian Journal of Educational Research*, *19*, 121–138.

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting-on solution procedure in addition. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 67–81). Erlbaum.

Gasca, A. M. (2016). *Numeri e forme. Didattica della Matematica con i bambini.* Zanichelli.

Meli, M. (2019). *Cultura italiana e cinese a confronto per un primo approccio al pensiero algebrico*. Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Enna KORE.

Mellone, M., & Ramploud, A. (2015). Additive structure: an educational experience of cultural transposition. In X. H. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Eds.), *Proceeding of ICMI STUDY 23: primary mathematics study on whole number* (pp. 567–574). University of Macau.

Mellone, M., Ramploud, A., & Carotenuto, G. (2020). An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(2), 1–18.

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *51*(1), 199–212.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale*. Le Monnier. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Ramploud, A. (2015). *数学 [shùxué] matematica, sguardi (d)alla Cina [...] ogni pensiero, nel farsi incontro all'altro si interroga sul proprio impensato.* Tesi di Dottorato di Ricerca in Didattica della Matematica, Scuola di dottorato in Scienze Umanistiche, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia.

Ramploud, A., & Di Paola, B. (2013). The Chinese perspective of variation to rethink the Italian approach to word-problems from a pre-algebraic point of view. In C. Fazio (Ed.), *Proceedings of CIEAEM 65* (pp. 525–535). Università di Torino.

Sun, X. (2009). "Problem variations" in the Chinese text: comparing the variation in American and Chinese Mathematics textbooks. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 193–200). University of Thessaloniki.

Sun, X. (2011). An insider's perspective: "variation problems" and their cultural grounds in Chinese curriculum practice. *Journal of Mathematics Education*, *4*(1), 101–114.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Carocci Faber.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 121 - 134, DOI: 10.33683/ddm.22.11.6

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Origami e strategie di apprendimento

Origami and learning strategies

Paola Morando• e Maria Luisa Spreafico°
• DISAA, Università degli Studi di Milano – Italia
° DISMA, Politecnico di Torino – Italia

paola.morando@unimi.it, maria.spreafico@polito.it

Sunto / L'attività descritta in questo articolo si propone di stimolare, attraverso la pratica della piegatura origami, una riflessione metacognitiva sul tema dell'apprendimento e consiste in un'azione creativa che consente di sperimentare alcune delle difficoltà comuni nel percorso di studi universitario, individuando fin da subito strategie utili per affrontarle.
L'esperienza, da svolgersi nelle prime settimane di lezione, mette in luce l'importanza di sviluppare un atteggiamento consapevole nei confronti dello studio e affronta due temi cruciali per l'efficacia dell'apprendimento: il ruolo della curiosità come spinta motivazionale a imparare cose nuove e l'importanza della fiducia nel docente e nelle sue proposte didattiche. In questa sede si presentano i risultati di un'applicazione nell'ambito di un corso universitario di matematica, benché l'attività, che per sua natura insiste più sul piano metodologico che non su quello strettamente disciplinare, possa essere trasferita efficacemente anche ad altri insegnamenti.

Parole chiave: origami; metodo di studio; matematica; apprendimento significativo; trial and error.

Abstract / The activity described in this article aims to stimulate a metacognitive reflection on the learning experience through the practice of origami. It consists of a creative action that allows students to experience some of the difficulties common in university studies, identifying useful strategies for dealing with them right away.
The experience, to be carried out during the first weeks of lessons, highlights the importance of developing a conscious attitude towards studying and addresses two crucial issues for learning effectiveness: the role of curiosity as a motivational drive to learn new things and the importance of trust in the teacher and his teaching proposals. Here we present the results of an application within the context of a university mathematics course, although the activity can also be effectively transferred to other courses focusing more on the methodological level than on the strictly disciplinary one.

Keywords: origami; learning method; mathematics; meaningful learning; trial and error.

1 Introduzione

Il tema dell'acquisizione di un valido metodo di studio all'inizio di un percorso universitario è da tempo oggetto di ricerche in ambito pedagogico (Gettinger & Seibert, 2002) e, negli ultimi anni, ha dovuto tener conto dei nuovi strumenti digitali a disposizione degli studenti (Robnolt & Rhodes, 2014; Yip, 2019). Inoltre, da recenti studi emerge come il successo scolastico in ambito universitario dipenda in maniera rilevante da un metodo di studio adeguato (Hassanbeigi et al., 2011; Intorella & Sprini, 2005).

I fattori che intervengono nell'acquisizione di un efficace metodo di studio sono moltissimi e coinvolgono, oltre alla sfera emotiva, anche aspetti metacognitivi e strategie di apprendimento. Le neuroscienze hanno evidenziato come siano fondamentali la concentrazione e la capacità di autovalutazione da una parte e gli aspetti come la motivazione, l'organizzazione dell'attività di studio, l'uso dei sussidi didattici e la partecipazione dall'altra (Weinstein et al., 2018).

In particolare, la mancanza di un solido metodo di studio costituisce per gran parte degli studenti iscritti a corsi di laurea di ambito scientifico una delle principali cause di insuccesso nell'esame di matematica. Come suggerito da Zan (1997), «rimane per molti comunque la necessità di sviluppare un atteggiamento strategico nei confronti dei problemi che si incontrano il primo anno di università e più in particolare di costruire un approccio produttivo allo studio della matematica».

D'altra parte, gli studenti dei corsi di laurea di ambito scientifico in cui la dimensione matematica non è prioritaria sono in genere poco interessati alla matematica, che ritengono di scarsa utilità nel loro percorso di studi. Non aiuta neppure il fatto che questa disciplina venga spesso presentata come puramente formativa e non come una competenza utile e spendibile durante tutto il percorso accademico oltre che nella futura professione. Sebbene, in questi corsi di laurea, l'obiettivo di un corso di matematica del primo anno sia quello di fornire un linguaggio e delle competenze utili ad affrontare i successivi esami di carattere più strettamente disciplinare, molti studenti percepiscono questo esame come uno scoglio insormontabile e tendono ad affrontarlo solo al concludersi del percorso universitario.[1]

Questo approccio negativo rischia di provocare, soprattutto negli studenti con competenze di base più deboli, un vero e proprio disagio emotivo, che può condurre a un circolo vizioso di scarsa motivazione e perdita di autostima. Inoltre, il mancato superamento dell'esame di matematica rappresenta una delle principali cause del ritardo cronico che caratterizza le carriere universitarie di discipline di ambito scientifico. A peggiorare le cose, durante l'anno accademico 2020-2021, l'emergenza sanitaria ha costretto moltissimi atenei a erogare il corso di matematica a distanza, penalizzando ulteriormente quegli studenti che, affrontando con ansia e paura situazioni che coinvolgono la matematica, traggono in genere grande beneficio dal contatto con i propri compagni (Bjälkebring, 2019).

In questa situazione, diventa indispensabile progettare azioni preliminari volte ad aumentare il coinvolgimento e la motivazione degli studenti nei corsi di matematica di base e a consolidare un metodo di studio efficace.

La questione del metodo di studio in matematica è stata già affrontata in ambito universitario e molte università hanno pagine web dedicate nelle quali vengono suggerite, allo studente interessato, una serie di buone pratiche.[2] Questo tipo di azione, sebbene estremamente interessante, a nostro parere ha però un'efficacia solo parziale in quanto, per sua natura, viene in generale accolta da studenti con un buon grado di autonomia e di consapevolezza.

1. Ad esempio, durante l'anno accademico 2020-2021, il 23% degli studenti che frequentavano in sincrono le lezioni di matematica per il Corso di Studio di Scienze e Tecnologie Agrarie, risp. il 18% degli iscritti alle lezioni di uno dei 3 corsi paralleli di matematica del Corso di Laurea in Architettura, era costituito da studenti iscritti al terzo anno o ad anni successivi.
2. A titolo di esempio si vedano https://people.unica.it/antoniogreco/metodo/ e https://math.osu.edu/undergrad/non-majors/resources/study-math-college

Per questa ragione, questo articolo propone un'esperienza che possa coinvolgere, durante le prime settimane di un corso universitario, tutti gli studenti, stimolando una riflessione metacognitiva sulle strategie di apprendimento.
A questo scopo, si è scelto di utilizzare l'origami e di partire proponendo agli studenti un'azione creativa, decisamente estranea a ciò che ci si aspetterebbe da una lezione di matematica. Questa proposta educativa non tradizionale si è rivelata particolarmente efficace anche per coinvolgere gli studenti meno autonomi facendoli riflettere sulla necessità di sviluppare un metodo di studio. Infatti, la natura ludica dell'attività è riuscita a contrastare la naturale diffidenza degli studenti verso una materia generalmente considerata ostica e li ha convinti a mettersi in gioco piegando moduli e modelli origami. Così facendo, è stato attivato un processo di transfer che ha consentito agli studenti di sperimentare situazioni di apprendimento molto simili a quelle che abitualmente incontrano studiando matematica e di riflettere sulle strategie migliori per affrontarle (*apprendimento significativo*).
Per esempio, imparando la piegatura di un modello origami attraverso la guida di un video gli studenti hanno avuto modo di sperimentare un utilizzo efficace delle videolezioni, mentre lo sforzo necessario per interpretare da soli un diagramma di piegatura senza essere familiari con il linguaggio specifico li ha aiutati a riconoscere il ruolo fondamentale della spiegazione del docente. Inoltre, il tipo di apprendimento graduale sperimentato negli origami, dove si parte da modelli semplici per arrivare poi ad affrontare modelli via via più complessi, ha un naturale corrispettivo nello studio della matematica (e non solo) e l'esperienza di piegatura risulta estremamente efficace per far comprendere agli studenti la necessità della costanza e della ripetizione per apprendere e ricordare (*spacing, trial and error*). Non ultimo, la soddisfazione di aver piegato un modello, analoga a quella di aver risolto correttamente un esercizio, genera autostima, preziosa fonte di energia per le "fatiche" successive.
La scelta dell'origami non è casuale. L'attenzione richiesta allo studente in questo genere di attività non è più solo legata alla parola e alla visione, ma passa attraverso il "fare" con le mani, stimolando abilità cinestetiche raramente esercitate nei livelli più alti del sistema educativo. Si tratta di un approccio globale, universale e inclusivo, in grado di coinvolgere nello stesso momento molteplici canali di percezione e abilità di *problem solving* (Center for Applied Special Technology [CAST], 2021). Inoltre, in un ecosistema digitale come quello attuale, non è certamente secondario il ritorno all'impiego della carta, un materiale semplice ma in grado di dar forma a oggetti tangibili e percettivamente coinvolgenti.[3] Le attività proposte spingono gli studenti a riflettere sul tema della curiosità intellettuale come efficace leva motivazionale per l'apprendimento e consentono di instaurare fin da subito un proficuo rapporto di fiducia tra docente e studente, cruciale per il buon esito di tutte le successive azioni didattiche (Cornelius-White, 2007; Finn et al., 2009).

2 Obiettivi, metodi e strumenti

2.1 Il contesto della sperimentazione

La sperimentazione descritta in questo lavoro ha coinvolto studenti iscritti al primo anno di corsi di laurea di ambito scientifico ed è stata proposta in parallelo nell'ambito di tre corsi di laurea di due atenei diversi. Precisamente: il corso di Istituzioni di Matematiche[4] (Corso di Laurea in Architettura, Politecnico di Torino, 8 CFU) e il corso di Matematica (Corsi di Laurea in Scienze e Tecnologie Agrarie e Valorizzazione e Tutela dell'Ambiente e del Territorio Montano, sede di Edolo, Università degli Studi

3. Per altri progetti di matematica e origami si vedano: Cumino & Spreafico (2017); Serre & Spreafico (2018); Spreafico & Tramuns (2020).
4. Il corso di Torino partecipava al progetto OECD "Fostering and assessing creativity and critical thinking in higher education and teacher education" (http://www.oecd.org/education/ceri/assessingprogressionincreativeandcriticalthinkingskillsineducation.htm).

di Milano, 6 CFU), tutti erogati nel primo semestre dell'anno accademico 2020-2021. La sperimentazione ha coinvolto 231 studenti: 87 a Milano, 32 a Edolo e 112 a Torino. Le lezioni sono state tenute tutte a distanza sulle piattaforme istituzionali di ateneo.

2.2 Gli obiettivi

L'idea alla base del progetto è stata quella di stimolare negli studenti una riflessione sul metodo di studio a partire da un'azione creativa, legata alla piegatura di un modello origami (par. 1). Di conseguenza, gli obiettivi coinvolti sono molteplici e riguardano sia la sfera emotiva che quella più strettamente legata agli aspetti metacognitivi e alle strategie di apprendimento.
In particolare, relativamente alla sfera emotiva, ci si è posti i seguenti obiettivi (che verranno indicati con la lettera T in quanto possono essere considerati come obiettivi trasversali):

- T1. Stimolare la partecipazione attiva e la curiosità degli studenti, sia attraverso l'esperienza del fare sia tramite la proposta di attività di tipo non tradizionale.
- T2. Conquistare la fiducia degli studenti, per poter costruire insieme a loro un percorso di apprendimento efficace e soddisfacente.

Gli obiettivi legati agli aspetti cognitivi e alle strategie di apprendimento sono stati i seguenti:

- O1. Stimolare gli studenti ad un uso efficace delle videolezioni, facendo loro sperimentare un tipo di fruizione che unisce il fare al guardare.
- O2. Sottolineare il ruolo della costanza come efficace strategia di apprendimento nello studio della matematica.
- O3. Mettere in evidenza la necessità di integrare tra loro varie competenze elementari per poter affrontare problemi complessi.
- O4. Stimolare gli studenti a un uso consapevole ed efficace degli appunti e dei testi.

2.3 Il metodo

Il progetto è stato proposto nelle prime tre settimane di corso. Durante la prima settimana è stato assegnato il primo compito di piegatura[5] e nella seconda è stato proposto agli studenti un questionario, le cui risposte sono state utilizzate per stimolare una riflessione sulle analogie tra l'esperienza fatta con la piegatura del modello origami e una lezione di matematica. Per far questo, durante una lezione sincrona, sono stati presentati i risultati raccolti ed è stata dedicata circa un'ora alla discussione. Al termine di questa attività è stato assegnato il secondo modello da piegare. Infine, nella terza settimana è stato riproposto lo schema della settimana precedente, con la somministrazione di un questionario e la successiva discussione dell'esperienza.

2.4 Gli strumenti

Sono stati proposti agli studenti due modelli origami, con istruzioni di piegatura fornite tramite due modalità differenti.
Il primo modello origami è il modulo di Sonobe, che costituisce il punto di partenza per la costruzione di molti poliedri. Come prima cosa, è stato fornito agli studenti il link a uno dei tanti video che si trovano in rete e che ne mostrano la piegatura. La possibilità di reperire in rete altri video che mostrassero la piegatura dello stesso modulo era fondamentale, come verrà spiegato in seguito. Il video è stato scelto in modo da soddisfare una serie di requisiti funzionali allo sviluppo del progetto. In particolare, nel video viene presentata la piegatura di un singolo modulo e non si fa cenno alle

5. https://www.youtube.com/watch?v=TKGW2W168H0

sue possibili applicazioni; inoltre, la spiegazione, in inglese e sottotitolata, risulta chiara e non troppo veloce. Infine, la durata è ragionevolmente contenuta (3:28 min) in modo da stimolare la partecipazione anche degli studenti meno diligenti.
Il secondo modello è un semplice modello di antiprisma, ottenuto dall'incastro di tre moduli, per il quale è stato fornito il diagramma di piegatura, contenente sia le istruzioni per la piegatura dei moduli che quelle per l'incastro. Il diagramma scelto fa uso della simbologia origami, che si basa sull'utilizzo di linee di tipologie differenti per indicare pieghe monte/valle e di frecce che mostrano la direzione di piega, e non contiene testo scritto. Anche in questo caso, la scelta del modello è stata fatta in funzione del tipo di riflessione che si voleva far scaturire da questa attività. In particolare, si è scelto un modello con incastro per il quale non fosse stato pubblicato in rete un video illustrativo. Inoltre, il modello è stato successivamente utilizzato in uno dei corsi per la visualizzazione di piani e rette nello spazio.

I materiali che gli studenti dovevano procurarsi per partecipare alle due attività erano un foglio quadrato per il modulo di Sonobe e tre fogli quadrati per l'antiprisma, non necessariamente di carta origami. L'informazione sulla carta non è stata fornita a priori.
Una volta effettuato il lavoro in asincrono, è stato chiesto agli studenti di rispondere ad alcune domande compilando un modulo Google preventivamente predisposto. I dati raccolti sono stati utilizzati durante le lezioni in sincrono per una prima parte di discussione, relativa agli obiettivi T1, T2, O1, O2, O4. La seconda parte della discussione è stata invece organizzata in forma di dibattito, partendo da un secondo gruppo di domande poste direttamente durante la lezione e raccogliendo le risposte sia tramite gli strumenti di sondaggio messi a disposizione dalle piattaforme Zoom (a Milano e Edolo) e BBB (a Torino) che tramite gli interventi diretti degli studenti. Questo secondo gruppo di domande ha permesso di completare la discussione precedente e di focalizzarsi sull'obiettivo O3.

3 Descrizione del progetto e risultati

3.1 Primo modello

Al termine della prima lezione del corso è stato chiesto agli studenti, come compito a casa per la settimana seguente, di guardare un video nel quale viene mostrata la piegatura del modulo di Sonobe, e di provare a piegare il modello, precisando che il tempo richiesto per lo svolgimento dell'attività era di circa 10 minuti. All'inizio della prima lezione della settimana successiva gli studenti hanno dovuto rispondere a un brevissimo questionario anonimo contenente le seguenti quattro domande:

- Q1. Hai provato a piegare il modello? (obiettivo T1).
- Q2. Hai piegato mentre guardavi il video oppure dopo averlo guardato? (obiettivo O1).
- Q3. Hai cercato altri video per capire come piegare il modello? (obiettivo O1).
- Q4. Sapresti adesso piegare il modello, senza la guida del video? (obiettivo O2).

Le domande proposte avevano l'obiettivo di far riflettere gli studenti sulle seguenti dimensioni: l'importanza di svolgere, anche all'università, i compiti assegnati dal docente (Q1-T1); l'utilizzo consapevole ed efficace di una videolezione (Q2-O1); la possibilità di cercare in rete spiegazioni alternative o complementari rispetto a quella proposta dal docente (Q3-O1); il ruolo dell'allenamento nell'apprendimento (Q4-O2).
Le risposte al questionario sono state mostrate agli studenti durante la prima parte della lezione successiva e sono servite come punto di partenza per una riflessione condivisa. Si descrivono di seguito, domanda per domanda, le risposte date al questionario e le riflessioni emerse durante la discussione con gli studenti.

Q1. Le risposte alla prima domanda sono state piuttosto soddisfacenti: la maggior parte degli studenti (98% circa) ha provato a piegare il modello, probabilmente un po' per merito dell'effetto sorpresa dovuto al tipo di compito assegnato – non è stato chiesto loro di svolgere degli esercizi di matematica! – e un po' perché il tempo richiesto per svolgere l'attività era decisamente contenuto. D'altra parte, la grande partecipazione ha mostrato anche come le proposte di attività di tipo non tradizionale siano in generale apprezzate dagli studenti, che in questa occasione hanno partecipato in maniera costruttiva e curiosa, nonostante si trattasse di un *compito* assegnato durante una lezione di matematica.
Riflessione condivisa. Nel riconoscere (e apprezzare) la grande partecipazione, si è colta l'occasione per sottolineare l'importanza di svolgere di volta in volta, rispettando le scadenze, le attività assegnate dai docenti. Infatti, solo svolgendo regolarmente tali attività, lo studente sarà in grado di seguire con profitto le lezioni successive, avendo acquisito le conoscenze e le abilità necessarie.

Q2. In questo caso, come si era immaginato, le risposte hanno confermato che la maggior parte degli studenti (86%) ha piegato il modello passo per passo, durante la visione del video, piuttosto che piegare l'intero modello a visione completata.
Riflessione condivisa. Interpellando gli studenti che avevano piegato il modello a video concluso, si è potuto verificare che molti di loro erano appassionati di origami e/o conoscevano già il modello. Questo elemento è risultato molto utile per mostrare agli studenti due possibili modalità di fruizione di uno stesso video. Infatti, se il video è utilizzato per imparare per la prima volta a piegare il modello, può risultare utile interrompere la visione e/o rivedere alcuni passaggi, mentre se il video è utilizzato per ripassare un modello già noto, la fruizione può essere senza interruzioni o limitata ad alcuni passaggi specifici.
Come ci si aspettava, oltre la metà degli studenti ha dichiarato di aver fermato il video o di aver rivisto alcuni passaggi. Questo ha permesso di sottolineare le analogie tra una lezione di matematica e un video che mostra la piegatura di un modello origami: in entrambi i casi alcuni passaggi potrebbero non risultare subito chiari. Per questo motivo, durante una lezione di matematica, lo studente deve essere attivo, prendere appunti, provare a svolgere in autonomia i passaggi indicati dal docente, cercando di seguire, passo dopo passo, la logica del discorso. Inoltre, se durante una lezione sincrona lo studente non è riuscito a comprendere e seguire tutti i passaggi, è fondamentale che appena possibile riveda gli appunti presi, ripercorrendo quanto spiegato a lezione con i propri tempi al fine di identificare eventuali domande da porre al docente durante la lezione successiva. In questa attività di post-produzione degli appunti, le registrazioni delle lezioni, se disponibili, costituiscono una risorsa preziosa in quanto, esattamente come il video proposto, possono essere fermate e riviste e permettono allo studente di riempire eventuali lacune negli appunti presi durante la lezione e di legare tra di loro i vari pezzi della lezione arrivando così a comprendere tutti i passaggi.

Q3. La risposta a questa domanda è stata praticamente unanime: quasi nessuno ha cercato un altro video. Questo fatto potrebbe essere dovuto alla scelta del video proposto che, sia pure in lingua inglese, risultava particolarmente chiaro. Pur essendo consapevoli fin dall'inizio che questa scelta non avrebbe stimolato la ricerca di spiegazioni alternative, si è preferito non rischiare di scoraggiare gli studenti proponendo loro, durante questa prima attività, un video totalmente incomprensibile.
Riflessione condivisa. Pur concordando con gli studenti che in questo caso la ricerca di video alternativi poteva risultare inutile, con questa domanda si è voluto richiamare la loro attenzione sull'enorme quantità di risorse didattiche che possono essere utilizzate – avendo cura di verificare preliminarmente la fonte – per integrare o approfondire quanto spiegato a lezione. Infatti, in alcuni casi la spiega-

zione del docente potrebbe non essere chiara per tutti, ed è bene essere consapevoli della possibilità di accedere in ogni momento a moltissime spiegazioni alternative semplicemente con un clic.[6]

Q4. La risposta degli studenti a questa domanda è stata affermativa nel 72% dei casi. Si tratta dell'*effetto dell'eccesso di fiducia* (*overconfidence bias*, Moore & Healy, 2008), distorsione cognitiva che porta le persone a sovrastimare il successo di una propria prestazione. Agli occhi disincantati di due docenti di matematica con una certa esperienza, questa percentuale è sembrata un po' alta e, approfittando della lezione sincrona, è stato chiesto agli studenti di prendere un pezzo di carta e provare! Alla prova dei fatti, buona parte di coloro che ritenevano di essere in grado di piegare il modello senza aiuto non è riuscita a ricordare tutti i passaggi.
Riflessione condivisa. La restituzione ha avuto come obiettivo quello di dimostrare agli studenti che, una volta compreso un procedimento, occorre comunque un certo allenamento per arrivare a *farlo proprio* ed essere in grado di ripeterlo anche a distanza di tempo. Inoltre, il fatto che molti degli studenti che erano convinti di essere in grado di riprodurre il modello, avessero poi verificato di non esserne capaci, ha fornito una buona occasione per spiegare come talvolta, in matematica (e non solo!), si tenda a sopravvalutare la propria preparazione. Il fatto di essere stati in grado di svolgere un esercizio una volta (magari con la guida dell'insegnante, o sbirciando qualche passaggio sul quaderno) non garantisce di essere in grado di svolgere un esercizio simile qualche giorno dopo. Questa errata percezione del proprio reale livello di preparazione è uno dei maggiori ostacoli nello studio della matematica e la necessità di ripetere uno stesso procedimento più volte per arrivare, dopo averlo compreso, ad automatizzarlo è un punto centrale per lo sviluppo di un corretto metodo di studio. Di particolare interesse sono state anche le riflessioni condivise da alcuni degli studenti che erano riusciti a portare a termine la piegatura del modulo e che spiegavano per quale motivo avessero ripetuto la piegatura più volte:

> «La prima volta mi è venuto un po' impreciso, ma la seconda volta è venuto meglio».
> «Ripetendo la piegatura più volte, ho imparato a farlo senza bisogno di guardare il video».
> «Ne ho fatti alcuni perché lo trovo rilassante, e ora sono diventato molto veloce a piegare e posso farne quanti voglio con pochissimo sforzo».

Anche in questo caso, quanto emerso dalle considerazioni degli studenti sulla piegatura si applica, per analogia, anche al processo di acquisizione di conoscenze e abilità matematiche: ripetere esercizi simili varie volte permette di comprenderne bene tutti i passaggi, diventare più precisi, più veloci e di padroneggiare meglio un argomento (*trial and error*).

3.2 Altre analogie stimolate

Nonostante il modello proposto non fosse particolarmente accattivante, poiché non evoca un oggetto, animale o fiore come tradizionalmente capita nell'arte origami (**Figura 1**), nel corso della discussione è emerso come il fatto di essere riusciti a piegarlo fosse comunque stato fonte di soddisfazione. Quando si è chiesto di spiegarne la ragione, gli studenti hanno risposto che era stato un po' come vincere una sfida, portare a termine qualcosa di non ovvio. Ancora una volta, l'analogia con quanto accade quando ci si trova di fronte a un esercizio di matematica è immediata: svolgere un esercizio di matematica è, in generale, di scarso interesse per lo studente, ma il fatto di riuscire a svolgerlo correttamente procura comunque una certa soddisfazione! Anche in questo caso si tratta di vincere una piccola sfida e, proprio per questa ragione, adottare un approccio didattico al-

6. Resta aperto il problema di come aiutare gli studenti a discernere tra i moltissimi materiali disponibili online. Lo sviluppo di questa importante competenza non rientra tra gli obiettivi di questo progetto.

ternativo (ludico-pratico) può risultare particolarmente utile nell'insegnamento di questa materia.[7]

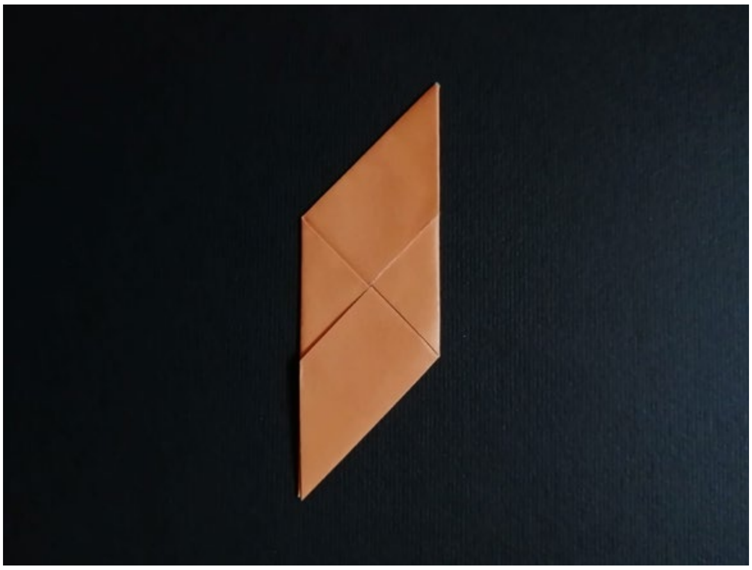


Figura 1. Un modulo di Sonobe.

Riallacciandosi proprio all'aspetto molto semplice e poco evocativo del modulo di Sonobe, è stato chiesto agli studenti, attraverso un sondaggio, se ne avessero cercato in rete i possibili utilizzi. Il fatto che solo pochissimi lo avessero fatto ha permesso di affrontare il tema della (mancanza di) curiosità. Poiché l'università dovrebbe essere il trampolino di lancio per la futura vita professionale, è importante che gli studenti capiscano che, oltre a preparare gli esami, è possibile prendere spunto dalle proposte dei docenti per esplorare autonomamente nuovi orizzonti.
Per dare un senso al modulo di Sonobe abbiamo spiegato che esso viene utilizzato come base per costruire origami modulari. Questo significa che è necessario come prima cosa piegarne un certo numero e poi incastrarli tra loro (Figura 2).

Figura 2. Alcuni moduli e loro incastro.

7. Su questo tema si vedano, a titolo esemplificativo, i blog delle due autrici: https://blog.matematica.deascuola.it/aree_disciplinari/gioco/, https://blog.matematica.deascuola.it/aree_disciplinari/origami/

In questo tipo di modelli origami, la piegatura di un numero consistente di moduli può risultare un po' noiosa ed è, in generale, poco gratificante, ma risulta imprescindibile per poter arrivare al momento più soddisfacente, ovvero quello dell'assemblaggio. Infatti, nella fase di incastro, la precisione nella piegatura dei singoli moduli gioca un ruolo fondamentale. Inoltre, anche se spesso non è semplice comprendere il meccanismo con cui vanno assemblati i diversi moduli, la fatica è ricompensata quando si capisce la logica e, magicamente, si arriva a completare il modello.
Nello stesso modo, per affrontare alcuni esercizi di matematica, può essere utile che lo studente si costruisca progressivamente, con pazienza e precisione, tanti *moduli di conoscenze di base*. Solo quando possiederà una certa quantità di concetti, sarà in grado di metterli insieme per affrontare e risolvere problemi più complessi. Per questa ragione, la pratica, purtroppo molto diffusa, di tentare di preparare l'esame di matematica cimentandosi solo nella soluzione dei temi d'esame, risulta in genere fallimentare. Infatti, lo studente, non essendosi impadronito delle competenze di matematica di base e non avendo svolto un numero sufficiente di esercizi preliminari più semplici, non sarà poi in grado di affrontare problemi che differiscono, anche di poco, da quelli già svolti.
Un'altra caratteristica che accomuna origami e matematica è la possibilità di ottenere modelli molto diversi a partire dallo stesso modulo, utilizzando tipi diversi di incastro. Per esempio, partendo da sei moduli di Sonobe si possono ottenere dei cubi, ma incastrando tra loro un numero maggiore di moduli si possono costruire solidi stellati di varie forme e dimensioni (**Figura 3**).

Figura 3. Esempi di solidi stellati, ottenuti con i moduli di Sonobe.

Analogamente, una volta che lo studente avrà acquisito un numero sufficiente di conoscenze matematiche, sarà in grado di *collegarle* tra loro in vari modi diversi, e potrà affrontare con successo una gran varietà di problemi nel corso dell'intera carriera accademica.

3.3 Secondo modello

Durante la prima lezione della seconda settimana è stato assegnato un nuovo compito, sempre da svolgere entro la lezione seguente. Questa volta si trattava di piegare un modello origami di antiprisma, non più seguendo le istruzioni di un video ma a partire dal diagramma di piegatura in figura (**Figura 4**).

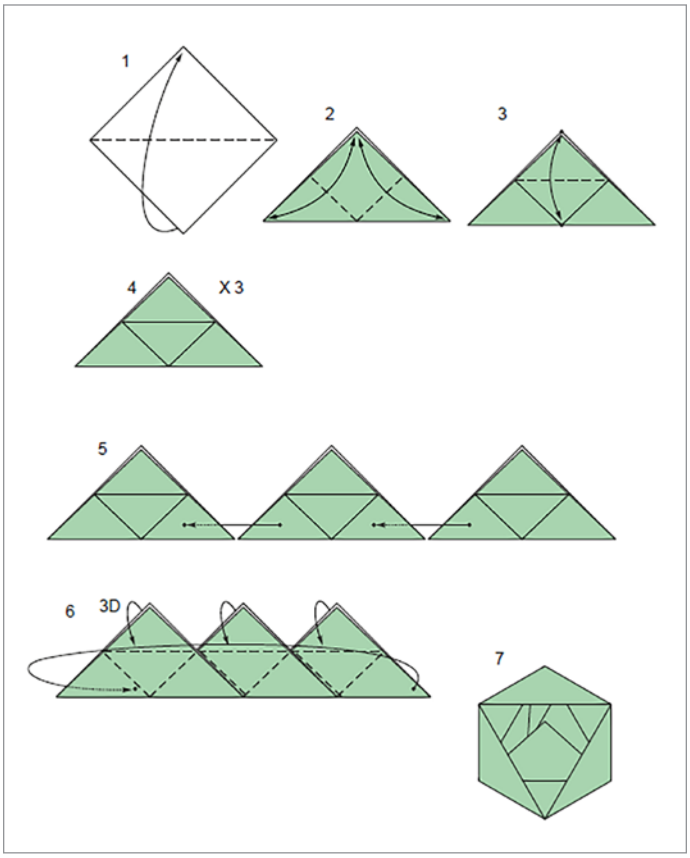


Figura 4. Diagramma di piegatura dell'antiprisma (Spreafico, 2017).

Come si può notare, nel diagramma sono presenti delle *notazioni* che, pur essendo standard per gli origamisti, possono creare qualche difficoltà di lettura ai non addetti ai lavori. Tale elemento ha permesso di simulare le difficoltà che lo studente incontra quando si avvicina a un testo di matematica, la cui lettura può risultare poco agevole non solo a causa dei concetti esposti, ma anche per il simbolismo utilizzato.

Il modello non presentava particolari difficoltà nella piegatura dei moduli, ma per completarlo era necessario riuscire ad interpretare correttamente tutti i diversi passaggi e, soprattutto, l'incastro finale dei tre moduli.

Analogamente a quanto fatto nella settimana precedente, all'inizio della lezione successiva è stato somministrato agli studenti un brevissimo questionario anonimo con le seguenti quattro domande, in parte diverse da quelle del primo questionario:

- Q5. Hai provato a piegare il modello? (obiettivi T1, T2).
- Q6. Hai capito come piegare i tre moduli? (obiettivo O4).
- Q7. Se hai avuto difficoltà a piegare il modello, hai preso nota dei passaggi poco chiari? (obiettivo O4).
- Q8. Hai capito come incastrare i moduli? (obiettivo T1, T2).

Attraverso la prima domanda (Q5-T1, T2), identica a quella del questionario precedente, si voleva mettere a confronto la partecipazione alla prima e alla seconda attività, che richiedevano un tipo diverso di impegno. Le successive tre domande avevano invece l'obiettivo di innescare una riflessione su varie tematiche legate al metodo di studio: le difficoltà legate alla lettura autonoma di un testo scritto (Q6-O4), l'importanza di annotare i passaggi poco chiari (Q7-O4) e il fatto che per affrontare con successo un'attività complessa sia fondamentale l'interazione con i compagni e con il docente (Q8-T1, T2).

Q5. Questa volta solamente il 76% degli studenti (contro il 98% della settimana precedente) ha provato a piegare il modello, probabilmente perché l'attività è stata percepita come più impegnativa. Dal nostro punto di vista, la partecipazione è stata comunque soddisfacente.
Riflessione condivisa. Gli studenti sono stati invitati a spiegare le ragioni della minore partecipazione. Se da un lato il maggiore impegno richiesto ha certamente scoraggiato alcuni studenti, dall'altro, trattandosi del secondo modello origami proposto, qualcuno ha archiviato l'attività come meno utile degli esercizi più tradizionali ai fini del superamento dell'esame. Questo fatto ha permesso di condividere con gli studenti una riflessione importante, ovvero la necessità di fidarsi del docente, svolgendo le attività proposte anche quando queste non sembrano essere direttamente correlate con l'esame.

Q6. Le risposte alla seconda domanda hanno confermato il maggior impegno richiesto dall'attività rispetto a quella proposta nella settimana precedente. Infatti, nonostante la piegatura dei moduli non presentasse maggiori difficoltà tecniche rispetto a quella del modulo di Sonobe, il fatto di dover comprendere i passaggi leggendo le istruzioni di piegatura e interpretando correttamente la simbologia origami, ha creato alcune difficoltà aggiuntive e solo il 60% degli studenti è riuscito a portare a termine la piegatura dei tre moduli.
Riflessione condivisa. La restituzione ha avuto come obiettivo quello di far riflettere gli studenti sulle difficoltà che si incontrano nell'affrontare lo studio autonomo di un testo in assenza della mediazione del docente. Esattamente come accade per la piegatura di un modello origami, è più difficile comprendere lo svolgimento di un esercizio di matematica leggendolo su un libro piuttosto che guardando un video in cui un docente lo svolge passo per passo commentando ogni singolo passaggio. Questo per due motivi: (1) a volte in un libro l'esercizio viene svolto senza riportare in dettaglio tutti i passaggi; (2) spesso nello svolgimento compaiono simboli e notazioni che potrebbero risultare poco familiari allo studente. Queste considerazioni hanno permesso di sottolineare il ruolo cruciale del docente e la sua funzione di mediatore rispetto al materiale didattico.

Q7. Il 41% degli studenti ha dichiarato di aver preso nota dei passaggi poco chiari. Considerando il fatto che il diagramma di piegatura conteneva relativamente pochi passaggi, si ritiene questo risultato piuttosto soddisfacente.
Riflessione condivisa. La domanda ha permesso di ricordare come, nella fase di studio e di revisione degli appunti, sia fondamentale tener traccia dei passaggi meno chiari, in modo da poterci ritornare in un secondo momento, confrontandosi con i compagni oppure chiedendo al docente. Infatti, solo sforzandosi di mettere a fuoco quello che non si è capito, è possibile porre domande mirate e puntuali e trarre quindi reale vantaggio dalle risposte fornite. Inoltre, il fatto di vedere che, procedendo nello studio, molti dei dubbi sugli argomenti precedenti vanno automaticamente a risolversi, è fonte di gratificazione per lo studente, che ha in questo modo una prova tangibile dei propri progressi. Si è poi approfittato di questo momento per sottolineare come, nella fase di studio autonomo, l'interazione tra pari possa risultare estremamente utile: a un compagno si possono chiedere anche cose facili, che magari lo studente non oserebbe, per imbarazzo, chiedere al docente e le spiegazioni dei compagni, anche se talvolta poco ortodosse e lievemente imprecise, risultano in generale molto efficaci. Inoltre, mentre spiega il proprio ragionamento, lo studente ha modo di organizzare il proprio pensiero, focalizzando i concetti appresi e verificando la propria reale comprensione dell'argomento, anche attraverso le domande del compagno.

Q8. L'incastro dei tre moduli risulta particolarmente difficile da spiegare utilizzando una descrizione statica come quella fornita da un diagramma di piegatura e, come atteso, le risposte sono state positive solo per il 26% degli intervistati. Nonostante molti studenti fossero arrivati a piegare i tre moduli, la fase dell'incastro è risultata critica per quasi tutti e per questa ragione, dopo aver presentato i risultati del sondaggio, è stato mostrato come incastrare i moduli in sincrono durante la lezione.

Riflessione condivisa. Una volta che l'incastro è stato mostrato a lezione, la maggior parte degli studenti è riuscita a completare l'antiprisma e questo ha permesso di sottolineare l'importanza dell'interazione con il docente. Questa esperienza voleva infatti simulare ciò che accade anche con la matematica: se alcune conoscenze di base possono essere tranquillamente acquisite in solitario, magari con l'ausilio di strumenti digitali, il ruolo del docente diventa fondamentale per una migliore comprensione degli argomenti più complessi. In particolare, l'interazione e la negoziazione tra studente e docente permettono di sviluppare un vero e proprio dialogo, inteso come forma di comunicazione che si adatta ed evolve seguendo la linea di pensiero dello studente e che riesce a guidarlo attraverso lo studio della materia fino a raggiungere un soddisfacente livello di comprensione.

4 Conclusioni

L'esperienza presentata in questo contributo si propone di stimolare negli studenti iscritti al primo anno di università una riflessione sul metodo di studio, facendo loro saggiare in anteprima alcune delle difficoltà che potrebbero incontrare nella preparazione degli esami e aumentando il coinvolgimento e la motivazione. Per far questo si è deciso di proporre all'inizio di alcuni corsi di matematica la piegatura di due modelli origami. Le attività, accompagnate da alcuni momenti di discussione e riflessione collettiva (durante le lezioni sincrone a distanza), sono state traslate dal piano ludico a quello educativo, dando luogo a una rosa di suggerimenti utili per affrontare nel migliore dei modi il percorso universitario appena intrapreso. Trasversalmente, l'esperienza proposta ha fornito un'occasione per suggerire alcune buone pratiche fondamentali per cimentarsi con successo nella preparazione degli esami di matematica.
Si è ritenuto importante stimolare questo tipo di riflessione all'inizio dell'anno accademico 2020-2021 sia per il particolare momento storico, che ha costretto al passaggio a nuove modalità di didattica a distanza, sia perché, insegnando da vari anni in un corso di matematica del primo anno, le autrici sono coscienti delle difficoltà che molti studenti incontrano nella preparazione di questo esame.
Accanto alla discussione sul metodo di studio, l'esperienza di piegatura origami ha permesso di lavorare su altri due aspetti trasversali, uno di carattere individuale e l'altro interpersonale, che le autrici ritengono alla base di un efficace approccio allo studio: la curiosità e la fiducia.
Infatti, se da un lato la curiosità dovrebbe far parte di un efficace percorso di apprendimento a qualsiasi livello, diventa un fattore cruciale per il successo di una carriera universitaria in cui allo studente viene concessa (e richiesta) una grande autonomia di studio. Inoltre, la curiosità, intesa come spinta motivazionale ad imparare cose nuove e ad affrontare nuove sfide aprendosi a scenari inediti, costituisce un elemento fondamentale anche in vista di un successivo inserimento nel mondo del lavoro.
Il tema della fiducia risulta invece più strettamente legato al rapporto docente-studente. Affinché un corso sia realmente efficace, lo studente deve avere fiducia nel proprio docente. Per instaurare questo rapporto di fiducia, è necessario che il docente riesca a coinvolgere (anche emotivamente) lo studente, convincendolo ad affidarsi alla sua esperienza, per poi guidarlo attraverso un percorso didattico ragionato che lo porti non solo a superare l'esame finale (*obiettivo di prestazione*), ma soprattutto a essere soddisfatto di quello che ha imparato (*obiettivo di padronanza*).
Il fatto che in tutti e tre i corsi di laurea nei quali il progetto è stato sperimentato la maggior parte degli studenti abbia partecipato attivamente, sia piegando i modelli origami che contribuendo alla discussione durante le lezioni, mostra come questo tipo di attività risulti efficace anche per instaurare questo rapporto di fiducia e come gli studenti siano in generale disponibili a lasciarsi coinvolgere in iniziative nuove e fuori dagli schemi, anche se proposte nell'ambito di un corso così temuto come quello di matematica.

Le attività proposte, essendo di carattere metodologico e non coinvolgendo direttamente nessun contenuto di tipo disciplinare, si prestano a essere utilizzate, con minimi adattamenti, in ambiti diversi e potrebbero essere proposte all'inizio di un qualsiasi percorso di studi (universitario e non), sia come attività trasversali di ingresso che come attività di orientamento.

Ringraziamenti
Si ringraziano Alessandro Iannella e Chiara Guglielmetti per le interessanti discussioni e i preziosi suggerimenti durante la stesura di questo articolo.

Bibliografia

Bjälkebring, P. (2019). Math Anxiety at the University: What Forms of Teaching and Learning Statistics in Higher Education Can Help Students with Math Anxiety? *Frontiers in Education*, *4*(30), 1–30.

Center for Applied Special Technology. (2018). *Universal Design for Learning Guidelines* (version 2.2). UDL Guidelines. http://udlguidelines.cast.org

Cornelius-White, J. (2007). Learner-centered teacher-student relationships are effective: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, *77*, 113–143. http://dx.doi.org/10.3102/003465430298563

Cumino, C., & Spreafico, M. L. (2017). Origami Pythagorean Tree, Natural Numbers' Powers, Sum and Series. In Institute of Mathematics and Physics, Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava (Ed.), *Proceeding of 16th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2017* (pp. 404–415). Spektrum STU.

Finn, A., Schrodt, P., Witt, P., Elledge, N., Jernberg, K., & Larson, L. (2019). A Meta-Analytical Review of Teacher Credibility and its Associations with Teacher Behaviors and Student Outcomes. *Communication Education*, *58*(10), 516–537.

Gettinger, M., & Seibert, J. K. (2002). Contributions of Study Skills to Academic Competence. *School Psychology Review*, *31*(3), 350–365.

Hassanbeigi, A., Askari, J., Nakhjavani, M., Shirkhoda, S., Barzegar, K., Mozayyan, M. R., & Fallahzadeh, H. (2011). The relationship between study skills and academic performance of university students. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *30*, 1416–1424.

Intorrella, S., & Sprini, G. (2005). Il ruolo del metodo di studio e del senso di autoefficacia nel successo scolastico e nella scelta del corso di studio universitario. *GIPO – Giornale Italiano di Psicologia dell'Orientamento*, *5*(3), 29–33.

Moore, D. A., & Healy, P. J. (2008). The trouble with overconfidence. *Psychological Review*, *115*(2), 502–517.

Robnolt, V. J., & Rhodes, J. A. (2014). Study Skills in the Digital Age. In D. J. Loveless, B. Griffith, M. E. Bérci, E. Ortlieb & P. M. Sullivan (Eds.), *Academic Knowledge Construction and Multimodal Curriculum Development* (pp. 256–264). IGI Global.

Serre, S., & Spreafico, M. L. (2018). An origami project for exploring the learning of mathematical logic. In R. J. Lang, M. Bolitho & Z. You (Eds.), *7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Educations* (Oxford, 4-7 settembre 2018), *Origami7*, 1 (pp. 225–240). Tarquin.

Spreafico, M. L. (2017). Activities in mathematics course for undergraduate students: from origami to software. In L. Gómez Chova, A. López Martínez & I. Candel Torres (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference on Education and New Learning Technologies EDULEARN17* (pp. 1977–1986). IATED Academy.

Spreafico, M. L., & Tramuns, E. (2020). The Starry Night among art, maths, and origami. *Journal of Mathematics and the Arts*, *15(*1), 1–18.

Yip, M. C. W. (2019). Learning Strategies. In A. Hynds (Ed.), *Oxford Bibliographies in Education* (pp. 1–20). Oxford University Press.

Weinstein, Y., Sumeracki, M., & Caviglioli, O. (2018). *Understanding How We Learn*. Routledge.

Zan, R. (1997). Mortalità universitaria e mortalità matematica. *Tracciati – Rivista alla ricerca della scuola, 2.* https://www.didaweb.net/tracciati/storico/tracciati2/mort.htm

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 135 - 156, DOI: 10.33683/ddm.22.11.7

OPEN ACCESS

Una chiave per l'inclusione: l'uso del denaro

A key for the inclusion: the use of money

Francesca Rossetti
Istituto Comprensivo Oscar di Prata – Trenzano (BS) – Italia

francesca.rossetti1@libero.it

Sunto / La convinzione che sta alla base del percorso presentato è che l'uso del denaro sia una competenza fondamentale per gli alunni, in particolare per gli studenti con disabilità; la capacità di riconoscere banconote e monete e di usarle permette infatti di conquistare autonomia e di ridurre la necessità di assistenza da parte di altri, contribuendo così a migliorare la qualità della vita del soggetto. Oltre a mettere in evidenza le potenzialità inclusive sottese all'uso del denaro, viene posto in risalto come la competenza matematica in ambito finanziario sia ben sottolineata anche dal *Quadro di riferimento europeo delle competenze chiave per l'apprendimento permanente* del 2018.
Il percorso che viene presentato è stato proposto agli alunni di una classe quarta della scuola primaria; in tale occasione è stato ricreato un contesto di apprendimento significativo in grado di permettere ai ragazzi di partecipare attivamente al processo di apprendimento. È stato privilegiato un approccio concreto ed esperienziale, così da favorire il coinvolgimento attivo e stimolare la motivazione.

Parole chiave: inclusione; competenza; qualità della vita; uso del denaro; scuola primaria.

Abstract / The belief that underlies the presented experience is that the use of money is a fundamental competence for children, in particular for students with disabilities; the ability to recognize banknotes and coins and how to use them makes it possible to gain autonomy and reduce the need for assistance from others, so as to improve the quality of life. In addition to highlight the inclusive potential underlying the use of money, it is important to point out how the mathematical competence in financial field is emphasized in the *European Reference Framework of Key Competences for Lifelong Learning* of 2018.
The project presented was proposed to the children of a fourth-grade class of primary school; on that occasion, a meaningful learning context was recreated, able to favour the participation of children in the learning process. An experiential approach has been privileged, so as to encourage an active involvement and inspire motivation.

Keywords: inclusion; competence; life quality; use of money; primary school.

1 Introduzione

Con la Dichiarazione di Salamanca del 1994 vengono poste le basi dell'*inclusive education*: si passa quindi dall'idea di un'educazione speciale destinata solo agli alunni con disabilità a quella di un'educazione speciale per tutti gli studenti, in grado di accogliere ogni forma di diversità (Ianes, 2016). Infatti, la condizione di chi apprende è intrinsecamente una situazione di difficoltà che chiede risposte specifiche per ciascun alunno nella complessità del suo sviluppo cognitivo e psicologico. È pertanto auspicabile da parte dell'insegnante un atteggiamento di tipo metodologico e didattico che punti alla differenziazione per tutti gli studenti.
Tali considerazioni trovano terreno fertile nella didattica per competenze, la quale favorisce la pedagogia dell'inclusione; essa infatti permette di riconoscere le differenze di ciascuno e di rispondere ai bisogni degli alunni nell'ottica di una personalizzazione didattica.
Cruciale diviene quindi il ruolo dei docenti nell'impostare con professionalità e uno speciale occhio inclusivo gli itinerari scolastici, al fine di promuovere e garantire il massimo sviluppo delle potenzialità di tutti i ragazzi all'interno del curricolo d'istruzione.

2 Inclusione e didattica per competenze

Il panorama di riferimento per il sistema scolastico italiano è il *Quadro di riferimento europeo delle competenze chiave per l'apprendimento permanente* del 2018, definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell'Unione Europea (Parlamento europeo e Consiglio dell'Unione Europea [EP], 2018). Tale documento individua le seguenti competenze: competenza alfabetica funzionale; competenza multilinguistica; competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria; competenza digitale; competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare; competenza in materia di cittadinanza; competenza imprenditoriale; competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturale. Si tratta di dimensioni di sviluppo delle quali tutti necessitano per la realizzazione personale, l'occupabilità, l'inclusione sociale, uno stile di vita sostenibile, una vita fruttuosa nella società, una gestione della vita attenta alla salute e orientata alla cittadinanza attiva.
In particolare, focalizzando l'attenzione sulla competenza matematica, questa viene definita come:

> «[…] la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematica per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza della competenza aritmetico-matematica, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che sulla conoscenza. La competenza matematica comporta, a differenti livelli, la capacità di usare modelli matematici di pensiero e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi) e la disponibilità a farlo».
>
> (EP, 2018, p. 9)

Gli aspetti prioritari sono quindi non tanto legati alla conoscenza in sé stessa, quanto più al processo che conduce alla costruzione della stessa, la quale diviene funzionale a risolvere situazioni in modo proficuo ed efficace nella quotidianità che il soggetto si trova ad affrontare.
A proposito della competenza matematica, nel documento si sottolinea come questa fornisca gli strumenti per descrivere scientificamente il mondo, per affrontare problemi la vita di tutti i giorni, supportando lo sviluppo delle capacità di comunicare e di argomentare in modo corretto, favorendo la comprensione di punti di vista e argomentazioni altrui.

Il discorso prosegue affermando che:

> «La conoscenza necessaria in campo matematico comprende una solida conoscenza dei numeri, delle misure e delle strutture, delle operazioni fondamentali e delle presentazioni matematiche di base, la comprensione dei termini e dei concetti matematici e la consapevolezza dei quesiti cui la matematica può fornire una risposta. Le persone dovrebbero saper applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano nella sfera domestica e lavorativa (ad esempio in ambito finanziario) nonché seguire e vagliare concatenazioni di argomenti. Sarebbe auspicabile che fossero in grado di svolgere un ragionamento, di comprendere le prove matematiche e di comunicare in linguaggio matematico, oltre a saper usare i sussidi appropriati, tra i quali i dati statistici e i grafici, nonché di comprendere gli aspetti matematici della digitalizzazione».
>
> (EP, 2018, p. 7)

Nello specifico, possiamo affermare, in linea con il quadro europeo di riferimento, che si tratta di conoscenze e acquisizioni fondamentali che divengono spendibili e imprescindibili per poter soddisfare le esigenze di ciascuno. In riferimento alle attività di compravendita, le conoscenze matematiche permettono di cogliere i seguenti aspetti: numerosità di elementi acquistati, calcolo del totale della spesa, calcolo del resto, conoscenza e uso dei diversi tagli di denaro. In linea con queste raccomandazioni, il documento *Indicazioni nazionali e nuovi scenari* (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2018) riprende alcuni passaggi salienti tratti dalla *Premessa alle Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo di istruzione* (MIUR, 2012), nel paragrafo *Cultura, scuola, educazione*, i quali richiamano al ruolo della scuola:

> «La scuola non può abdicare al compito di promuovere la capacità degli studenti di dare senso alla varietà delle loro esperienze, al fine di ridurre la frammentazione e il carattere episodico che rischiano di caratterizzare la vita dei bambini e degli adolescenti. […]
> La scuola è perciò investita da una domanda che comprende, insieme, l'apprendimento e "il saper stare al mondo". […]
> La scuola realizza appieno la propria funzione pubblica impegnandosi, in questa prospettiva, per il successo scolastico di tutti gli studenti, con una particolare attenzione al sostegno delle varie forme di diversità, di disabilità o di svantaggio».
>
> (MIUR, 2018, p. 4)

Come si evince da queste parole, la scuola ricopre un ruolo fondamentale nella formazione di una cittadinanza attiva, la quale per esprimersi necessita di strumenti culturali e di sicure abilità e competenze di base, cui concorrono tutte le discipline. Il documento mette in risalto il contributo che ciascuna disciplina offre allo sviluppo della persona e del cittadino; inoltre, chiarisce che le pratiche di cittadinanza attiva non sono affidate solo al curricolo nei diversi aspetti disciplinari, ma anche agli insegnanti. Questi hanno una forte responsabilità nei confronti dei destinatari dell'azione educativa: le loro azioni, le modalità comunicativo-relazionali e le scelte didattiche dovrebbero essere coerenti con l'esercizio di una cittadinanza attiva; pertanto, dovrebbero favorire la promozione dell'autonomia, la costruzione di rapporti sociali solidali nel gruppo classe e lo sviluppo di un pensiero e di una coscienza critica. In quanto all'esercizio di una cittadinanza consapevole e piena, vengono fornite importanti indicazioni metodologiche in riferimento al laboratorio inteso come una palestra per imparare a fare scelte consapevoli, per valutarne le conseguenze e quindi ad assumersene la responsabilità, aspetti anche questi centrali per l'educazione a una cittadinanza attiva e responsabile.
Il laboratorio diviene quindi una speciale occasione per porre l'alunno in una situazione di crescita significativa volta a sviluppare uno spirito critico.

3 Qualità della vita e uso del denaro

La qualità della vita è data dalla misura in cui una persona, in base al proprio profilo di funzionamento, ai deficit, alle abilità e competenze, tenendo conto del contesto di vita, dei supporti e delle barriere in esso presenti, è in grado di soddisfare aspettative, desideri e bisogni personalmente significativi. Pertanto, il concetto di qualità della vita è complesso e multidimensionale, con esso si intendono le condizioni che possono permettere a una persona di accedere al benessere fisico, psicologico e sociale e a valori che aiutino il soggetto a dare senso e significato alla propria esistenza, anche in prospettiva futura (D'Alonzo, 2019). Numerosi sono gli indicatori presi in considerazione: livello di soddisfazione generale, condizioni di vita materiale, condizioni abitative, lavoro, uso del tempo libero, istruzione, salute, relazioni sociali, sicurezza, servizi e ambiente, variabili soggettive. Si ha quindi la combinazione di fattori oggettivi e soggettivi; per questo motivo, diversi autori hanno sviluppato dei modelli teorici multidimensionali. In questo panorama, particolare attenzione merita il pensiero di Shalock (2004), il quale individua otto dimensioni: benessere emozionale; relazioni interpersonali; benessere materiale; sviluppo personale; benessere fisico; autodeterminazione; inclusione sociale; diritti.

In tale ottica, la programmazione educativa dovrebbe quindi intraprendere azioni di potenziamento personalizzate, organizzare la rete dei supporti e sostegni dei quali la persona necessita, strutturare un percorso significativo. Alla luce di questo quadro teorico di riferimento si colloca l'itinerario didattico qui presentato relativo all'uso del denaro. A questo proposito, possiamo affermare che saper usare il denaro influisca su buona parte delle otto dimensioni individuate da Shalock (2004); nello specifico, il benessere emozionale (soddisfazione e percezione di sé), l'inclusione sociale (senso di appartenenza a una comunità), le relazioni interpersonali (interazioni e relazioni sociali), lo sviluppo personale (competenza), l'autodeterminazione (autonomia di scelta e decisione).

Le capacità di riconoscere i soldi, maneggiarli e usarli nelle situazioni quotidiane consentono di migliorare la quotidianità di una persona in quanto permettono di conquistare autonomia e libertà, riducendo la dipendenza e la necessità di assistenza da parte di altri. Inoltre, usare in modo competente il denaro concorre allo sviluppo di alcune delle competenze chiave europee; nello specifico quella matematica, quella personale, sociale e capacità di imparare a imparare e la competenza in materia di cittadinanza.

Si tratta di aspetti che si prestano in modo particolare allo sviluppo funzionale di abilità, realmente utili e pertanto significative per il soggetto. Per quanto riguarda le competenze sociali e personali e di cittadinanza, l'utilizzo dei soldi favorisce la possibilità di conoscere e partecipare all'ambiente in cui il soggetto vive, influendo positivamente sullo sviluppo delle capacità di socializzazione (conoscenza dei codici di comportamento e delle norme di comunicazione accettate nella società) e sulla partecipazione piena e attiva alla vita civica e sociale.

4 Itinerario didattico: il contesto

L'itinerario didattico è stato proposto agli alunni di una classe quarta della scuola primaria[1] dell'Istituto Comprensivo di Borgo San Giacomo. Il gruppo classe è costituito da ventitre alunni, tra i quali sono presenti sei bambini di nazionalità non italiana (provenienti da India, Romania e Kosovo), tra cui un'alunna kosovara che si sta approcciando alla lingua italiana (frequenta la classe a partire dal mese

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare in Canton Ticino.

di marzo della terza). Sono ben inseriti tre studenti con certificazione ai sensi della L.104/1992;[2] si tratta di alunni con disabilità intellettiva.[3]

Paolo ha una certificazione di disabilità intellettiva media, è un ragazzo motivato ad apprendere e si reca volentieri a scuola. La famiglia è molto collaborativa e vi è sinergia nella persecuzione degli intenti educativi e didattici. Dimostra una spiccata predilezione per le attività concrete e pratiche, sia in ambito scolastico sia extrascolastico, le quali hanno permesso di raggiungere un buon livello di autonomia e costituiscono un aggancio rilevante alla realtà del suo territorio. Significative difficoltà riguardano l'ambito della lettura e della scrittura: l'alunno riesce a leggere brevi frasi scritte in stampato maiuscolo e scrive sotto dettatura o copiatura; l'apprendimento della letto-scrittura è da consolidare, anche se sono stati registrati graduali progressi. Dal punto di vista logico-matematico, l'alunno usa la tavola pitagorica come strumento compensativo, esegue alcune semplici operazioni con il supporto delle mani o con quantità concrete di riferimento, è stato avviato ed è in via di consolidamento l'uso della calcolatrice, riesce ad incolonnare le cifre anche se non vi opera con sicurezza. Il ragazzo è ben inserito nel contesto classe, sono presenti compagni con i quali ha un rapporto privilegiato, alcuni di essi sono suoi amici sin dalla scuola dell'infanzia, altri si dimostrano particolarmente disponibili con lui ed il sentimento di affetto è reciproco.

Michele ha una disabilità intellettiva lieve, le principali difficoltà riguardano le capacità di pianificazione e di esecuzione, è presente un impaccio motorio sia a livello di motricità globale, sia a livello di motricità fine. Ben consolidati risultano essere il processo di letto-scrittura sia in stampato sia in corsivo, dal punto di vista matematico si riscontrano difficoltà dal punto di vista del processo risolutivo e del suo controllo. Michele è ben voluto dai compagni, i quali lo incoraggiano; il livello di autostima è basso e durante i lavori di gruppo tende a defilarsi lasciando fare ai compagni. Pertanto, si rivela utile individuare e assegnare un incarico da portare a termine, così da valorizzare il suo operato.

Luca ha una certificazione di disabilità intellettiva lieve, lo sviluppo dell'autonomia personale e sociale è molto buono; il contesto socioculturale della famiglia è poco stimolante, pertanto l'alunno necessita di arricchire il proprio repertorio di esperienze, che in ambito familiare sono limitate, e il bagaglio lessicale. Dal punto di vista relazionale, pur essendo un ragazzo molto timido, si relaziona in modo positivo con i compagni, durante le varie attività di gruppo è motivato a dare il proprio contributo.

Il contesto classe è eterogeneo e risulta essere particolarmente coeso: gli alunni sono avvezzi a lavorare in piccolo gruppo, mettendo generalmente in atto comportamenti volti alla cooperazione. Fra i ragazzi, alcuni si dimostrano particolarmente empatici e attenti alle necessità dei compagni più in difficoltà. Per questo motivo, il percorso realizzato ha visto il lavoro collaborativo in piccolo gruppo come metodologia privilegiata e punto di forza per favorire il processo di apprendimento di tutti, oltre a supportare il consolidarsi di buone pratiche inclusive. Si è scelto di proporre questo percorso dando continuità alle esperienze sul denaro precedentemente vissute dagli alunni negli anni: nello specifico, i bambini di questa classe quarta sono impegnati sin dall'ingresso alla scuola primaria nella realizzazione di un orto-giardino scolastico. Numerose sono state le occasioni in cui gli studenti si sono recati al mercato del paese per acquistare le sementi e i bulbi di fiori necessari per la piantumazione; molteplici sono state anche le circostanze in cui la cittadinanza locale ha partecipato ai mercatini di offerta dei prodotti dell'orto, contribuendo con donazioni libere. Le attività qui presentate sono state svolte nel corso di dieci lezioni, ciascuna delle quali ha avuto una durata di due ore circa.

Ho proposto l'attività in qualità di docente di sostegno, in collaborazione con la docente curricolare di matematica; ho condiviso con quest'ultima finalità e obiettivi, collaborando in modo positivo e proficuo sia in fase di progettazione sia in fase di attuazione con gli alunni. L'esperienza qui presentata nasce dalla forte convinzione che sia possibile e auspicabile proporre esperienze significative e arricchenti per tutti, pertanto inclusive, che rispondano ai differenti livelli di comprensione e complessità.

2. https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/1992/02/17/092G0108/sg
3. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i nomi sono stati cambiati.

Il lavoro è stato pensato in modo mirato, cercando di prestare attenzione ai bisogni di tutti i ragazzi, in particolar modo a quelli degli alunni con difficoltà.
Nella **Tabella 1** sono indicati gli aspetti salienti che connotano il percorso: i bisogni degli alunni, le finalità perseguite, le competenze europee di riferimento, gli obiettivi prefissati e i prerequisiti necessari.

Bisogni identificati negli alunni Esprimere oralmente richieste e necessità in modo socialmente adeguato. Esperire, in un contesto simulato e protetto, situazioni concrete proprie del contesto quotidiano. Acquisire progressivamente autonomia in situazioni che caratterizzano la quotidianità.
Finalità Sperimentare e gestire situazioni di compravendita in un contesto simulato e protetto.
Competenze europee di riferimento Competenza matematica (e competenza in scienza, tecnologie e ingegneria). Competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare. Competenza in materia di cittadinanza.
Prerequisiti Conoscere le banconote e le monete in euro. Saper svolgere addizioni e sottrazioni (in autonomia e/o con il supporto della calcolatrice). Avere vissuto o assistito a reali esperienze di acquisto.
Obiettivi Individuare il prezzo dei prodotti, calcolare la spesa totale e valutare l'acquisto. Usare le formule sociali e di cortesia legate all'acquisto e alla vendita (formule di saluto, di richiesta, di ringraziamento ecc.). Conoscere l'euro e gestire un pagamento usando differenti tagli di denaro.
Discipline coinvolte Attività trasversale a matematica, tecnologia, cittadinanza e costituzione.

Tabella 1. Aspetti organizzativi.

4.1 Scelte metodologiche e didattiche

Il progetto mira a strutturare un contesto significativo che permetta a tutti di partecipare attivamente al processo di apprendimento, valorizzando le competenze e le potenzialità di ciascuno. Punto di riferimento fondamentale è il modello della differenziazione didattica (D'Alonzo, 2016), i cui principi sono:

– il riconoscimento e la valorizzazione delle differenze tra gli allievi, le quali divengono le basi per programmare l'attività didattica;
– la convinzione che l'intelligenza non sia unitaria e che esistano diverse tipologie di intelligenze che vanno tenute in considerazione;
– l'uso della valutazione per verificare la validità e l'efficacia di una proposta formativa;
– il coinvolgimento degli allievi con diversi tipi di codici, rappresentazioni e linguaggi.

Altro modello ispiratore è quello della progettazione a ritroso, proposto da McTighe e Wiggings (2004) i quali ritengono che le attività debbano essere progettate a partire dai risultati che ci si prefigge di raggiungere, dagli scopi; il percorso di apprendimento viene quindi definito partendo dall'individuazione di ciò che è significativo. La domanda che ha guidato la stesura del progetto è stata: «Quali sono le attività utili a raggiungere i traguardi individuati?», in un'ottica di priorità nell'individuazione delle mete che si intendono perseguire, di efficacia e significatività delle proposte. Diverse sono le attività che prevedono la collaborazione degli alunni durante lavori in piccolo gruppo. L'obiettivo è quello di favorire la partecipazione di ciascuno sulla base delle proprie attitudini e abilità, valorizzando il contributo che ognuno può dare al raggiungimento di un obiettivo o all'adempimento di una consegna di lavoro. I gruppi sono eterogenei per livello, dal punto di vista socio-relazionale si è cercato di prestare particolare attenzione al temperamento dei componenti, di valorizzare le capacità di ciascuno e dare la possibilità a tutti di occuparsi di uno specifico incarico da perseguire con responsabilità. Per quanto riguarda la collocazione degli alunni con disabilità, si è scelto di inserirli in gruppi con compagni particolarmente collaborativi e ben disposti nei loro confronti. La convinzione che sta alla base del lavoro proposto è ben espressa da Ianes, che afferma:

> «Le probabilità di successo di un progetto per costruire una comunità di relazioni positive all'interno della classe saranno tanto maggiori quanto più viene trasmesso agli alunni – con le parole e soprattutto con le azioni degli insegnanti e degli altri adulti – il messaggio che la classe è un luogo sicuro di cui ognuno fa pienamente parte e nel quale ci si prende cura di ciascuno, dove ogni alunno riceve il sostegno di cui ha bisogno e può dare il suo prezioso contributo».
>
> (Ianes, 2018, p. 109)

Il contesto classe è particolarmente coeso dal punto di vista relazionale e ciò influisce positivamente anche sul piano cognitivo; gli alunni riescono a collaborare in gruppo in modo proficuo, generalmente si comportano adeguatamente senza necessità di intervento costante da parte dell'adulto e si supportano vicendevolmente, rendendo il clima particolarmente gradevole e inclusivo. In accordo con quanto contenuto nei documenti ministeriali L.170/2010,[4] DM 5669/2011[5] e le Linee guida per il diritto allo studio di alunni con disturbi specifici di apprendimento,[6] il successo formativo dell'alunno è legato in primis al ruolo fondamentale della didattica, la quale è fondamentale che si configuri attenta e reattiva nei confronti di tutti. Le attività sono infatti state progettate cercando di coinvolgere l'intera classe in modo significativo; si tratta di proposte varie per tipologia, le quali prediligono un approccio concreto ed esperienziale e rimandano in modo diretto anche a situazioni vissute in ambito extrascolastico. Il bagaglio di vissuti di ciascuno viene infatti valorizzato ed è dalla riflessione su ciò che accade nella realtà che scaturisce l'apprendimento. Le proposte sono strutturate per lo più sottoforma ludica e giocosa, favorendo la motivazione alla partecipazione e risultando stimolanti nella loro organizzazione. Si tratta prevalentemente di esperienze che prevedono il coinvolgimento degli alunni, i quali divengono attivi costruttori del proprio bagaglio di conoscenze e competenze. In accordo con quanto sostenuto da D'Alonzo et al. (2015), l'insegnante assolve una funzione strategica, di regia, restando sullo sfondo e dando risalto alle caratteristiche dei protagonisti, non facendo emergere in modo troppo evidente la propria mano. È l'alunno che diviene l'autentico protagonista del proprio percorso di apprendimento. Tra le scelte vi è quella di ricorrere a dei mediatori didattici, in particolare a quelli digitali e analogici. I mediatori permettono

4. Legge n. 170, 8 ottobre 2010, Nuove norme in materia di disturbi specifici di apprendimento in ambito scolastico, in Gazzetta Ufficiale, 18 ottobre 2010, n. 244, https://www.istruzione.it/esame_di_stato/Primo_Ciclo/normativa/allegati/legge170_10.pdf
5. DM 5669/2011 (MIUR, 2011).
6. Linee guida per il diritto allo studio di alunni con disturbi specifici di apprendimento https://www.miur.gov.it/documents/20182/187572/Linee+guida+per+il+diritto+allo+studio+degli+alunni+e+degli+studenti+con+disturbi+specifici+di+apprendimento.pdf/663faecd-cd6a-4fe0-84f8-6e716b45b37e?version=1.0&t=1495447020459

di costruire un ponte tra esperienza ed astrazione, favorendo il processo di generalizzazione a partire da un'esperienza; quelli analogici si basano sulla simulazione dell'esperienza stessa, gli studenti drammatizzano situazioni e sperimentano in modo motivante gli apprendimenti proposti. I mediatori digitali producono un doppio feedback, agendo sul docente che li seleziona e li propone in ambito didattico e sullo studente che entra in contatto con il sapere mediante l'esperienza veicolata da essi.

4.2 Gli incontri del percorso

Di seguito si riporta la descrizione di ciascun incontro dettagliato rispetto a: spiegazione dell'attività proposta, focus sulle azioni degli alunni e dei docenti, considerazioni e rilevazioni relative a quanto emerso durante la pratica didattica.

4.2.1 Primo incontro

L'incontro è stato introdotto attraverso la lettura del primo capitolo del libro di Geronimo Stilton *W l'Euro* (Dami, 2001). Si è scelto di mostrare le illustrazioni del libro alla LIM, in modo tale da supportare la motivazione in particolare di Paolo, il quale dimostra particolare apprezzamento per le illustrazioni. I bambini hanno ascoltato con entusiasmo la storia e hanno correttamente ipotizzato che potesse risalire al periodo di introduzione dell'euro (inizio anni 2000). Alcuni di loro sapevano che prima dell'introduzione dell'euro in Italia fosse in vigore la lira.
Agli alunni è stato successivamente richiesto di recuperare i loro vissuti relativi all'uso del denaro e di condividerli con i compagni; a tal proposito, le conoscenze pregresse sono state organizzate in una mappa realizzata con il programma Mindomo[7] proiettandola alla LIM. Nella fase di realizzazione tutti gli alunni sono stati molto partecipi, gli aspetti messi in luce sono riconducibili ai seguenti ambiti:

- il denaro: monete e banconote (caratteristiche: dimensioni, colori, immagini raffigurate);
- ciò che il denaro consente di fare: acquistare, donare, accumulare, riscuotere;
- dove può essere tenuto: nel portafoglio, nel salvadanaio, in banca, in posta;
- il concetto di prestito e di resto.

L'attività ha costituito un'occasione significativa anche per favorire l'acquisizione di nuovi termini, talvolta spiegati dai compagni, talvolta introdotti con il supporto delle docenti. Johan, un alunno proveniente dall'India, ha raccontato che nel suo Paese di origine la moneta in vigore è la rupia.
È stato inoltre chiesto ai bambini di pensare a una circostanza nella quale hanno usato il denaro e di disegnarla. Gli alunni hanno rappresentato situazioni che hanno vissuto in prima persona o che hanno osservato, tra esse: l'acquisto dell'automobile (Paolo), la concessione di un mutuo da parte della banca per l'acquisto della casa, lo shopping in un negozio di abbigliamento, la spesa al supermercato o dal fruttivendolo, il registratore di cassa del negozio gestito dai propri genitori (Michele), il denaro donato a un musicista a seguito di un'esibizione, l'uso dello sportello bancomat (Tabella 2). Si tratta di un panorama ricco che ben testimonia le innumerevoli esperienze vissute dai bambini a riguardo dell'uso del denaro, da quelle quotidiane come la spesa a quelle più insolite quali la concessione di un mutuo, il caveau della banca o il saldo di un pernottamento.

7. https://www.mindomo.com/mindmap/4e0c6517dd5d47f9b2fe8b5f74abafd4

	«Questo disegno illustra me e la mia famiglia che paghiamo il soggiorno in albergo».
	«Io e mia cugina siamo andate dal fruttivendolo e abbiamo comprato le arance, le pere e l'uva e abbiamo pagato 10 euro. Poi siamo tornate a casa».
	«I miei genitori hanno usato i soldi per comprare l'automobile nuova».
	«Ho disegnato quando sabato sono andata in edicola (cartolibreria) per comprare dei quaderni e ho pagato con una banconota da 10 euro».

Tabella 2. Disegni degli alunni con descrizione.

4.2.2 Secondo incontro

I ragazzi hanno lavorato suddivisi in gruppi da quattro membri ciascuno. Come anticipato nel paragrafo precedente, i gruppi di lavoro sono stati creati in modo tale da essere eterogenei per livello; in particolar modo si è prestata attenzione alla collocazione degli alunni con difficoltà, ai quali è stato proposto di collaborare con compagni con i quali hanno relazioni particolarmente positive.

La consegna è stata quella di realizzare tre liste della spesa, con l'intento di selezionarne poi una e di simulare una situazione di acquisto durante le lezioni successive, effettuando il pagamento usando denaro fac-simile. L'attività ha richiesto di sfogliare dei volantini pubblicitari di supermercati, di ritagliare le fotografie di alimenti dai fascicoli promozionali comprensivi di prezzo e infine di realizzare tre liste della spesa con le seguenti caratteristiche: la prima di importo complessivo compreso tra € 5,00 e € 5,99; la seconda tra € 10,00 e € 10,99 e la terza tra € 20,00 e € 20,99.
Gli alunni hanno lavorato con impegno e motivazione; alcuni hanno realizzato le liste in modo deciso e celere, altri hanno avuto la necessità di confrontarsi più a lungo per decidere quali alimenti inserire. Le scelte alimentari dei gruppi sono state diverse: qualcuno ha privilegiato alimenti scontati (**Figura 1**), altri prodotti industriali, qualcuno ha invece optato per scelte genuine (**Figura 2**).
Anche per quanto riguarda il modo di procedere nella realizzazione delle liste si sono palesate delle differenze: qualche gruppo ha selezionato molteplici cibi di proprio gradimento e ha effettuato il calcolo della spesa totale solo alla fine, qualcun altro ha calcolato in itinere, selezionando di volta in volta gli alimenti da acquistare. Per la verifica della spesa totale, dei bambini hanno addizionato gli importi incolonnandoli, altri hanno proceduto a calcolare a mente e altri ancora usando la calcolatrice. Paolo e Luca hanno ricoperto l'incarico di eseguire per i rispettivi gruppi di appartenenza i calcoli con la calcolatrice, fungendo da controllori della correttezza dei calcoli. Michele si è occupato di predisporre le liste, tagliando e incollando gli alimenti.

Figura 1. Lista della spesa con prodotti scontati.

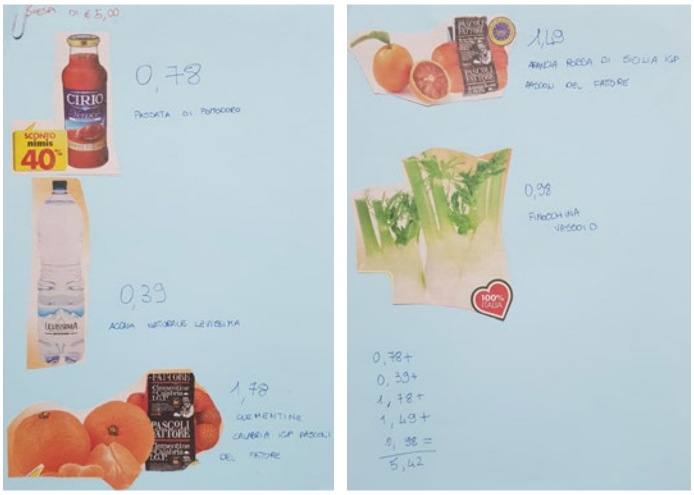


Figura 2. Lista della spesa contenente prodotti genuini.

4.2.3 Terzo incontro

L'incontro ha previsto la descrizione da parte di ciascun gruppo delle scelte di acquisto effettuate (articoli e prezzi) durante l'incontro precedente, con la simulazione del pagamento, usando denaro fac-simile. L'attività è iniziata con un momento di confronto all'interno del gruppo per scegliere una lista della spesa da presentare ai compagni tra le tre realizzate durante l'incontro precedente e per individuare i ruoli di ciascuno durante la fase di esposizione alla classe.
L'esposizione di ogni gruppo è stata caratterizzata dalle fasi elencate di seguito (**Figure 3** e **4**).

- *Presentazione della lista della spesa:* comunicazione dell'importo totale della lista scelta, elenco dei prodotti acquistati e dei singoli prezzi, esplicitazione della quantità di prodotti acquistati.
- *Gestione del pagamento:* verifica dell'importo totale della spesa, uso di *Eurometro* per l'individuazione delle monete e delle banconote necessarie, verifica della correttezza del pagamento, uso della calcolatrice per calcolare l'eventuale resto.

Figura 3. Selezione delle banconote.

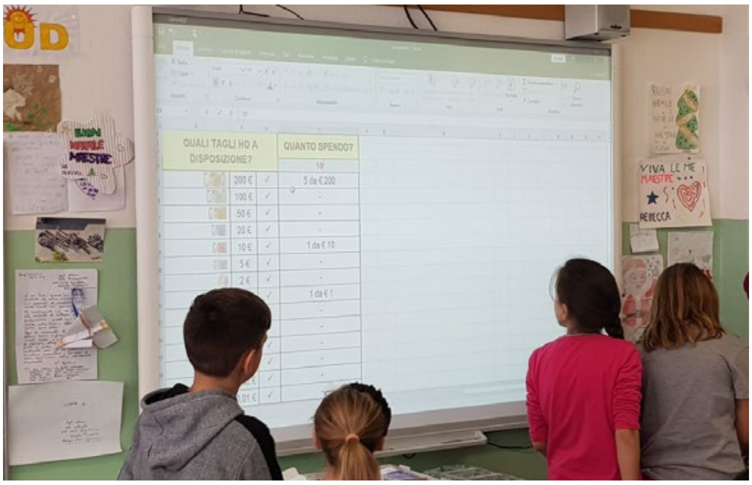


Figura 4. Uso di Eurometro da parte dei gruppi che si sono alternati alla LIM.

Durante l'incontro, infatti, è stato introdotto lo strumento *Eurometro*, da me progettato per supportare gli alunni nella gestione dei pagamenti in situazioni di compravendita sia simulata in ambito scolastico sia nel reale contesto di vita. L'obiettivo è quello di aiutare i bambini, dopo aver osservato i tagli di denaro disponibili, a effettuare i pagamenti in modo corretto.

Il file è stato realizzato con il programma Microsoft Excel. Al suo interno vi sono inserite le immagini dei diversi tagli di denaro, a fianco di esse vi è riportato il rispettivo valore, infine vi è una colonna nella quale è indicata la disponibilità all'interno del proprio portafoglio.

L'importo in euro che deve essere pagato viene digitato, in formato numerico, nella casella posta sotto alla domanda "Quanto spendo?". Cliccando il tasto "Invio" della tastiera, compaiono automaticamente i tagli necessari per poter effettuare il pagamento in modo esatto. Ciò permette di verificare la correttezza di un pagamento prima di effettuarlo o in alternativa può rappresentare uno strumento di supporto di tipo compensativo, qualora risultasse difficile per gli alunni individuare in modo adeguato i tagli di denaro necessari. Nella parte sinistra della pagina sono elencati tutti i tagli relativi alle banconote e monete in uso; spetta all'alunno indicare quali di essi non possiede. In questo modo, il programma individua altre opzioni, utilizzando tagli diversi, per poter completare il pagamento in modo corretto.

Vediamo di seguito un esempio nel quale i tagli di denaro sono tutti disponibili (**Figura 5**).

QUALI TAGLI HO A DISPOSIZIONE ?			QUANTO SPENDO? € 23,00
	€ 200	✓	-
	€ 100	✓	-
	€ 50	✓	-
	€ 20	✓	1 da € 20
	€ 10	✓	-
	€ 5	✓	-
	€ 2	✓	1 da € 2
	€ 1	✓	1 da € 1

Figura 5. Un esempio di pagamento con *Eurometro* con la disponibilità di tutti i tagli di denaro.

Qualora non si avesse a disposizione la banconota da € 20, come è possibile osservare nella **Figura 6**, il programma effettuerebbe il "ricalcolo" proponendo di utilizzare 2 banconote da € 10.

QUALI TAGLI HO A DISPOSIZIONE?		QUANTO SPENDO?
		€ 23,00
200 €	✓	-
100 €	✓	-
50 €	✓	-
20 €	×	-
10 €	✓	2 da € 10
5 €	✓	-
2 €	✓	1 da € 2
1 €	✓	1 da € 1
0,50 €	✓	-
0,20 €	✓	-
0,10 €	✓	-
0,05 €	✓	-
0,02 €	✓	-
0,01 €	✓	-

Figura 6. Esempio di pagamento con *Eurometro* nel quale non è disponibile un taglio.

Tre gruppi hanno scelto di presentare la lista da € 20; ciò ha reso possibile il confronto tra la numerosità di prodotti a fronte del medesimo valore complessivo. È emerso che a parità di quest'ultimo gli articoli acquistati possono essere più o meno numerosi in virtù del loro costo unitario.
Nel corso dell'attività è stato attribuito a rotazione il ruolo di cassiere con l'incarico di controllare la correttezza del denaro scelto per effettuare il pagamento. Alcune difficoltà sono state riscontrate nel calcolare il resto e si è reso necessario ricorrere alla calcolatrice al fine di restituirlo all'acquirente in modo corretto.
L'impiego di *Eurometro* si è rivelato un utile supporto agli alunni, in particolare agli studenti con disabilità. Paolo, Michele e Luca hanno partecipato all'attività proposta apportando il loro contributo: nei rispettivi gruppi, hanno usato *Eurometro* impostandolo e hanno conseguentemente individuato i tagli di denaro in base all'importo da pagare.
La proposta effettuata ha permesso l'effettiva partecipazione di tutti gli alunni in quanto ciascuno di essi ha ricoperto un ruolo attivo all'interno del proprio gruppo di lavoro; si è pertanto dimostrata stimolante poiché in essa sono insiti diversi livelli di complessità e quindi è stata gratificante per ognuno.

4.2.4 Quarto incontro

Durante l'incontro sono state ricreate nel contesto simulato le attività commerciali principali presenti nel comune nel quale si trova la scuola: il panificio-pasticceria, la gelateria, la pizzeria, il supermercato, il negozio ortofrutticolo, cartolibreria. A ciascun gruppo è stata assegnata una consegna precisa: creare uno dei negozi presenti nel paese (**Figure 7** e **8**). Gli alunni hanno avuto a disposizione una bancarella di legno da usare per esporre la merce, alimenti giocattolo integrati con cibi e oggetti reali da usare come prodotti da vendere/acquistare, etichette e pennarelli per esporre i prezzi, la calcolatrice e il registratore di cassa per agevolare i conti agli alunni che necessitano di un supporto (funzione compensativa).

Figura 7. Allestimento della pizzeria.

Figura 8. Allestimento del negozio di ortofrutta.

Ciascuno di essi si è occupato di attribuire un costo agli oggetti in base al settore di vendita assegnato, di scriverlo sulle apposite etichette e di distribuire i prodotti sul bancone in modo accattivante.
I membri si sono confrontati per individuare dei prezzi realistici da assegnare agli articoli in vendita nel negozio da allestire. Per favorire ciò, gli alunni hanno potuto consultare le liste della spesa precedentemente realizzate e i volantini pubblicitari per individuare dei prezzi verosimili per gli articoli.
A rotazione, ogni attività commerciale e gli alunni che se ne sono occupati sono diventati protagonisti e oggetto di attenzione: i compagni appartenenti agli altri gruppi hanno simulato di recarsi al negozio per effettuare l'acquisto. Ciascuno ha provato l'esperienza di vendita: servire il cliente, comunicare il prezzo del prodotto desiderato dall'acquirente, calcolare il totale della spesa, scrivere lo scontrino e dare un eventuale resto. L'attività ha visto un grande coinvolgimento da parte dei ragazzi.
Ognuno ha prestato attenzione a predisporre il proprio negozio in modo accattivante, disponendo la merce in modo gradevole. Alcuni hanno optato per creare un'insegna per indicare il negozio (al quale è stato dato un nome), altri hanno realizzato un cartello con gli orari di apertura dell'attività, indicando un numero di telefono per le consegne e le prenotazioni (es. la pizzeria).
Durante la fase di simulazione della vendita, un gruppo individuato a rotazione dalla docente si è recato ad effettuare l'acquisto in un negozio prescelto. Il gruppo dei "venditori" ha provveduto a presentare la propria merce, a consegnarla al cliente e a calcolare il totale della spesa.
Paolo è stato molto partecipe ed entusiasta durante tutta l'attività; si è occupato di incollare le etichette con i prezzi sulle pizze vendute in pizzeria, inoltre ha usato *Eurometro* per individuare e fornire correttamente i tagli di denaro di resto. Il suo gruppo ha inoltre simulato una telefonata per potersi occupare delle prenotazioni dell'asporto: i bambini dei due gruppi coinvolti ("pizzaioli" e "clienti") hanno effettuato una chiamata, supervisionata dalle docenti. L'attività è stata utile per riprendere e ricordare le formule di cortesia da usare nel momento in cui ci si reca in un negozio e in cui si effettua una prenotazione.
Anche Luca e Michele sono stati ben inclusi durante tutta l'attività; in particolare, Luca si è sforzato, nonostante la timidezza, di raccontare quali prodotti fossero presenti nel suo negozio e ha gestito la richiesta di acquisto del cliente.

4.2.5 Quinto incontro

A ogni gruppo è stata attribuita una tabella a due colonne con il compito di osservare la tipologia di prodotti, di riflettere sul costo e sulle differenze che sussistono tra gli alimenti considerati.
Nelle colonne da confrontare è stata inserita la stessa tipologia di merce, il prezzo è stato però indicato in modo differente al fine di sollecitare l'attenzione sul fatto che alcuni prodotti possano essere venduti in confezioni (prezzo unitario) piuttosto che al chilogrammo; per questi ultimi è necessario indicare al venditore il "peso" (quanti g, hg, kg) della porzione di prodotto che si desidera acquistare.
I bambini hanno proceduto a confrontare le caratteristiche e il costo della merce, servendosi della tabella fornita (Allegato 1).
I prodotti tra loro comparati sono i seguenti:

– Parmigiano Reggiano venduto al chilogrammo e Parmigiano in trancio preconfezionato;
– pane di Altamura preconfezionato e pane di Altamura fresco;
– arance moro vendute sfuse e rete di arance;
– mele Red Delicious vendute al chilogrammo e mele in vaschette contenenti quattro frutti ciascuna.

Ogni gruppo ha proceduto a completare la tabella mettendo in evidenza le differenze in termini di costo tra i prodotti, il lavoro è stato poi condiviso con i compagni, usando la LIM. Ciascun gruppo ha proceduto a presentare un tipo di prodotto. L'attività si è rivelata stimolante e ha sollecitato molti spunti di riflessione.
È emerso dagli alunni che, a parità di prodotto, il più costoso viene definito in relazione al peso (confronto del prezzo al kg).

Un alunno ha sottolineato che il concetto di "economico" è diverso da quello di "conveniente" in quanto un prodotto può essere meno costoso, ma di qualità inferiore e pertanto non necessariamente conveniente da acquistare. Questa osservazione è stata fatta in relazione al pane (vedasi l'Allegato 1), osservando che il pane fresco e artigianale di Altamura possa essere verosimilmente di qualità migliore rispetto a quello industriale confezionato. Gli alunni si sono rivelati curiosi di localizzare il paese di Altamura, zona di provenienza del pane; dopo una breve ricerca in rete, verificato che è situato in Italia, è stata identificata la regione Puglia sulla carta geografica appesa alla parete in aula. Alcuni studenti hanno raccontato di aver già assaggiato questo particolare tipo di pane.
Per quanto riguarda il Parmigiano Reggiano si può osservare nell'allegato che il prezzo di quello posto nella casella di sinistra sia fornito per un peso di 500 g mentre quello a destra viene indicato per 1 kg. Il prodotto meno costoso è quindi quello posto sulla destra (il costo è di € 15,80 al kg anziché € 17,80 al kg dell'altro); alcuni gruppi non hanno considerato il diverso peso del formaggio mostrato pertanto hanno definito meno costoso quello collocato a sinistra.
Si è problematizzata la questione e si è proceduto a calcolare il costo al chilogrammo di quello prezzato per un peso di 500 g. È stato curioso il fatto che i bambini abbiano chiesto il significato della sigla *D.O.P.*; un bambino, il cui nonno lavora in un caseificio della zona, ha condiviso con i compagni l'accezione corretta.
La riflessione sul costo del Parmigiano ha rappresentato lo stimolo per conoscere le misure di massa, introducendo l'argomento nei giorni successivi. La classe aveva in precedenza esperito concretamente di queste misure in occasione delle raccolte dei proventi dell'orto scolastico (già precedentemente menzionato) e del progetto "Adotta un albero di arance" (attività che prevede l'invio alla scuola dei proventi dell'albero adottato).[8] La trasversalità degli aspetti considerati, da quelli esperienziali a quelli geografici, ha favorito la partecipazione di tutti gli alunni. Per ciascun ragazzo si è infatti rivelata un'occasione stimolante che ha permesso il confronto proficuo sulle diverse questioni emerse.

4.2.6 Sesto incontro

Come anticipato, in seguito alle sollecitazioni emerse durante il quinto incontro, sono state affrontate le misure di massa, proponendo lo studio dei multipli e dei sottomultipli del grammo (g) e del chilogrammo (kg). A tal proposito è stata costruita da ciascun alunno una striscia di cartoncino con le misure di massa, utile a supportare la conversione tra multipli e sottomultipli (Figure 9 e 10).

Figura 9. Il chilogrammo (kg).

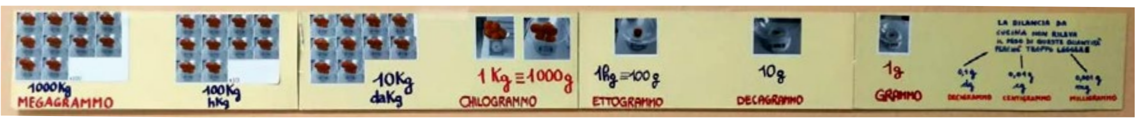


Figura 10. La striscia con le misure di massa.

8. La classe ha aderito all'attività di adozione delle arance provenienti dalla piana di Catania: http://www.sanarancia.it/adotta-un-albero-d-arance.html. Ciascuna sezione ha ricevuto 25 kg di arance, queste sono state l'occasione per riflettere didatticamente su diversi aspetti: le misure di massa, nonché l'importanza di una sana e corretta alimentazione.

Ogni bambino ha provveduto a corredare la propria con le fotografie scattate in quel periodo durante la pesatura delle arance provenienti dalla Sicilia.
Nella striscia con le misure di massa (Figura 10) troviamo i multipli del chilogrammo:

- la fotografia del piatto della bilancia contenente 1 kg di arance (Figura 9), cinque arance circa;
- la stessa fotografia ripetuta 10 volte per ottenere 10 kg di arance (1 kg moltiplicato per 10);
- la stessa fotografia ripetuta 10 volte (10 kg di arance) con l'indicazione "×10", per ottenere 100 kg;
- la stessa fotografia ripetuta 10 volte (10 kg di arance) con l'indicazione "×100" per ottenere 1'000 kg, ossia il Megagrammo.

I sottomultipli del chilogrammo sono stati ottenuti partendo dalla constatazione, verificata mediante pesatura, che un'arancia avesse un peso di circa 200 g (un chilogrammo di arance è generalmente dato da 5 arance), gli alunni hanno quindi fatto delle ipotesi relative a quali parti dell'agrume fossero da considerare per ottenere l'ettogrammo, il decagrammo e il grammo. Sulla base di questa considerazione e attraverso la pesatura di porzioni di arancia, effettuata per tentativi ed errori, sono stati individuati i sottomultipli del chilogrammo, i riferimenti sono i seguenti:

- la fotografia di metà arancia per ottenere 100 g, ossia l'ettogrammo (hg);
- la fotografia di metà fetta di arancia per ottenere 10 g, ossia il decagrammo (dag);
- la fotografia di un pezzetto di buccia pari a 1 g, il grammo (g).

La scelta di associare le fotografie di un vissuto (la pesatura delle arance) è dovuta alla volontà di supportare l'apprendimento di tutti gli alunni rendendolo concreto, in particolare di coloro che riscontrano difficoltà di apprendimento. Infatti, la valorizzazione dell'esperienza diretta e la proposta di un approccio attivo sono stati funzionali a presentare in modo significativo e vicino alla realtà quotidiana le misure di massa in modo accessibile.
In seguito all'approfondimento degli aspetti già presentati, i gruppi hanno provveduto a rivedere le liste della spesa da essi realizzate durante il secondo incontro, sistemando, laddove ritenuto necessario, le rispettive quantità di prodotti acquistate (es. specificando gli ettogrammi di prosciutto crudo acquistati, i chilogrammi di mele, gli ettogrammi di carne ecc.).
Si è rivelato utile e proficuo per gli alunni riflettere sul lavoro precedentemente svolto alla luce delle nuove esperienze e delle conoscenze acquisite, in modo tale da favorire la revisione e l'autovalutazione di quanto realizzato.

4.2.7 Settimo incontro
Cogliendo lo stimolo proposto dai ragazzi, i quali durante il tempo mensa hanno strutturato spontaneamente una banca per poter giocare nei momenti liberi, si è deciso di proporre un incontro in ambito scolastico per conoscere tale realtà.
A questo proposito sono stati contattati la mamma di un alunno e il papà di una bambina che lavorano in una banca del territorio. Le insegnanti hanno raccolto le curiosità degli alunni e hanno concordato con i genitori le tematiche da affrontare:

- che cos'è la banca;
- che cosa sono il mutuo e l'investimento;
- denaro falso e verifica dell'autenticità di banconote e monete, quali strumenti esistono;
- dove sono conservati i soldi in banca.

La proposta si è rivelata entusiasmante, sono emerse molte curiosità da parte degli studenti e i genitori sono stati molto disponibili nel rispondere ad esse.

Si è scelto di strutturare un'ora di incontro in modo tale da richiedere attenzione per un tempo non eccessivo e non rendere l'intervento troppo specifico.
È stato curioso osservare che gli alunni, in seguito all'incontro, abbiano apportato delle modifiche e delle implementazioni alla banca da loro costruita: ad esempio hanno introdotto la possibilità di pagare con il blocchetto degli assegni e hanno iniziato a simulare delle proposte di contratti rateizzati per l'acquisto di alcuni beni.

4.2.8 Ottavo incontro

I bambini hanno lavorato suddivisi in coppie, prestando particolare attenzione alla collocazione degli alunni con difficoltà, i quali hanno lavorato con compagni collaborativi ed empatici, i quali hanno saputo valorizzare e compensare le capacità con il supporto delle insegnanti (curricolare e di sostegno). La proposta è stata quella di descrivere una situazione che richiedesse l'uso del denaro in un contesto di compravendita, provvedendo a formulare il testo, calcolare e risolvere. Gli alunni hanno proceduto ad adempiere alle consegne, dimostrando di collaborare in modo proficuo. Le insegnanti si sono accertate che ci fosse la comprensione delle indicazioni fornite per tutti gli alunni; una bambina di nazionalità kosovara ha chiesto ulteriori spiegazioni per capire bene quale fosse la richiesta. Le attività pensate dai bambini sono state in alcuni casi più complesse ed elaborate (Figura 11), in altri casi, soprattutto nelle coppie in cui erano presenti gli alunni con difficoltà, sono risultate più semplici nella formulazione; ciò è stato significativo in quanto l'accessibilità alla comprensione da parte di entrambi i membri della coppia pone in risalto l'empatia dimostrata verso i compagni. Nel lavoro consultabile nell'Allegato 2 si nota come Paolo e il compagno Ludovico abbiano pensato a una situazione di acquisto accessibile e adeguata per entrambi. Essa trae spunto dalla fiaba di Cappuccetto Rosso affrontata in quel periodo, Paolo ha usato il computer per scrivere il testo del problema in stampato e per incolonnare i numeri in tabella con il supporto dell'insegnante di sostegno e la collaborazione di Ludovico.

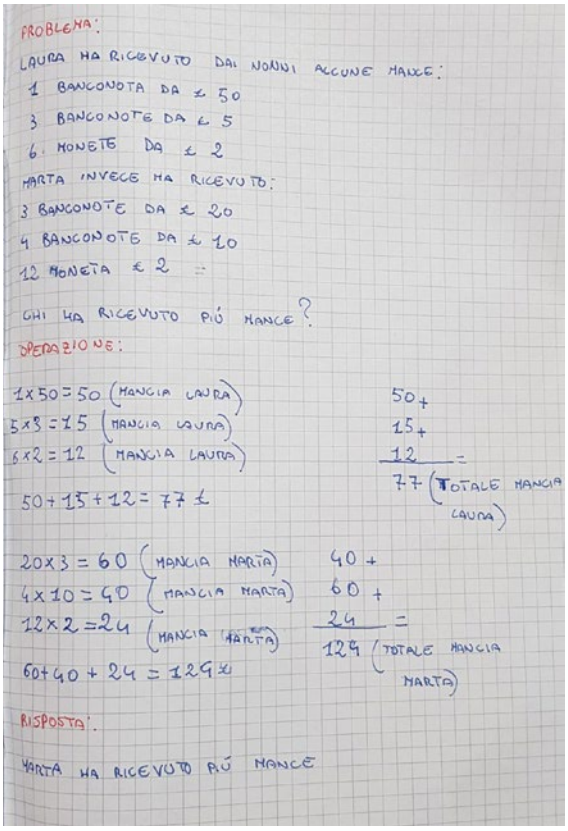


Figura 11. Esempio di problema.

4.2.9 Nono incontro

L'attività è iniziata con la proposta di occuparsi di organizzare una merenda per la propria classe e per i compagni di un'altra sezione, previa autorizzazione. I ragazzi hanno accettato con molto entusiasmo e sono cominciati i preparativi. Gli incarichi sono stati i seguenti:

– acquisto dei panini necessari per i 48 alunni presso il panificio del paese;
– acquisto della tovaglia, dei tovaglioli e dei bicchieri usa e getta;
– acquisto dei vasetti di marmellata per farcire i panini;
– acquisto delle bevande.

Ciascun gruppo si è occupato di organizzare e portare a termine una delle consegne fornite dagli insegnanti. Di seguito, sono riportate le azioni principali svolte in base alla mansione ricoperta:

– acquisto dei panini: telefonare alla fornaia, chiedere il costo al chilogrammo e informarsi su quanti panini servano per ottenere 1 kg, in questo modo è possibile procedere a calcolare il peso dei panini da acquistare e la spesa totale;
– acquisto di tovaglia e tovaglioli: consultare il volantino del supermarket e calcolare il costo complessivo per l'acquisto di tovaglioli e bicchieri;
– acquisto della farcitura dei panini: consultare il volantino del supermarket e calcolare la spesa totale per i vasetti di marmellata;
– acquisto delle bevande: consultare il volantino della bottega ubicata vicino al fornaio e individuare le bevande da acquistare, stima delle quantità necessarie e calcolo della spesa totale.

Gli alunni si sono complessivamente ben organizzati all'interno dei gruppi. L'entusiasmo ha caratterizzato l'intera proposta dalla fase di progettazione alla realizzazione.
Il volantino consultato è quello del supermarket ubicato vicino alla scuola, in modo tale da agevolare la fase di acquisto mediante l'uscita a piedi. La lista di alimenti relativa alla bottega ubicata a fianco della forneria è stata realizzata dalle insegnanti per finalità didattiche in accordo con il negoziante (il quale usualmente non dispone di volantini pubblicitari).

4.2.10 Decimo incontro

L'attività ha previsto la collaborazione di più insegnanti per realizzare l'uscita a piedi, previa autorizzazione da parte delle famiglie.
Ciascun gruppo, accompagnato dall'insegnante, si è recato al negozio stabilito, portando a termine la consegna assegnata durante l'incontro precedente. L'insegnante di sostegno[9] e la collega di potenziamento[10] hanno accompagnato due gruppi: uno in torneria e uno dal fornaio; l'insegnante cur-

9. L'insegnante di sostegno in Italia, introdotto dalla Legge 517/1977, è un docente specializzato nella didattica speciale per l'integrazione degli alunni con disabilità; assume la contitolarità di cattedra della classe in cui opera, cioè è assegnato alla classe e non all'alunno con disabilità, con il compito prioritario di attuare interventi di integrazione attraverso strategie didattiche specifiche, insieme agli insegnanti curricolari. Nel sistema scolastico ticinese non è prevista una figura di questo tipo che assuma un ruolo di co-docenza, questa modalità è presente solo nelle classi inclusive dove sono presenti dei docenti specializzati che operano in co-docenza con i docenti titolari allo scopo di includere uno o più allievi con BES nel gruppo classe. Quelli che in Ticino sono chiamati docenti di sostegno hanno invece ruoli e modalità di intervento differenti.
10. La figura del docente di potenziamento è stata introdotta con il comma 7 dell'articolo 1 della Legge 107/2015 e ulteriormente normata dal CCNL 2016/18. Le cattedre di potenziamento fanno parte dell'organico dell'autonomia scolastica e i docenti possono essere assegnati a tali attività per il proprio intero orario scolastico o in parte, vale a dire che un docente in una scuola potrà svolgere solo attività di potenziamento oppure attività mista fra insegnamento curricolare e potenziamento. Le aree di loro interesse sono istruzione, orientamento, formazione, inclusione scolastica, diritto allo studio, coordinamento, ricerca e progettazione. Nel sistema scolastico ticinese una figura simile a questa è quella del docente di appoggio, che viene assegnata ad una classe solo quando supera un certo numero di alunni e/o raggruppa alunni di anni scolastici differenti (pluriclasse).

ricolare e l'assistente all'autonomia[11] si sono recate con tre gruppi di alunni al supermarket, ciascuno di essi ha provveduto ad effettuare l'acquisto (Figure 12 e 13).
Il denaro utilizzato per acquistare gli ingredienti per preparare la merenda proviene dalle donazioni fatte della cittadinanza in occasione dei mercatini di offerta dei prodotti dell'orto-giardino; i soldi vengono normalmente gestiti dai genitori rappresentanti di classe.
Dopo aver effettuato l'acquisto ed essere tornati a scuola, gli alunni hanno preparato la merenda, infine è stata gustata in compagnia.
Il bilancio dell'attività è stato positivo, i ragazzi sono riusciti a rispettare le consegne fornite e hanno raggiunto l'obiettivo finale prefissato: preparare una merenda.

Figura 12. Alunni dal fornaio.

Figura 13. Alunni al supermarket.

5 Valutazione del progetto

La valutazione implica un'attività di ricerca, si tratta infatti di un'azione permanente per mezzo della quale si cerca di dare un senso a quanto è stato fatto e di emettere un giudizio sui processi di sviluppo dell'allievo e dei suoi risultati, in un'ottica di miglioramento (Fandiño Pinilla, 2015).

11. L'assistente all'autonomia e alla comunicazione, previsto dall'articolo 13 della Legge 104/1992 è una figura professionale di assistenza di tipo educativo, assegnato *ad personam*. Si tratta di un operatore che ha il compito preciso di facilitare la comunicazione dello studente disabile, stimolare lo sviluppo delle abilità nelle diverse dimensioni della sua autonomia, mediare tra l'allievo con disabilità ed il gruppo classe per potenziare le loro relazioni, supportarlo nella partecipazione alle attività, partecipando all'azione educativa in sinergia con i docenti. Nel sistema scolastico ticinese una figura simile è quella dell'operatore pedagogico per l'integrazione (OPI).

L'ottica di valutazione proposta è quindi quella formativa, si è scelto di porre il focus sul processo piuttosto che sul risultato; le modalità adottate sono le seguenti:

– osservazione dell'atteggiamento palesato dagli studenti durante i lavori svolti in coppia, in piccolo gruppo e collettivamente (Allegato 3);
– osservazione in itinere di quanto svolto e prodotto dagli alunni nel corso dei diversi incontri, in base alle varie sollecitazioni proposte (Allegato 4);
– autovalutazione dell'esperienza da parte degli alunni (Allegato 5).

Per quanto riguarda l'atteggiamento degli alunni nel corso delle diverse proposte relative all'uso del denaro, si può affermare che il bilancio sia positivo. Come dichiarato nella descrizione del contesto, il clima in classe è sereno e anche il livello di interesse e partecipazione è mediamente buono. Si è cercato di evitare di chiedere ad alunni con temperamenti poco compatibili di cooperare e nei momenti di difficoltà essi sono stati supportati, quando necessario, nella gestione delle dinamiche.
Paolo ha preso parte alle proposte dimostrando la sua predilezione per le attività concrete e pratiche, nelle quali riesce a dimostrare la sua autonomia. Si percepisce che in tali contesti si senta a proprio agio, accettando serenamente l'aiuto di un compagno piuttosto che delle insegnanti quando ne sente il bisogno. Al fine di consentirgli di svolgere in modo il più possibile sicuro il lavoro e di favorire lo sviluppo di una visione positiva di sé, si è cercato di metterlo in condizioni per lui favorevoli; si riportano alcuni esempi: le consegne di lavoro sono state scritte in stampato maiuscolo, il font usato consente una buona leggibilità, i compagni con i quali è stato chiesto di collaborare sono ben disposti alla collaborazione e manifestano comportamenti spiccatamente pro-sociali, sono stati forniti strumenti utili e compensativi dal punto di vista operativo quali la calcolatrice ed *Eurometro*, l'approccio prevalente è stato quello laboratoriale. Anche Michele e Luca hanno partecipato con motivazione alle attività, in particolare per questi alunni si è cercato di favorire l'aspetto socio-relazionale per motivazioni diverse: per Michele è fondamentale accrescere la propria autostima, per cui ricoprire un ruolo che valorizzasse le sue potenzialità (es. occuparsi dei calcoli, predisporre le liste della spesa) durante le diverse attività si è rivelato efficace; per Luca il percorso ha rappresentato un'occasione significativa per arricchire il proprio bagaglio di esperienze, prima nel contesto noto e simulato (la scuola) e poi nel contesto territoriale reale, ma al tempo stesso in una situazione protetta.
L'autovalutazione prodotta da ciascun alunno ha giocato un ruolo fondamentale nel bilancio complessivo dell'attività. Al fine di rendere accessibile a tutti la compilazione del questionario, si è scelto di scrivere gli enunciati in stampato maiuscolo per rendere più agevole la decodifica e di inserire gli emoticon, riprendendo quelli utilizzati da noti programmi di messaggistica, il cui significato è noto agli studenti.
Come si evince dai dati riportati nella Tabella 3, dall'analisi delle risposte fornite dagli alunni emerge un generale gradimento verso le attività svolte. Soltanto due bambini hanno espresso pareri non positivi: verso il solo lavorare in gruppo in un caso, nel secondo anche nei confronti degli aspetti ad esso correlati (proporre idee, ascoltarle, presentare il lavoro). Si tratta effettivamente di ragazzi che durante i momenti nei quali è stato richiesto di collaborare hanno manifestato insofferenza dovuta al desiderio di far prevalere le proprie proposte ed opinioni. Particolare gradimento è stato manifestato verso le attività di simulazione dell'acquisto-vendita in negozio e la spesa reale svolta in vista della preparazione della merenda.

	MI È PIACIUTO MOLTO	MI È PIACIUTO ABBASTANZA	MI È PIACIUTO POCO	NON MI È PIACIUTO
LAVORARE IN GRUPPO	17	4	2	0
PROPORRE IDEE AI MIEI COMPAGNI	11	11	1	0
ASCOLTARE LE IDEE DEI MIEI COMPAGNI	15	7	1	0
PRESENTARE I LAVORI DI GRUPPO ALLA CLASSE	18	4	1	0
USARE EUROMETRO	19	4	0	0
FARE FINTA DI VENDERE IN UN NEGOZIO	18	5	0	0
FARE FINTA DI COMPRARE IN UN NEGOZIO	18	5	0	0
USARE DENARO FACSIMILE	16	7	0	0
COMPRARE IN UN NEGOZIO VERO	22	1	0	0
PREPARARE UNA MERENDA	21	2	0	0

Tabella 3. Tabulazione risposte fornite dagli alunni.

6 Conclusioni

Alla luce del percorso svolto, delle osservazioni effettuate, dei dati raccolti e delle considerazioni formulate, mi ritengo soddisfatta del percorso intrapreso. Le proposte sono risultate coerenti con gli obiettivi, le attività hanno puntato alla valorizzazione delle potenzialità e degli interessi di ciascuno e si sono rivelate inclusive e coinvolgenti per tutti gli alunni. In particolare, si è cercato di lavorare con i bambini di oggi, frequentanti la scuola primaria, e di immaginarli in un contesto di vita che va oltre a quello scolastico e oltre al presente, mirando a un futuro quanto più autonomo e soddisfacente

possibile. Riflettendo criticamente sul lavoro narrato sono consapevole di aver tralasciato nella descrizione della proposta gli aspetti matematici relativi al numero e alle operazioni con i numeri decimali: in realtà con gli alunni sono stati affrontati anche questi temi, in particolar modo dalla collega curricolare, ma in questo contesto ho preferito porre in evidenza gli aspetti che sono risultati maggiormente inclusivi e rivolti ad un coinvolgimento significativo dell'intera classe. Nella pratica d'aula ci sono stati dei momenti nei quali si è reso necessario consolidare in piccolo gruppo alcune acquisizioni (per esempio la lettura dei numeri sulle banconote, la differenza tra decimi e centesimi ecc.).
In particolare, la proposta di *Eurometro* si è collocata nell'ottica della differenziazione didattica, mirando a garantire l'innestarsi di un significativo percorso per tutti gli alunni; di seguito vengono messi in luce i punti di forza e di debolezza dello strumento, riscontrati durante l'uso.

Punti di forza:

– La presenza delle immagini a fianco di ciascun taglio supporta l'associazione al valore scritto della banconota corrispondente (es. il bambino legge € 20 e vi associa la banconota di colore blu).
– Il supporto grafico favorisce la verifica dei tagli disponibili all'interno del proprio portafoglio, mediante confronto dell'estetica delle banconote disponibili.
– Le indicazioni fornite dopo aver inserito l'importo da pagare, consentono di effettuare attività di compravendita anche ad alunni non autonomi nell'uso del denaro.
– Inoltre, rappresentano uno strumento di verifica della correttezza di un pagamento effettuato anche per gli studenti più sicuri.

Eurometro può essere utile sia ai bambini sia a adulti con difficoltà nell'uso autonomo del denaro; può pertanto rappresentare un valido supporto per il progetto di vita dell'individuo.
Il suo impiego può essere complementare a quello della calcolatrice: quest'ultima può essere utilizzata per calcolare il totale di una spesa, successivamente con *Eurometro* è possibile individuare i corretti tagli di denaro necessari per effettuare il pagamento.

Punti di debolezza:
La funzionalità di *Eurometro* potrebbe essere ampliata implementando il file con il calcolatore, nello specifico per sommare in modo agevole i costi dei singoli prodotti acquistati e per calcolare il resto, senza necessariamente dover ricorrere all'utilizzo di una calcolatrice esterna. Un aspetto che potrebbe rappresentare una criticità è la modalità di selezione dalla tendina relativa a ciascun taglio del contrassegno "0" per indicare l'assenza di disponibilità di quello specifico taglio di moneta/banconota e di "1" per indicare la presenza e la possibilità di utilizzarlo. Inoltre, la situazione si complica quando l'ammontare della spesa si fa più elevato: potrebbe verificarsi l'eventualità in cui servano due o più tagli dello stesso tipo, ma la disponibilità potrebbe essere limitata ad uno soltanto. In tal caso il sistema vincola a indicare come non disponibile il taglio di denaro; pertanto il soggetto potrebbe trovarsi in difficoltà poiché si verrebbe a verificare che vi sia disponibilità di quello specifico taglio ma non in quantità sufficienti ad effettuare il pagamento.

L'approccio attivo e laboratoriale che connota il percorso ha costituito per gli alunni un'occasione per mettere alla prova le proprie capacità, ha valorizzato i punti di forza di ciascuno e ha promosso l'attivazione del supporto reciproco nei momenti di lavoro in coppia e in piccolo gruppo, favorendo il realizzarsi del tutoraggio tra compagni. Ha inoltre permesso di motivare la classe all'apprendimento, alla partecipazione e alla sperimentazione partendo da situazioni vissute quotidianamente dagli alunni e dal contesto reale nel quale essi vivono le loro esperienze.

Il percorso relativo all'uso del denaro si è configurato come un contesto sfidante che ha posto in situazioni nuove gli studenti (andando ben oltre alle situazioni di mero esercizio); esso ha permesso

di lavorare sulla *zona di sviluppo prossimale* dei ragazzi, accompagnandoli nel percorso di apprendimento e di sviluppo dell'autonomia. È stato richiesto di osservare e analizzare, fare ipotesi, attivare le risorse personali e del gruppo, mobilitare strategie per far fronte a situazioni da affrontare. In tale condizione tutti gli alunni, in quanto portatori di bisogni educativi hanno preso parte al percorso acquisendo nuove competenze, nel rispetto delle peculiarità di ciascuno.
Operare nell'ottica di un autentico progetto di vita significa per la scuola tessere relazioni e collaborazioni con il territorio, creando legami e reti di collaborazione con la finalità di diffondere buone pratiche inclusive nella società, creando percorsi che accompagnino quanto più possibile l'alunno in ogni dove e in ogni quando, non solo in un contesto protetto. Per far sì che i bisogni di autonomia e autodeterminazione dei ragazzi vengano soddisfatti, è importante che ad essere coinvolta sia la realtà che gravita attorno ad essi; non solo quindi la famiglia e la scuola, ma l'intera comunità deve diventare educante. L'itinerario qui presentato ha posto in evidenza come sia possibile attuare progetti inclusivi che siano terreno fertile per l'inclusione scolastica nell'immediato, ma contemporaneamente proiettati sul benessere a lungo termine, rivelandosi importanti e determinanti per il futuro dei ragazzi, in primis degli alunni con disabilità.

Bibliografia

D'Alonzo, L., Bocci, F., & Pinnelli, S. (2015). *Didattica speciale per l'inclusione.* La Scuola.

D'Alonzo, L. (2016). *La differenziazione didattica per l'inclusione. Metodi, strategie, attività.* Erickson.

D'Alonzo, L. (2019). *Dizionario di pedagogia speciale.* La Scuola.

Dami, E. (2001). *W l'euro. È facile e divertente.* Piemme.

Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Oggettività addio? Valutazione e processi di apprendimento. *La Vita Scolastica*, *9*, 21–23.

Ianes, D. (2016). *Evolvere il sostegno si può (e si deve). Alcuni contributi di ricerca in Pedagogia e Didattica speciale al dibattito sulla legge 107.* Erickson.

Ianes, D. (2018). *La speciale normalità.* Erickson.

McTighe, J., & Wiggings, G. (2004). *Fare progettazione. La "pratica" di un percorso didattico per la comprensione significativa.* LAS.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2011). *Linee guida per il diritto allo studio degli alunni con disturbi specifici dell'apprendimento, allegate al DM 5669/11*. https://www.unimi.it/sites/default/files/2018-07/linee_guida_sui_dsa_12luglio2011.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale.* Le Monnier. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2018). *Indicazioni nazionali e nuovi scenari.* https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/

Parlamento europeo e Consiglio dell'Unione Europea. (2018). *Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente.* https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)

Shalock, R. L. (2004). The concept of Quality of Life: What we know and do not know. *Journal of Intellectual Disability Research*, *48*(3), 203–216.

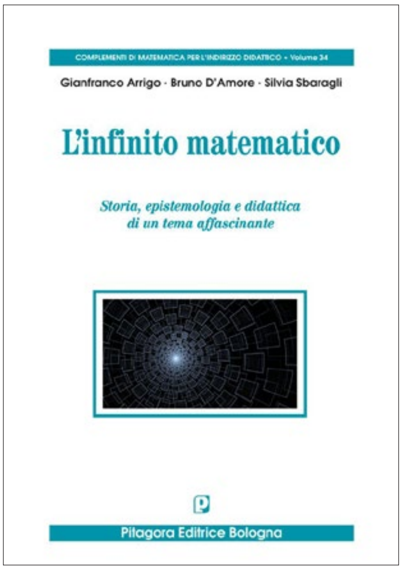
Recensioni

DdM

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 158 - 171
OPEN ACCESS

Recensioni[1]

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico: Storia, epistemologia e didattica di un tema affascinante*. Pitagora.



Alzi la mano chi, da studente, leggendo per la prima volta la definizione "$\varepsilon - \delta$" di limite, non ha avvertito un certo disagio. E chi, da insegnante, non abbia pensato e ripensato mille volte "come spiegare i limiti". Perché sì, "per entrare in aula e parlare del concetto di limite ci vuole un certo coraggio", come disse la mia tutor di tirocinio alla Scuola di specializzazione all'insegnamento secondario (SSIS), nel momento in cui entrai in classe per la prima volta da docente.
Nella suddetta definizione l'infinito non compare in maniera esplicita, ma è lì presente, nella sua forma più rigorosa e difficile da concepire: come infinito attuale. L'insegnante lo sa e spesso lo dà per scontato; lo studente, nella maggior parte dei casi, non lo sospetta nemmeno.
E poi, all'università, quando questo malcapitato studente, il più delle volte completamente ignaro della grave colpa di cui si sta per macchiare, pronuncia il fatidico "si avvicina sempre di più" e, alzando lo sguardo incrocia lo sguardo gelido del professore, capendo in quell'istante che è troppo tardi, che quanto appena detto gli costerà probabilmente l'approvazione nell'esame di Analisi I, accanto all'accettazione del proprio destino, dovrà accogliere anche il dubbio feroce di non aver capito bene che cosa sia successo davvero. E come dargli torto: in fin dei conti, lui (o lei) non ha imparato a memoria la definizione, *l'ha voluta capire*, e *ha voluto spiegare* per come l'ha capita ..., Che cosa c'è di sbagliato nel farlo? C'è chi li chiama "asintotici", c'è chi li chiama "dinamici"; sono quegli studenti che usano con disinvoltura l'infinito potenziale nel tempio eretto a quello attuale: la matematica espressa tramite il moderno linguaggio formale della teoria degli insiemi. Parlare di infinito potenziale lì è quasi come bestemmiare in un luogo sacro.
E allora la mente corre alle pagine scritte da Gianfranco Arrigo, Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, a

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

quella lunga, lunghissima storia che ha visto l'infinito attuale bandito dalla matematica, in cui era ammesso solo quello potenziale, sulla scia del "divieto" aristotelico, a cui nei secoli si attennero, con giusto qualche voce che tentava di cantare fuori dal coro, il fior fiore dei matematici da Euclide a Lagrange.
Infatti, se ci si chiede come l'umanità, o quella esigua parte di essa che si è dedicata nei secoli al culto della matematica, sia arrivata a concepire una definizione come quella oggi ampiamente accettata come una definizione assolutamente rigorosa di limite, ci si rende conto che si tratta di una storia lunga assai, durata quasi 2500 anni, in cui la definizione in questione è solo una delle ultime tappe. Ma sono cose che sfuggono, se non si conosce bene la storia della matematica, e quella dell'infinito in particolare.
Se poi come docente vieni a sapere che perfino Gauss, sì, il *Princeps mathematicorum*, si schierò nel 1800 contro "l'uso di una grandezza infinita come un tutto compiuto", ricorrendo a frasi come "si avvicina indefinitamente", allora forse la prossima volta che sentirai pronunciare parole simili da parte di un tuo studente, forse anche tu penserai che in fin dei conti, un po' di storia della matematica in aula non guasta. Perché sì, in fondo è anche una questione di cultura generale …
Ma poi … storia non è uguale a storia. Infatti, di solito si fa risalire il calcolo infinitesimale a Newton e Leibniz ma, come fanno notare gli autori di questo libro: «è indubbio che […] Leibniz e Newton […] non avrebbero nemmeno potuto concepire i risultati delle loro ricerche se non vi fossero stati i lavori matematici e le riflessioni filosofiche che abbiamo cercato di descrivere fin qui» (Arrigo et al., 2020, p. 57). Essi citano a tale proposito lo storico Pascal Dupont:

> «Leibniz è considerato spesso, con Newton, fondatore o inventore dell'analisi infinitesimale. Ribadiamo un concetto più volte espresso: i contributi di Newton e Leibniz all'affermarsi (o, se proprio vuoi, alla nascita) dell'analisi infinitesimale sono fondamentalissimi, ma, ciononostante, noi non riteniamo che abbia senso chiamare i nostri due sommi scienziati "inventori dell'analisi infinitesimale". Quella scienza, che poi per molto tempo venne chiamata "Calcolo Sublime", nacque nel XVII secolo attraverso un processo intricatissimo».
>
> (Dupont, 1981, p. 632)

Ed è proprio questo "processo intricatissimo" che non bisogna perdere di vista per riuscire a capire bene la matematica di oggi, nella quale l'infinito occupa un posto di rilievo. Vale dunque la pena, anche solo per cultura personale, seguire questa straordinaria e affascinante avventura umana.
Ma questo libro non narra solo la *storia* o l'*epistemologia* dell'infinito matematico; è anche una ricca raccolta di ricerche sull'infinito nell'ambito della didattica della matematica, in particolare legata alle convinzioni degli insegnanti e degli studenti su questo argomento affascinante e dibattuto a ogni livello scolastico e sul quale, come il lettore potrà constatare, non solo gli studenti "grandi", ma anche i bambini della scuola dell'infanzia hanno parecchio da dire.
Eppure, è solo dopo aver riflettuto sull'evoluzione epistemologica del concetto di infinito, narrata nella prima parte del libro, che ci si rende conto di come le concezioni di insegnanti e studenti rispecchino quelle dei matematici nel tempo. Ma ci si rende conto anche che le misconcezioni degli insegnanti diventano misconcezioni degli studenti perché non si può insegnare correttamente ciò che non si conosce o che non si conosce correttamente. E allora ci si rende conto anche che non è una questione di livello scolastico, cioè che ogni livello scolastico ha le proprie, di misconcezioni tipiche, anche se alcune, quelle basate sui concetti più intuitivi, persistono e sopravvivono fino all'università. E allora si capisce che no, che non è solo una questione di cultura matematica generale, ma che c'è molto di più, nello studiare l'infinito dal punto di vista epistemologico e didattico: c'è una questione legata alla deontologia professionale.
Il libro chiude con una utilissima raccolta di brevi presentazioni delle diverse scuole filosofiche citate nel testo (ne abbiamo contate più di trenta), che hanno alimentato e guidato l'evoluzione del concet-

to di infinito matematico, a partire dall'*ápeiron* di Anassimandro di Mileto (ca. ‑610 - ‑547), in cui infinito, illimitato e indefinito si intrecciavano indistintamente, fino allo straordinario lavoro conclusivo di Cantor, su cui si basa l'odierno concetto di infinito matematico, ancorato alla teoria degli insiemi. Dunque, anche in questo caso valgono, come per tutto il libro, le raccomandazioni seguenti: chi sa di non sapere, si affretti; chi sa di sapere, se ne sinceri.
Se poi, letto il libro, la mente dovesse tornare ancora al modo in cui lo studente usa l'infinito potenziale e attuale, forse lo si farà con maggiore consapevolezza del fatto che i divieti e i dogmi vanno e vengono, ma che ciò che resta è l'evoluzione della conoscenza matematica che, nel caso specifico, si dipana sempre tra le due sponde dell'infinito: quello attuale e quello potenziale, ancora di più se si tratta dell'infinito nell'aula di matematica.

Bibliografia

Dupont, P. (1981). *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale* (Voll. 1-4). Cortina.

Miglena Asenova
Dipartimento di Scienze della Formazione
Università di Bolzano, Italia

Bettoni, M., Bonfanti, I., & Fioravanti, S. (2021). ***È tutto un tassello! Dalla tassellazione all'area e perimetro di poligoni: un percorso per la scuola elementare arricchito dall'applicativo didattico Cabri*****. Collana Praticamente. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport e Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Disponibile a questo link**

L'ambito matematico del progetto *Praticamente*, promosso dal Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS) e dal Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno si arricchisce di un nuovo, importante, contributo editoriale.
Questi libri sono pensati e scritti da docenti e ricercatori per essere letti, meditati e utilizzati da altri docenti. Si tratta di una delle ormai tante iniziative, presenti nel territorio ticinese, il cui intento è concretizzare le indicazioni del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015), ma prima ancora sensibilizzare il mondo della scuola riguardo all'effettiva possibilità di realizzare percorsi didattici densi di attività significative, che mobilitano e incentivano l'utilizzo di quelle risorse e processi cognitivi che sono alla base dell'idea di competenza matematica. Di competenza matematica se ne intendono, eccome, gli autori e le autrici di questo quaderno, che hanno lavorato e lavorano quotidianamente nelle classi di scuola elementare con la consapevolezza di quanto sia importante, nel processo di insegnamento-apprendimento della disciplina, far leva su proposte che coinvolgono attivamente gli allievi e li sollecitano a esplorare, provare, sperimentare e verificare. Il percorso proposto in questo testo è quindi, dal punto di vista disciplinare, un percorso esperienziale, che tocca diversi concetti cruciali della geometria elementare. Questo già di per sé basterebbe a farne uno strumento prezioso. Ma il vero e cruciale punto di forza del libretto deriva dall'intreccio continuo tra mondo reale e mondo digitale, realizzato grazie all'utilizzo dell'applicativo Cabri, software didattico di cui gli autori sono esperti ormai da anni. È proprio grazie alla sapiente progettazione che unisce concetti geometrici con le potenzialità interattive del software, che gli autori sono riusciti a ideare, sperimentare e descrivere attività in cui diventa centrale il lavoro su rappresentazioni manipolabili e dinamiche, grazie alle quali l'allievo può "dar vita" a enti e grandezze geometriche altrimenti immaginabili solo nella nostra mente.
I due capitoli iniziali servono per inquadrare l'approccio e i temi in gioco: il primo racconta la storia del progetto Cabri in Ticino e l'idea alla base della proposta didattica del quaderno; il secondo approfondisce i concetti e i temi geometrici della tassellazione, del perimetro e dell'area. Il terzo e il quarto capitolo, invece, descrivono i percorsi didattici sperimentati, focalizzandosi l'uno sulle classi I e II, l'altro

sulle classi III, IV e V elementare: vengono presentati giochi, attività, testi e libri, arricchendo il tutto con immagini e fotografie delle schermate di Cabri. Il quinto capitolo, infine, descrive un'attività con il tangram, utilizzata dagli autori per valutare le risorse cognitive e i processi mobilitati negli studenti. Insomma: un libro davvero prezioso per i docenti, che va ad arricchire ulteriormente il panorama delle esperienze significative realizzabili in classe, e che unisce la dimensione tecnologica con quella concettuale. Perché, come sostiene Antoine de Saint-Exupéry, citato all'inizio del testo: «La tecnologia non tiene lontano l'uomo dai grandi problemi della natura, ma lo costringe a studiarli più approfonditamente».

Bibliografia

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* Divisione scuola, DECS.

Michele Canducci
Liceo Scientifico "A. Einstein" di Rimini, Italia

Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica*. Pitagora.

Che cos'è un oggetto matematico? Che cosa significa pensare in matematica? Che cosa significa apprendere la matematica? Che cos'è la matematica? Queste sono alcune delle grandi domande, potremmo chiamarle meta-domande, che guidano la ricerca in didattica della matematica soprattutto nella sua accezione moderna, scientifica, la cui nascita può essere collocata indicativamente alla fine degli anni '70 con l'emersione della nozione di *contratto didattico* introdotta da Guy Brousseau (1980).
Un tratto caratteristico dell'approccio moderno alla didattica della matematica è la complessità. Infatti, entrare nella profondità del Sapere e della cognizione in matematica richiede una prospettiva sistemico-relazionale capace di intersecare discipline diverse – matematica, epistemologia, psicologia e semiotica per citarne alcune – ma anche teorie diverse e metodologie di ricerca diverse.
L'Autrice accompagna il lettore con semplicità, chiarezza e concretezza nell'affascinante complessità che caratterizza la didattica della matematica, affrontando il tema sempre attuale e scottante della valutazione. La valutazione, ineliminabile dalla pratica d'aula, è un fenomeno tipicamente complesso nel quale si intersecano diversi aspetti legati all'insegnamento della matematica – cognitivi, pedagogici, psicologici, affettivo-relazionali. Più in generale, la capacità di valutare è intrinseca alla razionalità che caratterizza l'essere umano.
Troppo spesso, però, a scuola l'atteggiamento nei confronti della valutazione è lineare, all'interno di un sistema didattico che a grandi linee segue il seguente schema: l'insegnante insegna, l'allievo studia e, attraverso la valutazione, l'insegnante accerta il livello di apprendimento dell'allievo su una scala quantitativa attraverso il voto. A questo punto il ciclo ricomincia con l'insegnamento di un nuovo argomento e allo studente con valutazione insufficiente è demandato il recupero delle lacune che nella terminologia istituzionale viene indicato come debito formativo. Una terminologia che rispecchia l'idea dominante di individuo e di Sapere in molti sistemi educativi. Parafrasando le parole di Luis Radford (2016), si tratta di una visione consumistica dell'educazione nella quale il Sapere è considerato un bene di scambio che viene trasferito da un individuo (l'insegnante) a un altro individuo (l'allievo).
I limiti di questa posizione di fronte alla valutazione è ben testimoniata dal pedagogista britannico Ken Robinson, il quale nel suo libro *The Element* riporta una serie di casi di studenti espulsi dal sistema educativo istituzionale perché considerati inadeguati, che tuttavia sono riusciti, seguendo altri percorsi, a realizzare il loro progetto di vita ai massimi livelli nel loro ambito di interesse (Robinson,

2009). Nella mia lunga esperienza di insegnante mi è capitato più volte di vedere autentici talenti giudicati come non adatti alla matematica perché non avevano "capacità logiche", per poi scoprire che si trattava, per esempio, di ottimi programmatori in grado di assemblare il proprio PC, di guidarti a distanza per risolvere un problema hardware o software al tuo computer e tanto altro. Competenze che richiedono "capacità logiche" articolate, profonde, divergenti, quelle tipiche del pensiero matematico.

Non è mia intenzione criticare il lavoro prezioso e difficile degli insegnanti, ma quanto esposto sopra vuole essere lo spunto per avviare un'analisi scientifica e culturale della valutazione e più in generale dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. Il testo offre una riflessione critica sulla valutazione, accompagnata da suggerimenti concreti, esempi e linee guida che possono essere implementati direttamente nell'aula di matematica.

Il testo propone un'analisi sistemica della valutazione, capace di includere la sua complessità, la sua ricchezza e le sue potenzialità educative e didattiche. La valutazione non è un momento specifico del processo educativo che ha come protagonista uno specifico soggetto, l'allievo. La valutazione è un processo continuo che coinvolge certamente l'allievo, ma con esso vede interconnessi anche il curricolo, la trasposizione didattica, l'ingegneria didattica, l'ambiente classe, le credenze e gli atteggiamenti sulla matematica e sul suo insegnamento-apprendimento, la disposizione emotiva dell'alunno di fronte all'apprendimento che include la motivazione, la volizione e il senso di autoefficacia. Non mi addentro nella descrizione di questi aspetti e come interagiscono tra di loro, per non privare il lettore dell'argomentazione avvincente e appassionante che egli può trovare nel testo. Questa concezione della valutazione è consistente con la nozione di *joint labour* (lavoro congiunto) introdotta nel 2016 da Radford, secondo la quale «insegnante e allievi hanno un legittimo interesse l'uno nell'altro e nella loro impresa comune di realizzare l'apprendimento della matematica e sono individui che sognano, apprendono, soffrono e sperano insieme» (Radford, 2016, p. 265).

La scuola, come istituzione educativa realizza il suo obiettivo quando gli studenti raggiungono, per quello che ci interessa in questo ambito, l'apprendimento della matematica. La nozione complessa e dinamica della valutazione proposta dal testo sarebbe incompleta e in ultimo anche inefficace se non si addentrasse nella complessità e dinamicità dell'apprendimento della matematica. Non sapremmo che cosa stiamo valutando, perché lo stiamo valutando e come interpretare il risultato della valutazione per incidere sugli aspetti, citati sopra, coinvolti in questo processo.

Pur nella sua unitarietà, l'Autrice evidenzia che l'apprendimento matematico ha molteplici aspetti. Nello specifico ne ha individuati cinque: l'apprendimento concettuale, l'apprendimento algoritmico, l'apprendimento strategico, l'apprendimento comunicativo e l'apprendimento semiotico. Il lettore è accompagnato con maestria in un viaggio filosofico, epistemologico, storico-culturale e semiotico nella matematica che gli mostra l'interazione dialettica dei cinque apprendimenti nell'incontro con un oggetto culturale unitario.

Quando l'insegnante ottiene una valutazione negativa di un suo alunno, ma anche una positiva, che cosa ha valutato? Che cosa significa affermare che uno studente è "bravo" o "incapace" in matematica? Lo stesso errore di più studenti ha necessariamente la stessa origine? Come intervengo, per aiutare lo studente, negli aspetti legati al curriculum, alla trasposizione didattica, all'ingegneria didattica ecc. Lo studente che consideriamo senza "capacità logiche", non adatto alla matematica, potrebbe, come mi è capitato spesso di osservare, avere problemi di disgrafia o discalculia, e ottenere risultati negativi perché debole nell'apprendimento algoritmico, mentre in altri contesti manifesta spiccate competenze a livello concettuale e strategico.

Senza la consapevolezza di questa complessità insita nell'apprendimento della matematica e di conseguenza nella sua valutazione, l'insegnante non può che ridurre la sua valutazione a un numero e lasciare lo studente a sé stesso per affrontare le difficoltà la cui origine più profonda rimane inaccessibile a entrambi.

Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica è un testo che reputo

particolarmente importante per il mondo della scuola e della ricerca in didattica della matematica.
Un testo che consiglio ai docenti di matematica, a chi è interessato all'inclusione nella sua accezione più ampia, come differenziazione per *tutti* gli studenti, e a chi è interessato alla storia e all'epistemologia della matematica. Lo consiglio anche ai dirigenti scolastici che hanno la responsabilità di condurre gli scrutini di fine quadrimestre per valorizzare la ricchezza e profondità sia della matematica sia dell'esperienza vissuta dagli allievi a scuola. A partire dalla valutazione sommativa, potrebbero avviare un dialogo con il docente di matematica per individuare cause e modalità di recupero personalizzate senza ridurre il percorso dello studente a un freddo numero che cancellerebbe in un batter d'occhio la complessità e dinamicità dell'apprendimento in matematica.
Vorrei concludere evidenziando che le tesi proposte nel testo sono frutto della pluridecennale ricerca in didattica della matematica, che l'Autrice ha reso accessibile con chiarezza e al contempo con rigore scientifico.

Bibliografia

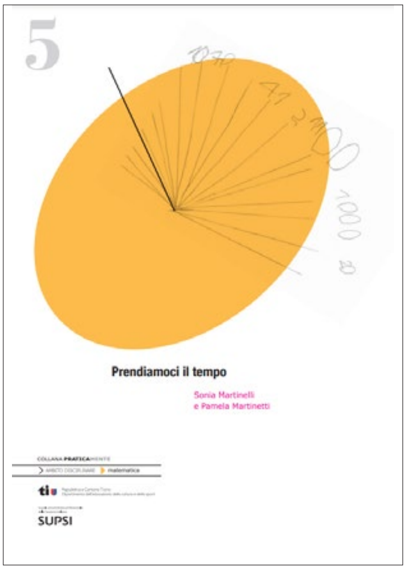
Brousseau, G. (1980). L'echec et le contrat. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *41*, 177–182.

Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational research*, *79*, 258–266.

Robinson, K. (2009). *The element*. Penguin.

Giorgio Santi
Università di Macerata, Italia
Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica di Bologna, Italia

Martinelli, S., & Martinetti, P. (2021). ***Prendiamoci il tempo*****. Collana Praticamente. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport e Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Disponibile a questo link**



Che cos'è il tempo? Una domanda difficile, non solo per i bambini, ma anche per gli adulti. Questa domanda ha attanagliato scienziati, filosofi e pensatori fin da tempi antichissimi. Ci sentiamo affascinati e quasi travolti da questa grandezza che non si può né toccare né manipolare. Alle prese con lo scorrere inesorabile e inarrestabile del tempo, l'uomo è riuscito nel corso dei secoli a utilizzarlo per scandire la vita quotidiana e a misurarlo costruendo strumenti sempre più sofisticati, avendo per un attimo l'impressione e l'illusione di afferrarlo e di catturarlo.
Le autrici del quaderno "Prendiamoci il tempo", docenti della scuola dell'infanzia, non hanno avuto paura di porre questa difficile domanda ai loro piccoli allievi, aprendo così le porte a un affascinante viaggio alla scoperta delle sfaccettature del concetto di tempo, della sua rappresentazione, stima e misura. Si tratta del quarto quaderno didattico a cura dal Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, pubblicato nella collana *Praticamente*.
Il titolo è una vera e propria esortazione rivolta ai docenti di scuola dell'infanzia e di scuola elementare: occorre *prendersi il tempo* per riflettere e lavorare con gli allievi su questo tema cruciale per la loro crescita. Tra i traguardi di competenza previsti dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) al termine del primo ciclo, non a caso, il tempo ha un ruolo determinante: un intero traguardo è infatti dedicato a sapersi situare nel tempo della vita quotidiana e orientarsi nella ciclicità e ricorsività degli eventi.
Sviluppare questo traguardo consente al bambino di anticipare e collocare gli avvenimenti, di immaginare e organizzare la propria vita, costruendo con sempre maggiore consapevolezza la propria identità. In questo fondamentale percorso di crescita l'allievo dovrà anche confrontarsi con i vari fattori che influenzano la percezione soggettiva del tempo (sforzo, soddisfazione, interesse ecc.) e con l'oggettività del tempo che passa, imparando un po' alla volta anche a gestire le emozioni legate a questo argomento.
Mantenendo ben fermi questi capisaldi, il libro propone percorsi e attività originali e significativi per lo studio del tempo nelle sue molteplici forme. Attraverso filastrocche, proverbi, canzoni, letture, disegni e giochi, i bambini cercano di catturare l'essenza del tempo. È un tempo *soggettivo* quando

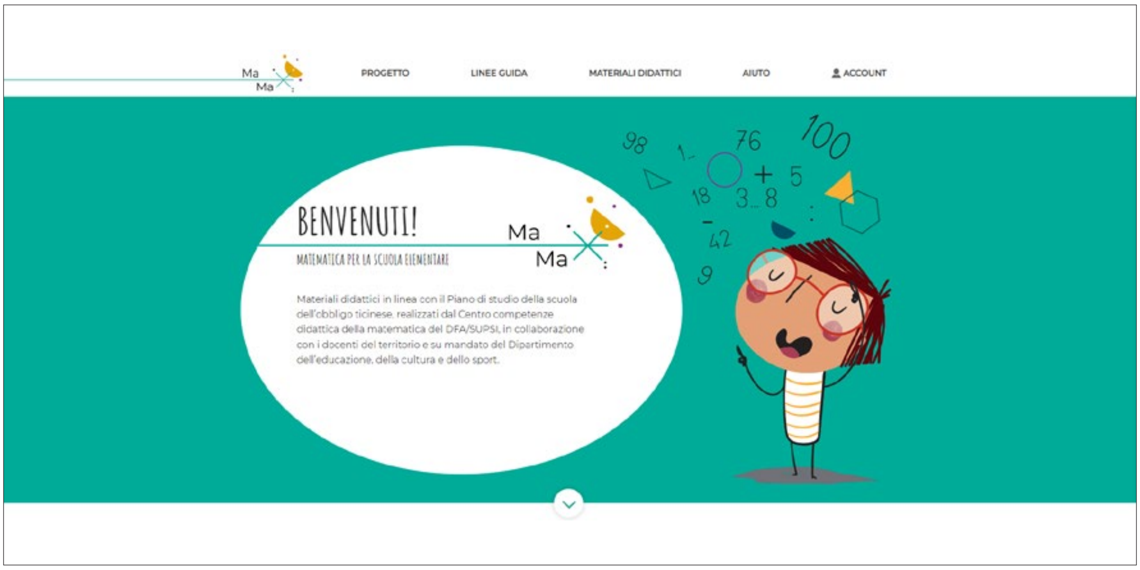
ne percepiscono lo scorrere e ne stimano la durata; *oggettivo* quando lo misurano con meridiane o clessidre progettate e costruite da loro. È un tempo *ciclico* quando rituali e attività si ripetono nell'arco della giornata, della settimana, delle stagioni, dei mesi; *lineare* quando si ordinano e collocano eventi nel tempo della memoria.
Le autrici curano in modo attento anche gli sviluppi che i percorsi da loro progettati, sperimentati e descritti in questo libro possono avere in continuità con la scuola elementare, come le attività legate al calendario o le rappresentazioni del tempo ciclico che utilizzano la stravagante superficie matematica del nastro di Möbius.
Questa fonte preziosissima di idee e laboratori è arricchita dai numerosissimi disegni dei bambini e dalle frizzanti vignette di Christian Demarta, basate su brillanti giochi di parole che forniscono degli spunti anche per lavorare sul lessico relativo al tempo.
L'insegnamento e l'apprendimento delle conoscenze e delle competenze che ruotano attorno alla grandezza tempo richiedono tempo, un tempo lungo e lento per poter andare in profondità nelle cose, per far emergere le concezioni e costruire sulle conoscenze pregresse. È un tempo che non si ha mai la sensazione di perdere e che, come ci ricordano le autrici, è fondamentale prendersi.

Bibliografia

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* Divisione scuola, DECS.

Monica Panero
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021). *MaMa: matematica per la scuola elementare*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. Disponibile al seguente link



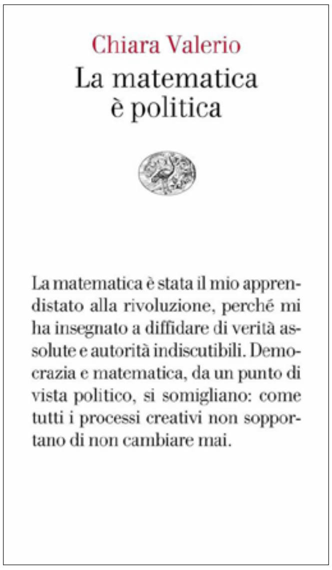
Promuovere un apprendimento della matematica efficace, coinvolgente e in linea con le indicazioni del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*: questo era l'intento del Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS) quando, nel 2019, ha preso la decisione di avviare il progetto *MaMa – Matematica per la scuola elementare*.
Un progetto estremamente ambizioso, che nasce dall'esigenza, manifestata da direttori e docenti del territorio, di avere a disposizione dei materiali didattici che fossero utili ed efficaci per progettare e proporre in classe delle attività di matematica ricche e significative.
Dopo due anni di intenso lavoro, coordinato dal Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, dall'8 dicembre 2021 è disponibile nella piattaforma mama.edu.ti.ch il materiale relativo all'ambito di competenza *Numeri e calcolo* per le classi I e II elementare. Nei prossimi anni saranno creati e resi disponibili i materiali dell'ambito *Numeri e calcolo* per il II ciclo della scuola elementare e quelli relativi agli altri due ambiti *Geometria* e *Grandezze e misure* previsti dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*.
La struttura delle proposte MaMa è articolata e composita, e può essere suddivisa in due categorie: materiali rivolti ai docenti e materiali rivolti agli allievi.
I materiali docenti sono di varia natura:

- *Linee guida.* Documento utile per la fase di progettazione, dove viene esplicitato l'inquadramento disciplinare teorico-didattico per ogni argomento e contenuto (matematica, aspetti didattici e cenni storici).
- *Contesti di senso.* Contesti vicini alla realtà dell'allievo che possono favorire situazioni problema che coinvolgono più discipline.
- *Pratiche didattiche.* Proposte che tengono in considerazione l'importanza dell'apprendimento attivo e del fare, ossia dell'imparare facendo.
- *Problemi.* Proposte per sviluppare negli allievi la competenza di saper applicare la matematica per comprendere e risolvere problemi reali.
- *Giochi.* Attività ludiche per imparare la matematica giocando.
- *Supporti.* Materiale concreto di supporto alle attività dei docenti.

I materiali per gli allievi, progettati per essere usufruiti direttamente dai bambini, sono raccolte di schede didattiche, in formato .pdf. Le schede per l'allievo sono modificabili e facilmente differenziabili dai docenti in base alle competenze degli allievi. Nelle schede è possibile riformulare le consegne, i testi dei problemi e degli esercizi e gli inserti teorici; è inoltre possibile agire sul campo numerico degli esercizi e, in alcuni casi, modificare le quantità delle collezioni illustrate: questo permette al docente di complicare o di facilitare le richieste a seconda delle esigenze degli allievi, mantenendo la stessa tipologia di problema o di esercizio e un layout comune per tutti.
Come si evince dall'analisi della struttura e dalla ricchezza delle proposte, MaMa è un progetto rivoluzionario, prima di tutto perché va a cucire tra loro in modo indissolubile la dimensione della ricerca in didattica della matematica e la dimensione della quotidianità e delle prassi scolastiche. In questo senso, MaMa è infatti un progetto *di* tutti, perché le sue proposte sono state prodotte tenendo conto delle efficaci pratiche e delle tradizioni del territorio ticinese, a cui sono poi state integrate le innovazioni e le evidenze rilevate dalla ricerca scientifica in didattica della matematica.
Ma MaMa è anche un progetto *per* tutti, perché i materiali realizzati possono essere personalizzati da ogni utente in modo da adattarsi al meglio ai diversi contesti d'insegnamento e alle esigenze d'apprendimento dei singoli allievi, ciascuno unico e diverso dagli altri.
Con questi materiali, insomma, non si potrà più sostenere l'impossibilità di fare una didattica in classe che tenga conto delle riflessioni della ricerca, e allo stesso tempo non si potrà più tacciare la ricerca di essere idealistica e avulsa dalla realtà della scuola. A tutti coloro che hanno creduto e credono nel progetto, a tutti coloro che ci hanno lavorato e lavorano tutt'ora – insegnanti e ricercatori in primis, ma anche grafici, web designer – non si può che dire, con profonda gratitudine: bravi.

Michele Canducci
Liceo Scientifico "A. Einstein" di Rimini, Italia

Valerio, C. (2020). *La matematica è politica*. Einaudi.



«Bisogna dar ragione a Bertrand Russel quando osserva: le matematiche sono quella scienza, in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se ciò che si dice sia vero» (p. 3). Così inizia il libro di Chiara Valerio, scrittrice e curatrice editoriale con un bagaglio di studi matematici alle spalle.
Un incipit di questo tipo mette subito in evidenza un assunto, e cioè che le matematiche sono, lungi dal ridursi a mero tecnicismo, espressione della capacità umana di porsi domande che vanno al di là del concreto. Poi però, al concreto, l'essere umano ha bisogno di tornarci, probabilmente perché fatto di materia, corpo e ossa, e così il fare matematica diventa un continuo andirivieni tra mondo astratto e mondo reale. In quest'ottica, tutto il testo è intriso di riflessioni che vanno a specificare e approfondire la tesi centrale del libro: la matematica è politica, nel senso che può essere strumento e prospettiva con la quale leggere la realtà, sociale e culturale, nella quale siamo immersi.
Chiara Valerio si situa in questo sottile equilibrio con l'animo di chi, pur avendo smesso di risolvere equazioni differenziali e calcolare integrali, non può fare a meno di pensare il mondo – e stare nel mondo – con una sorta di "tara matematica", fatta di funzioni e relazioni, strutture, giochi più o meno formali tra le parti.
Nei vari capitoli del libro, l'Autrice regala al lettore suggestive analogie, con le quali si cerca di costruire un ponte di senso fra alcune idee e oggetti che popolano il mondo delle matematiche e la società in cui viviamo. Stuzzicante è, per dirne una, l'analogia con la quale si lega il concetto di superadditività in matematica all'idea di una specie di superadditività dell'essere umano e della democrazia. Una funzione, in matematica è superadditiva se $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$; ad esempio, la funzione che associa a ogni numero intero positivo il suo quadrato è superadditiva, infatti $(x + y)^2$, con x e y interi positivi, è sempre maggiore di $x^2 + y^2$ (provare per credere). Così, anche l'essere umano e la democrazia godono di una proprietà simile: nessuno di noi, sostiene la Valerio, è la sola somma dei propri dati biologici, giuridici, virtuali, ma qualcosa in più; e anche la democrazia, nella sua declinazione operativa di Stato, è qualcosa di più rispetto all'azione congiunta (sommata) di potere legislativo, esecutivo e giudiziario.
Insomma, da tutto quello che scrive si vede che per l'Autrice la matematica è un amore ancora ben vivo. E non è l'unico, a quanto pare. Sì, perché, ad esempio, il libro è intriso di riflessioni e racconti legati alla storia e all'epistemologia della matematica. O ancora, diversi paragrafi si occupano di quei luoghi dove la matematica viene appresa, mostrando una sensibilità al tema dell'educazione matematica delle giovani generazioni. Da insegnante, non posso che apprezzare enormemente i continui

ammiccamenti al mondo della scuola e dell'istruzione in generale; soprattutto laddove vengono proposti argomenti a favore di una visione umanistica della matematica, e più in generale di una cultura non iper-specializzata e a compartimenti stagni.

Michele Canducci
Liceo Scientifico "A. Einstein" di Rimini, Italia