Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 13

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Impaginazione:
Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
matematica

13

Maggio 2023

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), I - II, DOI:10.33683/ddm.23.13.0
OPEN ACCESS

Editoriale

La rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* giunge al tredicesimo numero, il primo dell'anno 2023. Inaugura così il suo settimo anno di vita all'interno del Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI. Centro che si propone di promuovere e diffondere ricerche, riflessioni, progetti, pratiche, votati all'approfondimento dei numerosi aspetti che compongono la complessa e affascinante disciplina della didattica della matematica. Tra le tante esperienze significative promosse in questi anni, vogliamo qui ricordare il lavoro interdisciplinare svolto in seno al progetto del Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico*; un progetto che ha saputo unire il mondo della matematica a quella della linguistica. Da questo progetto di ricerca quadriennale è poi nato un ulteriore progetto, di vocazione più divulgativa, che prevede la creazione di contenuti testuali di diversa natura, sempre focalizzati sull'intreccio delle due discipline. Una delle attività del progetto in questione ha previsto l'organizzazione di un concorso letterario-matematico dal titolo *Matematica a parole* che ha ricevuto, proprio nei mesi di preparazione di questo numero della rivista, più di cinquecento contributi provenienti da studenti e adulti ticinesi e italiani. Reputiamo questo risultato un grande successo e un ulteriore indizio dell'importanza di un lavoro sinergico tra le dimensioni della ricerca e quelle delle ricadute concrete, tanto in termini d'aula, quanto in termini di divulgazione a tutta la popolazione. È proprio da questa convinzione che otto anni fa è nata l'idea di strutturare questa rivista in due sezioni distinte, ma allo stesso tempo sempre più unite, *Riflessione e ricerca* ed *Esperienze didattiche*.

Il primo articolo della sezione *Riflessione e ricerca* di questo numero presenta i risultati relativi a uno studio di caso in cui tre studenti universitari interagiscono nella risoluzione di un problema; attraverso l'analisi dei processi di spiegazione condotti da una studentessa che si interfaccia con le difficoltà dei due compagni, il contributo mette in luce il ruolo del ragionamento a ritroso e le sue relazioni con quello in avanti. Il secondo articolo propone un'indagine riguardante l'influenza che potrebbe avere la metodologia didattica del *flipped learning* sui fattori motivazionali nell'insegnamento-apprendimento della matematica; l'analisi di circa 200 testi narrativi prodotti da studenti di scuola secondaria di secondo grado[1] al termine di una sperimentazione, mostra che l'apprendimento capovolto può influenzare positivamente fattori motivazionali, in particolare quelli legati a elementi intrinseci. Il terzo articolo analizza un'attività didattica, incentrata sulle altezze dei triangoli, sperimentata in classi seconde di scuola secondaria di primo grado;[2] l'attività, un gioco-indagine con feedback digitale implementato in GeoGebra, è seguita da una discussione collettiva, da cui vengono estrapolati e analizzati alcuni estratti che mostrano le potenzialità di una progettazione didattica attenta al delicato rapporto fra componenti concettuali e componenti figurali dell'apprendimento della geometria.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Il primo contributo descrive un percorso didattico svolto in una classe di seconda media allo scopo di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei problemi di matematica; in particolare, si mostra come un itinerario pensato per approfondire e raffinare

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde con l'ultimo anno di scuola media e gli anni di scuola media superiore o professionali nel Canton Ticino.
2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

la consapevolezza degli allievi rispetto alle diverse tipologie di analogia favorisca un processo di transfer di conoscenze e un atteggiamento esplorativo aperto alla risoluzione di situazioni inedite. Il secondo contributo ripercorre le numerose attività matematiche di un percorso didattico alla scoperta del sistema solare, vissuto dagli allievi di una sezione dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia; scopo del percorso è avviare i bambini allo sviluppo di importanti prerequisiti utili per affrontare la scuola elementare con sicurezza: la conoscenza dei concetti topologici e delle relazioni spaziali, il potenziamento delle funzioni esecutive, le capacità di enumerazione e di conteggio. Il terzo contributo presenta una sperimentazione, svolta in una terza media, composta da attività ludodidattiche alternate ad attività di insegnamento tradizionale; lo scopo dell'articolo è quello di indagare lo sviluppo delle convinzioni degli allievi riguardo al ruolo delle attività ludodidattiche nell'apprendimento della matematica e il relativo incremento della motivazione durante le ore di lezione; i risultati mostrano come, a seguito dell'intervento didattico, si sia verificato nella maggioranza dei casi un cambio di convinzioni a favore della significatività delle attività ludodidattiche nell'apprendimento della matematica. Infine, il quarto contributo descrive un'esperienza didattica, svolta in una classe di quarta media, composta da molteplici attività volte a promuovere l'uso di diversi registri semiotici nei processi di matematizzazione e modellizzazione; lo scopo dell'articolo è quello di indagare le convinzioni e le competenze degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella comprensione e risoluzione di una situazione matematica; i risultati mostrano come incoraggiare un uso consapevole di registri e rappresentazioni semiotiche favorisca una comprensione più profonda dei problemi matematici e dei loro processi risolutivi.

La grande varietà di temi e di contesti di ricerca e di sperimentazione presenti in questo numero della rivista rispecchia la grande vitalità del mondo della ricerca e della scuola che accompagna la quotidianità di ricercatori, docenti e allievi.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), III - IV, DOI:10.33683/ddm.23.13.0 OPEN ACCESS

Editorial

The *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* journal is now in its thirteenth issue, the first in 2023. It thus ushers in its seventh year within the Centro competenze didattica della matematica of the SUPSI Dipartimento formazione e apprendimento. The Centre aims to promote and disseminate research, reflections, projects and practices, devoted to the in-depth study of the many aspects that make up the complex and fascinating discipline of mathematics education. Among the numerous significant experiences promoted in recent years, we would like to mention here the interdisciplinary work carried out as part of the project funded by Swiss National Science Foundation, called *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico.* This four-year research project managed to combine the mathematics and linguistics worlds, giving rise to a further dissemination project which involves the creation of different textual contents always focusing on the intertwining of these two disciplines. One of the activities of this project provided for the organisation of a literary-mathematical contest entitled *Matematica a parole* which received, in the months leading up to this journal issue, more than five hundred submissions drawn up by students and adults from Ticino and Italy. We consider this result a great success and a further indication of the importance of a synergetic work between research dimensions and concrete effects, in terms of both classroom practices and dissemination to the entire population. It is precisely this conviction that eight years ago gave rise to the idea of structuring this journal into two distinct but at the same time increasingly united sections, *Riflessione e ricerca* and *Esperienze didattiche*.

The first article in the *Riflessione e ricerca* section of this issue presents the results of a case study in which three undergraduate students interact in solving a problem; through the analysis of the explanation processes conducted by a student who interfaces with the difficulties of her two classmates, the contribution highlights the role of backward reasoning and its relationship with forward reasoning. The second article proposes an investigation into the influence that the didactic methodology of the flipped learning could have on motivational factors in mathematics teaching-learning processes; the analysis of about 200 narrative texts produced by Italian upper secondary school[1] students at the end of a teaching experiment shows that flipped learning can positively influence motivational factors, particularly those linked to intrinsic elements. The third article analyses a didactic activity, centred on the heights of the triangles, experimented in 7th grade Italian lower secondary school[2] classes; the activity, an inquiring-game with digital feedback implemented in GeoGebra, is followed by a class discussion, from which excerpts have been extrapolated and analysed showing the potential of a didactic design that is attentive to the delicate relationship between conceptual and figural components of the learning of geometry.

There are four articles in the *Esperienze didattiche* section. The first contribution describes a didactic itinerary carried out in a 7th grade class with the aim of investigating the development of students' beliefs and skills regarding the use of analogy in solving mathematical problems. In particular, it is shown how an itinerary, designed to deepen and refine students' awareness of different types of analogy, favours a process of knowledge transfer and an exploratory attitude open to solving unknown situations. The second contribution retraces the numerous mathematical activities of a didactic itin-

1. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.
2. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.

erary to discover the solar system, as experienced by the pupils attending the last year in a kindergarten section. The aim of the itinerary is to initiate the children into the development of important prerequisites useful for tackling primary school with confidence: knowledge of topological concepts and spatial relations, the strengthening of executive functions, enumeration and counting skills. The third contribution presents an experiment, carried out in an 8th grade class, consisting of game-based learning activities interchanging with traditional ones; the aim of the paper is to investigate the development of students' beliefs regarding the role of game-based learning activities in mathematics and the relative motivation increase during class time. The results show that, after the teaching and learning experience, in the majority of the cases, there was a change in the students' beliefs in favour of the significance of game-based learning activities in mathematics. Finally, the fourth contribution describes a didactic experience, carried out in a 9th grade class, consisting of multiple activities aimed at promoting the use of different semiotic registers in the mathematisation and modelling processes; the aim of the paper is to investigate the students' beliefs and skills regarding the use of semiotic representations in understanding and solving a mathematical situation; the results show how encouraging a conscious use of semiotic registers and representations fosters a deeper understanding of mathematical problems and their solving processes.

The great variety of topics and contexts in terms of both research and experiment illustrated in this journal issue reflects the great vitality of the research and school worlds that accompanies the everyday life of researchers, teachers and students.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 9 - 33, DOI: 10.33683/ddm.23.13.1

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Dinamicità del ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione

Backward reasoning dynamism in explanation processes

Marta Barbero
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI – Locarno, Svizzera

✉ marta.barbero@supsi.ch

Sunto / Il contributo presenta i risultati relativi a uno studio di caso in cui tre studenti universitari del Master in Informatica interagiscono nella risoluzione di un problema. Attraverso lenti interpretative epistemiche e linguistiche (le dimensioni del ragionamento a ritroso e la prospettiva della Commognition), si mette in luce il ruolo del ragionamento a ritroso e le sue relazioni con quello in avanti nei processi di spiegazione condotti da una studentessa che si interfaccia con le difficoltà dei suoi compagni.

Parole chiave: ragionamento a ritroso; risoluzione di problemi; dimensioni cognitive; processi di spiegazione; Commognition.

Abstract / The paper presents the results of a case study in which three undergraduate students from the Master's programme in Computer Science interact in solving a problem. The role of backward reasoning and its relations to forward reasoning, in the explanation processes carried out by a student who interfaces with the difficulties of her peers, are highlighted through epistemic and linguistic interpretative lenses (the backward reasoning dimensions and the perspective of Commognition).

Keywords: backward reasoning; problem solving; cognitive dimensions; explanation processes; Commognition.

1 Introduzione

In matematica, il solo ragionamento in avanti (*forward reasoning*), ovvero quel tipo di ragionamento che parte dalle premesse per arrivare alle conclusioni, non è esaustivo per assolvere al compito di risolvere i problemi. Il modo naturale per affrontare un problema, infatti, richiede diversi tipi di ragionamento come quello deduttivo, quello induttivo, quello abduttivo, quello a ritroso ecc. (per approfondire i diversi tipi di ragionamento si vedano, ad esempio, Hintikka, 1999; Lakatos, 1976; Peirce, 1932), che corrispondono a diversi modi di ragionare e pensare da un punto di vista cognitivo (Holyoak & Morrison, 2015). L'intreccio tra i tipi di ragionamento viene evidenziato fin dall'antichità dai grandi matematici come Pappus, Descartes, Leibniz ecc. nelle loro dissertazioni su *analisi* e *sintesi*,[1] i due processi cardine nella risoluzione di problemi. Guardando al metodo dell'*analisi*, si possono infatti identificare diverse tipologie di passi logici: oltre a quelli in avanti, che permettono di individuare una conseguenza di "ciò che si cerca" (la fine del problema), sono inclusi nel processo tutti quei passi logici che permettono di avanzare nella risoluzione del problema in direzioni diverse, ad esempio, quelli all'indietro, verso l'ipotesi del problema (Beaney, 2018; Peckhaus, 2002).
Una delle modalità di pensiero coinvolta nel metodo dell'*analisi* è proprio il ragionamento a ritroso, conosciuto in letteratura con diverse denominazioni, quali ad esempio *backward reasoning*, ragionamento regressivo, analisi regressiva, soluzione a ritroso ecc. Esso viene utilizzato nelle fasi di scoperta del problem solving e ha un'importanza fondamentale anche nei metodi di programmazione (Hintikka & Remes, 1974; Mäenpää, 1998). Da un lato, lo studio del ragionamento a ritroso ha un grande potenziale nel campo dell'educazione matematica: lavorare su questo tipo di ragionamento può infatti aiutare gli studenti nello sviluppo dell'argomentazione matematica, dei processi di scoperta e dei processi di dimostrazione (Tall, 2002). Dall'altro lato, numerosi autori (Barbero, 2015; Byers, 2007; Corbalán, 1994; Hintikka & Remes, 1974) riscontrano nei diversi livelli scolastici difficoltà nell'utilizzo e nella comprensione del ragionamento a ritroso come procedura generale, sottolineando per esempio che è più difficile lavorare all'indietro che in avanti.
Si evidenza quindi la necessità di approfondire l'articolazione tra gli aspetti epistemologici e cognitivi del ragionamento a ritroso nella risoluzione di problemi per poter efficacemente integrare lo studio e l'applicazione di questo tipo di ragionamento nell'apprendimento della matematica. Questo è stato l'obiettivo di un lavoro di tesi di dottorato (Barbero, 2020) che si è innestato all'interno di un progetto di ricerca più ampio relativo all'innovazione della didattica della matematica a livello universitario sviluppato presso la Universidad Complutense de Madrid (Spagna) a partire dal 2013.
L'obiettivo del presente contributo, tratto dal lavoro di tesi, è di mettere in luce il ruolo del ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione relativi alla risoluzione di un problema. A questo scopo viene presentato un episodio in cui tre studenti universitari del Master in Informatica interagiscono durante una lezione dedicata alla programmazione. L'episodio coinvolge una studentessa, Elodie,[2] con un background più avanzato rispetto ai compagni di corso e che ha già risolto in precedenza il problema proposto, e due suoi compagni che le chiedono aiuto nella risoluzione. L'analisi fine della trascrizione dell'episodio (disponibile nell'Allegato 1), che avviene attraverso due lenti interpretative (le dimensioni epistemiche del ragionamento a ritroso e la prospettiva della Commognition, che verranno approfondite nei par. 2 e 3), permette di identificare i momenti in cui si sviluppa il ragionamento a ritroso e i dispositivi discorsivi che

1. Per quanto riguarda la caratterizzazione di *analisi* e *sintesi* si riportano le parole di Pappus nella traduzione di Hintikka e Remes (1974): «Nell'analisi, partiamo da ciò che è richiesto, come se fosse ammesso; e ne traiamo corrispondenze logiche fino ad arrivare a qualcosa che possiamo usare come punto di partenza nella sintesi. […] Nella sintesi, invece, supponiamo che ciò che è stato raggiunto per ultimo nell'analisi sia già stato ottenuto, e disponendo nel loro ordine naturale, come conseguenze logiche, le corrispondenze ottenute in precedenza e collegandole le une con le altre, arriviamo alla fine alla costruzione della cosa cercata» (pp. 8-9, traduzione dell'autrice).
2. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i loro nomi sono stati cambiati.

vengono attivati. Grazie all'analisi, le relazioni tra ragionamento a ritroso e ragionamento in avanti vengono messe in luce per identificare la struttura della spiegazione di Elodie e il suo legame con le difficoltà che vengono esplicitate dai suoi compagni.

2 Il ragionamento a ritroso

Il ragionamento a ritroso consiste nello sviluppare una serie di passi logici a partire dalla fine del problema (ovvero ciò che viene richiesto o si congettura di trovare, dimostrare, costruire) procedendo per corrispondenze logiche verso le sue premesse, fino ad ottenere qualcosa di noto, determinando quindi le condizioni per la sua soluzione (Hintikka & Remes, 1974). Utilizzato da solo non è sufficiente per risolvere un problema o per realizzare una dimostrazione, ma è la base fondamentale per sviluppare altri tipi di ragionamento, necessari per giungere alla soluzione, che vengono coinvolti nel processo di *sintesi*. Il ragionamento a ritroso ha una forte componente di creatività e scoperta caratterizzata dall'inserimento di nuovi elementi nella risoluzione; inoltre, diverse strategie e modi di procedere nella risoluzione dei problemi si sviluppano incardinandosi in esso (come la strategia del lavorare a ritroso, la strategia dell'assunzione del problema risolto, la Reductio ad Absurdum, la strategia del partire dalla fine del problema ecc.), presentandosi singolarmente o in combinazione tra loro a seconda del tipo di problema e del percorso di risoluzione o di costruzione scelto dal risolutore (Barbero & Gómez-Chacón, 2018).
Il ragionamento a ritroso quindi, come la sua controparte in avanti, è coinvolto negli aspetti pragmatici della risoluzione dei problemi, ma diversamente da quello in avanti necessita di un alto livello di astrazione per essere utilizzato; si basa infatti sul guardare le cose in modo nuovo e non routinario e ha un ruolo centrale nello sviluppo del pensiero matematico avanzato, dove i processi astratti sono predominanti. Infatti, mentre l'insegnamento del ragionamento in avanti e dei processi deduttivi è tipico del pensiero matematico in cui è necessario seguire le routine riproduttive, il ragionamento a ritroso diventa fondamentale quando sono coinvolti processi di dimostrazione più creativi (Tall, 2002).

2.1 Dimensioni epistemiche del ragionamento a ritroso

Per definire formalmente il concetto di ragionamento a ritroso, è stata condotta una ricerca storico-filosofica, studiando i lavori di matematici e filosofi, dall'Antica Grecia fino ai giorni nostri, relativi al tema dell'*analisi* (Beaney, 2018).[3] Questa revisione della letteratura ha permesso di osservare l'evoluzione del tema nel corso della storia e di individuare i tratti comuni che caratterizzano la sua componente di ragionamento a ritroso, identificando quattro dimensioni epistemiche: *ricerca di relazioni di causa-effetto, breakdown, trasformazione, introduzione di nuovi elementi*. Le quattro dimensioni epistemiche individuate permettono di definire il concetto di ragionamento a ritroso e risultano fondamentali per la sua identificazione, lettura e interpretazione nei processi di risoluzione.

Ricerca di relazioni di causa-effetto. Gli autori dell'Età antica (Aristotele, Platone, Pappus, Proclo ecc.) sottolineano soprattutto il carattere regressivo dell'*analisi*, identificandolo come un processo "in direzione contraria" che ha lo scopo di trovare i principi del problema. Nel corso del XVII e XVIII secolo, autori come Arnauld e Nicole propongono una interpretazione diversa di questa dimensione,

3. La sezione "Definitions and Descriptions of Analysis" della Stanford Encyclopedia of Philosophy (nella sua versione online) raccoglie frammenti di testi di 56 autori diversi per un totale di oltre 160 citazioni. Si tratta di una sezione supplementare alla voce "Analysis" (Beaney, 2018). Per ogni autore, vengono mostrati e ordinati in un elenco numerato diversi estratti delle loro opere, incentrati sul tema dell'*analisi* e della *sintesi*. La sezione è disponibile a questo link: https://plato.stanford.edu/entries/analysis/s1.html

connotandola come la ricerca di relazioni di causa-effetto tra le idee, che permettono di identificare connessioni tra le nozioni di base e il problema in oggetto; questa concezione verrà ripresa nell'Età contemporanea da autori come Husserl e Frege (Beaney, 2018; Peckhaus, 2002).

Breakdown.[4] Il termine *breakdown* è inteso come scomposizione di qualcosa in parti, in modo da poterlo analizzare dettagliatamente;[5] questa caratterizzazione è al centro delle ricerche condotte nell'Età moderna (da autori come Descartes, Hegel, Leibniz ecc.), dove viene messo in luce il processo in cui un concetto viene scomposto nei suoi elementi primari, rendendo evidente la sua struttura logica. Il ragionamento a ritroso, infatti, comporta azioni che permettono di ridurre il problema alle sue componenti di base, identificando le proprietà coinvolte e mostrando le relazioni tra gli oggetti più complessi e quelli più semplici; già Aristotele, ad esempio, sottolineava il fatto che «a volte, per risolvere un problema geometrico si può solo analizzare una figura», ovvero scomporla nei suoi elementi di base e capire le parti da cui è formata (Beaney, 2018).

Trasformazione. Gli autori dell'Età contemporanea (Frege, Russell, Moore, Wittgenstein ecc.) focalizzano la loro attenzione su quella che Beaney (2018) chiama «dimensione trasformativa e interpretativa dell'analisi», ovvero sugli enunciati e sulla loro traduzione in forma logica. Già nel Medioevo, infatti, con la nascita della geometria analitica, e successivamente con la filosofia analitica, viene studiato il ruolo di questo tipo di ragionamento nell'interpretazione dei concetti e nelle conversioni tra registri semiotici, come ad esempio nelle trasformazioni in linguaggio algebrico di entità geometriche (Beaney, 2018).

Introduzione di nuovi elementi. Dallo studio degli autori, si delinea chiaramente che l'introduzione di nuovi elementi all'interno della risoluzione di un problema è parte fondamentale del ragionamento a ritroso. Infatti, a differenza dei processi deduttivi e, in generale del ragionamento in avanti, dove si inizia con tutte le premesse e da queste vengono elaborate le conseguenze, nel ragionamento a ritroso le nozioni ausiliarie necessarie alla risoluzione vengono inserite e si sviluppano in base alle esigenze del risolutore (Beaney, 2018; Hintikka & Remes, 1974; Polya, 1945).

Le quattro dimensioni risultano essere facce diverse dello stesso costrutto; ragionare a ritroso nella risoluzione di un problema consiste, infatti, nell'interpretare un'entità, tradurla in linguaggio matematico, identificarne gli elementi rilevanti e trovarne i principi, inserendo dove necessario degli elementi ausiliari all'interno del processo. Questi processi portano a qualcosa di noto da cui successivamente si può procedere progressivamente. Consideriamo ad esempio la risoluzione di un problema in cui è presente una costruzione geometrica: la dimensione di *breakdown* si manifesta quando il risolutore analizza la costruzione geometrica e la scompone in elementi più semplici; quando egli, invece, cerca le premesse per la costruzione considerata concepiamo il ragionamento a ritroso come *ricerca di relazioni di causa-effetto*; mentre la dimensione di *trasformazione* emerge quando il risolutore trasforma il linguaggio geometrico in linguaggio algebrico. L'*introduzione di nuovi elementi* si può riscontrare quando vengono inseriti elementi ausiliari nel processo di risoluzione che possono essere delle costruzioni geometriche più complesse, ma anche teoremi ausiliari, possibili relazioni tra elementi ecc. Sono questi elementi aggiuntivi che, entrando in gioco durante il processo, permettono di arrivare ad un qualcosa di noto da cui poter partire con i processi di *sintesi*. La possibilità di risolvere il problema, però, è concessa solo se i passi all'indietro possono essere invertiti in qualche modo, ovvero solo quando le premesse possono essere collegate all'obiettivo con una serie di passaggi logici, cosa che si verifica solo se gli elementi ausiliari ipotizzati sono reversibili (Hintikka & Remes, 1974).

4. Nel contributo si è scelto di non tradurre il termine "breakdown" poiché si ritiene che racchiuda maggiore significato del semplice termine "scomposizione" con il quale viene tradotto in italiano.
5. Definizione di "breakdown" tratta dal Cambridge English Dictionary © Cambridge University Press.

2.2 Ragionamento a ritroso e ragionamento in avanti

Come accennato in precedenza, il ragionamento a ritroso non esiste senza la sua controparte in avanti. I due ragionamenti coesistono e si intrecciano nelle fasi di scoperta della risoluzione contribuendo entrambi alla creazione dell'oggetto soluzione. La combinazione dei due ragionamenti è ben espressa nelle parole di Arnauld e Nicole (1662/1964):

> «Questo è il modo di capire la natura dell'analisi come usata dai geometri. Ecco in cosa consiste. Supponiamo che venga presentata loro una domanda, come ad esempio se è vero o falso che qualcosa è un teorema, o se un problema è possibile o impossibile; essi assumono ciò che è in questione ed esaminano ciò che segue da questa assunzione. Se in questo esame arrivano a una verità chiara da cui l'ipotesi segue necessariamente, concludono che l'ipotesi è vera. Poi, ripartendo dal punto di arrivo, lo dimostrano con l'altro metodo che si chiama composizione. Ma se cadono in qualche assurdità o impossibilità come conseguenza necessaria della loro ipotesi, ne concludono che l'ipotesi è falsa e impossibile».
>
> (Arnauld & Nicole,1662/1964, p. 238, traduzione dell'autrice)

Questi ragionamenti sono legati a due tipi di interrogativi che emergono durante la risoluzione di un problema (Ruesga Ramos et al., 2004): utilizzando il ragionamento in avanti la domanda che ci si pone è «Cosa posso ottenere quando ho ...?», mentre utilizzando il ragionamento a ritroso «Cosa devo considerare per ottenere ...?».

Ipotizziamo che si conosca A e si voglia dimostrare, o costruire, o ottenere, B. Si potrebbe procedere da A, qualcosa di noto, e realizzare una serie di passi logici deduttivi A_1, A_2, …, A_n, utilizzando quindi il ragionamento in avanti. Effettuando questo processo, ci si pone il primo tipo di domanda: «Cosa posso ottenere quando ho A?». Ottenendo A_1 come risposta si può quindi continuare con «Cosa posso ottenere quando ho A_1?», e così via.

Si utilizza un ragionamento a ritroso, invece, quando si parte da B e retrocedendo in una serie di passi logici si arriva a B_m, chiedendosi in questo caso «Cosa devo considerare per ottenere B?». Se le due affermazioni che si ottengono (A_n e B_m) sono in corrispondenza logica, in particolare B_m è conseguenza di A_n, ed è possibile invertire il processo della sequenza logica da B a B_m con una serie di ragionamenti in avanti, il problema «Conoscendo A, dimostra (o costruisci, o ottieni) B» è risolto.

Per comprendere meglio le sequenze logiche che mettono in relazione A e B, si considera il seguente problema discusso in Arzarello (2014), mostrandone un esempio di risoluzione.

> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
> Dimostrare che esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$.

Dato il problema, è possibile identificare l'anello iniziale (A) e l'anello finale (B) della catena di ragionamenti:

– A: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
– B: Esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$.

Considerando B, per esempio, possono emergere alcune domande: «Come si fa a dimostrare che esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$?»; oppure «Quali caratteristiche devo considerare per concludere che il punto c esiste?».

Considerando A, invece, si pongono altri tipi di domande: «Quali conseguenze posso trarre dal fatto che la funzione è continua?»; oppure «Cosa significa che la funzione tende a infinito?».

Un modo per risolvere questo problema è metterlo in relazione con il Teorema dei Valori Intermedi (TVI). Un ragionamento a ritroso può consistere nel partire dall'affermazione «esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$», e ragionare nel seguente modo: «esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$

tale che $f(c) = 0$», conclusione del teorema TVI. A questo punto si potrebbero considerare le ipotesi del problema e dedurre delle affermazioni per poter applicare il teorema TVI. Si può quindi risolvere il problema seguendo i seguenti ragionamenti:

- B: Esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$;
- B_1: Esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$;
- B_2: B_1 è la conclusione del caso particolare del Teorema dei Valore Intermedi che afferma quanto segue: se f: $[x',x'']\to\mathbb{R}$ è una funzione continua con $f(x') < 0 < f(x'')$, allora esiste un valore c in $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$;
- A: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- A_1: Per ogni intero positivo M, esiste un valore N tale che per tutti gli $x > N$, $f(x) > M$;
- A_2: Esiste x'' tale che $f(x'') > M > 0$;
- A: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
- A_3: Per ogni intero negativo H, esiste un valore Q tale che per tutti gli $x < Q$, $f(x) < H$;
- A_4: Esiste x' tale che $f(x') < H < 0$;
- A_5: Considerando A_2 e A_4: $f(x') \times f(x'') < 0$;
- A: f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua;
- A_6: Se f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua allora f: $[x',x'']\to\mathbb{R}$ è una funzione continua;
- A_7: Considerando A_5 e A_6 è possibile applicare il caso particolare del Teorema dei Valori Intermedi.

A questo punto B_2 è conseguenza di A_7. Poiché i passi B – B_1 – B_2 possono essere invertiti, allora il problema è risolto. Osservando questo piccolo esempio, si può notare che il ragionamento a ritroso non ha senso senza la sua controparte in avanti.

È possibile rappresentare il flusso di ragionamenti attraverso quella che Polya (1968) definisce la *rappresentazione geometrica* della soluzione, una raffigurazione schematica in cui in alto vengono rappresentate le premesse/ipotesi del problema, in basso la sua soluzione, e tutto lo spazio tra le premesse e la soluzione è riempito dalla catena, più o meno lineare, del ragionamento. Considerando questo tipo di rappresentazione e rappresentando con delle frecce il movimento tra i passi del ragionamento (verdi per quelli in avanti e rosse per quelli a ritroso), si può rappresentare l'albero della risoluzione del problema (**Figura 1**).

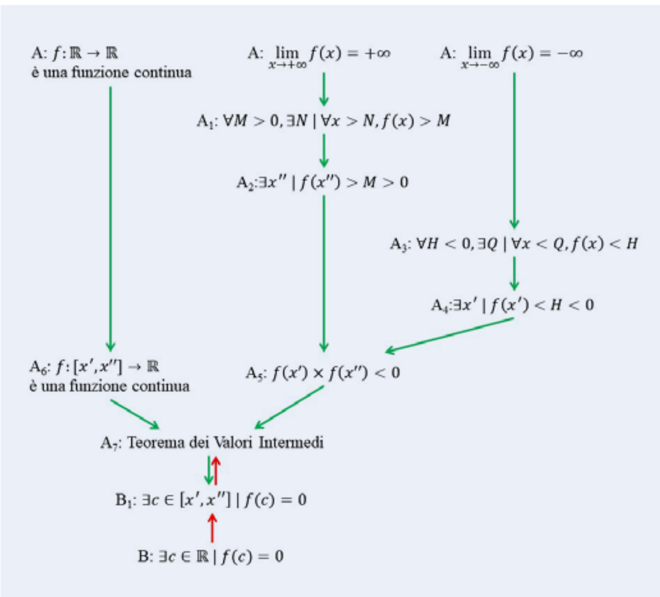


Figura 1. Rappresentazione geometrica della soluzione del problema.

Non ci si può aspettare, però, che un risolutore non esperto, che vede per la prima volta un problema di questo tipo, riesca a risolverlo in modo così lineare. Per esempio, ripercorrendo il protocollo di uno studente (analizzato in Arzarello, 2014) che riportiamo di seguito, si nota una maggiore alternanza di passi in avanti e passi a ritroso e un continuo ritornare su affermazioni già esplicitate in precedenza (indicate con A'_i o B'_j):

– B: Esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$;
– B_1: Sembra che sia possibile utilizzare il Teorema dei Valori Intermedi;
– A_1: La tesi del Teorema dei Valori Intermedi è che esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$;
– B_2: È necessario trovare $[x', x'']$;
– A: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
– A_2: Per ogni intero positivo M, esiste un valore x_M tale che per tutti gli $x > x_M$, $f(x) > M$;
– B_3: Esiste M;
– A'_2: Per ogni intero positivo M, esiste un valore x_M tale che per tutti gli $x > x_M$, $f(x) > M$;
– B_4: $M > 0$;
– A_3: Esiste $x' > x_M$ tale che $f(x') > M > 0$;
– A: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
– A_4: Esiste $x'' < x_N$ in modo che $f(x'') < N < 0$;
– A_5: Considerando A_3 e A_4: $f(x') \times f(x'') < 0$;
– B'_2: L'intervallo $[a, b]$ del Teorema dei Valori Intermedi è $[x', x'']$;
– A'_3: Esiste $x' > x_M$ tale che $f(x') > M > 0$;
– A'_5: Considerando A_3 e A_4: $f(x') \times f(x'') < 0$;
– A: $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua;
– A_6: Se $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua allora $f\colon [x',x'']\to\mathbb{R}$ è una funzione continua;
– B'_1: Ora è possibile utilizzare il Teorema dei Valori Intermedi;
– A'_1: Esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$.

Visualizzando la risoluzione graficamente, l'albero (**Figura 2**) risulta essere più intricato di quello visto in precedenza (**Figura 1**) per la presenza di un maggior numero di passi in avanti e a ritroso.

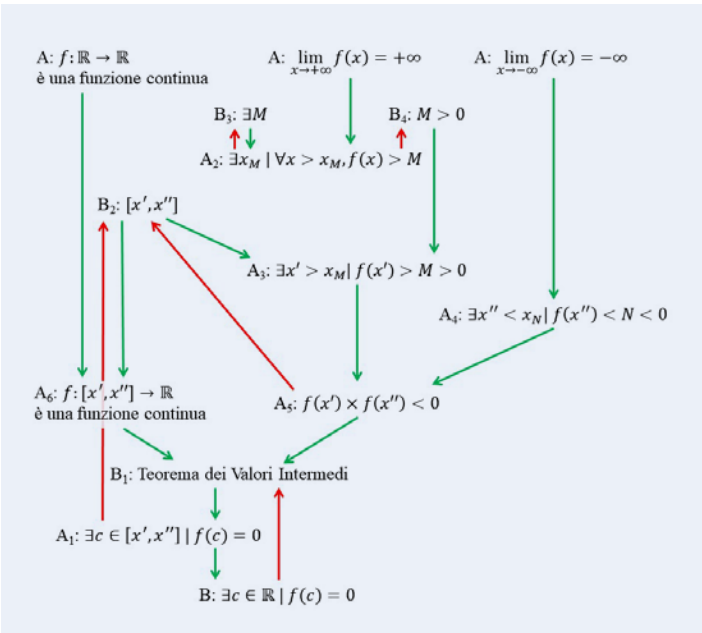


Figura 2. Rappresentazione geometrica della soluzione del problema da parte di un risolutore meno esperto.

Emerge dal confronto tra i due alberi di risoluzione che il processo di scoperta non è lineare, ma procede attraverso diverse ramificazioni. Nei risolutori meno esperti, inoltre, queste ramificazioni sono più complicate rispetto ai risolutori esperti: il ragionamento a ritroso e quello in avanti sono profondamente intrecciati.

3 La prospettiva della Commognition

Partendo dall'assunto che il pensiero umano è una forma di comunicazione, e riprendendo da Vygotskij l'idea dell'apprendimento come frutto delle interazioni sociali, è stata elaborata la prospettiva della Commognition (Sfard, 2008) secondo la quale anche il pensiero si sviluppa attraverso interazioni sociali e in particolare attraverso la comunicazione interpersonale e intrapersonale. Quest'ultima è la forma di comunicazione che permette di definire il pensiero, non è necessario che sia visibile, ovvero che sia espressa a parole: si sviluppa con sé stessi. Il pensiero e la comunicazione, quindi, sono intese come due facce della stessa medaglia e la Commognition come «la nozione centrale dell'approccio all'apprendimento fondato sull'assunto che il pensiero può essere utilmente concettualizzato come comunicazione con sé stessi» (Sfard, 2018, p. 13).
Non tutti i tipi di comunicazione sono uguali: le varie tipologie si differenziano sia per le regole sia per gli oggetti a cui si riferiscono e, a seconda delle proprie conoscenze, sono accessibili a determinate persone e non ad altre. Il linguaggio nella comunicazione della conoscenza, infatti, comprende un insieme finito di simboli arbitrari la cui manipolazione è disciplinata da un insieme di regole; se questi simboli o regole non sono noti, è impossibile partecipare al discorso. Secondo Sfard (2009) ogni discorso, infatti, è caratterizzato da: parole chiave specifiche, utilizzate con determinate regole; mediatori visivi, che permettono di identificare gli oggetti della discussione e di coordinare la comunicazione; routine, schemi ripetitivi sviluppati da chi comunica; narrazioni, approvate e confermate come verità dalla comunità che partecipa al discorso. Pensare significa quindi partecipare allo sviluppo di un certo tipo di discorso che avviene durante un'interazione interpersonale o intrapersonale (per esempio, pensare in modo matematico equivale a partecipare allo sviluppo di un discorso storico-matematico). Il discorso matematico, come ogni altro, si basa su: parole chiave relative agli oggetti della matematica, come linea, punto, insieme, funzione ecc.; mediatori visivi, come rappresentazioni numeriche, grafici, simboli algebrici; routine caratteristiche del tema, come l'azione del definire, del dimostrare, o del dedurre; narrazioni, approvate dalla comunità dei matematici nel corso degli anni, come teoremi, definizioni, regole di calcolo (Sfard, 2018, p. 2). Il discorso matematico si discosta dagli altri tipi di discorso in quanto è un sistema autopoietico, ovvero è generato dai partecipanti al discorso, dai matematici, che sviluppano gli oggetti del discorso attraverso il discorso stesso; in questo senso, è diverso da qualsiasi altro discorso scientifico: per esempio, nell'ambito della fisica il discorso si sviluppa su oggetti esistenti e i loro nomi (come massa, forza ecc.) riguardano essi e le relazioni tra di essi.
L'introduzione di entità matematiche nel discorso è ciò che Sfard chiama *oggettivazione*. Il processo di oggettivazione può essere riconosciuto all'interno del discorso matematico perché corrisponde alla comparsa di almeno uno dei seguenti dispositivi discorsivi (Sfard, 2018):

- *Saming*: introduzione di un nome comune a oggetti che all'inizio non erano in relazione, ma che possono essere equivalenti in certi contesti (per esempio: funzione quadratica, x^2, e parabola).
- *Encapsulating*: sostituzione di un discorso su oggetti separati con uno relativo a un'unica entità (per esempio: funzione, insieme).
- *Reifying*: sostituzione di un discorso relativo a un processo con un discorso relativo a un oggetto (per esempio: da «quando addiziono 5 e 7, ottengo 12» a «la somma di 5 e 7 è 12»).

Una volta che l'oggetto è stato introdotto con uno o più dispositivi, inizia il processo di *alienazione*,

che porta all'uso dell'oggetto in modo impersonale garantendo la sua esistenza indipendentemente dal discorso stesso.
Dal punto di vista della Commognition (Sfard, 2008, 2009, 2018) è fondamentale considerare ciò che accade durante il processo di acquisizione della conoscenza. L'apprendimento, interpretato come un fenomeno collettivo, si sviluppa attraverso uno specifico tipo di comunicazione: un determinato discorso sviluppato con un determinato linguaggio. Una nozione è appresa quando il discente è in grado di produrre discussioni articolate utilizzando i nuovi costrutti in modo corretto e con il significato appropriato. Il passo cruciale del processo di apprendimento è il passaggio dalla comunicazione interpersonale a quella intrapersonale. Il soggetto elabora le discussioni sviluppate con gli altri e le trasforma in comunicazione intrapersonale: solo a questo punto può utilizzarle per interagire con il mondo esterno in modo attivo per soddisfare i propri bisogni. Pertanto, comprendere la matematica significa padroneggiare una nozione matematica, una parola chiave, una routine o una narrazione, in modo da poter gestire un discorso complesso con la comunità dei matematici. Una volta acquisita una nozione, il discorso cambia e ciò corrisponde all'apprendimento di quella nozione (Sfard, 2009); da ciò segue che, per valutare i risultati dell'apprendimento, è necessario esaminare questi cambiamenti.
Sfard (2008) distingue due livelli di apprendimento: il livello-oggetto e il livello-meta. L'apprendimento a livello-oggetto si verifica durante le attività in cui non interviene nessun esperto del discorso matematico. In questo tipo di apprendimento si costruiscono nuove narrazioni deducendole da quelle già approvate. L'apprendimento a livello-meta, invece, si sviluppa quando il discente interagisce con gli esperti e avviene quando chi apprende incontra un discorso incommensurabile con il suo. Questo provoca un conflitto commognitivo, una situazione in cui «la comunicazione avviene attraverso discorsi incommensurabili» (Sfard, 2008, p. 296, traduzione dell'autrice). Per superare questo conflitto, l'allievo inizia a imitare le prestazioni dell'esperto e, così facendo, sviluppa una certa routine. In questa fase, lo studente utilizza l'oggetto matematico e sviluppa un discorso, ma non può giudicare se la narrazione matematica prodotta sia approvata o meno. In seguito, il processo di apprendimento procede attraverso una de-ritualizzazione, in cui gradualmente l'allievo inizia a partecipare al discorso matematico in modo più consapevole, e trasforma le routine in esplorazioni. Esempi tipici di questa transizione si verificano quando gli studenti passano dall'aritmetica all'algebra; dai naturali agli interi, poi ai razionali e infine ai reali; dagli insiemi finiti a quelli infiniti ecc. Questa transizione avviene non solo su scala ontogenetica (per uno studente nella sua carriera scolastica), ma anche a livello filogenetico: tutte queste transizioni corrispondono a progressi rilevanti nella storia del pensiero matematico (Sfard, 2008).

3.1 Il conflitto commognitivo dei ragionamenti in avanti e a ritroso

Come osservato in Barbero (2020), le due forme di ragionamento (a ritroso e in avanti) costituiscono due forme discorsive contrastanti che esplicitano un conflitto commognitivo tra l'approccio in avanti e quello a ritroso: vengono utilizzate le stesse parole, ma all'interno di due strutture discorsive diverse, che dipendono dalle due modalità (*forward* o *backward*).
I ragionamenti in avanti e a ritroso, quando si presentano insieme, sono il segno di un conflitto commognitivo (generalmente intrapersonale) che è in via di soluzione. Come si è visto in precedenza, il ragionamento in avanti non è un'euristica sufficiente per produrre un risultato efficace, sia esso una nuova conoscenza (ad esempio, l'enunciato di un teorema) o una dimostrazione. È il processo di inversione possibile grazie al ragionamento a ritroso che permette di trovare la prova di un'affermazione, o addirittura un nuovo risultato: è una modalità che cambia le relazioni tra le componenti del discorso e rende accessibile una soluzione che a prima vista era inaccessibile. Il ragionamento a ritroso rende commensurabile la modalità del discorso in avanti, che altrimenti rimarrebbe solo a una forma ritualizzata di dimostrazione, producendo una transizione verso una modalità esplorativa (Sfard, 2008).
Anche la storia del ragionamento a ritroso mostra il lungo cammino necessario prima che i due

discorsi incommensurabili possano essere "addomesticati": si pensi a Descartes, che riuscì a oggettivare i discorsi sintetici e analitici nel linguaggio dell'algebra (Beaney, 2018), o ai risultati di Hintikka, che riuscì a oggettivarli a livello logico mostrando la "dualità" della logica dell'indagine con la logica deduttiva standard (Hintikka, 1999); questi esempi illustrano i grandi sforzi storicamente necessari per arrivare a questo accordo di oggettivazione. A livello filogenetico, questa complessità è illustrata dall'enorme quantità di ricerche sulle difficoltà incontrate dagli studenti nell'affrontare la varietà di discorsi matematici incommensurabili che incontrano a scuola, in particolare quando imparano l'algebra o le dimostrazioni (Cai, 2017; van Lambalgen & Stenning, 2008). Naturalmente, questa transizione richiede generalmente il contributo di un esperto, che affianchi gli studenti in questo delicato compito (Sfard, 2008).
Rispetto a questo tema, va fatta un'ulteriore osservazione: è proprio la produzione di ragionamenti a ritroso che può aiutare a facilitare il superamento dell'incommensurabilità tra le fasi esplorative e le forme di ragionamento deduttivo, colmando il divario tra le due modalità. Secondo la prospettiva della Commognition, infatti, il passaggio tra due discorsi incommensurabili è segnato da un processo di oggettivazione che avviene attraverso i dispositivi discorsivi citati nel par. 3 (*saming*, *encapsulating*, *reifying*). Attraverso la loro identificazione, si riesce a dare una descrizione precisa di una struttura più fine del ragionamento a ritroso, che evolve nel tempo all'interno dei diversi contesti (Barbero, 2020).

4 Interrogativi e metodologia della ricerca

4.1 Domanda di ricerca

Per approfondire la comprensione del ruolo del ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione relativi alla risoluzione di problemi si è scelto di osservare l'interazione di un gruppo di pari (studenti universitari) in cui un partecipante del gruppo, più avanti negli studi accademici, funge da esperto. Si formula a questo proposito la seguente domanda di ricerca: *come si relaziona l'attivazione del ragionamento a ritroso nel processo di spiegazione portato avanti dallo studente esperto con le difficoltà messe in luce dai compagni?*

4.2 I giochi di strategia come contesto per esplorare il ruolo del ragionamento a ritroso

I contesti di gioco facilitano il superamento dell'incommensurabilità dei due discorsi, quello della logica esplorativa e quello della logica deduttiva, infatti, nei processi di risoluzione dei giochi la modalità esplorativa che è supportata dal ragionamento a ritroso è prodotta dal contesto stesso. Tra le diverse tipologie di giochi, quelli di strategia sono i più interessanti per quanto riguarda il tema del ragionamento a ritroso; in questo tipo di attività le scelte strategiche dei giocatori sono innescate da tipiche domande spesso implicite come «Cosa posso fare in questa situazione? Cosa è meglio fare?», per rispondere alle quali i risolutori riflettono sia sulle mosse già fatte sia su quelle possibili, attivando, in modo naturale, modi di pensare a ritroso (Barbero, 2015; Gómez-Chacón & Barbero, 2020).
Per approfondire il tema del ragionamento a ritroso si è quindi deciso di far riferimento a recenti ricerche relative all'uso dei giochi nella didattica della matematica (Barbero, 2015; Soldano & Arzarello, 2016) che sottolineano come i giochi di strategia siano un importante strumento metodologico per l'insegnamento della risoluzione di problemi: possono infatti essere utilizzati per facilitare l'apprendimento di diversi suoi aspetti come i processi, le fasi, le strategie ecc. (Gómez-Chacón, 1992; Koichu, 2010). La relazione tra giochi di strategia e problem solving è radicata nel fatto che le loro fasi di risoluzione sono strutturalmente simili (Gómez-Chacón, 1992) e che per risolverli è necessario seguire analoghi processi euristici e di ragionamento; ovvero anche affrontando i giochi di strategia si sollecitano i processi tipici del pensiero matematico. Alcune ricerche (Barbero, 2015; Soldano & Arzarello,

2016) hanno anche dimostrato come i processi coinvolti nelle situazioni di gioco matematico influenzino e guidino fortemente gli studenti durante le fasi di scoperta e giustificazione della risoluzione, stimolandoli positivamente.

4.3 Gruppo di studio e presentazione dell'attività

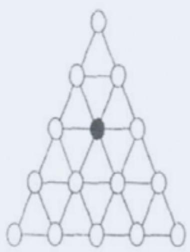
I dati riportati in questo contributo sono stati raccolti durante una sperimentazione che ha coinvolto i 23 studenti universitari, di età compresa tra i 22 e i 23 anni, del corso "Auditory and Quality Assurance" che rappresenta una parte dell'offerta formativa del Master in Informatica della Universidad Complutense de Madrid, a cui si può accedere possedendo una Laurea in Informatica. Le prestazioni degli studenti risultavano omogenee eccetto che per una studentessa, Elodie, che grazie a studi precedenti (doppia Laurea in Matematica e Informatica) aveva conseguito una formazione informatica approfondita, e durante le lezioni dedicate alla programmazione agiva con un ruolo di esperto. Alcune lezioni del corso, con obbligo di frequenza, consistono nell'implementazione di attività di programmazione di complessità crescente utilizzando il software Maude (Clavel et al., 2007). La proposta della terza lezione dedicata alla programmazione è consistita nell'implementazione del Triangular Peg Solitaire (Figura 3, Allegato 2) dove agli studenti era richiesto di attivare conoscenze euristiche, matematiche e computazionali. Durante queste lezioni di 2 ore, gli studenti sono generalmente liberi di scegliere se lavorare in coppia o individualmente. Si è scelto di non variare questa routine; dell'intero gruppo di 23 studenti 6 hanno scelto di lavorare in coppia.

Triangular Peg Solitaire

Il Triangular Peg Solitaire è un solitario che può essere giocato su tavoli da gioco di diverse dimensioni. All'inizio del gioco tutte le posizioni tranne una contengono delle pedine, l'obiettivo è rimanere esattamente con una pedina sul tavolo da gioco. È concesso muovere una pedina facendola "saltare" oltre quella accanto purché dopo questa pedina sia disponibile una posizione vuota; la pedina che viene saltata viene "mangiata" ed eliminata dal tavolo da gioco, analogamente a cosa succede nel gioco della Dama.

(Berlekamp, Conway & Guy, 1982, p. 804)

Lavoreremo con un tavolo da gioco triangolare, come mostrato nella figura seguente.



Esercizio 1 Definire un tipo di dati in linguaggio Maude per rappresentare un Triangular Peg Solitaire. Siamo particolarmente interessati a supportare tavoli da gioco di diverse dimensioni.
Esercizio 2 Implementare il movimento delle pedine (i salti) utilizzando le regole di riscrittura.
Esercizio 3 Definire un tavolo da gioco iniziale e utilizzare il comando **search** per trovare: (a) una soluzione qualsiasi; (b) una soluzione "perfetta". Una soluzione perfetta consiste in un tavolo da gioco con una sola pedina nella posizione centrale, come mostrato nella figura precedente.

Figura 3. Testo dell'attività di programmazione relativa al Triangular Peg Solitaire (disponibile nell'Allegato 2).

Il gioco di strategia del Triangular Peg Solitaire è stato scelto in base ad alcune caratteristiche fondamentali per la ricerca: la possibilità di utilizzare il ragionamento a ritroso nella sua risoluzione e, in particolare, la necessità di utilizzare costruzioni ausiliarie o elementi di novità, la forte componente visiva nella sua comprensione e le proprietà geometriche del tavolo da gioco che influenzano i movimenti delle pedine. Per risolvere l'attività, gli studenti dovevano comprendere il funzionamento del gioco, così da poterlo prima interpretare a livello matematico e poi implementare nel linguaggio di programmazione; dopo l'implementazione, la soluzione del gioco diventa semplicemente la scrittura di una regola logica in linguaggio computazionale. Si tratta di un compito in cui la risoluzione del gioco e la soluzione del problema matematico sono intrecciate e in cui sono coinvolti tre contesti di risoluzione: contesto strategico (relativo al gioco), contesto matematico (relativo alle rappresentazioni puramente matematiche) e contesto computazionale (relativo alla codifica nel linguaggio di programmazione Maude). Secondo la prospettiva della Commognition (Sfard, 2008), ognuno dei tre contesti è legato a un discorso specifico con diverse caratteristiche che possono aiutare a identificarlo: parole chiave, mediatori visivi, routine e narrazioni approvate. Ad esempio, quando gli studenti sono coinvolti nel contesto strategico parlano di pedine, tavolo da gioco, movimenti (o salti) delle pedine ecc.; quando sono nel contesto matematico parlano di numeri naturali, coppie di numeri, notazione cartesiana ecc.; quando invece sono nel contesto computazionale utilizzano la terminologia specifica del codice di programmazione Maude.

4.4 Raccolta e analisi dei dati

Per osservare e approfondire il fenomeno del ragionamento a ritroso sono stati raccolti i dati combinando diverse fonti: produzioni scritte (risoluzione delle attività e protocolli di risoluzione individuali), videoregistrazioni dalle sessioni e interviste individuali. Inizialmente, si sono identificate e categorizzate le difficoltà dei partecipanti; successivamente sono stati realizzati due studi di caso analizzando in profondità i protocolli di risoluzione e le videoregistrazioni di due coppie di studenti, esemplificative del gruppo classe, e di una studentessa, Elodie, che interagisce con i compagni. Viene presentato in questo contributo un estratto di uno dei due studi di caso: Elodie, interagisce con una coppia di studenti, Diego e Peter, contribuendo alla loro risoluzione dell'Esercizio 2. I simboli, i diagrammi e le parole usate dagli studenti sono enfatizzati per fornire prove del contesto in cui sono coinvolti nel loro ragionamento.
I ragionamenti che mettono in atto gli studenti durante la risoluzione di un problema non sono direttamente osservabili, ma possono essere identificati attraverso l'analisi delle frasi che pronunciano o delle azioni che compiono. A questo scopo, per descrivere operativamente le procedure, nel protocollo di risoluzione o nel testo della conversazione si possono individuare le azioni epistemiche: si possono cioè identificare i differenti processi mentali in cui la conoscenza viene utilizzata o costruita (Hershkowitz et al., 2001). In particolare, si possono distinguere le azioni in cui lo studente riconosce alcune conoscenze apprese in precedenza come rilevanti per la risoluzione del problema, oppure le azioni in cui combina delle conoscenze con l'obiettivo di implementare una strategia, o di giustificare una congettura, o di trovare una soluzione al problema, oppure ancora le azioni in cui assembla e integra le conoscenze precedenti con l'obiettivo di produrre un nuovo costrutto.
Le risoluzioni degli studenti sono, quindi, state analizzate suddividendole in azioni epistemiche, esplicitando i processi mentali in cui la conoscenza viene utilizzata o costruita, e classificando le linee della trascrizione della videoregistrazione utilizzando le dimensioni del ragionamento a ritroso: se lo studente opera una scomposizione del problema con l'intento di analizzarlo (*breakdown*), se *ricerca le relazioni di causa-effetto*, o se *introduce elementi ausiliari* (Barbero et al., 2020). Per l'analisi dettagliata della trascrizione si veda l'Allegato 1. In questo contributo, dopo aver illustrato il processo di risoluzione e la sua rappresentazione geometrica, si propone un breve commento in cui vengono giustificate le scelte fatte per la classificazione delle azioni epistemiche e in cui vengono evidenziati i dispositivi discorsivi utilizzati nei momenti in cui compare il ragionamento a ritroso (episodi di oggettivazione).

5 Analisi dell'intero gruppo di studio

Analizzando globalmente l'intero gruppo di 23 studenti, si può osservare che il movimento del ragionamento tra diversi contesti è essenziale per raggiungere la soluzione (Barbero, 2020). Il ragionamento a ritroso viene utilizzato nel suo carattere di *breakdown* per estrapolare tutti gli elementi della formulazione computazionale finale e ancorarli alla loro rappresentazione strategica e matematica, permettendo così di progredire verso la risoluzione computazionale. Tale ragionamento viene utilizzato in due momenti principali: quando gli studenti riescono a trovare gli elementi necessari per la costruzione/definizione dei comandi computazionali (per esempio, la configurazione del salto), e quando gli studenti pensano al comportamento finale del programma e introducono elementi specifici nell'implementazione (per esempio, il costruttore commutativo). Il primo momento è caratterizzato dalla comparsa di dispositivi di *saming* ed *encapsulating* che aiutano nella formulazione della soluzione, mentre il secondo momento è caratterizzato dal dispositivo discorsivo *reifying* usato per definire gli elementi necessari dopo un movimento avanti-indietro verso lo stato finale cercato. La creazione di elementi nel linguaggio di programmazione Maude avviene attraverso il passaggio tra i contesti: computazionale, matematico, strategico e di nuovo matematico e computazionale. Gli studenti si concentrano sull'obiettivo di creare l'elemento (ad esempio, una lista), cercando gli elementi necessari per la sua costruzione formale. Cominciano a guardare il contesto computazionale e poi vanno a ritroso attraverso quello matematico fino al contesto strategico. Dopo aver trovato gli elementi necessari nel contesto strategico, li traducono nel contesto matematico e poi li implementano in quello computazionale. Le transizioni tra i contesti non sono lineari, ma procedono con movimenti avanti e indietro, confermando studi precedenti (Gómez-Chacón et al., 2016).

5.1 Categorizzazione delle difficoltà del gruppo

Sulla base delle osservazioni in classe, delle interviste individuali e delle videoregistrazioni, sono state identificate due categorie principali in cui possono essere classificate le difficoltà degli studenti: difficoltà fattuali e difficoltà metodologiche. La prima categoria comprende sia le conoscenze errate, sia gli errori sperimentali; si tratta di azioni eseguite in modo scorretto che portano a soluzioni errate. Rientrano in questa tipologia, per esempio, le difficoltà nello specificare tutti i casi possibili. La seconda categoria è invece legata alle fasi di apprendimento. Ciò significa che le difficoltà vengono identificate riflettendo sull'intero processo: la stessa implementazione in linguaggio Maude può essere appropriata o meno a seconda della fase di apprendimento in cui si verifica. Le difficoltà metodologiche si identificano quando gli studenti mettono in atto comandi di base mentre possono utilizzare comandi più sofisticati che sono già stati appresi: per esempio, quando gli studenti usano i linguaggi standard per definire le strutture di dati, aumentando di molto il numero di regole da implementare, oppure quando non sono in grado di applicare concetti matematici durante la programmazione, come ad esempio assiomi equazionali quali la commutatività o l'associatività. Le difficoltà fattuali hanno un'influenza diretta sull'esecuzione dei programmi, rendendoli difettosi. Mentre le difficoltà metodologiche rendono il percorso di risoluzione più complesso e richiedono, molto spesso, più tentativi per ottenere la soluzione.
Nello studio di caso presentato in questo contributo sono stati evidenziati i momenti in cui compaiono questi due tipi di difficoltà da parte di Diego e Peter nel corso dell'intervento di spiegazione di Elodie. Si tratta, infatti, di una coppia emblematica: nel corso della loro risoluzione emergono diverse difficoltà tra quelle identificate con l'analisi dell'intero gruppo di studenti. Hanno risolto il compito parlando tra loro, il che ha permesso, tramite le videoregistrazioni, di analizzare i loro processi di pensiero che sono stati enfatizzati nel discorso; l'interazione con Elodie permette di approfondire l'uso del ragionamento a ritroso nei momenti di spiegazione.

6 Analisi della dinamicità del ragionamento di un esperto

L'analisi proposta in questo paragrafo si riferisce alla trascrizione di un estratto di 10 minuti della videoregistrazione, che è stata tradotta integralmente dallo spagnolo dall'autrice (Allegato 1). La trascrizione è suddivisa in azioni epistemiche (evidenziate dalle linee numerate); inoltre, quando il soggetto che parla si serve della scrittura viene presentata la scansione del foglio come figura. L'analisi fine della trascrizione (Allegato 1) permette di identificare i momenti in cui si sviluppa il ragionamento a ritroso e i dispositivi discorsivi che vengono attivati. Viene riportata in questo paragrafo un'analisi in cui si mettono in evidenza le relazioni tra ragionamento a ritroso e ragionamento in avanti analogamente a quanto proposto nel par. 2.2.

6.1 La risoluzione di Elodie

Dopo aver risolto il primo esercizio, Diego e Peter iniziano a risolvere l'Esercizio 2, che richiede di scrivere in linguaggio di programmazione il salto delle pedine. Dopo 30 minuti circa di riflessioni, vedendo che i due compagni non riescono a raggiungere la soluzione, Elodie offre loro il suo aiuto: ragionando con loro ad alta voce, la studentessa spiega come si può rappresentare il salto delle pedine in linguaggio computazionale, starà a Diego e Peter completare l'esercizio implementando il codice in linguaggio Maude. In questo estratto il discorso principale è sviluppato da Elodie, i compagni intervengono puntualmente mettendo in evidenza le proprie difficoltà.
Elodie riassume inizialmente i ragionamenti sviluppati per risolvere l'Esercizio 1 e disegna un tavolo da gioco triangolare sul foglio, evidenziando le tre posizioni che considererà per esemplificare la risoluzione dell'Esercizio 2 (Figura 4). Utilizzando la notazione esemplificata nel par. 2.2, il problema che la studentessa si ritrova a risolvere è:

> Si consideri il tavolo da gioco rappresentato in figura [si veda la Figura 3 nel par. 4.3 o l'Allegato 2] e definito [risultato dell'Esercizio 1] in linguaggio computazionale come lista di coppie (*a*, *b*), dove *a* e *b* sono numeri naturali con *a* indicante il numero di riga e *b* la posizione della casella all'interno della riga. Rappresentare in linguaggio computazionale il movimento delle pedine, come rappresentato in Figura 4 (tenendo conto che la rappresentazione deve poter essere generalizzata a qualsiasi movimento delle pedine).

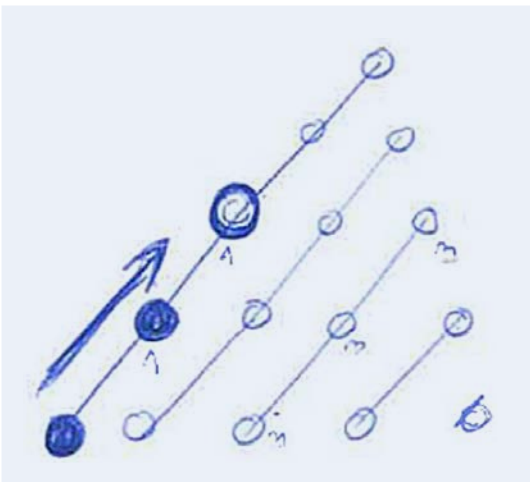


Figura 4. Tavolo da gioco con evidenziate le tre posizioni utilizzate per esemplificare il salto delle pedine.

Si utilizza la notazione A_i e B_j (analogamente a quanto fatto nel par. 2.2) per rappresentare il ragionamento della studentessa. Esso risulta intervallato dalle domande dei suoi due compagni che permettono di far emergere le loro difficoltà fattuali e metodologiche. Ogni volta che Elodie esplicita il linguaggio computazionale da utilizzare questo viene indicato tra parentesi quadre, per esempio [**rl diagonal**] quando propone di implementare la regola che definisce il salto lungo la diagonale.

- A: Si ha un tavolo da gioco come in Figura 3;
- A_1: La posizione di ogni casella può essere rappresentata con una terna di valori (*a*, *b*, *c*) dove a e *b* sono due numeri naturali, *a* indica il numero di riga e *b* indica la posizione della casella all'interno della riga, e dove il terzo valore, *c*, è un valore booleano che indica se la casella contiene una pedina (valore booleano "true") oppure è una casella vuota (valore booleano "false");
- B: Si vuole rappresentare il movimento della pedina mostrato in Figura 4;
- B_1: È necessario rappresentare le tre posizioni coinvolte nel movimento tramite terne;
- B_2: È necessario rappresentare una terna per ognuna delle posizioni, esse devono essere in relazione tra loro;
- A: Il tavolo da gioco è definito come lista di coppie (rappresentanti ognuna una casella);
- B_3: Si vuole avere una formula generica che consideri tutti i casi possibili;
- B_4: Siccome si vuole poter scambiare la posizione delle coppie all'interno della lista al fine di considerare tutti i casi possibili, è necessario definire il costruttore commutativo [**ctor comm**].[6]

A questo punto Diego e Peter cominciano a esprimere dei dubbi riguardanti la necessità di inserire il costruttore commutativo all'interno del codice. Emerge da queste linee di dialogo una difficoltà di tipo metodologico: gli studenti, infatti, risolvendo l'Esercizio 1, hanno costruito il tavolo da gioco come lista di posizioni, usando un linguaggio standard per definire la struttura di dati, mentre sarebbe stato più opportuno usare una struttura insiemistica. Elodie, per far sì che questa rappresentazione della struttura di dati non comprometta il funzionamento del programma, propone di utilizzare il costruttore commutativo e giustifica la scelta ai due compagni.

- B_5: È necessario avere la proprietà di commutatività poiché si è definita la struttura di dati come lista.

Emerge nuovamente una difficoltà metodologica da parte di Peter, che afferma che la struttura di dati non è associativa, evidenziando una difficoltà ad applicare il concetto matematico al linguaggio di programmazione. Elodie, rendendosene conto, approfondisce la sua spiegazione.

- A_2: Si possono rappresentare tre posizioni vicine con tre valori numerici consecutivi: N, $s(N)$, $s(s(N))$;[7]
- B_6: Il "salto" si può applicare solamente a tre posizioni consecutive sul tavolo da gioco;
- A_3: Non è detto che tre posizioni consecutive sul tavolo da gioco siano anche consecutive all'interno della lista che definisce il tavolo da gioco;
- B_7: Le tre posizioni consecutive le posso rappresentare indicando come prima componente delle tre terne considerate (*a*) tre numeri consecutivi;
- A_4: Siccome A_1, allora la seconda componente delle tre terne considerate (*b*) sarà rappresentata dallo stesso valore numerico.

Diego chiede di specificare meglio le relazioni tra le tre terne rispetto al secondo valore (*b*).

6. Tramite questo operatore è possibile dichiarare informazioni aggiuntive rispetto alla struttura di dati, in questo caso l'attributo equazionale di commutatività.
7. N indica un generico "numero naturale" mentre $s(\,)$ l'operatore "successore"; l'espressione $s(N)$ indica il successore di N, ovvero $N + 1$.

- B_8: Il movimento considerato passa attraverso tre righe ma la posizione nella riga [prima posizione] rimane sempre la stessa;
- A_5: Riferendosi al movimento contrario, le tre terne da considerare saranno le stesse.

A questo punto, Diego chiede spiegazioni su come si dovrebbero rappresentare le terne di valori se si considerasse il movimento in **Figura 5**.

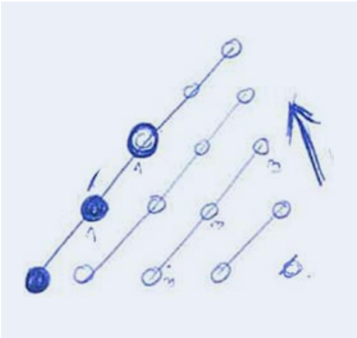


Figura 5. Movimento delle pedine (rappresentato dalla freccia) a cui si riferisce Diego.

- B_9: Se si vuole rappresentare il movimento in **Figura 5**, per riuscire a considerare tre posizioni consecutive, devo dare come condizione che la prima componente delle tre terne considerate (*a*) siano tre numeri consecutivi e che, per tutte le terne, la somma (o la differenza, a seconda di come numero le posizioni sul tavolo da gioco) tra la prima (*a*) e la seconda (*b*) componente sia costante;
- A_6: Bisogna implementare questi sei movimenti rappresentati in **Figura 6**.

Figura 6. I sei movimenti che è necessario implementare per risolvere l'Esercizio 2.

A questo punto emerge una difficoltà fattuale: Diego e Peter non avevano preso in considerazione tutti i possibili movimenti sul tavolo da gioco ma solamente il movimento rappresentato in **Figura 4**; questo viene bene espresso dall'esclamazione di Diego, dopo che Elodie disegna i sei movimenti (**Figura 6**): «Pensavamo che definire un solo movimento bastasse!».

- B_{10}: La terza componente delle tre terne considerate (*c*), deve avere valore booleano "true" per due posizioni consecutive e un valore booleano "false" per la terza posizione;
- B_{11}: Ad ogni casella del tavolo da gioco si associano due valori naturali (*a* e *b*) tali per cui considerando due posizioni vicine lungo la riga (o lungo la "colonna"), i valori della prima componente (*a*) (o i valori della seconda componente (*b*)) risultano essere uno il successore dell'altro [si possono indicare genericamente *N* o *s*(*N*)]. Numero le righe a partire dal vertice in alto.

Emerge in questo momento una difficoltà metodologica da parte dei compagni che si chiedono se *N* debba essere dichiarato come costante invece che come variabile. Si osserva come in questo caso gli studenti facciano riferimento a strutture a loro note dei linguaggi standard: se definissero *N* come costante, si renderebbero complicate le successive implementazioni in linguaggio Maude.

- B_{12}: *N* è dichiarato come variabile [**var**];
- B_{13}: La parte booleana delle tre posizioni deve essere, "true", "true", "false";
- B_{14}: Per generalizzare i valori delle prime due componenti si utilizza la funzione successore.

A questo punto si osserva una difficoltà relativa alla definizione matematica di numero naturale da parte dei compagni che esplicitano di non sapere come indicare il successore di un numero, operazione di base dei numeri naturali.

- B_{15}: Per indicare il successore di un numero *N* si usa *s*(*N*) ovvero *N* + 1;
- B_{16}: Per determinare il movimento del salto [**rl diagonal**] devo dichiarare *F* e *N* come variabili appartenenti a ℕ [**var F N nat**], *F* viene utilizzata per i valori delle righe e *N* per i valori delle posizioni nella riga (le "colonne");
- A: Si considera il tavolo da gioco [**solitario**] così come è stato definito nell'Esercizio 1;
- B_{17}: Si lavora con i moduli funzionali, essi considerano triple di dati all'interno della lista.

Diego esplicita che nella soluzione all'Esercizio 1 non sono state inserite le parentesi, all'interno del codice, per separare le diverse coppie che rappresentano le posizioni delle caselle sul tavolo da gioco. Emerge in questo caso una difficoltà fattuale: il codice deve poter manipolare la struttura di dati, e non inserendo le parentesi si creerebbero dei bug.

- B_{18}: Si inseriscono le parentesi nel codice (nella definizione della posizione delle pedine);
- A_7: È sufficiente definire la regola tenendo conto solo delle posizioni coinvolte nel salto, si dichiara lo stato iniziale [**{F, N, false}, {s(F), N, true}, {s(s(F)), N, true}**];
- A_8: E di conseguenza lo stato finale [**{F, N, true}, {s(F), N, false}, {s(s(F)), N, false}**].

In questo estratto, il ragionamento a ritroso viene utilizzato principalmente nei suoi caratteri di *ricerca di relazioni causa-effetto* (B_1, B_2, B_3, B_5, B_6, B_{12}, B_{15}, B_{17}, B_{18}): ad esempio quando Elodie, tenendo conto della struttura dei dati a disposizione, cerca gli elementi necessari per l'implementazione del suo obiettivo; di *breakdown* (B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{13}, B_{14}, B_{16}) quando la studentessa analizza le rappresentazioni del salto delle pedine e del tavolo da gioco per identificare gli elementi di base che le caratterizzano; mentre si ha un solo momento in cui viene introdotto un elemento ausiliario, il costruttore commutativo (B_4), elemento computazionale necessario alla risoluzione. Fin dai primi momenti di risoluzione, quando Elodie definisce la rappresentazione statica del problema e poi evidenzia l'obiettivo dell'esercizio, vengono attivati i discorsi sui tre contesti di risoluzione: strategico, matematico e computazionale. Appare subito evidente come essi siano intrecciati e necessari per sviluppare la spiegazione, in particolare per poter giustificare le scelte effettuate e costruire la soluzione in linguaggio computazionale.
In generale, i discorsi sviluppati durante la risoluzione di giochi sono diversi da quelli sviluppati nella risoluzione di problemi matematici e ancora distinti dalla risoluzione di un problema computazionale: le narrazioni e le routine correlate non sono le stesse. In questo tipo di richiesta, invece, i discorsi risultano intrecciati e strettamente interconnessi e le caratteristiche discorsive evidenziate da Sfard (2008) (parole chiave, mediatori visivi, routine e narrazioni approvate) appaiono mescolate all'interno delle frasi della studentessa (per esempio quando definisce le relazioni tra le posizioni sul tavolo da gioco, utilizzando le regole dell'addizione per rappresentare in modo generale tre numeri consecutivi). Tutti e tre i dispositivi discorsivi emergono durante la risoluzione (si veda l'Allegato 1 per ulteriori dettagli). Il

dispositivo di *saming* viene utilizzato per rappresentare in notazione matematica le posizioni del tavolo da gioco, seguendo le proprietà geometriche delle caselle. Il dispositivo *encapsulating* appare quando tutti i diversi salti sul tavolo da gioco vengono raggruppati secondo le loro proprietà geometriche in sei movimenti principali che vengono successivamente rappresentati in modo generale. Il dispositivo *reifying* si osserva quando il soggetto del discorso non sono più le parti di codice che vengono analizzate ma è il codice stesso che considera determinati dati, opera e restituisce una certa soluzione.

Come mostrato nel quadro teorico, il ragionamento della studentessa può essere descritto attraverso una rappresentazione grafica della risoluzione (**Figura 7**). Si osserva come il processo risulti fortemente intrecciato e il passaggio tra i tre contesti avvenga con un complesso processo di ragionamenti in avanti e a ritroso, di cui la maggior parte a ritroso, in cui i diversi contesti sono ripetutamente attivati. Questo è dovuto al fatto che la spiegazione di Elodie viene interrotta dall'emergere delle difficoltà dei compagni che la spingono a ritornare sui passi del ragionamento per esplicitare elementi non ancora chiari, in particolare le proprietà della struttura di dati con la quale stanno lavorando. Alcuni passi del ragionamento non sono chiaramente sviluppati in un determinato contesto discorsivo ma risultano a metà tra due contesti, per esempio quando la studentessa parla di posizioni sul tavolo da gioco (contesto strategico) per poi riferirsi alla loro rappresentazione matematica tramite terne (contesto matematico).

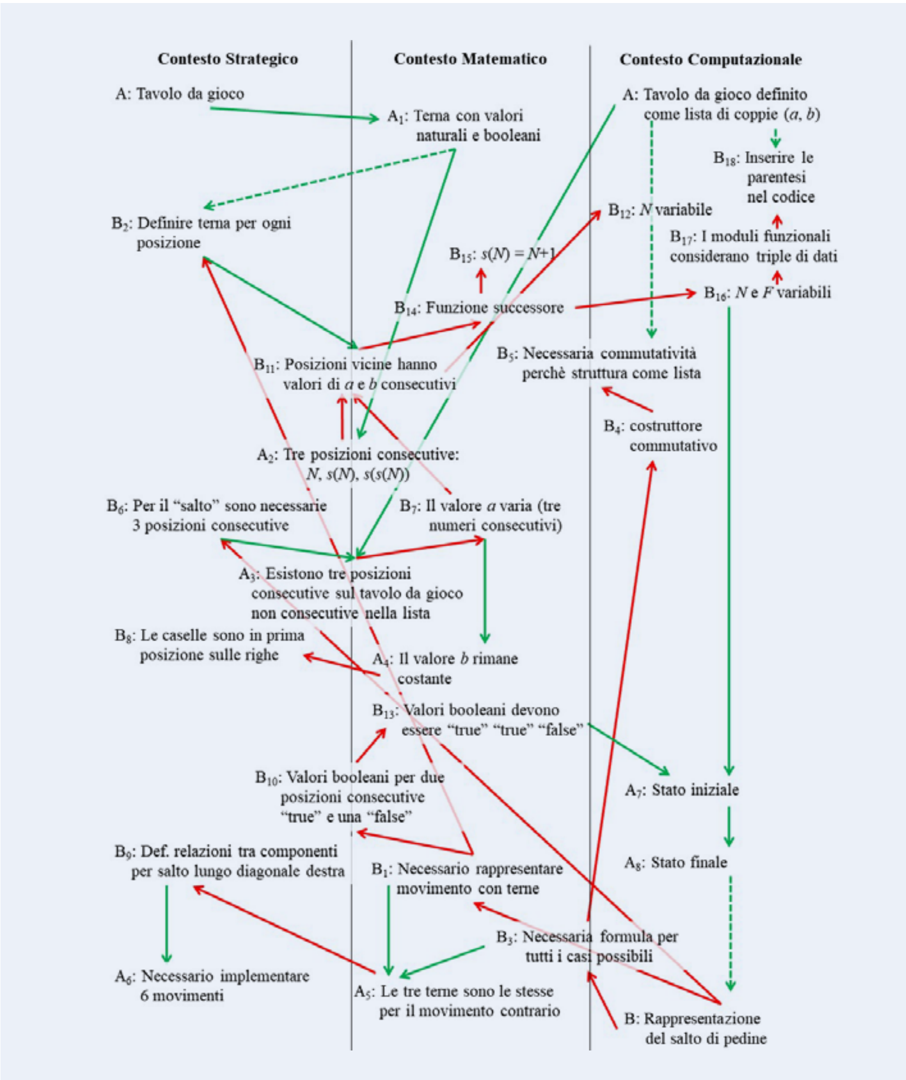


Figura 7. Rappresentazione geometrica del processo di ragionamento di Elodie per arrivare alla soluzione.

Per comprendere l'evoluzione del discorso all'interno dei tre contesti si propone una schematizzazione della risoluzione in cui vengono presi in considerazione i contesti di risoluzione nel tempo (Barbero et al., 2020) e in cui vengono "condensati" i passi della risoluzione (**Figura 8**). Se si osserva l'intero processo lungo i minuti dedicati alla spiegazione del processo risolutivo, si può notare come Elodie abbia attraversato i diversi contesti per arrivare alla formulazione generale che servirà per implementare l'esercizio in linguaggio computazionale. Ha iniziato a lavorare nel contesto relativo al gioco (quello strategico), per poi passare a un contesto matematico e identificare il suo obiettivo. Ha proseguito verso il contesto computazionale andando ad anticipare le possibili difficoltà di implementazione del programma generate dalla definizione della struttura di dati (la lista) in linguaggio computazionale standard. Successivamente è tornata al contesto matematico e a quello strategico per analizzare e descrivere i tipi di movimenti delle pedine. A questo punto ha evidenziato prima per un caso particolare, poi per una posizione generica, la formulazione matematica del movimento delle pedine. Infine, ha definito quello che risulta essere la rappresentazione computazionale del movimento.

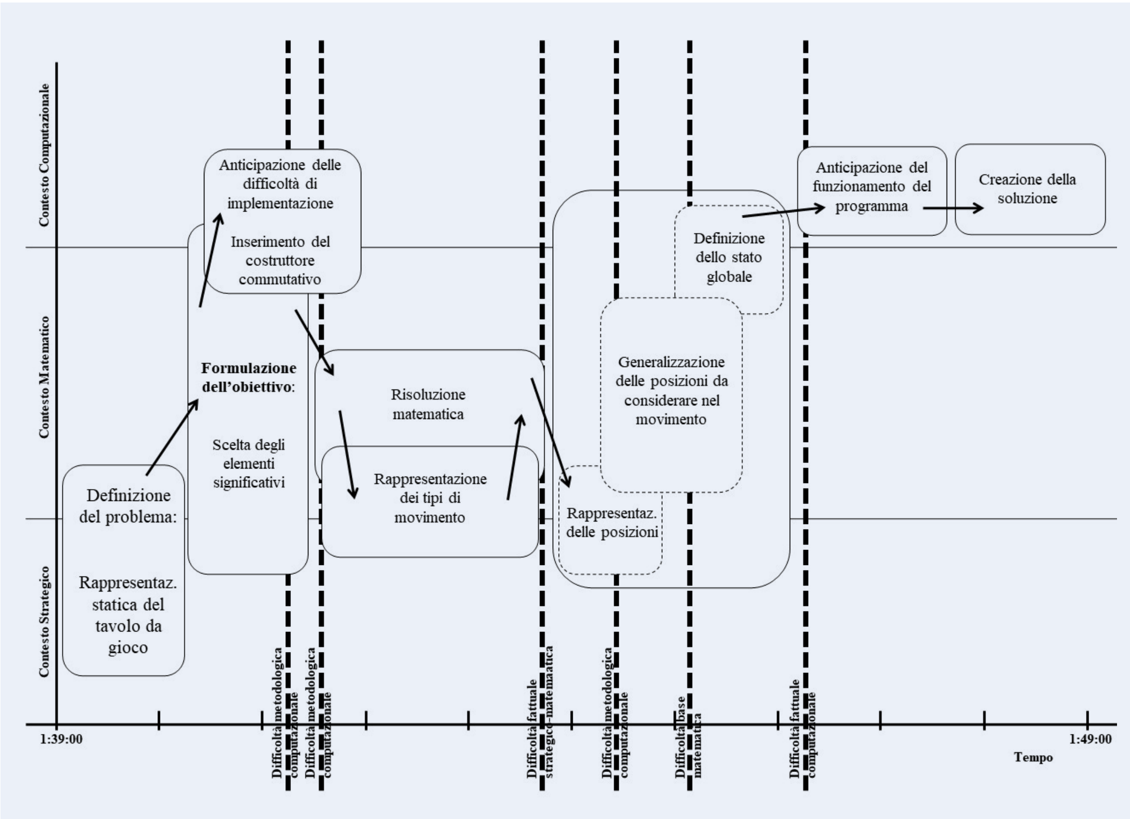


Figura 8. Evoluzione nel tempo del discorso di Elodie.

Emergono in questo estratto due strutture linguistiche ricorrenti nei momenti di ragionamento a ritroso nei processi risolutivi e di spiegazione degli studenti (Barbero, 2020).

La prima struttura linguistica si trova in tutte quelle situazioni di ragionamento a ritroso in cui il risolutore suppone il problema risolto e cerca di concretizzare la soluzione cercata. Si riscontra quando gli studenti anticipano il comportamento finale del software, e prestano attenzione a utilizzare un elemento strutturale specifico durante l'implementazione (il costruttore commutativo oppure le parentesi all'interno del codice) per evitare risultati errati o bug. In questi momenti gli studenti applicano un «processo inverso di oggettivazione» (Barbero, 2020, p. 388), partendo dalla fine. Il processo inizia esplicitando l'oggetto che deve essere costruito, successivamente si sviluppa un discorso intor-

no all'oggetto identificato, o a elementi ad esso strettamente correlati, fino all'oggettivazione finale che avviene generalmente attraverso un dispositivo discorsivo *reifying*. In questo tipo di struttura cognitiva il pensiero viene spinto verso la soluzione finale del problema da cui successivamente parte il discorso che si sviluppa seguendo i consueti processi di oggettivazione.
La seconda struttura individuata è ricorrente nei momenti di ragionamento a ritroso, dove le caratteristiche di *breakdown* sono predominanti, ovvero quando il risolutore parte dalla fine del problema e analizza la situazione scomponendola in parti. Questo tipo di struttura linguistica emerge quando gli studenti cercano gli elementi di base necessari per implementare un salto. La struttura del ragionamento è caratterizzata da un processo di oggettivazione in cui compare il dispositivo discorsivo *encapsulating*. Il discorso si sviluppa intorno alla configurazione finale del problema che è composta da diversi oggetti che, generalmente, vengono prima messi in relazione attraverso un dispositivo *saming* e poi vengono *incapsulati* in un'unica entità.

7 Il ragionamento a ritroso nelle spiegazioni

Analizzando il processo di spiegazione portato avanti da Elodie, è possibile riscontrare caratteristiche simili a quelle descritte per il gruppo di studio. Considerando l'analisi fine dell'estratto (si veda l'Allegato 1) si può notare che la maggior parte dei passi a ritroso sono proprio caratterizzati dalla *ricerca di relazioni di causa-effetto* o dal *breakdown* (scomposizione e analisi) delle configurazioni considerate. Inoltre, l'analisi dei dispositivi discorsivi permette di distinguere i due seguenti casi.

- Quando il ragionamento a ritroso si sviluppa in situazioni in cui Elodie si riferisce al funzionamento del programma, compare un dispositivo *reifying*. In queste situazioni, la studentessa tiene conto del funzionamento del programma e spiega gli elementi necessari per ottenere il comportamento desiderato. Prima si spinge verso lo stato finale che vuole raggiungere, poi torna indietro e, successivamente, in avanti, definendo gli elementi necessari alla sua realizzazione.
- Quando il ragionamento a ritroso si sviluppa in momenti in cui Elodie fa riferimento al salto delle pedine, compaiono i dispositivi di *saming* ed *encapsulating*. La studentessa associa i diversi movimenti delle pedine, a seconda delle loro caratteristiche geometriche, e li considera come entità che possono essere definite formalmente in linguaggio matematico e computazionale.

Una spiegazione portata avanti da un esperto, però, si sviluppa generalmente in modo lineare (Tall, 2002), solitamente in termini deduttivi: l'esperto cita le premesse, applica alcune regole di deduzione (ad esempio il *modus ponens*) e giunge a una conclusione; il processo di scoperta della soluzione, con i caratteristici movimenti avanti e indietro, non viene esplicitato. Se si osserva globalmente il processo di spiegazione di Elodie (**Figura 8**) si può notare come parta dal contesto strategico, poi passi attraverso il contesto matematico, fino a raggiungere quello computazionale: il ragionamento non è lineare, analogamente a quello dei suoi compagni segue il loro processo di scoperta. Si discuterà il processo di spiegazione non lineare di Elodie nel prossimo paragrafo.

7.1 Affrontare le difficoltà dei non esperti

L'analisi dell'episodio ha messo in evidenza il fatto che nei processi di spiegazione, se questi vengono sviluppati considerando le possibili (o effettive) difficoltà dei non esperti a cui sono rivolti, l'esperto è portato ad includere/considerare nel discorso anche i processi di scoperta da lui stesso sviluppati nella creazione della conoscenza tema della spiegazione. Considerando l'esempio fornito, di fronte alle difficoltà dei suoi compagni di classe, Elodie, in quanto mediatore di conoscenza, tiene conto della natura del suo ragionamento di scoperta per arricchire la sua spiegazione e provare a risolvere i dubbi di Diego e Peter, allontanandosi dalla pura deduzione. Per farlo, utilizza il ragionamento a ritroso a livello metodologico come se fosse un "dispositivo di ordinamento" (Peckhaus, 2002), ovvero lo utilizza per ripercorrere il processo di risoluzione a ritroso, ordinare un determinato insieme di affermazioni e ricostruire razionalmente il processo. Elodie, infatti, attiva il ragionamento a ritroso tornando al contesto strategico e spiegando i processi sviluppatisi durante la sua personale risoluzione. Il ragionamento a ritroso, in questo caso, sembra che la aiuti a collegare gli aspetti più intuitivi con quelli matematici e computazionali, costruendo percorsi produttivi per la spiegazione dei concetti e per la transizione tra i contesti, dove si concentrano le difficoltà dei suoi compagni. Le difficoltà espresse da Diego e Peter, sia metodologiche che fattuali, indicate in **Figura 8**, come nella **Figura 9** seguente, con linee nere tratteggiate, infatti, non sono focalizzate su un singolo contesto, anche se sono più ricorrenti in quello computazionale. Come anticipato, le maggiori difficoltà si osservano nel passaggio da un contesto all'altro, in particolare tra quello matematico e quello computazionale relativamente ai momenti in cui è presente un'evoluzione delle proprietà e dei concetti matematici alla base dello sviluppo del programma e della necessaria semiotica (segni e registri di rappresentazione) tipica del linguaggio di programmazione Maude. Le modalità relative al movimento nei tre contesti sono indicative del ragionamento di risoluzione di Elodie, e della sua volontà, in quanto esperta, di interfacciarsi con le difficoltà dei suoi compagni costringendosi a tornare indietro nel suo ragionamento per evidenziare le basi e le premesse di ciò che sta spiegando, siano queste strategiche, matematiche o computazionali.

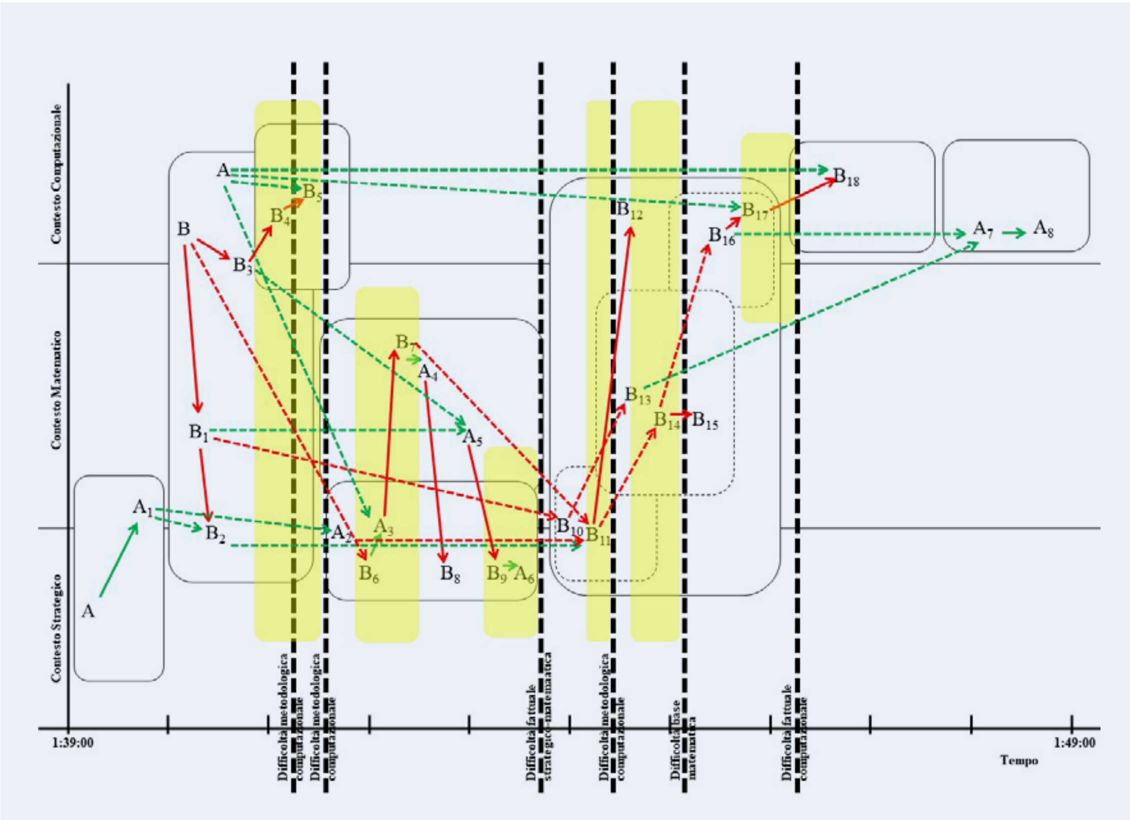


Figura 9. Evoluzione nel tempo del discorso di Elodie (con esplicitazione dei ragionamenti a ritroso e in avanti e dei momenti evidenziati in giallo in cui vengono attivati i dispositivi discorsivi di oggettivazione).

Il ragionamento a ritroso (indicato in **Figura 9** da frecce rosse, come nelle rappresentazioni grafiche precedenti) si sviluppa maggiormente nella transizione tra i contesti ed è usato da Elodie per recuperare la successione delle fasi della sua risoluzione. Da questo punto di vista, l'analisi linguistica basata sul quadro della Commognition, e in particolare sui suoi dispositivi discorsivi (*saming*, *encapsulating* e *reifying*) che caratterizzano i processi di oggettivazione, permette di interpretare meglio il ragionamento a ritroso a livello cognitivo, individuando i momenti di oggettivazione nel discorso della studentessa (evidenziati dai riquadri gialli in **Figura 9**). Si può notare che le difficoltà dei compagni emergono subito dopo questi processi di oggettivazione, esplicitando un conflitto commognitivo in atto. Affinché i compagni comprendano la risoluzione del compito, Elodie media tra la sua conoscenza e il suo processo di risoluzione, e utilizza il ragionamento a ritroso come strumento comunicativo per interpretare come avviene la comprensione di un concetto nel pensiero dei compagni e superare l'incommensurabilità del discorso.

8 Conclusioni

Dall'analisi dell'episodio proposto si sviluppano diversi risultati interessanti per quanto riguarda un primo approccio per una comprensione cognitiva dei processi di spiegazione in cui uno studente esperto si interfaccia con uno o più compagni con competenze differenti. Tali elementi permettono di dare una prima risposta all'interrogativo di ricerca di questo articolo, ovvero di indagare come si relaziona l'attivazione del ragionamento a ritroso nel processo di spiegazione portato avanti dallo studente esperto con le difficoltà messe in luce dai compagni.
Si è osservato e discusso (**par. 7.1**) come l'attivazione del ragionamento a ritroso nel discorso dello studente esperto sia in stretta relazione con le difficoltà messe in luce dai compagni e come il ragionamento entri in gioco nel momento in cui lo studente esperto considera nel suo discorso anche i processi di scoperta da lui stesso seguiti in fase di risoluzione. Le difficoltà dei meno esperti, concentrate principalmente nella transizione tra i contesti, emergono durante (o subito dopo) l'attivazione di dispositivi discorsivi di oggettivazione, evidenziando un conflitto commognitivo in atto. Il ragionamento a ritroso è coinvolto nel processo di spiegazione come dispositivo che permette di ordinare i passi della risoluzione (svolta precedentemente dall'esperto) e di aiutare a superare il conflitto commognitivo. Ciò conferma quanto già affermato da Peckhaus (2002): il ragionamento a ritroso è «l'arte di organizzare una serie di pensieri, cioè un dispositivo di ordinamento, e l'ordinamento è la caratteristica fondamentale sia della scoperta che della presentazione» (p. 8).
I movimenti tra i contesti da parte dell'esperta permettono ai compagni la comprensione del processo di risoluzione. Il passaggio attraverso il contesto matematico, che facilita la transizione tra quello strategico e quello computazionale, serve infatti a Elodie, in primo luogo, per sviluppare un sistema di segni e in secondo luogo per far comprendere a Diego e Peter l'interazione tra i diversi elementi coinvolti: la sua conoscenza matematica, ed in particolare l'uso di proprietà algebriche e logiche, le permette di "tradurre" le proprietà del gioco in elementi computazionali. Da questo punto di vista, il ragionamento a ritroso, che emerge nel momento in cui c'è un ritorno del ragionamento al contesto strategico, aiuta a collegare gli aspetti più intuitivi con il contesto matematico e computazionale.
L'attenzione ai processi di ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione mette l'accento sulle possibili difficoltà degli studenti nell'affrontare una spiegazione lineare, dalle premesse alle conclusioni, e di conseguenza sull'eventuale necessità di ripercorre le tappe del processo di scoperta per una piena comprensione del concetto tematizzato.
Dal punto di vista del docente, l'utilità di prestare attenzione al ragionamento a ritroso risiede in due motivi. Da un lato, l'insegnante può comprendere meglio i processi di risoluzione e riorganizzarli in un discorso pensato per gli studenti. Dall'altro lato, la consapevolezza che il processo naturale per ottenere il risultato non è lineare e si compone non solo di ragionamenti in avanti, permette di prestare maggiore attenzione alle possibili difficoltà degli studenti nella comprensione dei diversi passaggi, rendendo più facile la rielaborazione della spiegazione dopo che vengono evidenziate le difficoltà o addirittura anticipandole nel discorso.
Anche quanto discusso precedentemente sui processi di oggettivazione può avere importanti implica-

zioni didattiche. Infatti, secondo la prospettiva della Commognition (Sfard, 2008), quando lo studente interagisce con una persona già esperta nel nuovo discorso, e incontra un discorso incommensurabile con il proprio, viene coinvolto in una situazione di meta-apprendimento che può causare un conflitto commognitivo. In queste situazioni, il ragionamento a ritroso permette all'insegnante di andare avanti e indietro nel discorso, rendendo possibile allo studente di superare il conflitto commognitivo rivelando il discorso precedentemente incommensurabile. Il primo passo di questo tipo di apprendimento sono i rituali di imitazione: a poco a poco, lo studente si appropria delle routine fino a diventare consapevole delle proprie conoscenze per poterle utilizzare autonomamente nel discorso matematico. In questa prospettiva, il ragionamento a ritroso, come un dispositivo di ordinamento, media i processi di de-ritualizzazione che avvengono quando le routine utilizzate nelle modalità a ritroso iniziano a relazionarsi tra loro e si fondono in un discorso consolidato.

Si osserva inoltre che, anche se l'identificazione delle azioni epistemiche (par. 4.4) ha facilitato il compito di analisi del ragionamento, le produzioni scritte e le videoregistrazioni della risoluzione del compito, ovvero le manifestazioni attraverso cui è possibile osservarlo, non possono mai rappresentarlo pienamente. Inoltre, il ragionamento, essendo personale, dipende fortemente sia dalla persona coinvolta sia dal compito e dalle modalità con cui viene proposto. Queste constatazioni sottolineano quanto i risultati presentati in questo contributo, nonostante siano limitati dallo studio del fenomeno relativamente a elementi specifici, possano essere dei significativi punti di partenza per futuri studi relativamente alle interazioni tra pari, studi in cui sarebbe però opportuno coinvolgere studenti con background e livelli diversi (per esempio includendo anche studenti di altri ordini scolastici) proponendo attività variate relative a diversi contenuti matematici (e non) e che eventualmente coinvolgano anche l'ambiente digitale. Da questo punto di vista, gli studi relativi allo sviluppo del ragionamento a ritroso, che focalizzano l'attenzione sulla risoluzione di problemi matematici, di attività di programmazione e di giochi di strategia (Barbero, 2020; Barbero et al., 2020), risultano promettenti per una possibile estensione dei risultati della ricerca ad argomenti matematici diversi da quello affrontato in questo contributo. Dal punto di vista didattico, inoltre, sarebbe molto interessante continuare ad approfondire come il ragionamento a ritroso entra in gioco nei processi di pensiero dell'insegnante e come influenza le spiegazioni e le interazioni con gli studenti, in particolare nel momento in cui manifestano delle difficoltà.

Bibliografia

Arnauld, A., & Nicole, P. (1964). *The Art of Thinking*. Bobbs-Merrill. (Titolo originale: *La Logique ou l'art de penser* pubblicato nel 1662).

Arzarello, F. (2014, 21 novembre). *A new structural approach to argumentation in mathematics: from Toulmin model to Hintikka Logic of Inquiry* [Conference session]. Mathematics education as a transversal discipline. Università degli Studi di Torino, Italia.

Barbero, M. (2015). *Giochi di strategia e risoluzione dei problemi: l'uso della strategia del ragionamento regressivo*. Tesi di Laurea Magistrale in Matematica. Università degli Studi di Torino.

Barbero, M. (2020). *Backward Reasoning in problem-solving situations: a multidimensional model*. Tesi di Dottorato. Università degli Studi di Torino & Universidad Complutense de Madrid.

Barbero, M., & Gómez-Chacón, I. M. (2018). Analyzing Regressive reasoning at university level. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N. Mhogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 204–213). University of Agder and INDRUM.

Barbero, M., Gómez-Chacón, I. M., & Arzarello, F. (2020). Backward reasoning and epistemic actions in discovery processes of strategic games problems. *Mathematics*, *8*(6), 989. https://doi.org/10.3390/math8060989

Beaney, M. (2018). Analysis. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/entries/analysis/s1.html

Berlekamp, E. R., Conway, J. H., & Guy, R. K. (1982). *Winning Ways: for your mathematical plays* (Vol. 4). Academic Press Inc.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think*. Princeton University Press.

Cai, J. (Ed.) (2017). *Compendium for Research in Mathematics Education*. NCTM.

Clavel, M., Durán, F., Eker, S., Lincoln, P., Martí-Oliet, N., Meseguer, J., & Talcott, C. (2007). *All about Maude: a high-performance logical framework*. Springer.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Síntesis.

Gómez-Chacón, I. M. (1992). Los juegos de estrategias en el curriculum de matemáticas. *Colleción Apuntes IEPS*, *55*. Narcea.

Gómez-Chacón, I. M., & Barbero, M. (2020). ¿Es la confusión beneficiosa en matemáticas? Emociones epistémicas y razonamiento regresivo en Secundaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, Monográfico Emociones en Matemáticas*, *88*, 7–16.

Gómez-Chacón, I. M., Romero, I. M., & Garcia, M. M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(6), 909–924.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195–222. https://doi.org/10.2307/749673

Hintikka, J. (1999). *Inquiry as inquiry: A logic of scientific discovery.* Springer Science+Business Media.

Hintikka, J., & Remes, U. (1974). *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance.* Reidel.

Holyoak, K., & Morrison, R. (Eds.) (2015). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*. Cambridge University Press.

Koichu, B. (2010). On the relationships between (relatively) advanced mathematical knowledge and (relatively) advanced problem-solving behaviours. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 257–275.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press.

Mäenpää, P. (1998). Analytic Program Derivation in Type Theory. In G. Sambin & J. M. Smith (Eds.), *Twenty-five Years of Constructive Type Theory* (pp. 113–126). Oxford University Press.

Peckhaus, V. (2002). Regressive Analysis. *Logical Analysis and History of Philosophy*, *5*, 97–110.

Peirce, C. S. (1932). Elements of logic. In C. Hartshorne & P. Weiss (Eds.), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Vol. 2). Harvard University Press.

Polya, G. (1945). *How to solve it? A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning: Patterns of plausible inference* (Vol. 2). Princeton University Press.

Ruesga Ramos, P., Jímenez Rodríguez, J., & Orozco Hormaza, M. (2004). Matemática relacional y procesos directo e inverso. *Revista De La Sociedad Argentina De Educación*, *9*(35), 3–17.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Sfard, A. (2009). Commentary on the chapters by Baker and Asterhan and Schwarz through the lens of commognition. In B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 173–183). Routledge.

Sfard, A. (2018). Commognition. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer.

Soldano, C., & Arzarello, F. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(1), 9–30.

Tall, D. (Ed.) (2002). *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library* (Vol. 11). Springer.

van Lambalgen, M., & Stenning, K. (2008). *Human reasoning and cognitive science.* MIT Press.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 34 - 56, DOI: 10.33683/ddm.23.13.2
OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

L'influenza dell'apprendimento capovolto sui fattori motivazionali degli studenti in matematica: osservazioni e risultati di una prima analisi narrativa

The influence of flipped learning on the motivational factors of students in mathematics: observation and results of a first narrative analysis

Elena Lazzari
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara – Italia

lzzlne@unife.it

Sunto / Il presente contributo ha l'obiettivo di indagare la possibile influenza dell'apprendimento capovolto, una metodologia didattica innovativa di ampia diffusione, sui fattori motivazionali nell'insegnamento-apprendimento della matematica. È stata svolta un'analisi dei testi narrativi prodotti da circa 200 studenti di scuola secondaria di secondo grado al termine di una sperimentazione della durata di circa 20 ore. Si è così giunti ad alcune rilevanti conclusioni che sembrano riconoscere nell'apprendimento capovolto una metodologia in grado di creare un ambiente di apprendimento con influenza positiva sui fattori motivazionali.

Parole chiave: apprendimento capovolto; motivazione ad apprendere; teoria dell'autodeterminazione; analisi narrativa; opinioni.

Abstract / This article has the purpose of examining the possible impact of flipped learning, a widely used innovative teaching methodology, on the motivational factors in mathematics teaching and learning. At the end of an experimentation lasting 20 hours, an analysis on narrative essays written by 200 secondary school students was conducted. First evidence suggests that flipped learning is a methodology that can create a learning environment with a positive influence on motivational factors.

Keywords: flipped learning; motivation to learn; self-determination theory; narrative analysis; beliefs.

1 Introduzione

Il metodo d'insegnamento applicato nella maggior parte delle realtà scolastiche è, ancora oggi, l'approccio per contenuti mediato dalla lezione frontale. Questa tendenza è fortemente criticata dagli esperti poiché non sembra favorire l'acquisizione di competenze, un obiettivo che è stato collocato al centro del dibattito educativo (Da Re, 2013). Non c'è da stupirsi pertanto che nei sistemi di istruzione e formazione si siano moltiplicate iniziative, istituzionali e spontanee, ispirate dall'esigenza di innovare tale modello. In un contesto come quello appena descritto, nel corso dell'ultimo decennio, è nato il *flipped learning*, o apprendimento capovolto, una metodologia didattica di stampo costruttivista che sfrutta diverse strategie di *active learning*, attingendo quando possibile dalle potenzialità delle tecnologie digitali (Bergman & Sams, 2012). Nonostante le sue origini molto recenti, la diffusione in Italia, come nel resto del mondo, è stata decisamente rapida grazie al successo avuto tra gli insegnanti e gli studenti (Bergman & Sams, 2012). La metodologia ha destato da subito il nostro interesse per le sue particolari caratteristiche che sembravano potersi adattare bene all'insegnamento-apprendimento della matematica. Un'esplorazione significativa, utile per definire meglio la direzione della ricerca qui proposta, è stata attuata nell'a.s. 2016/17 con la proposta di un'unità di apprendimento in modalità flipped in una classe prima di liceo scientifico sul tema dei sistemi di numerazione e di un questionario finale *self-report*[1] per indagare le percezioni degli studenti rispetto all'esperienza vissuta. L'intento era di ricercare l'eventuale presenza di benefici che si andassero ad aggiungere ai risultati noti agli studiosi. L'aspetto emerso in modo più preponderante è stato quello legato ai fattori affettivi, e in particolare alla componente motivazionale (Lazzari, 2017). In didattica della matematica vi è comune consenso nel considerare il dominio affettivo diviso in tre dimensioni principali, ossia convinzioni, atteggiamenti ed emozioni (McLeod, 1992), sebbene con l'espressione "fattori affettivi" si tenda a fare riferimento più generale a tutti quegli aspetti del pensiero umano che non riguardano la pura cognizione, come anche il valore, la motivazione, i sentimenti e gli obiettivi (Hannula, 2012). Questa prima esperienza ha permesso di mettere in luce il focus di questa ricerca: l'impatto del flipped learning sulla motivazione ad apprendere in matematica.

La motivazione ad apprendere è di fondamentale importanza nello studio della matematica (Middleton, 1995), come anche delle altre discipline (si veda, ad esempio, Murphy & Alexander, 2000), per via della sua influenza positiva sul rendimento scolastico; questa però tende a diminuire con l'avanzare del grado scolastico (Boscolo, 2003; Harter, 1992), specialmente nella materia qui in oggetto (Middleton & Spanias, 1999).

Gli studi sulla motivazione in matematica fanno parte di un filone di ricerca relativo ai fattori affettivi, denominato *affect*, un campo di indagine relativamente recente che ha cominciato a svilupparsi intorno agli anni '60 del secolo scorso. Solo nell'ultimo periodo storico è stato accettato il fatto che tali fattori, tra cui anche quelli motivazionali, siano rilevanti nell'insegnamento-apprendimento della disciplina (Zan et al., 2006). L'idea stessa di competenza sembra essere naturalmente legata alle intenzioni, alle potenzialità e alla volizione del soggetto che apprende (Pellerey, 1993). D'Amore et al. (2003) affermano infatti che la competenza non consiste solo nell'uso e nella padronanza delle conoscenze «ma pure [in] un insieme di atteggiamenti che mostrano la disponibilità "affettivamente positiva" a volerne far uso» (D'Amore et al., 2003, p. 8).

Seppur la motivazione in matematica sia considerata un fattore relativamente stabile (Hannula, 2012), ci sono evidenze sulle potenzialità di un ambiente educativo di influire su di essa (Pellerey, 1993; Wæge, 2010). Lo scopo di questa ricerca è proprio quello di studiare l'eventuale ascendente che un ambiente educativo creato mediante l'utilizzo del flipped learning può avere sulla motivazione ad

1. Il self-report è un test, una misura o un'indagine che si basa sulle segnalazioni individuali del soggetto, il quale risponde alle domande poste al fine di fornire una descrizione di sé rispetto alle variabili emergenti da tali richieste.

apprendere in matematica. Per far ciò, nell'a.s. 2017/18, è stata organizzata una sperimentazione della durata di circa due mesi in quindici classi terze e quarte di scuole secondarie di secondo grado,[2] durante la quale è stato raccolto materiale self-report per ottenere informazioni da analizzare sulla motivazione degli studenti.

2 Quadro teorico

2.1 Flipped learning

Il flipped learning, o apprendimento capovolto, è una metodologia didattica innovativa di stampo costruttivista che prevede l'utilizzo organizzato di diverse strategie educative già esistenti e studiate da decenni, con lo scopo di favorire un apprendimento significativo e duraturo. La direzione è quella di una didattica induttiva, che ripercorra il processo scientifico partendo dall'osservazione o dallo studio di casi, passando dalla formulazione di ipotesi e concludendosi con la derivazione di leggi e principi (Sams & Bergmann, 2013). L'elemento caratterizzante del flipped learning consiste nel ribaltamento del processo didattico, che non inizia con l'esposizione di contenuti da parte dell'insegnante ma con la partecipazione attiva degli studenti che agiscono per costruire la propria conoscenza. Si conclude poi con la ristrutturazione delle conoscenze da parte del docente e non con l'applicazione passiva delle informazioni da parte degli allievi. Risulta quindi evidente come ci si allontani dall'impostazione didattica di tipo trasmissivo, per adottarne una ispirata ai principi del costruttivismo (Cecchinato & Papa, 2016).

Dall'analisi dello stato dell'arte emerge l'esistenza di un elevato numero di ricerche sperimentali in diverse discipline, che però utilizzano spesso differenti tipi di approcci flipped, rendendo difficile la loro comparazione. Ciò nonostante, sono emersi alcuni risultati di una certa rilevanza che inducono a proseguire lo studio di questa metodologia (Nietz et al., 2016).

Sono numerosi i benefici che il flipped learning sembra avere sulla pratica didattica, ad esempio la possibilità di personalizzare l'insegnamento, di creare connessioni tra la scuola e la quotidianità, di promuovere un apprendimento a lungo termine, di sviluppare competenze specifiche e trasversali, di creare ambienti non competitivi e di agire non solo sulla motivazione degli studenti, ma anche sul livello di impegno, coinvolgimento e senso di autoefficacia (Carotenuto & Sbaragli, 2018).

Volendo lavorare sull'interesse e sul coinvolgimento degli studenti nel proprio processo di apprendimento, è interessante l'approccio didattico proposto da Cecchinato e Papa (2016) che ruota interamente intorno al concetto di *sfida*. L'idea centrale di tale approccio è di far leva sugli aspetti emotivi prodotti dal coinvolgimento degli studenti in sfide che li appassionino, che li mettano alla prova e che consentano loro di dimostrare il proprio valore. Accortezza fondamentale, dunque, è quella di individuare un livello delle attività adeguatamente sfidante rispetto alle competenze possedute dagli studenti.

Si può notare una connessione con il pensiero di Brousseau (1986), secondo cui per uno studente non è possibile costruire una conoscenza significativa senza un reale interesse e un coinvolgimento in essa. Per favorire l'emergere di interesse e coinvolgimento è necessario predisporre un ambiente educativo adatto, nel quale la costruzione di nuovi concetti sia motivata, stimolata e inserita in contesti legati alla quotidianità dei giovani (D'Amore & Sbaragli, 2011). Il riferimento, naturalmente, è alla Teoria delle Situazioni di Brousseau (1986), in particolare alla situazione a-didattica, in cui l'ambiente è fattore di contraddizioni, complessità, disequilibri, il che porta lo studente a responsabilizzarsi e impegnarsi

2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde con l'ultimo anno di scuola media e gli anni di scuola media superiore o professionali nel Canton Ticino.

in attività cognitive per far fronte a tali difficoltà, accrescendo e dando prova del proprio apprendimento. Viene così favorito il processo di devoluzione. Si può dunque affermare che «il modello di Apprendimento Capovolto rappresenti una specifica messa in campo concreta di una particolare istanziazione della teoria delle situazioni e non […] di una teoria assolutamente e totalmente nuova» (Vastarella, 2016, p. 124).
La proposta di Cecchinato e Papa (2016) consiste in un nuovo ciclo di apprendimento-insegnamento suddiviso in tre fasi: il lancio della sfida, su cui si vuole attirare l'attenzione degli studenti, attivando il loro desiderio di apprendere; la conduzione della sfida, durante la quale gli allievi sono spinti a ripercorrere i processi che hanno portato a ottenere le conoscenze che si vogliono far sviluppare loro; la chiusura della sfida, che consiste in un processo collettivo di riflessione e confronto su quanto appreso, guidato dall'insegnante, che coinvolge l'intera classe. Durante la fase di conduzione della sfida si prevede l'utilizzo di strategie didattiche attive, come ad esempio il *cooperative learning*,[3] il *peer tutoring*, il *problem-based learning*,[4] l'*inquiry based learning* e il *think-pair-share*.
In un contesto come quello appena descritto non c'è più bisogno che il docente ricopra il ruolo di divulgatore delle conoscenze, serve invece un facilitatore dei processi di apprendimento e una guida su cui fare affidamento (King, 1993). L'insegnante ha così modo di assistere gli alunni nella fase di costruzione delle conoscenze, di dare particolari attenzioni agli allievi in difficoltà, di fornire maggiori stimoli a quelli più brillanti, rendendo attuabile una personalizzazione della didattica e realizzando una relazione educativa più profonda e gratificante (Bergmann & Sams, 2016). Così come il ruolo del docente viene modificato, anche il ruolo della valutazione subisce un cambiamento. La valutazione passa dall'essere sommativa, finale e unilaterale all'essere formativa, integrata nel percorso didattico e partecipata, con l'obiettivo di fornire informazioni tempestive, che siano comprese e condivise dallo studente e quindi utilizzabili per migliorare l'apprendimento.
Avvalersi di strumenti tecnologici nel flipped learning è importante, seppur non indispensabile. Questi possono infatti essere sfruttati a casa, nella fase che precede la lezione, ma anche in classe, semplificando aspetti organizzativi, potenziando i processi didattici e favorendo il coinvolgimento degli studenti.

2.2 Motivazione ad apprendere

Nel presente lavoro si definisce *motivazione* «una configurazione organizzata di esperienze soggettive che consente di spiegare l'inizio, la direzione, l'intensità e la persistenza di un comportamento diretto a uno scopo» (De Beni & Moè, 2000, p. 37). Con l'espressione "esperienze soggettive" si fa riferimento agli obiettivi, ai processi emotivi, alle aspettative, ai valori e alle attribuzioni causali di un soggetto, che possono avere origine intrinseca o estrinseca. Il concetto di motivazione viene quindi usato per conoscere le ragioni che portano un individuo a svolgere un compito, a farlo in un determinato modo, con una certa intensità, e a mantenere la concentrazione su di esso.
La più classica tra le dicotomie presenti in letteratura è quella tra motivazione intrinseca e motivazione estrinseca: la prima consiste nello stimolo ad affrontare il compito per sé stessi e non per finalità esterne (Berlyne, 1971), la seconda nel desiderio di approcciarsi a un compito per ottenere qualcosa di diverso dall'attività stessa (Skinner et al., 1974).
Sulla motivazione intrinseca sono state svolte numerose ricerche, alcune delle quali hanno messo in evidenza l'influenza positiva che quest'ultima può avere sul benessere fisico e psicofisico di uno studente (si veda, ad esempio, Miquelon & Vallerand, 2008), ma anche sul suo apprendimento e rendi-

3. Il cooperative learning, o apprendimento cooperativo, è un metodo di apprendimento attivo nel quale gli studenti lavorano insieme in piccoli gruppi per raggiungere obiettivi comuni, in termini di competenze disciplinari, interdisciplinari e sociali, generando un'interdipendenza positiva e rispettando ruoli specifici (Johnson et al., 1996).
4. Il problem-based learning, o apprendimento per problemi, è un metodo di apprendimento attivo nel quale gli studenti, guidati da un facilitatore, affrontano problemi, spesso inseriti in contesti reali, con l'obiettivo di acquisire o consolidare nuove conoscenze, oltre che sviluppare competenze disciplinari e trasversali (Barrows & Tamblyn, 1980).

mento scolastico (si veda, ad esempio, Hidi, 1990), specialmente in matematica (Middleton & Spanias, 1999). Purtroppo, però il livello di questa tipologia di motivazione tende a diminuire con l'avanzare dell'età e del livello scolare in favore di quella estrinseca o dell'assenza di motivazione (Harter, 1992), anche nel caso della matematica (Middleton, 1995).
L'espressione "motivazione intrinseca" assume oggi un significato piuttosto ampio per via dei numerosi filoni di teorie riguardanti questo tipo di motivazione, che comprende in sé numerosi costrutti, come ad esempio la curiosità, l'interesse e l'esperienza di flusso (De Beni & Moè, 2000). La curiosità viene definita come un bisogno innato di sapere come funzionano le cose, di conoscere e di apprendere, e si manifesta mediante l'esplorazione dell'ambiente circostante (Berlyne, 1971). L'interesse, invece, può essere definito come un orientamento relativamente a lungo termine dell'individuo verso un oggetto, un'attività o un'area di conoscenza (Schiefele, 1991). Infine, l'esperienza di flusso si genera durante lo svolgimento di un'attività considerata significativa, caratterizzata dal coinvolgimento dinamico e completo di tutta la persona, durante il quale l'attenzione appare particolarmente focalizzata e ristretta sulla situazione immediata (Csikszentmihalyi, 1993).

2.2.1 La teoria dell'autodeterminazione

Fra le numerose teorie che si sono sviluppate intorno al concetto di motivazione intrinseca, quella di riferimento per la presente ricerca è la teoria dell'autodeterminazione di Deci e Ryan (1985), definita dagli stessi autori come una «macroteoria della motivazione, dello sviluppo e del benessere degli esseri umani» (Deci & Ryan, 1985, p. 182, traduzione dell'autrice). Essa studia le condizioni (fattori sociali e ambientali) che generano e sostengono, o soggettano e diminuiscono, questa tipologia di motivazione. Tali condizioni sono legate a tre particolari bisogni, chiamati bisogni psicologici fondamentali: il bisogno di competenza, di autonomia e di relazionalità.
Il *bisogno di competenza* consiste nel desiderio di sentirsi in grado di agire sull'ambiente e di essere efficaci nel farlo. Fin dai primi studi sperimentali è stato osservato come i feedback sui comportamenti positivi aumentino la motivazione intrinseca, mentre quelli su performance negative la diminuiscano, e come tutto ciò sia mediato dalla percezione delle proprie competenze (Deci, 1975). Ulteriori studi specifici (Ryan, 1982) hanno mostrato come il senso di competenza possa accrescere la motivazione intrinseca solo se accompagnata da un senso di autonomia, da cui emerge il *bisogno di autonomia*, che riguarda appunto la volontà di scegliere quale attività svolgere e come svilupparla. In un secondo momento si è osservato che la motivazione intrinseca emerge con più facilità in contesti caratterizzati da un senso di sicurezza e relazionalità (Ryan & Grolnick, 1986). Si inserisce così nella teoria l'ultimo bisogno, quello di essere in relazione con gli altri (*bisogno di relazionalità*), riferendosi alla necessità di mantenere e costituire legami in ambito sociale. Il fulcro, dunque, non risiede nell'individuo o nell'ambiente, ma nell'interazione tra organismo attivo e contesto sociale, interazione che può favorire o ostacolare l'insorgere di una motivazione intrinseca (Deci & Ryan, 1985).
È noto però che la maggior parte dei comportamenti umani dopo la prima infanzia non sono intrinsecamente motivati, ma soggetti a pressioni sociali e alla comparsa di nuove responsabilità (Ryan & La Guardia, 2000). Risulta quindi centrale per Ryan e Deci (2000a) la distinzione tra comportamenti intenzionali autodeterminati e comportamenti controllati. I primi sono completamente volontari e producono nel soggetto una conferma del proprio senso di sé, i secondi sono dominati dalla volontà altrui. I due autori definiscono una tassonomia composta di una serie di livelli di autoregolazione lungo un *continuum motivazionale*, che sfuma la netta contrapposizione esistente in letteratura tra motivazione estrinseca e intrinseca. Può essere considerata come una scala motivazionale che va dall'assenza di motivazione alla motivazione intrinseca. Fra i due estremi sono presenti quattro livelli di motivazione estrinseca, che si diversificano in base al grado in cui il valore e lo stile di regolazione della richiesta sono internalizzati e integrati. Con il termine *internalizzazione* si intende il processo di condivisione e accettazione dei valori e degli stili di regolazione provenienti dall'esterno da parte del soggetto; l'*integrazione* consiste invece nella trasformazione di questi ultimi in qualcosa di personale

e interno. Come si può osservare in Figura 1, nella quale vengono riportati i diversi stili di regolazione, i processi ad essi associati e i corrispettivi locus di causalità, il continuum motivazionale si suddivide in sei livelli di autodeterminazione.

– La *non regolazione*, che corrisponde all'assenza di motivazione, è conseguenza della non valorizzazione di un'attività, della percezione della mancanza di competenze adeguate o di aspettative negative rispetto ai risultati desiderati. Il locus di causalità percepito viene definito come impersonale.
– La *regolazione esterna*, che corrisponde alla forma meno autonoma di motivazione estrinseca, porta a svolgere un'attività con il solo obiettivo di ottenere un premio o evitare una punizione. Il locus di causalità percepito è completamente esterno.
– La *regolazione introiettata*, che consiste in una regolazione internalizzata ma non completamente integrata, è legata a una sensazione di controllo, non dall'esterno, ma da sé stesso, e ha lo scopo di evitare i sensi di colpa o ottenere autocompiacimento (premi e punizioni interni). Il coinvolgimento dell'io e dell'autocontrollo è alto, con un locus di causalità percepito ancora in qualche modo esterno.
– La *regolazione per identificazione*, che porta all'accettazione del comportamento perché ritenuto importante, comporta un'identificazione da parte del soggetto nei valori dell'azione, avendo così un alto grado di autonomia e un locus di causalità percepito tendente verso l'interno.
– La *regolazione integrata* avviene quando il soggetto integra nel sé i valori e gli obiettivi esterni. L'approccio alle attività si ha perché queste vengono ritenute importanti e coerenti con i propri valori. Tale tipo di comportamento ha molte qualità comuni alla motivazione intrinseca, sebbene sia ancora considerato estrinseco perché attuato non solamente per il puro piacere personale. Il locus di causalità percepito è completamente interno.
– La *regolazione intrinseca* coincide con la motivazione intrinseca e rappresenta il prototipo di un comportamento autodeterminato. Lo scopo è ottenere soddisfazione intrinseca e viene in genere associato a interesse e divertimento. Il locus di causalità percepito è completamente interno.

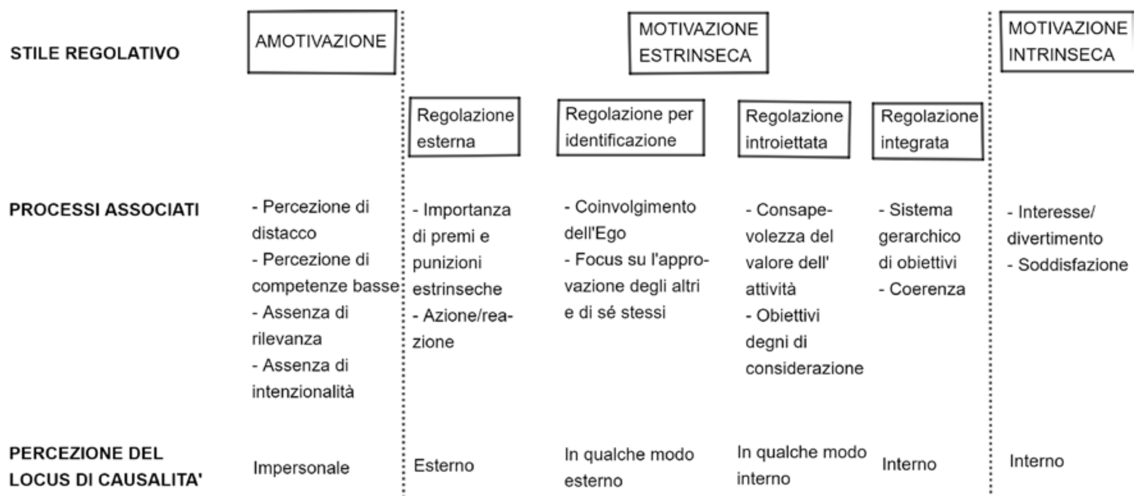


Figura 1. Tassonomia della motivazione umana (Ryan & Deci, 2000b, p. 61, traduzione dell'autrice).

Spostarsi lungo il continuum motivazionale da sinistra a destra significa andare verso comportamenti con un più alto grado di autodeterminazione, e questo può permette di godere dell'influenza di certi benefici della motivazione intrinseca.
Se ne deduce che creare un ambiente che favorisce la soddisfazione dei tre bisogni psicologici fondamentali, provocando uno spostamento verso destra nel continuum motivazionale, può essere una

buona strategia applicabile anche a contesti educativi. Poiché i comportamenti estrinsecamente motivati non sono inerenti all'interesse e devono essere inizialmente stimolati da richieste esterne, la prima ragione per cui un soggetto potrebbe essere disposto a svolgere un determinato compito è che questo sia valutato positivamente da persone considerate significative, a cui è, o vorrebbe essere, legato (famiglia, pari o società). Promuovendo un senso di appartenenza o connessione a persone, gruppi o culture, l'individuo può provare un senso di relazionalità. Nel contesto scolastico ciò significa, ad esempio, che se un alunno si sente degno di attenzione e rispettato dai propri insegnanti, esso sarà più predisposto all'apprendimento. Ryan et al. (1992) hanno dimostrato sperimentalmente che alla soddisfazione del bisogno di relazionalità con docenti o pari, viene associato una miglior internalizzazione dello stile regolativo del comportamento. Un ulteriore passo verso l'internalizzazione di un dato obiettivo estrinseco è quello di comprenderlo e di sentirsi capace di raggiungerlo con successo, ossia provare un senso di competenza. Se non ci si sente capaci di svolgere una data attività, difficilmente questa viene internalizzata. Gli autori ipotizzano che per supportare quest'ultima sia necessario offrire sfide di livello adeguato agli studenti, con feedback significativi riguardo l'efficacia di ogni allievo (Ryan & Deci, 2000b). Secondo la teoria dell'autodeterminazione, una regolazione internalizzata potrà essere al massimo di tipo introiettato. A questo livello l'individuo non può provare autodeterminazione. Per permettere il raggiungimento di tale obiettivo è necessario anche un processo di integrazione, che può essere supportato soltanto dalla percezione di autonomia. Il bisogno di autonomia viene soddisfatto solo se si riesce a raggiungere la comprensione interiore del significato e del valore di un dato comportamento; se l'ambiente scolastico favorisce tale processo si renderà più agevole anche l'integrazione degli obiettivi (Deci et al., 1994).

2.3 Ipotesi di ricerca

Il flipped learning ha le caratteristiche per essere una metodologia didattica adatta a creare un ambiente di apprendimento in grado di favorire la soddisfazione dei tre bisogni psicologici fondamentali in matematica, mantenendo intrinseca la motivazione o modificando il livello di quella estrinseca nel continuum motivazionale in direzione di quella intrinseca. L'obiettivo di questa ricerca consiste nel verificare alcune ipotesi (Lazzari, 2018) riguardanti l'influenza del flipped learning, secondo il modello proposto da Cecchinato e Papa (2016), sulla motivazione ad apprendere in matematica. Si elencano nel seguito le prime tre ipotesi.

a) Il flipped learning crea ambienti didattici in grado di soddisfare il bisogno psicologico fondamentale di competenza in matematica, ciò dipende in particolar modo da alcune sue caratteristiche, come l'utilizzo di strategie didattiche attive, la proposta di attività con un livello di sfida ottimale e la variazione della tipologia di valutazione.
b) Il flipped learning crea ambienti didattici in grado di soddisfare il bisogno psicologico fondamentale di autonomia in matematica, specialmente per via di alcune sue caratteristiche, come l'utilizzo di strategie didattiche attive (ad esempio il problem based learning) e la variazione del ruolo del docente.
c) Il flipped learning crea ambienti didattici in grado di soddisfare il bisogno psicologico fondamentale di essere in relazione con gli altri durante l'apprendimento in matematica, ciò dipende soprattutto da alcune caratteristiche della metodologia, come l'utilizzo di strategie di peer education (ad esempio il cooperative learning) e la variazione del ruolo del docente.

Tali ipotesi sono in parte sostenute anche da altre ricerche teoriche (si veda, ad esempio, Abeysekera & Dawson, 2015) e sperimentali (Hannula, 2004; Sergis et al., 2018).

Hannula (2004) nel suo lavoro elabora alcune considerazioni sulle caratteristiche che un ambiente di apprendimento dovrebbe avere affinché venga stimolata la motivazione in matematica. Le sue osservazioni sono le seguenti: le attività collaborative permettono agli studenti di soddisfare i propri "bisogni sociali"; lavorare su problemi aperti e di ricerca appaga il bisogno di autonomia; confrontarsi con compiti interessanti e adeguatamente sfidanti permette di sostenere il bisogno di competenza. Si può notare come le caratteristiche dell'ambiente descritto dell'autore siano comuni all'approccio del flipped learning qui preso in esame.

Sergis et al. (2018) coinvolgono nella loro ricerca sperimentale tre corsi di studio di scuola secondaria di secondo grado, di cui uno di matematica. Da una comparazione tra gruppi sperimentali e di controllo emerge come il modello flipped soddisfi i tre bisogni psicologici fondamentali, aumentando il livello di autodeterminazione durante l'apprendimento. La partecipazione attiva a compiti cooperativi permette agli studenti di soddisfare il bisogno di autonomia, sfruttando principalmente le proprie competenze e quelle dei propri pari. Il supporto del docente mediante strategie di *scaffolding*[5] e l'opportunità di svolgere attività pratiche e coinvolgenti appaga il loro bisogno di competenza, aumentando il grado di sicurezza in sé stessi. Infine, la proposta di attività tra pari e la creazione di un clima di accettazione e supporto, anche grazie al nuovo ruolo del docente, soddisfa il loro bisogno di relazionalità.

Come è stato esposto nel par. 2.2, la motivazione intrinseca può manifestarsi sotto diverse forme, come curiosità, interesse ed esperienze di flusso. Alla luce di tale considerazione si inserisce un'ultima ipotesi.

d) Il flipped learning crea ambienti di apprendimento in grado di stimolare e sostenere diverse forme di motivazione intrinseca degli studenti in matematica, soprattutto grazie ad alcune caratteristiche di tale metodologia, come l'utilizzo di strategie didattiche attive (cooperative learning e problem based learning) e l'uso della tecnologia. In particolare, la proposta di problemi contestualizzati in situazioni reali e la scelta di un livello adeguatamente sfidante della prova (come previsto dal problem based learning) fa vivere agli studenti esperienze di flusso, generando in loro curiosità e interesse.

3 Descrizione della sperimentazione

Per verificare le ipotesi di ricerca appena esposte, è stata condotta una sperimentazione in diverse classi di scuola secondaria di secondo grado. Durante le lezioni curricolari di matematica è stato affrontato il medesimo argomento con tutti gli studenti – le sezioni coniche – utilizzando la metodologia del flipped learning. Grazie a tale sperimentazione è stato raccolto materiale self-report, sul quale si è potuto realizzare un'analisi narrativa dei testi, che ha permesso di giungere a conclusioni rilevanti.

3.1 Sperimentazione e partecipanti

La sperimentazione è stata svolta all'interno di quindici classi terze e quarte in 5 scuole secondarie di secondo grado di Ferrara e provincia, coinvolgendo un totale di 356 studenti. Il campione era formato da studenti che frequentavano per il 22% il liceo scientifico, per il 35% il liceo classico, per il 14% il liceo artistico, per il 24% l'istituto tecnico e per il 5% l'istituto professionale. La sua realizzazione è avvenuta sotto forma di progetto all'interno del Piano Lauree Scientifiche dell'a.s. 2017/18 del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Ferrara, con il titolo *Flipped Math! Alla scoperta delle sezioni coniche.*

La metodologia scelta per il progetto, della durata complessiva di circa 20 ore, è stata quella del flipped learning, sfruttando il nuovo ciclo di apprendimento proposto da Cecchinato e Papa (2016). Tra le diverse strategie didattiche che il flipped learning prevede, si è scelto di abbinare insieme cooperative

5. Lo scaffolding, che tradotto letteralmente dall'inglese significa "impalcatura", indica un insieme di strategie di aiuto utilizzate da un esperto, come il docente, per agevolare l'apprendimento dell'individuo (Wood et al., 1976) e fonda le sue radici nel concetto di zona di sviluppo prossimale di Vygotskij (1978).

learning e problem based learning, tenendo conto dei riscontri positivi emersi da alcune ricerche su tale connubio (Cecchinato, 2014). Le lezioni sono state condotte dal ricercatore, sempre affiancato dal docente della classe. Per tutta la durata della sperimentazione gli studenti sono stati suddivisi in gruppi formati da un massimo di quattro membri ciascuno, in modo che fossero eterogenei rispetto alle competenze matematiche possedute,[6] alla nazionalità e al sesso.

A seguito di un'introduzione delle sezioni coniche come particolari curve piane ottenibili dall'intersezione tra un piano e un cono circolare retto, nelle fasi della sperimentazione sono state affrontate, nell'ordine: parabola, ellisse, circonferenza e iperbole. Il primo approccio ad ogni conica è avvenuto mediante la presentazione di una situazione reale, che metteva in evidenza l'applicabilità delle proprietà matematiche della curva (ad esempio, lo specchio ustorio per la parabola). Si è proceduto poi con la scoperta autonoma da parte degli studenti delle proprietà geometriche ed analitiche di ciascuna conica tramite il supporto di filmati, animazioni in GeoGebra e schede guida. Per ogni curva, partendo dall'analisi del funzionamento della corrispettiva macchina matematica (conicografo) mediante una simulazione virtuale, è stata fatta dedurre agli studenti la sua definizione come luogo geometrico. Da quest'ultima si è ricavata analiticamente l'equazione cartesiana della curva, con l'aiuto di schede guida e se necessario del docente, approfondendo le sue caratteristiche mediante figure dinamiche in GeoGebra. Al termine delle singole lezioni, i processi attuati e i risultati ottenuti da ogni gruppo sono stati condivisi in una discussione collettiva, arrivando così a delineare le conoscenze oggetto dell'unità di apprendimento. Al termine del percorso si è deciso di proporre un'attività di tipo autentico e creativo che consisteva nella richiesta di creare una video lezione, rivolta a una ipotetica nuova compagna di classe, con l'obiettivo di spiegare l'ultimo argomento svolto in aula: il funzionamento del telescopio riflettore.

La valutazione è stata, oltre che di tipo sommativo al termine del percorso (per verificare il raggiungimento degli obiettivi didattici prefissati), soprattutto di tipo formativo. In aggiunta alle correzioni, ai commenti e ai consigli che gli studenti ricevevano abitualmente durante le fasi di conduzione e conclusione della sfida, durante le quali il docente e il ricercatore hanno potuto agire nel ruolo di guida, è stato dato un feedback periodico anche ai compiti assegnati per casa. Gli elaborati, che potevano consistere in problemi sfidanti, ricerche personali, studi di fenomeni reali e attività di consolidamento come esercizi e quesiti (Cecchinato & Papa, 2016), sono stati corretti e riconsegnati agli studenti, arricchiti da suggerimenti di ripasso e approfondimento individualizzati. Questo ha permesso di monitorare il processo di apprendimento di ogni singolo discente, intervenendo tempestivamente su eventuali difficoltà.

Durante la sperimentazione si è optato per l'impiego di strumenti digitali, non limitandosi semplicemente all'utilizzo in aula di computer, LIM o smartphone, ma attuando anche uno stile comunicativo extrascolastico mediante la rete, presentando stimoli, gestendo i contatti con gli studenti, e richiamando i prerequisiti attraverso modalità multimediali e con l'uso di software didattici.

3.2 Metodi e strumenti

Nel presente lavoro si presenta un'analisi dei testi narrativi raccolti al termine dello svolgimento della sperimentazione. Lo strumento di ricerca self-report scelto è il tema strutturato: si tratta di materiale cosiddetto narrativo, sempre più frequente nella ricerca interpretativa, in particolare in quella sull'affect in cui è importante dare la maggior libertà di espressione possibile, permettendo a chi scrive di prendere decisioni autonome su cosa sia importante dire e cosa no. L'analisi di queste decisioni può dare informazioni di rilievo, ad esempio sulla dimensione di centralità psicologica inerente alle visioni che lo studente ha della matematica (Di Martino & Zan, 2011). Con l'obiettivo di comprendere come

6. Le competenze matematiche possedute sono state determinate grazie alla somministrazione di un test sui prerequisiti necessari allo svolgimento delle attività (ad esempio il piano cartesiano, la distanza tra due punti, il quadrato di binomio, i sistemi di equazioni di primo e secondo grado), oltre che alle valutazioni assegnate agli studenti durante l'anno scolastico in tale disciplina.

gli studenti avessero vissuto l'esperienza di apprendimento della matematica mediante la metodologia del flipped learning, si è proposta la seguente consegna da elaborare in un tema:

> Racconta come hai vissuto l'esperienza del progetto *Flipped Math!* (Quali sensazioni e quali emozioni hai provato? Com'è stato il tuo rapporto con la matematica? Ti sei sentito motivato? Quanto, come e perché?). Specifica anche quali sono, secondo te, gli aspetti maggiormente positivi e negativi in questo percorso.

Pur essendo consapevoli del rischio di influenzare la risposta degli alunni fornendo indicazioni più dettagliate sugli aspetti da trattare nel tema, si è deciso di dare una direzione più precisa alla traccia, cercando di non far trasparire il focus esclusivo sulla motivazione, ma facendo emergere piuttosto un interesse generale verso i fattori affettivi. È infatti noto come, in questo genere di analisi, le parti di materiale narrativo legate al contesto di ricerca non sempre emergano spontaneamente e a volte sia necessaria una domanda più particolareggiata da parte del ricercatore[7] (Lieblich et al., 1998).
La scrittura del tema è stata assegnata a tutte le classi al termine dell'intero progetto. È stato chiesto loro di svolgere il compito individualmente al di fuori dell'aula, nel tentativo di consentire ad ognuno di svolgere il lavoro in un ambiente tranquillo e con tempistiche adeguate alla riflessione e all'autoanalisi. Tale scelta ha però comportato la mancata consegna del lavoro da parte di alcuni studenti: su un totale di 341 allievi a cui era stata assegnata la traccia, solo il 64% (ossia 217 alunni)[8] ha consegnato l'elaborato.
Per quanto concerne l'analisi dei testi narrativi si è scelto di orientarsi verso un approccio categoriale-contenutistico che si realizza separando i testi originali in parti che vengono poi inserite in particolari categorie secondo i contenuti espliciti presenti. Tale scelta risulta essere particolarmente adatta quando il fenomeno studiato è condiviso all'interno di un gruppo di persone (Lieblich et al., 1998), come nel caso considerato.
Il primo step dell'analisi è stato quello di selezionare le parti rilevanti dei temi, dette *unità di testo* (parole, frasi o gruppi di frasi), assemblandole poi insieme per creare un nuovo testo contenente tutte le affermazioni riguardanti la tematica da studiare. Il criterio di selezione delle parti rilevanti non si è basato esclusivamente sulle domande di ricerca, ma anche sull'obiettivo più ampio di comprendere quali caratteristiche del flipped learning influenzino i fattori motivazionali e affettivi degli studenti. Ci si è perciò concentrati su quelle parti di testo che esprimevano opinioni positive e negative sulla metodologia, per identificare "quali caratteristiche", e sulle percezioni espresse dagli studenti relativamente al proprio apprendimento e alla propria sfera affettiva, per determinare "quali influenze". Il secondo step dell'analisi è consistito nella creazione di categorie: alcune definite a priori in base alla teoria di riferimento, altre in modo empirico dalla lettura dei temi (Lieblich et al., 1998) basandosi sul contenuto delle unità che sarebbero poi andate a includere. In generale l'etichetta assegnata alle singole categorie corrisponde a un argomento che taglia longitudinalmente le parti di testo precedentemente selezionate. Nel terzo step dell'analisi le unità selezionate sono state riordinate all'interno delle categorie.
Nella presente ricerca gli ultimi due step sono strettamente interconnessi tra di loro mediante una procedura circolare: infatti, dopo la definizione delle categorie a priori, queste sono state riviste e adattate in seguito a letture e classificazioni successive.
Le categorie così individuate sono state poi organizzate gerarchicamente e successivamente suddivise in due macro-gruppi, che qui chiameremo *ambiti*, secondo le caratteristiche che le contraddistinguono: *aspetti motivazionali* e *opinioni sul flipped learning*. Inoltre, ogni categoria può assumere una

7. Alla prima classe che ha aderito alla sperimentazione è stata proposta una consegna più generica, omettendo le domande inserite tra parentesi. Gli elaborati prodotti sono risultati essere molto impersonali, paragonabili a una relazione piuttosto che a una narrazione. Per tale ragione si è scelto di modificare il testo, specificando quali aspetti approfondire nel racconto, nel tentativo di far emergere considerazioni legate alla sfera personale e affettiva degli allievi.
8. Il campione era formato da studenti che frequentavano per il 24% il liceo scientifico, per il 34% il liceo classico, per il 9% il liceo artistico, per il 28% l'istituto tecnico e per il 5% l'istituto professionale.

valenza positiva o negativa, a seconda del contenuto. Si veda il par. 3.2.1 per maggiori dettagli.
Le unità in ogni categoria sono state contate, tabulate e ordinate secondo la loro frequenza. Inoltre, le categorie sono state usate descrittivamente per formulare la rappresentazione di una determinata caratteristica in un certo gruppo di persone.
Dalla lettura dei temi sono emerse relazioni ricorrenti tra le unità di testo che appartengono ad alcune delle categorie. In certi casi tali connessioni sono presenti in modo esplicito mediante congiunzioni di vario tipo, come "perché", "quindi", "ma" ecc., in altri casi invece in modo implicito ma deducibile dal testo. Queste relazioni sono state esaminate poiché in grado di fornire informazioni rilevanti sulle specifiche caratteriste del flipped learning che potrebbero aver influito su un particolare aspetto affettivo.
Infine, si è osservato che alcune unità appartenenti alle medesime categorie contengono riferimenti espliciti alle specificità della matematica, espresse mediante termini come "formule", "ragionamenti", "esercizi", mentre altre riguardano il lavoro scolastico in generale. Tali ricorrenze sono state esaminate poiché in grado di fornire informazioni rilevanti sulle specifiche caratteristiche del flipped learning che potrebbero aver influito su particolari aspetti affettivi nel campo specifico dell'apprendimento della matematica, che possiede peculiarità diverse da quelle di altre discipline.

3.2.1 Definizione di ambiti e categorie

Nel seguito si riporta una descrizione degli ambiti individuati per l'analisi dei temi e delle categorie in essi contenute.
L'ambito degli *aspetti motivazionali* contiene sette categorie che riguardano affermazioni riconducibili a diverse tipologie di motivazione, alla soddisfazione o meno dei tre bisogni psicologici e alla percezione o meno di un'utilità per l'apprendimento.
Per classificare le diverse tipologie di motivazione si è fatto riferimento alla teoria dell'autodeterminazione di Deci e Ryan (1985), in particolare allo schema in Figura 1. Le svariate asserzioni riguardanti questo sotto-ambito sono state suddivise in motivazione intrinseca, motivazione estrinseca, e assenza di motivazione:

– *motivazione intrinseca*: parti di testo in cui vengono espresse caratteristiche tipiche di un soggetto con una motivazione intrinseca o estrinseca con stile regolativo integrato (Deci & Ryan, 1985). Questo tipo di motivazione può essere manifestato attraverso il riferimento ad alcuni dei costrutti in esso compresi, come anticipato nel par. 2.2: interesse; curiosità; coinvolgimento attivo, espresso anche mediante una maggior attenzione in classe o durante lo studio, riconducibile a esperienze di flusso (Csikszentmihalyi, 1993); *divertimento*.[9]
– *motivazione estrinseca*: parti di testo che fanno riferimento alle valutazioni, o in generale al mostrare una buona immagine di sé, come elemento importante. Si fa dunque riferimento particolare a tipologie di motivazione estrinseca con regolazione esterna e introiettata.
– *assenza di motivazione*: parti di testo in cui lo studente dichiara di non sentirsi motivato.

Restando all'interno del quadro teorico scelto (Deci & Ryan, 1985), alcune affermazioni degli studenti sono state interpretate come indicazione della soddisfazione o meno di uno o più dei bisogni psicologici fondamentali. A seconda del bisogno fondamentale che emerge dal testo si identificano le seguenti categorie:

– *bisogno di competenza*: lo studente afferma di riuscire/non riuscire a controllare la situazione e di provare emozioni positive/negative nel farlo.
– *bisogno di autonomia*: viene espresso mediante semplici frasi del tipo "fare da solo" o tramite la presa di coscienza di una maggior responsabilità maturata.
– *bisogno di relazionalità*, generalmente espresso come:

9. Il termine divertimento viene impiegato anche da Middleton (1995) come sinonimo di motivazione intrinseca, con l'obiettivo di renderlo maggiormente comprensibile ad alunni e docenti nei suoi studi sperimentali. Si può avere ulteriore conferma della validità di tale scelta dalla ricerca empirica di Ryan et al. (1992) in cui si evidenzia una forte correlazione lineare positiva tra la motivazione intrinseca e il divertimento.

- *bisogno di relazionalità tra pari*: consiste nella costruzione e mantenimento della relazione con i compagni di classe, nel sentirsi membro di un gruppo coeso, nel percepirsi utile allo stesso ecc.
- *bisogno di relazionalità con il docente*: spesso non è esplicito ma deducibile dal testo, ad esempio con espressioni del tipo "mi sono trovato bene con il docente" o "vorrei ringraziare il docente per".

Si conclude con l'unica categoria che riguarda la percezione espressa dagli studenti di aver raggiunto o meno gli obiettivi cognitivi fissati:

– *utilità/non utilità per l'apprendimento*: parti di testo in cui viene esplicitata l'utilità/non utilità di qualcosa per la comprensione e assimilazione dei concetti (facilitata o più profonda) o per l'organizzazione dello studio.

L'ambito delle *opinioni sul flipped learning* contiene otto categorie che riguardano le opinioni, positive o negative, espresse dagli studenti sulla metodologia del flipped learning, suddivise a seconda delle sue caratteristiche:

– *opinioni riguardanti l'apprendimento cooperativo*: parti di testo in cui gli studenti si riferiscono al "lavoro di gruppo";[10]
– *opinioni riguardanti l'apprendimento per problemi*: parti di testo in cui gli studenti si riferiscono ad "attività di scoperta" o più semplicemente ai "ragionamenti" che sviluppano nella risoluzione dell'attività;
– *opinioni riguardanti le attività creative*: parti di testo in cui gli studenti si riferiscono alla "creazione del video sul telescopio riflettore", essendo l'unica attività creativa proposta;
– *opinioni riguardanti il ponte tra matematica e realtà*: parti di testo in cui gli studenti si esprimono in merito agli esempi di applicazioni concrete mostrate come introduzione delle singole coniche o come problemi;
– *opinioni riguardanti il livello della sfida*: parti di testo in cui gli studenti esplicitano come il livello di difficoltà delle sfide, delle "spiegazioni" e delle attività proposte siano da loro avvertite come adeguate/non adeguate al proprio grado di competenza;
– *opinioni riguardanti l'uso della tecnologia*: parti di testo in cui gli studenti si esprimono in merito all'uso di strumenti tecnologici, tra i quali sono inclusi anche software didattici (come GeoGebra), mezzi di comunicazione online e siti internet (come YouTube);
– *opinioni riguardanti la valutazione formativa*: parti di testo in cui gli studenti parlano di "commenti", "consigli" o "correzioni" dei compiti a casa;
– *opinioni riguardanti il coinvolgimento interpersonale del docente*: parti di testo in cui gli studenti descrivono l'insegnante con aggettivi come ad esempio "paziente", "comprensivo", "disponibile" ecc.

4 Analisi e discussione dei risultati

Per verificare le ipotesi esposte nel par. 2.3, si procede con la presentazione dei risultati.

4.1 Aspetti motivazionali

4.1.1 Tipologia di motivazione

I riferimenti alla motivazione sono stati molto generici nel 20% delle narrazioni, rendendo difficile l'in-

10. Consapevoli della differenza tra "lavoro di gruppo" e "apprendimento cooperativo" e del fatto che il primo non sia sempre riconducibile al secondo, ciò che viene espresso dagli allievi nei frammenti selezionati, come si mostrerà nel seguito, è certamente riconducibile alla strategia didattica dell'apprendimento cooperativo seppure, per ovvie ragioni, viene da loro nominata con termini di uso comune, come appunto "lavoro di gruppo".

terpretazione e la successiva classificazione tra intrinseca ed estrinseca, come nell'esempio che segue:

1. «A mio parere questa esperienza è stata positiva, mi ha fatto maturare ed aiutato con la matematica motivandomi».

Altri studenti sono stati invece più specifici, fornendo elementi utili per determinare la tipologia della loro motivazione. Mettendo a confronto le seguenti tre unità di testo si può infatti riscontrare un esempio di motivazione intrinseca (esempio 2), di motivazione estrinseca (esempio 3) e di assenza di motivazione (esempio 4):

2. «Devo dire che mi sono sentita molto motivata nel mettermi alla prova con argomenti che non conoscevo».
3. «Mi sono sentita motivata soprattutto per alzare la media, non proprio positiva, soprattutto una decina di giorni prima del compito ho fatto molti esercizi in modo di arrivarci il più preparata possibile».
4. «[…] non ho la percezione di aver colmato le mie lacune e di conseguenza non mi sono sentita motivata durante l'esperienza».

Le unità di testo inscrivibili nella categoria relativa alla motivazione intrinseca (esempio 2) sono tra le più articolate e numerose, compaiono infatti nel 67% dei temi. Come anticipato, in esse sono stati identificati quattro differenti costrutti (De Beni & Moè, 2000): curiosità, interesse, divertimento e coinvolgimento attivo.

5. «Il metodo di spiegazione, oltre ad essere molto coinvolgente, era basato su fatti reali e molto strani (cucinare senza energia elettrica, la Chiesa di S. Andrea, il voltone del Podestà) quindi eri spronato dalla curiosità ad impegnarti per individuare la spiegazione dei fatti».
6. «Il progetto Flipped Math è stato molto interessante e coinvolgente mi sono sentita molto presa rispetto alle solite lezioni che svolgiamo in classe nelle quali è semplice distrarsi».
7. «[…] mi divertivo a svolgere gli esercizi e non saltavo neanche un compito perché era divertente e stimolante».

Curiosità e interesse, manifestati rispettivamente negli esempi 5 e 6, sono presenti complessivamente nel 44% delle narrazioni; nei temi vengono sempre espresse in modo esplicito essendo due vocaboli di uso comune. Altrettanto usuale è il termine divertimento, menzionato dal 28% del campione (esempio 7). Infine, nella sottocategoria chiamata "coinvolgimento attivo" sono state inserite le frasi del 24% degli studenti che, come nell'esempio 6, si sentono «molto presi» dall'attività.
I segnali della presenza di una motivazione estrinseca (esempio 3) sono meno frequenti, solo nel 13% dei testi, e quasi tutti coincidono con il desiderio di prendere buone valutazioni o evitare quelle negative (esempio 8), sono invece pochi i riferimenti espliciti all'obiettivo di mostrare una buona immagine di sé (esempio 9):

8. «[…] mi sono sentita abbastanza motivata perché nelle verifiche, andando bene, volevo mantenere e ottenere sempre risultati così positivi».
9. «[…] ha creato anche una sana competizione per evitare di sapere meno dei tuoi compagni del gruppo quindi motivandomi a studiare e a saperne di più».

In tutti i casi sembra trattarsi di uno stile regolativo introiettato, o al più identificato, proprio per il rilievo che i narratori danno alla valutazione e al dimostrarsi competenti agli occhi degli altri o di sé stessi. Sono rare, infine, le espressioni riconducibili ad un'assenza di motivazione (esempio 4), che compaiono nel 4% delle narrazioni, sempre in modo diretto, come nell'esempio che segue:

10. «Non mi sono pertanto sentita troppo motivata».

4.1.2 Bisogni psicologici fondamentali

Il bisogno soddisfatto con la frequenza maggiore è quello di relazionalità, emerso dal 36% dei temi:

11. «Personalmente il mio gruppo mi piaceva, ed è stato anche di aiuto, perché così ho conosciuto meglio le mie compagne che è dal primo anno che le conosco».
12. «[…] mi sono trovata spesso a spiegare alcune cose ai membri del mio gruppo che avevano perso una parte di spiegazione o non avevano capito qualcosa, e questo mi ha fatto piacere perché mi sono sentita "utile" e ascoltata».
13. «Vi ringrazio per la vostra disponibilità nell'ascoltare i nostri dubbi per la pazienza che avete portato».

Si tratta due volte su tre della soddisfazione del bisogno di relazionalità tra pari, avvenuto in alcuni casi grazie alla costruzione o al consolidamento di legami in ambito sociale, come riportato nell'esempio 11, in altri invece al senso di appartenenza a un gruppo con cui ci si identifica percependosi degni e approvati, come espresso nell'esempio 12. La frase dell'esempio 13, invece, si riferisce al bisogno di relazionalità con il docente, dal quale sembra che gli allievi si sentano apprezzati e rispettati.
Il soddisfacimento del bisogno di competenza viene espresso nel 15% dei temi attraverso dichiarazioni legate al piacere provato nel riuscire a controllare la materia e a raggiungere gli obiettivi sperati, come espresso rispettivamente negli esempi seguenti:

14. «[…] con questo progetto mi sono sentita di ritornare brava come gli anni precedenti e sono molto fiera dei progressi che sono riuscita ad ottenere».
15. «Un aspetto positivo è stato sicuramente ricavare la teoria dagli esercizi poiché anche se è un metodo a cui non eravamo abituati, sono riuscita ad apprendere i concetti e mi è piaciuto riuscire a ricavarli senza studiarli precedentemente».

Dall'esempio 15 emerge, oltre alla soddisfazione del bisogno di competenza per essere riuscita ad «apprendere i concetti», anche la soddisfazione del bisogno di autonomia: giungere autonomamente alla scoperta o alla soluzione di un problema, come viene espresso, provoca un senso di appagamento. La frequenza con cui compare è abbastanza ridotta (8%) ma d'altronde, come anticipato, è il bisogno più complesso da soddisfare ed è quello che permette di passare da una regolazione introiettata a una più autodeterminata.
Per quanto riguarda invece la non soddisfazione dei bisogni psicologici fondamentali si sono ritrovati nei testi solo riferimenti al bisogno di relazionalità tra pari e a quello di competenza. I primi rimandano quasi sempre a una mancata collaborazione all'interno dei gruppi, come nell'esempio che segue:

16. «[…] i gruppi non erano tutti equilibrati, è molto complesso lavorare bene insieme e spesso non tutti collaborano».

I secondi vengono espressi mediante un senso di disagio quando le proprie abilità sono percepite non all'altezza dell'obiettivo prefissato (compiti troppo difficili), o attraverso un senso di noia/disinteresse quando il livello dell'attività proposta è percepita inferiore alle proprie competenze (compiti troppo facili). A titolo esemplificativo proponiamo rispettivamente gli esempi 17 e 18:

17. «Riguardando al percorso, però, devo dire che potevo impegnarmi di più e magari fare più esercizi, anche se quelli che ho fatto, a volte, non riuscivo a svolgerli completamente e questo ha provocato in me sconforto e rabbia».
18. «Un aspetto da migliorare potrebbe essere l'eccessiva facilità di alcuni esercizi che, resi più difficili, sono più allettanti e stimolanti per gli studenti».

4.2 Opinioni sul flipped learning

All'inizio di questa panoramica è stata anticipata la presenza di relazioni tra le diverse categorie, identificate grazie a congiunzioni causali nelle unità di testo ("perché", "dal momento che" ecc.), alcune delle quali ricorrenti all'interno del campione. Grazie a tali relazioni è stato possibile individuare un legame tra alcune caratteristiche del flipped learning e le categorie relative ai fattori motivazionali sopra esposte. Per comprendere quali caratteristiche della metodologia in esame abbiano influenzato tali fattori, si procede col considerare alcune categorie riferibili a opinioni, positive o negative, espresse dagli studenti relativamente all'utilizzo del flipped learning in matematica.

4.2.1 Cooperative learning

Una delle categorie che compare con la frequenza più alta, pari al 56%, è sicuramente quella che contiene giudizi positivi sull'utilizzo del cooperative learning. L'apprendimento cooperativo sembra sia stato apprezzato, oltre che per la sua funzionalità all'apprendimento, anche per essere stato in grado di generare motivazione intrinseca e di soddisfare il bisogno di competenza. L'utilizzo del cooperative learning ha infatti soddisfatto il bisogno di relazionalità tra pari creando un ambiente che favorisce la creazione e il mantenimento di legami con i compagni e la percezione di essere elemento degno e utile del gruppo, come esplicitato rispettivamente negli esempi 19 e 20.

19. «Per me è stato sorprendente poter conoscere lati di persone che mai avrei pensato di distinguere».
20. «[…] il fatto di lavorare in gruppo mi ha stimolato a partecipare e ad ascoltare le lezioni così da poter dare un aiuto durante gli esercizi insieme».

Emerge inoltre come la motivazione intrinseca sia stata stimolata, in particolare mediante il divertimento e il coinvolgimento attivo, come emerge dall'esempio che segue.

21. «I lavori di gruppo sono stati molto divertenti e utili, perché al loro interno ognuno di noi aveva un ruolo specifico e perciò la possibilità di confrontarci l'un l'altro ha reso l'attività più serena facendoci sentire tutti coinvolti e motivati».

Anche le opinioni negative riguardo l'apprendimento cooperativo sono tra le più elevate paragonate alle altre categorie a valenza negativa, compaiono infatti nel 9% degli elaborati. Queste sono dovute per lo più a una predisposizione personale al lavoro individuale, alla percezione di una non utilità per l'apprendimento o al mancato soddisfacimento del bisogno di relazionalità tra pari.

4.2.2 Problem based learning

Meno incisivo rispetto al cooperative learning è stato il problem based learning, a cui si fa riferimento nel 16% dei temi. Naturalmente il rinvio ad esso non è diretto, ma avviene piuttosto mediante una descrizione dello stesso, facendo cenno a processi di ragionamento e di deduzione che lo caratterizzano.
Seppur l'incidenza dei riferimenti all'apprendimento per problemi non è paragonabile a quella relativa all'apprendimento cooperativo, le ragioni che sottendono tale apprezzamento sono rilevanti: la sua funzionalità all'apprendimento (esempio 22) e la capacità di generare motivazione intrinseca, oltre che soddisfare il bisogno di competenza e autonomia (esempio 23).

22. «[…] perché l'idea di far giungere gli studenti alle formule definitive piuttosto che esporle come in una normale lezione, secondo me ha funzionato. In particolare mi sono sentito più incuriosito e coinvolto rispetto a una normale lezione di matematica».
23. «Inoltre era molto gratificante giungere ad una conclusione corretta di un esercizio, soprattutto perché frutto dei nostri pensieri, siccome l'obiettivo era quello di arrivare alla soluzione dei problemi in gruppo, senza la spiegazione dei prof».

Come emerge dall'esempio 22, gli studenti si sono sentiti interessati, coinvolti attivamente, incuriositi e hanno percepito l'utilità del lavoro svolto, tutti elementi riferibili alla motivazione intrinseca. Nell'esempio 23 possiamo notare invece come il bisogno di competenza e autonomia venga messo in relazione con l'apprendimento per problemi.
In particolare, la proposta di problemi contestualizzati all'interno del mondo reale, specialmente nella fase del lancio della sfida, ha portato ad un apprezzamento (esplicitato nel 24% dei temi), soprattutto per l'interesse stimolato, come si evince anche dal seguente esempio.

24. «È stato anche molto interessante vedere come le sezioni coniche siano una costante nella nostra vita quotidiana, di come la matematica si concretizzi nella realtà e di quanto questa ci sia utile nello stretto legame di essa con l'arte».

Sono state rilevate anche alcune opinioni negative rispetto a tale strategia didattica: circa il 4% del campione non l'ha apprezzata. Alcuni studenti, abituati a una posizione più passiva in cui è sufficiente memorizzare le nozioni, sono in difficoltà ad adattarsi al nuovo metodo considerato "più difficile", probabilmente perché esso richiede un maggior impegno e sforzo cognitivo.

4.2.3 Attività creative e uso della tecnologia

Una caratteristica che contraddistingue il flipped learning da altre metodologie è quella di proporre anche attività di tipo creativo. Sebbene durante la sperimentazione ci sia stata un'unica occasione per approcciarsi a questo tipo di attività, ad essa fanno riferimento positivo il 19% degli studenti, mentre le considerazioni negative non arrivano a coprire neanche l'1% dei temi. La ragione principale di questo apprezzamento, oltre la funzionalità all'apprendimento, è stato il divertimento scaturito, sottocategoria della motivazione intrinseca.

25. «Ciò che mi è piaciuto di più in assoluto è stato fare il video, mi sono divertita con il mio gruppo e da una semplice idea siamo arrivati, anche per scherzo, a creare un corto vero e proprio che mi ha fatta tornare sempre a casa col sorriso».

Come emerge dall'esempio 25, la possibilità di mettere in gioco la propria fantasia e il proprio estro, lavorando con i coetanei su un progetto autentico, ha condotto ad apprezzare la metodologia proposta. Nel 20% dei temi sono presenti opinioni positive rispetto l'utilizzo della tecnologia, riferibili in particolar modo all'uso di software didattici e di video online, come si nota rispettivamente dagli esempi 26 e 27, soprattutto per via dell'utilità per l'apprendimento e dell'interesse scaturito.

26. «Abbiamo affrontato questi argomenti con l'ausilio di GeoGebra e penso che questo abbia attirato l'attenzione di noi studenti, soprattutto per vedere come la variazione di certi parametri influisce sulla rappresentazione grafica della figura».
27. «Ci è stato concesso di avvicinarci gradualmente ai concetti attraverso un percorso non solo cartaceo ma anche digitale. Guardare dei video è un modo davvero stimolante e funzionale perché cattura al meglio l'attenzione e lascia ben impresso in mente quanto ho appreso durante l'ora».

In entrambi i casi emerge come la componente grafica attiri maggiormente l'attenzione degli alunni, generando interesse e stimolando quindi la comparsa di motivazione intrinseca.
Sono presenti anche opinioni negative riguardo l'utilizzo della tecnologia nella didattica, ma la frequenza non supera il 2%.

4.2.4 Nuovo ruolo del docente, livello ottimale della sfida e valutazione formativa

La nuova posizione di "guida" assunta dal docente in classe è stata notata, ed esplicitata con valenza positiva, nel 23% dei temi.

28. «[…] mi sono trovata davvero bene perché siamo stati seguiti molto sia a casa che a scuola, abbiamo avuto molti aiuti e [i docenti sono stati] sempre disponibili quando ne avevamo bisogno».
29. «[…] riuscire ad arrivare a ragionamenti che abbiamo pensato tutti insieme ti apre molto la mente ti porta a grandi soddisfazioni».

In questi esempi si evidenzia come ciò abbia condotto alla soddisfazione del bisogno di relazionalità, (esempio 28), grazie alla percezione di un maggior coinvolgimento interpersonale del docente e di una maggior attenzione per il singolo. Inoltre, il nuovo ruolo di facilitatore dei processi di apprendimento ha permesso di soddisfare anche il bisogno di autonomia degli studenti (esempio 29), che si sono sentiti in grado di raggiungere gli obiettivi prefissati "tutti insieme" senza l'aiuto del docente, quindi in modo autonomo rispetto alla figura di riferimento.
Compito del docente è anche quello di proporre attività adeguatamente sfidanti, fatto che è stato percepito ed esplicitato dall'11% del campione (esempio 30) mentre l'8% ha espresso un senso di inadeguatezza per il grado di difficoltà delle attività progettate (esempio 31). In tal caso, come ipotizzabile in accordo con la teoria della zona di sviluppo prossimale di Vygotskij (1978), sono emerse due diverse situazioni: le richieste fatte agli studenti venivano percepite come eccessive o difficili, facendoli sentire "stanchi" e frustrati (esempio 31), oppure eccessivamente facili e quindi non stimolati (esempio 32).

30. «Durante i lavori di gruppo mi sono sentita spesso all'altezza degli esercizi da svolgere molte volte ho saputo prendere in mano le redini della situazione e gestire l'attività».
31. «All'inizio di ogni argomento trovavo soprattutto difficoltà nel comprenderlo e provavo frustrazione e ansia per quando andavo a fare gli esercizi che volte non mi venivano».
32. «Un aspetto forse negativo sono gli esercizi che abbiamo dovuto svolgere per casa o in classe che a volte risultavano un po' troppo facili».

Le categorie che risultano essere legate più frequentemente con quella relativa al livello ottimale della sfida, sia a valenza positiva che negativa, sono quelle riguardanti il bisogno di competenza, come emerge dall'esempio 32.
Concludiamo l'analisi delle opinioni sulla metodologia del flipped learning con la categoria relativa all'utilizzo della valutazione formativa, identificata soprattutto con la correzione dei compiti assegnati per casa mediante commenti e suggerimenti, che compare, solo con una valenza positiva, nel 6% dei testi. La ragione principale è la sua funzionalità all'apprendimento.

4.3 Riferimenti alle specificità della matematica

Da analisi successive sul materiale narrativo si è osservato che, seppur il riferimento alla matematica fosse implicito (considerando che i narratori raccontano l'esperienza originata dall'utilizzo del flipped learning durante le lezioni di matematica), alcune parti sembrano poter non riguardare specificatamente l'insegnamento-apprendimento della materia, ma il lavoro a scuola in generale (esempio 33), mentre in altre parti viene fatto riferimento proprio alla specificità che gli allievi vedono nella materia (esempio 34).[11]

33. «[…] mi ha aiutato a conoscere meglio i miei nuovi compagni di classe e anche quelli vecchi».
34. «Le lezioni di *matematica* sono state più interessanti delle solite lezioni, in quanto abbiamo partecipato in prima persona per ricavare le *formule* e i *ragionamenti*».

Si è quindi deciso di approfondire l'analisi dei riferimenti alla disciplina presenti nelle unità di testo già analizzate per quanto riguarda l'ambito degli aspetti motivazionali e quello delle opinioni sul flipped learning. I riferimenti alla disciplina si concentrano soprattutto nelle opinioni riguardo l'apprendimento per problemi e il tentativo di creare un avvicinamento tra mondo reale e matematica, che tra l'altro è proprio uno dei presupposti del problem based learning. In particolare, è frequente il riferimento al processo deduttivo, alle attività di risoluzione di problemi e agli esempi applicativi dei concetti matematici in situazioni reali. Sono presenti anche rimandi all'uso della tecnologia.
Emerge inoltre che anche i bisogni di competenza e autonomia sono strettamente contestualizzati all'interno della materia oggetto del progetto, che viene spesso richiamata o a cui viene fatto riferimento implicito, come mostrato nell'esempio 34.
Invece le categorie riguardanti l'apprendimento cooperativo e l'utilizzo di attività creative hanno presentano pochissimi riferimenti alla materia. Queste, infatti, si rifanno per lo più a competenze trasversali o a caratteristiche intrinseche dell'attività che esulano da quelle disciplinari.
Similmente anche la soddisfazione del bisogno di relazionalità, sia col docente che con i propri compagni, non pare essere legata alla matematica. Le frasi che sono state individuate, infatti, potrebbero essere state pronunciate durante l'ora di una qualsiasi altra materia scolastica, come mostra l'esempio 33.
Al netto delle considerazioni esposte si può osservare come la terna problem based learning–bisogno di competenza–bisogno di autonomia, messa in evidenza precedentemente dalle relazioni tra le categorie, sia caratterizzata da una forte presenza di riferimenti diretti alla matematica, al contrario invece del binomio peer education–bisogno di relazionalità.

5 Conclusioni

La ricerca sperimentale presentata in questo articolo indaga la possibile influenza del flipped learning sulla motivazione ad apprendere in matematica negli studenti di scuola secondaria di secondo grado. Ciò avviene mediante l'analisi dei testi narrativi raccolti al termine della sperimentazione descritta, con l'obiettivo di individuare degli indicatori relativi alla soddisfazione dei tre bisogni psicologici fondamentali, che implicano un aumento del livello di autodeterminazione durante l'apprendimento (Deci & Ryan, 1985). Sono stati ricercati inoltre indicatori della presenza di alcuni elementi caratterizzanti la motivazione intrinseca, come la curiosità, l'interesse e il coinvolgimento attivo. Lo studio possiede la peculiarità di essere specificatamente rivolto all'apprendimento in matematica.
Volendo trarre alcune conclusioni dai risultati emersi dall'analisi, la tipologia di motivazione provata dalla maggior parte degli studenti è quella intrinseca (67% dei testi), espressa mediante alcune dei suoi elementi caratteristici (curiosità, interesse, coinvolgimento attivo e divertimento), seguita

11. Per mettere in risalto graficamente i riferimenti alla matematica o alle sue specificità, sono evidenziate in corsivo alcune parole chiave.

da quella estrinseca (13% dei testi) e dall'assenza di motivazione (4% dei testi). In particolare, le caratteristiche del flipped learning che hanno stimolato curiosità e interesse sono state la proposta di problemi contestualizzati in contesti reali e l'utilizzo della tecnologia, mentre il coinvolgimento attivo e il divertimento sono scaturiti soprattutto dall'utilizzo del cooperative learning e dalla proposta di attività creative. L'ipotesi di ricerca d) risulta essere solo parzialmente verificata, in quanto non sono emersi collegamenti espliciti tra la categoria contenente riferimenti alla motivazione intrinseca e quella relativa alla percezione di un livello delle attività come adeguatamente sfidanti.
Dalla nostra analisi il flipped learning è risultato essere un ambiente in grado di sostenere i tre bisogni psicologici fondamentali, essi infatti compaiono nei temi con percentuali rilevanti. Disponendoli dal più al meno frequente si trova il bisogno di relazionalità (36%), quello di competenza (15%) e quello di autonomia (8%), confermando lo studio sperimentale di Sergis et al. (2018), il cui diagramma a barre è riportato in Figura 2. Come si può osservare, infatti, il bisogno di relazionalità (rappresentato dalla barra in giallo) ottiene la percentuale di soddisfazione più alta all'interno dei gruppi sperimentali (indicati con la sigla EG), seguito dal bisogno di competenza (rappresentato dalla barra in verde) e da quello di autonomia (rappresentato dalla barra in rosso).

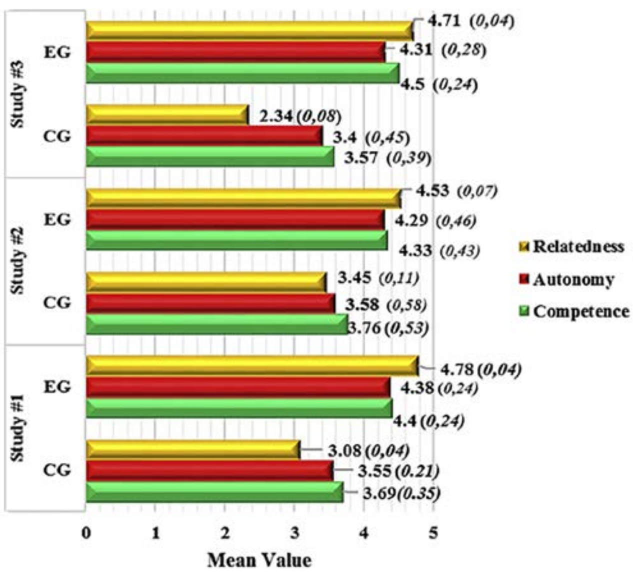


Figura 2. Statistica descrittiva dei bisogni psicologici fondamentali nei tre studi mettendo a confronto gruppo sperimentale (EG) e gruppo di controllo (CG) (Sergis et al., 2018, p. 374).

Come supposto nell'ipotesi c), il bisogno di relazionalità sembra essere stato favorito soprattutto dall'utilizzo di strategie di apprendimento cooperativo, dando origine a un ambiente che favorisce la creazione e il mantenimento di legami con i compagni e la percezione di essere elemento degno e utile del gruppo, ma anche dal nuovo ruolo del docente, in grado di dimostrare attenzione al singolo e coinvolgimento interpersonale. I risultati dell'analisi forniscono conferma anche relativamente alle congetture fatte sugli altri due bisogni psicologici fondamentali di competenza (ipotesi a) e autonomia (ipotesi b), che sembrano essere stati soddisfatti dall'utilizzo delle strategie di active learning applicate nella sperimentazione, il cooperative learning e il problem based learning, fornendo inoltre informazioni più dettagliate. Nel percorso proposto, infatti, sembra che sia stato in particolare il problem based learning a supportare questi due bisogni, insieme alla scelta di sfide dal livello ottimale, che ha contributo all'appagamento del bisogno di competenza, e il nuovo ruolo del docente, che ha soddisfatto il bisogno di autonomia. Non sono emersi collegamenti tra la soddisfazione del bisogno di competenza e l'uso della valutazione formativa, come invece si era supposto nell'ipotesi di ricerca a).
Dall'analisi delle ricorrenze dei riferimenti alle specificità della matematica, inoltre, sono emersi alcuni

fatti di rilievo che non erano stati presi in considerazione al momento dell'elaborazione delle ipotesi, ma che trovano un riscontro in letteratura e nella pratica didattica. Rispetto al cooperative learning, il problem based learning risulta essere maggiormente indicato per l'insegnamento-apprendimento specifico della matematica, grazie alle caratteristiche che lo contraddistinguono, molte delle quali affini ai processi che si attuano studiando la disciplina (problem solving, ragionamenti induttivi seguiti da quelli deduttivi, riflessione ecc.) (Dorier & Maass, 2014). L'apprendimento per problemi, inoltre, sembra sostenere i bisogni psicologici fondamentali di competenza e autonomia, in particolare in matematica. Al contrario nei frammenti di testo relativi alle opinioni sull'apprendimento cooperativo e al bisogno di relazionalità, che, come osservato, sono due categorie in relazione tra loro, compaiono molto di rado riferimenti alle specificità della disciplina. Si potrebbe dunque supporre che l'utilizzo di questa strategia didattica, seppur sia stata la più apprezzata e abbia influito positivamente su molti aspetti delle percezioni degli studenti, potrebbe portare i medesimi vantaggi anche applicata ad altre discipline scolastiche. Pensiamo invece che il problem based learning, seppur risulti preso meno in considerazione negli elaborati, sia uno strumento del flipped learning particolarmente adatto per trattare la matematica, e quindi una risorsa da tenere in considerazione nel nostro ambito, insieme all'utilizzo di software didattici, giudicati funzionali per l'approccio alla disciplina.
Per concludere, sulla base dei risultati e delle osservazioni riportati, si può ipotizzare che un utilizzo del flipped learning, che sfrutti strategie di cooperative learning e problem based learning, può favorire la soddisfazione dei bisogni psicologici fondamentali e stimolare la curiosità, l'interesse, il divertimento e il coinvolgimento attivo, sviluppando così negli studenti una motivazione intrinseca in matematica, che, se iterata per lunghi periodi, potrebbe trasformarsi in un tratto stabile del soggetto.

Bibliografia

Abeysekera, L., & Dawson, P. (2015). Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rationale and a call for research. *Higher Education Research and Development*, *34*(1), 1–14.

Barrows, H. S., & Tamblyn, R. M. (1980). *Problem-based Learning in Medical Education*. Springer.

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. ISTE.

Berlyne, D. E. (1971). *Conflitto, attivazione e creatività*. Franco Angeli Editore.

Boscolo, P. (2003). La motivazione ad apprendere tra ricerca psicologica e senso comune. *Scuola e città*, *1*, 81–92.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Carotenuto, G., & Sbaragli, S. (2018). Flipped classroom per la formazione insegnanti: una ricerca sulla percezione degli studenti. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *3*(1), 7–34.

Cecchinato, G. (2014). Flipped classroom: innovare la scuola con le tecnologie digitali. *Tecnologie Didattiche*, *22*(1), 11–20.

Cecchinato, G., & Papa, R. (2016). *Flipped classroom un nuovo modo di insegnare e apprendere*. UTET.

Csikszentmihalyi, M. (1993). *The evolving self: A psychology for third millennium*. Harper Collins.

D'Amore, B., Godino, D. J., Arrigo, G., & Fandino Piñilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Pitagora.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di didattica della matematica*. Pitagora.

Da Re, F. (2013). *La didattica per competenze*. Pearson Italia.

De Beni, R., & Moè, A. (2000). *Motivazione e apprendimento*. Il Mulino.

Deci, E. L. (1975). *Intrinsic motivation*. Plenum Press.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. Plenum Press.

Deci, E. L., Eghrari, H., Patrinck, B., & Leone, D. (1994). Facilitating internalization: The self-determination theory perspective. *Journal of Personality*, *62*, 119–142.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 471–482.

Dorier, J., & Maass, K. (2014). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 300–303). Springer.

Hannula, M. (2004, Luglio). *Regulating motivation in mathematics.* [Paper presentation]. Topic Study Group 24 of ICME-10, Copenhagen, DK.

Hannula, M. (2012). Exploring new dimension of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137–161.

Harter, S. (1992). The relationship between perceived competence, affect and motivational orientation within the classroom: Processes and patterns of change. In A. K. Boggiano & T. S. Pittman (Eds.), *Achievement and motivation: A social-developmental perspective* (pp. 77–114). Cambridge University Press.

Hidi, S. (1990). Interest and its contribution as a mental resource for learning. *Review of Educational Research*, *60*, 549–350.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1996). *Apprendimento cooperativo in classe: migliorare il clima emotivo e il rendimento*. Erickson.

King, A. (1993). From Sage on the Stage to Guide on the Side. *College Teaching*, *41*(1), 30–35.

Lazzari, E. (2017). I sistemi di numerazione: un'esperienza di apprendimento capovolto. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, *9*(14), 372–393.

Lazzari, E. (2018). Flipped learning e motivazione in matematica: possibili concessioni e implicazioni didattiche. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, A. Veste & F. Ricci (Eds.), *Quaderni GRIMeD 4. Fare matematica in relazione* (pp. 114–123). Il capitello.

Lieblich, A., Tuval-Maschiach, R., & Zilber, T. (1998). *Narrative research. Reading, Analysis and Interpretation.* SAGE Publication.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of mathematics* (pp. 575–596). McMillan.

Middleton, J. A. (1995). A study of Motivation in the Mathematics Classroom: A Personal Constructs Approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(3), 256–279.

Middleton, J. A., & Spanias, P. (1999). Motivation for Achievement in Mathematics: Findings, Generalizations, and Criticisms of the Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(1), 65–88.

Miquelon, P., & Vallerand, R. J. (2008). Goal motives, well-being, and physical health: An integrative mode. *Canadian Psychology*, *49*(3), 241–249.

Murphy, P. K., & Alexander, P. A. (2000). A motivated exploration of motivation terminology. *Contemporary Educational Psychology*, *25*, 3–53.

Nietz, I., Galiano, O., & Mayer, F. (2016). Vers un cadrage téorique pour comprendre la classe inverse. In A. Dumont & D. Berthiaume (Eds.), *La pédagogie inverse: Enseigner autrement dans le supérieur par la classe inversée* (pp. 39–50). De Boeck Supérieur.

Pellerey, M. (1993). Volli, sempre volli, fortissimamente volli: La rinascita della pedagogia della volontà. *Orientamenti psicologici*, *6*, 1005–1017.

Ryan, R. M. (1982). Control and information in the intrapersonal sphere: An extension of cognitive evaluation theory. *Journal of Personality and Social Psychology*, *43*(3), 450–461.

Ryan, R. M., Connell, J. P., & Grolnick, W. S. (1992). When achievement is not intrinsically motivated: A theory of internalization and self-regulation in school. In A. K. Boggiano & T. S. Pittman (Eds.), *Achievement and motivation: A social-developmental perspective* (pp. 167–188). Cambridge University Press.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000a). Self-determination theory and facilitation of intrinsic motivation, social development and well-being. *America Psychology*, *55*(1), 68–78.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000b). Intrinsic and Extrinsic Motivations: Classic Definitions and New Direction. *Contemporary Educational Psychology*, *25*, 54–67.

Ryan, R. M., & Grolnick, W. S. (1986). Origins and pawns in the classroom: Self-report and projective assessments of individual differences in children's perceptions. *Journal of Personality and Social Psychology*, *50*(3), 550–558.

Ryan, R. M., & La Guardia, J. (2000). What is being optimized over development? A self-determination theory perspective on basic psychological needs across the life span. In S. Qualls & R. Abeles (Eds.), *Psychology and the aging revolution: How we adapt to longer life* (pp. 145–172). American Psychological Association.

Sams, A., & Bergmann, J. (2013). Flip your students' learning. *Educational Leadership*, *7*, 16–20.

Schiefele, U. (1991). Interest, learning, and motivation. *Educational Psychologist*, *26*, 299–323.

Sergis, S., Sampson, D. G., & Pelliccione, L. (2018). Investigating the impact of Flipped Classroom on students' learning experiences: A Self-determination Theory approach. *Computers in Human Behavior*, *78*, 368–378.

Skinner, B. F., Bolacchi, G., & Gallone, M. (1974). *La scienza del comportamento: ovvero il behaviorismo*. SugarCo.

Vastarella, S. (2016). Postfazione. In J. Bergmann & A. Sams (Eds.), *Flip your classroom. La didattica capovolta* (pp. 113–127). Giunti Scuola.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in Society*. Harvard University Press.

Wæge, K. (2010). Motivation for learning mathematics in terms of needs and goals. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 84–93). Institut National de Recherche Pédagogique.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *The Journal of Child Psychology Psychiatry*, *17*, 89–100.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 113–121.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 57 - 69, DOI: 10.33683/ddm.23.13.3 OPEN ACCESS

"Ti sfido in altezza": da un gioco-indagine in ambiente di geometria dinamica alla discussione di attributi critici delle figure

"The height challenge": from the game in a dynamic geometry environment to the discussion of critical attributes of the figures

Carlotta Soldano e Cristina Sabena
Università degli Studi di Torino – Italia

carlotta.soldano@unito.it, cristina.sabena@unito.it

Sunto / L'intreccio tra componenti concettuali e figurali è una caratteristica fondamentale del pensiero geometrico e costituisce un importante obbiettivo didattico a tutti i livelli scolastici. In questo articolo si considerano le altezze dei triangoli inquadrando il problema da un punto di vista teorico e analizzando un'attività didattica sperimentata in classi seconde di scuola secondaria di primo grado. L'attività è centrata su un gioco-indagine con feedback digitale implementato in GeoGebra, seguito da una discussione di classe. Attraverso l'analisi di estratti dalla discussione di classe verranno mostrate le potenzialità didattiche della progettazione, con particolare riferimento all'evoluzione dell'immagine concettuale personale degli studenti.

Parole chiave: gioco-indagine; feedback; discussione di classe; immagine concettuale; attributi critici.

Abstract / The intertwining of conceptual and figural components is a fundamental feature of geometric thinking and constitutes an important didactic goal at all school levels. This article focuses on the heights of the triangles by framing the problem from a theoretical point of view and analyzing a didactic activity experimented in seventh grade classes. The activity is centered on an inquiring-game with digital feedback implemented in GeoGebra, followed by a class discussion. Through the analysis of extracts from the class discussion, the teaching potential of the design will be shown, with particular reference to the evolution of the students' personal concept image.

Keywords: inquiring-game; feedback; class discussion; concept image; critical attributes.

1 Il delicato ruolo degli esempi in geometria

Nella maggior parte dei libri di testo della scuola primaria, le altezze dei triangoli, intese come segmenti,[1] vengono esemplificate prevalentemente su triangoli equilateri o isosceli. La scelta di usare queste tipologie di triangolo può indurre gli studenti a pensare erroneamente che le altezze dividano sempre a metà l'angolo al vertice e che un loro estremo coincida sempre con il punto medio del lato opposto al vertice dal quale sono tracciate. In altri termini, elementi non contenuti nella definizione di altezza, perché non caratterizzanti il concetto, vengono assunti come attributi critici, ossia proprietà che un esempio di un concetto deve avere per poter essere considerato tale[2] (Hershkowitz, 1987; Hershkowitz & Vinner, 1983). L'occhio inesperto dello studente viene quindi ingannato da elementi accidentali osservabili negli esempi. Inoltre, una base e la relativa altezza sono spesso rappresentate seguendo l'orientamento orizzontale-verticale della pagina. Configurazioni di questo tipo sono molto comode perché in sintonia con il modo in cui osserviamo il mondo che ci circonda ma possono indurre gli studenti a pensare che la base e la relativa altezza debbano sempre essere orizzontali o verticali. Anche nei libri di testo della scuola secondaria di primo grado,[3] l'altezza rappresentata in un triangolo è generalmente una sola ed è quasi sempre quella relativa al lato posizionato secondo l'orientamento orizzontale della pagina. Dunque, le problematiche relative allo studio del concetto di altezza riscontrate nella scuola primaria[4] tendono a permanere anche nel successivo segmento scolastico.
Le errate deduzioni descritte nel paragrafo precedente sono ricollegabili a processi spontanei di categorizzazione di cose, persone o eventi messi in atto nella vita di tutti i giorni. Nell'ambito della psicologia cognitiva, gli studi di Eleonor Rosch (1999) hanno evidenziato la presenza di due dimensioni all'interno della struttura del sistema categoriale. La prima è una cosiddetta *dimensione verticale*, secondo cui i rapporti tra le categorie vengono stabiliti gerarchicamente sulla base di una tassonomia a tre livelli: sovraordinata, base, subordinata. Ad esempio, poligoni – triangoli – triangoli isosceli rappresentano rispettivamente il livello sovraordinato, base e subordinato. La seconda è una dimensione detta *orizzontale* e prevede un'organizzazione interna alla stessa categoria, la quale ruota intorno ai prototipi, «i casi più evidenti di appartenenza ad una categoria definiti operativamente dai giudizi delle persone sulla bontà dell'appartenenza ad una data categoria» (Rosch, 1999, p. 196, traduzione delle autrici). I prototipi sono fondamentali nella costruzione dei concetti e i meccanismi che portano alla loro formazione secondo Rosch possono avere natura fisiologica, esperienziale e culturale.
La didattica della matematica ha individuato nell'utilizzo dei prototipi un elemento delicato per l'apprendimento della geometria. Riprendendo gli studi di Rosch, Hershkowitz (1987) designa come prototipi di un concetto gli «esempi classici» o i «"super" esempi».

> «Ogni "concetto" ha una serie di attributi critici e una serie di esempi. Nell'insieme degli esempi di un concetto ci sono i "super" esempi: - i prototipi (Rosch & Mervis, 1975); questi sono gli esempi classici. In altre parole, tutti gli esempi di un concetto sono matematicamente uguali, perché sono conformi alla definizione del concetto e contengono tutti i suoi attributi critici, ma sono diversi l'uno dall'altro psicologicamente. (Tutti gli esempi sono (matematicamente) uguali, ma alcuni sono più uguali di altri – scusandomi con George Orwell)».
>
> (Hershkowitz, 1987, p. 240, traduzione delle autrici)

1. Il termine "altezza" ha molti significati anche nel linguaggio quotidiano. In geometria Stella Baruk (1992/1998) ne identifica tre: una retta, un segmento, una lunghezza. In questo articolo si utilizzerà il termine nel senso di segmento.
2. Nel caso dell'altezza di un triangolo, intendendo l'altezza come segmento, sono attributi critici: la coincidenza di un estremo dell'altezza con un vertice del triangolo e l'appartenenza dell'altro estremo al lato opposto o al suo prolungamento; la perpendicolarità tra la retta contenente l'altezza e la retta contenente la base; la formazione di due angoli retti tra l'altezza e la retta contenente la base.
3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
4. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

Quando nelle produzioni degli studenti è riconoscibile la selezione di attributi non critici e la loro estensione a tutti gli esempi di un dato concetto matematico, si parla di *effetto prototipo*. L’utilizzo predominante nella prassi didattica di altezze verticali o aventi un estremo nel punto medio della base del triangolo è molto rischioso, perché può portare gli studenti a selezionare questi attributi (essere verticale, avere un estremo nel punto medio della base) come critici per il concetto di altezza. Applicando questo impianto teorico, si può ipotizzare che quando il prototipo di altezza per uno studente coincide con l’altezza del triangolo isoscele, ossia con un esempio di altezza appartenente a un livello subordinato, l’alunno mostrerà difficoltà a riconoscere e/o produrre altezze di figure geometriche che appartengono al livello base o sovraordinato. È possibile che inizialmente lo studente riesca a operare correttamente con tale prototipo a livello subordinato (quindi sui triangoli isosceli ed equilateri), ma successivamente, quando incontrerà esempi dello stesso concetto appartenenti a livelli sovraordinato o base (triangoli non isosceli o non equilateri, quadrilateri), il prototipo a sua disposizione lo porterà a commettere errori o a trovarsi in situazioni conflittuali.
Gli esempi che vengono in mente agli studenti dipendono fortemente dalle situazioni vissute, infatti lo spazio degli esempi, ossia lo spazio metaforico che contiene alcuni esempi e ne esclude altri, in cui esempi diversi ricoprono ruoli differenti, è diverso nel contenuto per ciascuno studente, varia nel tempo e dipende dal contesto (Watson & Mason, 2005). Uno spazio degli esempi contenente prevalentemente esempi prototipici potrà essere con il tempo ingrandito grazie all’esposizione a nuove situazioni e nuovi contesti.
Più in generale, facendo riferimento agli studi di Tall e Vinner (1981), potremmo dire che l’*immagine concettuale personale dello studente*, ossia

> «[…] la struttura cognitiva associata al concetto, la quale include tutte le immagini mentali e le proprietà e i processi associati […] costruita negli anni attraverso vari tipi di esperienze, che cambia quando l’individuo incontra nuovi stimoli e matura».
>
> (Tall & Vinner, 1981, p. 152, traduzione delle autrici)

può contenere elementi in conflitto con la definizione formale del concetto, che è stabilita dalla comunità dei matematici con riferimento a una certa teoria. Hershkowitz (1987) parla di *misconcetto* per indicare un’immagine concettuale che o è parziale o contiene elementi in conflitto con la definizione formale del concetto. L’utilizzo prevalente se non esclusivo di esempi prototipici nella prassi didattica (come visto, incoraggiata dai libri di testo) favorisce la formazione di tali misconcetti geometrici.
Evidenze in tal senso sono osservabili negli studenti anche attraverso i risultati di alcuni quesiti somministrati dall’Invalsi[5] nelle prove standardizzate di matematica. Emblematico è il quesito di grado 5 del 2017 (**Figura 1**) in cui, a partire da quattro possibili rappresentazioni di altezze di triangoli, si chiede agli studenti di individuare quella non corretta.

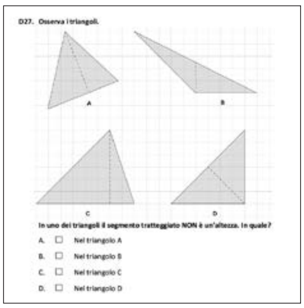


Figura 1. Quesito Invalsi di grado 5 – 2017.

5. Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione, in Italia.

La risposta corretta è stata selezionata da poco meno del 40% degli studenti: circa il 60% non riconosce nell’opzione B un non-esempio di altezza. È plausibile ipotizzare che l’orientamento verticale di tale segmento sia stato interpretato dagli studenti come attributo critico di altezza, ossia che l’effetto prototipo abbia prodotto risposte non corrette. Tra le risposte non corrette il 13,5% degli studenti ha selezionato la risposta A e il 39,1% ha selezionato la risposta D, probabilmente a causa dell’orientamento non prototipico delle altezze rappresentate. Infine, il 6,2% degli studenti che ha selezionato la risposta C probabilmente non ha prestato attenzione al ”NON” presente nel quesito. Come evidenziano Botta e Sbaragli (2016) attraverso l’analisi di prove Invalsi, questo tipo di difficoltà permane anche in allievi di scuola secondaria di primo e secondo grado.[6]
Certamente i libri di testo hanno parte della responsabilità nel favorire questo tipo di errori, che tuttavia hanno radici profonde nella natura stessa degli oggetti del ragionamento geometrico. Come messo in luce dalle ricerche di Fischbein (1993), il ragionamento geometrico si basa su concetti che riflettono proprietà figurali (come forma, posizione, grandezza) e allo stesso tempo qualità concettuali (come idealità, generalità, astrattezza, perfezione): per evidenziare la coesistenza di questi due aspetti, Fischbein parla di *concetti figurali*. Costruire un concetto figurale vuol dire perseguire «l’integrazione di proprietà concettuali e figurali in una struttura mentale unitaria, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali […]» (Fischbein, 1993, p. 156, traduzione delle autrici). Nei concetti figurali degli studenti le due componenti figurale e concettuale non sempre convivono in modo armonico, in quanto tipicamente la componente figurale tende a prevaricare e a sfuggire a una forma di controllo di tipo teorico, aderendo a leggi percettive o gestaltiche (Fischbein, 1993). I concetti figurali non sono né innati né naturali, al contrario la loro costruzione è un traguardo che deve essere supportato con cura da adeguate esperienze didattiche.

2 Il gioco-indagine sulle altezze del triangolo

Queste riflessioni hanno costituito la base per una progettazione didattica mirata a far evolvere l’immagine concettuale personale degli studenti e allargare lo spazio degli esempi a includere casi non prototipici di altezza di un triangolo.
Sono state progettate attività di gioco-indagine basate su sfide tra due giocatori all’interno di ambienti di geometria dinamica, seguite da una riflessione guidata (scheda di lavoro) e da una discussione di classe. I giochi-indagine sono stati usati come metodologia didattica in ricerche precedenti (si vedano, ad esempio, Soldano, 2019; Soldano & Arzarello, 2017) e hanno mostrato di incentivare l’esplorazione di figure non-prototipiche, ossia esempi che tradizionalmente non vengono usati nei libri di testo o nella prassi didattica (ad esempio un triangolo con nessun lato in direzione orizzontale) (Soldano & Sabena, 2019). Alla base delle dinamiche di questo tipo di giochi vi sono l’approccio della logica dell’indagine e i giochi semantici tra un verificatore e un falsificatore, attraverso i quali viene stabilita la verità di enunciati matematici del tipo “per ogni *x*… esiste *y*…” (Hintikka, 1998, 1999). Il falsificatore controlla la variabile x e sceglie un valore in modo tale da mettere nella situazione di maggior difficoltà il verificatore; il verificatore controlla la variabile y e deve trovare il valore di tale variabile che rende vera una certa affermazione $S(x,y)$. Se, anche nel peggior scenario possibile, il verificatore è in grado di trovare un valore per la variabile y che rende vera $S(x,y)$, allora l’affermazione è vera; in caso contrario è falsa. La possibilità per il verificatore di vincere sempre dipende dall’esistenza di una strategia vincente, infatti in questo caso significa che per ogni scelta di x esiste y tale che $S(x,y)$ è vero;

6. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all’ultimo anno di scuola media e agli anni di scuola media superiore o professionali nel Canton Ticino.

se invece il verificatore non vince in tutti i casi significa che esiste almeno un x tale che per ogni y S(x,y) è falsa e dunque risulta falsa la proposizione “per ogni x esiste y tale che S(x,y)”. Si tratta dunque di una definizione di verità diversa da quella classica e che fa riferimento alla Teoria dei Giochi. In questo studio è stato introdotto un elemento di novità, dato dalla possibilità di avere un feedback visivo immediato da parte del computer, che serve a stabilire il vincitore della sfida. L’ipotesi di lavoro è che il feedback possa innescare negli studenti una riflessione sui propri errori e favorire l’evolvere della propria immagine concettuale.
L’attività di gioco-indagine con feedback sul concetto di altezza è stata sperimentata nell’anno scolastico 2018/2019 in tre classi seconde di scuola secondaria di primo grado, in cui l’insegnante aveva già presentato il concetto di altezza (come segmento) per il triangolo. La durata dell’attività, inclusa la discussione di classe, è stata di due ore curricolari.
Durante le sperimentazioni, oltre all’insegnante della relativa classe, le autrici erano presenti con il compito di introdurre il gioco-indagine, filmare una coppia di studenti durante lo svolgimento dello stesso e, infine, filmare e condurre insieme all’insegnante la discussione di classe. Durante lo svolgimento dell’attività, gli studenti hanno lavorato a coppie: inizialmente si sono sfidati nel gioco utilizzando un pc o un tablet e successivamente hanno risposto in forma scritta ad alcune domande di riflessione sull’esperienza svolta, presentate in una scheda di lavoro.
Il gioco è stato progettato all’interno dell’ambiente di geometria dinamica GeoGebra ed è raggiungibile al link https://www.geogebra.org/m/rnmqcvm3. La **Figura 2** contiene la schermata del gioco: i vertici A, B e C sono liberi di essere trascinati sullo schermo; cliccando sulle caselle in corrispondenza delle scritte “Vertice A”, “Vertice B”, “Vertice C” compare un segmento che ha un estremo nel vertice indicato dal pulsante e l’altro estremo libero di muoversi sulla retta contenente il lato opposto al vertice; cliccando sulle caselle in corrispondenza delle scritte “Test A”, “Test B”, “Test C” compaiono le altezze con estremi rispettivamente in A, B e C (previamente costruite con i comandi di GeoGebra). Queste altezze costituiscono il feedback visivo fornito dal software al termine del gioco. Le scritte sulla destra della schermata hanno lo scopo di ricordare ai giocatori quali punti possono essere mossi nei rispettivi ruoli.

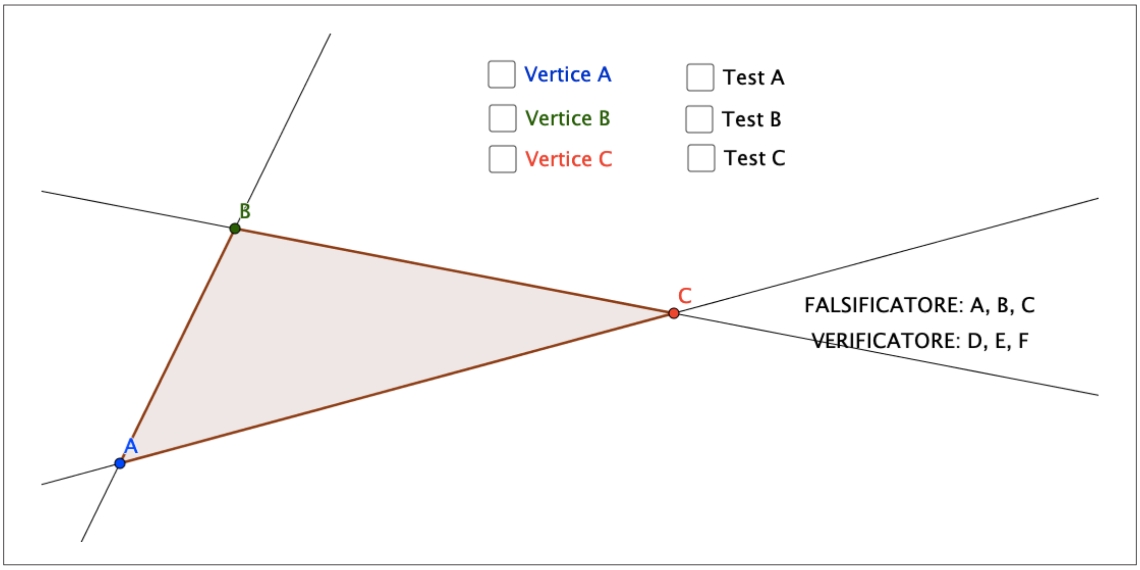
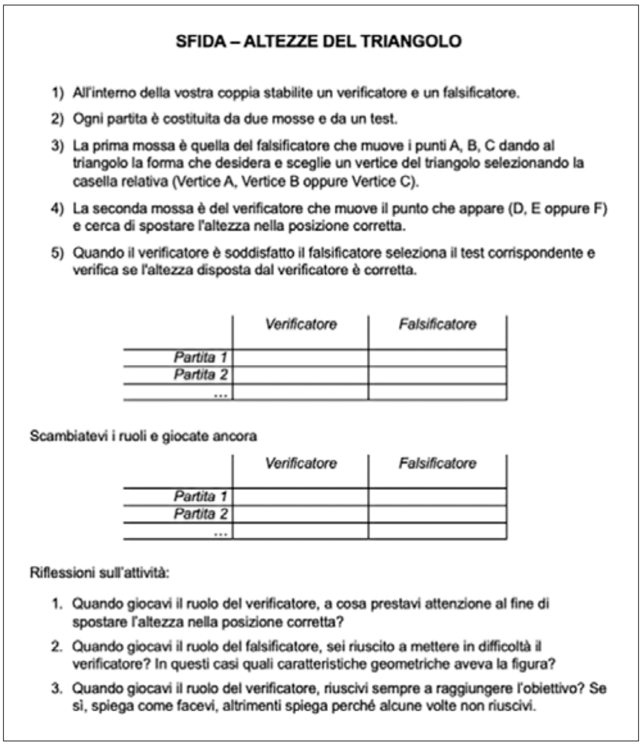


Figura 2. Schermata iniziale del gioco-indagine.



SFIDA – ALTEZZE DEL TRIANGOLO

1) All'interno della vostra coppia stabilite un verificatore e un falsificatore.
2) Ogni partita è costituita da due mosse e da un test.
3) La prima mossa è quella del falsificatore che muove i punti A, B, C dando al triangolo la forma che desidera e sceglie un vertice del triangolo selezionando la casella relativa (Vertice A, Vertice B oppure Vertice C).
4) La seconda mossa è del verificatore che muove il punto che appare (D, E oppure F) e cerca di spostare l'altezza nella posizione corretta.
5) Quando il verificatore è soddisfatto il falsificatore seleziona il test corrispondente e verifica se l'altezza disposta dal verificatore è corretta.

	Verificatore	*Falsificatore*
Partita 1		
Partita 2		
...		

Scambiatevi i ruoli e giocate ancora

	Verificatore	*Falsificatore*
Partita 1		
Partita 2		
...		

Riflessioni sull'attività:

1. Quando giocavi il ruolo del verificatore, a cosa prestavi attenzione al fine di spostare l'altezza nella posizione corretta?
2. Quando giocavi il ruolo del falsificatore, sei riuscito a mettere in difficoltà il verificatore? In questi casi quali caratteristiche geometriche aveva la figura?
3. Quando giocavi il ruolo del verificatore, riuscivi sempre a raggiungere l'obiettivo? Se sì, spiega come facevi, altrimenti spiega perché alcune volte non riuscivi.

Figura 3. Scheda di lavoro contenente le domande di riflessione.

Il testo dell'attività è stato proposto tramite una scheda di lavoro cartacea, riportata in **Figura 3** e nell'Allegato 1. Al lavoro a coppie è seguita una discussione di classe supportata dall'utilizzo della LIM.

Nella sfida, i due studenti ricoprono ruoli diversi: il falsificatore, con la sua mossa, "scombina" il triangolo trascinandone i vertici e sceglie un vertice da cui il verificatore deve posizionare l'altezza. Cliccando sulla casella corrispondente al vertice scelto, appare un segmento avente un estremo nel vertice selezionato e l'altro estremo in un punto qualsiasi della retta contenente il lato opposto del triangolo (un esempio è dato in **Figura 4a**). Il verificatore deve spostare il punto libero di muoversi sulla retta al fine di collocare l'altezza nella posizione ritenuta corretta, basandosi sulla sua percezione visiva. Terminata la mossa, per stabilire se l'altezza è stata posizionata correttamente si clicca il corrispondente tasto "Test", che fa comparire il segmento di altezza costruito con i comandi di GeoGebra (si veda **Figura 4b**). Se i due segmenti coincidono[7] si assegna un punto al verificatore, altrimenti il punto sarà attribuito al falsificatore.

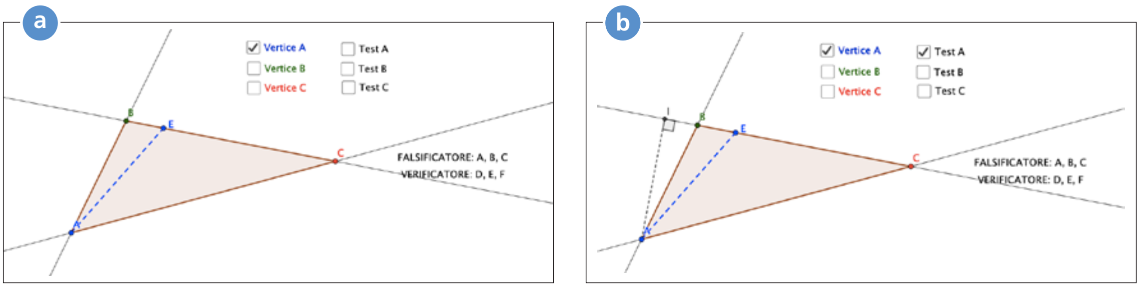


Figura 4. a) Effetto del pulsante "Vertice A"; **b)** Effetto del pulsante "Test A".

7. Durante la spiegazione dell'attività si è specificato che nel gioco è ammesso un margine di errore: se il segmento posizionato dal verificatore è molto vicino al segmento generato dal feedback del computer, anche se non c'è sovrapposizione perfetta, il punto deve essere assegnato al verificatore.

L’intenzionalità didattica delle sfide è far esplorare ai giocatori diversi esempi di triangolo, inducendoli a immaginare le possibili collocazioni delle altezze. Si può ipotizzare che l’esplorazione compiuta dal falsificatore sia guidata dalla domanda implicita: «Dove cadrà l’altezza se il triangolo ha questa configurazione e se la faccio partire da questo vertice?». Per mettere in difficoltà l’avversario, proporrà un triangolo in cui ritiene sia difficile individuare l’altezza, probabilmente ricorrendo a figure non-prototipiche, come triangoli ottusangoli senza lati orizzontali, né congruenti, e selezionerà il vertice da cui ritiene essere maggiormente difficile tracciare l’altezza. La situazione competitiva creata dal gioco porterà quindi gli studenti ad ampliare lo spazio degli esempi perché li indurrà a immaginare e rappresentare altezze in triangoli che generalmente non vengono proposti nella prassi scolastica. Ad esempio, nella **Figura 5a** il verificatore dovrà produrre un’altezza esterna al triangolo, nella **Figura 5b** un’altezza interna ma non parallela alle direzioni verticale-orizzontale.

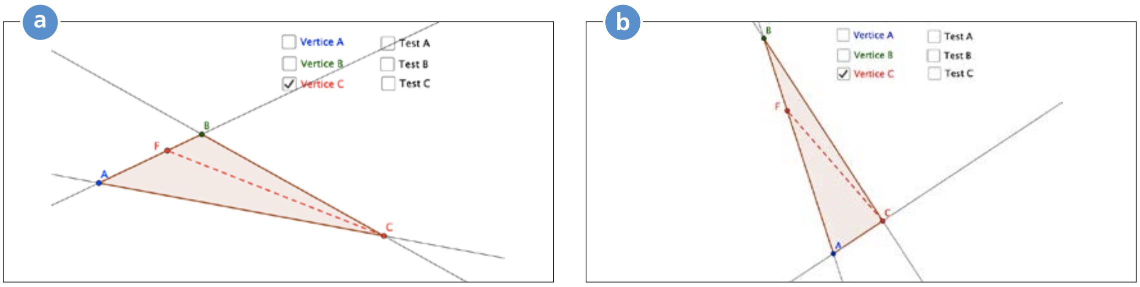


Figura 5a, b. Possibili figure non prototipiche di triangolo prodotte dal falsificatore.

Per posizionare l’altezza in modo corretto, il verificatore sposterà l’estremo libero del segmento (l’estremo F in entrambi gli esempi di **Figura 5**) cercando di far aderire il segmento visualizzato in GeoGebra all’immagine concettuale da lui posseduta (più precisamente, alla componente figurale del proprio concetto di altezza). La produzione di altezze errate può essere l’indizio della presenza di misconcetti relativi all’altezza. Questo indizio può essere colto dall’insegnante e riproposto agli studenti nella successiva discussione di classe. Inoltre, attivando il comando Test, il feedback visivo dato dal computer al termine della sfida può aiutare gli studenti a prendere consapevolezza dei propri errori.
Dopo aver giocato alcune partite, mantenendo le coppie relative alla fase di gioco, gli studenti rispondono alle domande contenute nella scheda. La prima domanda («Quando giocavi il ruolo del verificatore, a cosa prestavi attenzione al fine di spostare l’altezza nella posizione corretta?») intende indagare gli attributi critici conferiti al concetto di altezza da parte degli studenti e quindi avere indizi sull’immagine concettuale personale di altezza degli studenti. La seconda («Quando giocavi il ruolo del falsificatore, sei riuscito a mettere in difficoltà il verificatore? In questi casi quali caratteristiche geometriche aveva la figura?») si focalizza sulla mossa del falsificatore, indagando le caratteristiche dei triangoli proposti al verificatore, in particolare se veniva premeditata la scelta di triangoli le cui altezze erano non-prototipiche. Infine, la terza domanda («Quando giocavi il ruolo del verificatore, riuscivi sempre a raggiungere l’obiettivo? Se sì, spiega come facevi, altrimenti spiega perché alcune volte non riuscivi») intende indagare il ruolo formativo dell’attività e vedere se, grazie al feedback del computer, gli studenti diventano consapevoli di eventuali errori. Queste domande sono allo stesso tempo sia obiettivi del ricercatore, sia strumenti didattici per promuovere riflessione e consapevolezza sugli esempi prodotti e sui processi di produzione di tali esempi (per esempio sulle relazioni tra la componente figurale del triangolo, le sue proprietà – ottusangolo, rettangolo, isoscele ecc. – e la posizione dell’altezza). Infatti, la riflessione esplicita sui processi appare necessaria per realizzare quella armonia tra componente figurale e componente concettuale, che è al cuore del ragionamento geometrico. Le domande sono state pertanto oggetto della discussione di classe, di cui si analizzeranno alcuni estratti

nel prossimo paragrafo. Si considereranno parole, gesti e segni scritti generati nella discussione come produzioni semiotiche attraverso cui il pensiero matematico evolve nel percorso di apprendimento degli studenti. Per un approfondimento si rimanda ad Arzarello (2006) e Sabena (2011). In particolare, verranno analizzate parole, gesti e rappresentazioni in GeoGebra, al fine di indagare gli attributi critici individuati dagli studenti per l’altezza e avere accesso all’immagine concettuale personale degli studenti.

3 Estratti dalla discussione di classe

La discussione si apre con una sfida alla LIM tra una coppia di studenti volontari. Terminata la sfida, la ricercatrice R1 avvia una riflessione sulla mossa del verificatore (intervento 1):

1. R1: «Cosa guardavate per riuscire a raggiungere l’obiettivo?»
2. S1: «Fare gli angoli di 90, cioè per fare l’altezza di un triangolo bisogna guardare gli angoli di 90°».
3. R1: «Ok, vieni un attimo a farci vedere quali angoli guardavi? Me li indichi sulla LIM?»
4. S1: «Guardavo questo il punto blu e quel punto... [indicando il vertice da cui far partire l’altezza e successivamente uno dei due angoli che si formano con la base, **Figura 6a**]?»
5. Prof.: «Chi vuole dire la propria? S2 vai…»
6. S2: «Io guardavo…»
7. Prof.: «Vai ad indicare!»
8. S2: «Io guardavo il lato su cui posizionare il punto dell’altezza [mentre cammina verso la LIM solleva il braccio destro orizzontalmente, **Figura 6b**]. Guardo il lato sotto e guardo che l’altezza sia di 90° [solleva l’avambraccio sinistro perpendicolarmente, **Figura 6b**]».
9. R1: «Quindi ci indichi esattamente dove?»
10. S2: «Io guardo questo qua, questo lato qua sotto e guardo che la linea dell’altezza sia di 90° [indicando la base e l’altezza, **Figura 6c**]».

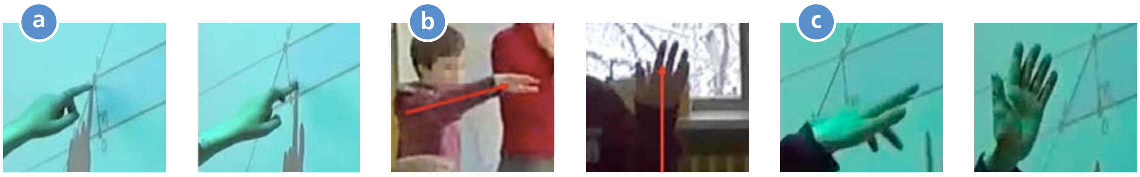


Figura 6a, b, c. Gesti degli studenti durante la discussione di classe.

La domanda posta da R1 intende far esplicitare agli studenti gli elementi figurali che costituiscono gli attributi critici del concetto di altezza a partire dal contesto di gioco. Il primo ad esprimersi è S1 che propone “gli angoli di 90°” (intervento 2). Quando viene chiamato alla LIM a indicare gli angoli, S1 indica il vertice da cui tracciare l’altezza e uno degli angoli retti che il segmento di altezza forma con la base (intervento 4). Non è chiaro perché, alla richiesta di indicare gli angoli di 90°, S1 abbia indicato anche l’angolo al vertice. È possibile che la configurazione di triangolo molto allungata creata nella sfida precedente abbia tratto in inganno lo studente inducendolo a vedere un angolo di 90° nel vertice da cui far partire l’altezza. L’insegnante dà la parola ad un altro studente, S2, che esprime gli attributi critici a parole e attraverso gesti prodotti mentre cammina verso la LIM (intervento 8). S2, sollevando il braccio destro in orizzontale dice di guardare il lato su cui posizionare l’estremo libero

dell’altezza, e successivamente, sollevando l’avambraccio sinistro verticalmente, dice di guardare che l’altezza sia a 90°. Quest’ultimo gesto richiama come attributo critico la perpendicolarità tra base e relativa altezza: l’avambraccio sinistro è infatti disposto perpendicolarmente al braccio destro precedentemente sollevato.
Per indagare più a fondo l’immagine concettuale relativa all’attributo critico “angolo di 90°”, R2 pone una nuova domanda (intervento 11):

11. R2: «E come fai per dire “è di 90°” oppure “non lo è”?»
12. S2: «Si vede».
13. S1: «Devi guardare che le due…l’altezza e la base siano più o meno a 90°… che siano… che… [traccia base e altezza nell’aria e poi posiziona la mano perpendicolarmente al piano del banco, **Figura 7a**]».
14. S3: «Beh sì ma si vede che è così…»
15. R2: «Cosa intendi? Che cos’è che si vede?»
16. S3: «Si vede che è un angolo di 90° perché è così [dispone i palmi delle mani uno perpendicolare all’altro, **Figura 7b**]».
17. S4: «È a forma di elle».
18. S2: «Se ho in mente com’è fatto un angolo di 90° [ripropone il gesto di S3 ruotato, **Figura 7c**]».

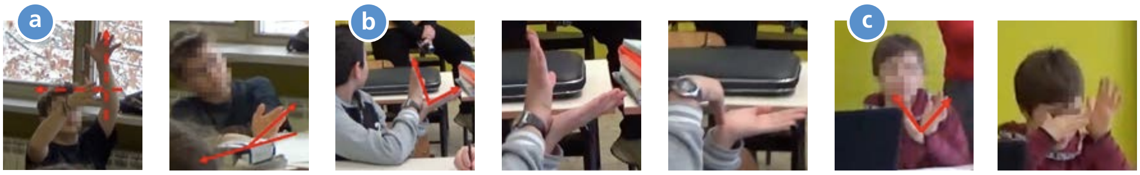


Figura 7a, b, c. Gesti degli studenti durante la discussione di classe.

Per spiegare come stabilire che un angolo misura 90°, gli studenti usano gesti che riproducono la loro immagine concettuale personale di altezza. S1 produce due tipi di gesti rappresentanti base e relativa altezza che seguono l’orientamento orizzontale-verticale (intervento 13): il primo è tracciato nell’aria, il secondo, invece, usa come riferimento orizzontale per la base il piano del banco. S3 propone un diverso tipo di gesto (intervento 16): dispone i due palmi delle mani perpendicolarmente individuando tra essi l’angolo di 90°. A differenza del gesto di S1, il gesto di S3 è slegato da vincoli materiali posti in direzioni privilegiate e permette di visualizzare entrambi gli elementi, base e relativa altezza, contemporaneamente. Inoltre, questo gesto è libero di ruotare mantenendo gli attributi critici di altezza. S2, infatti, lo riprende senza inserirlo in un riferimento orizzontale-verticale (intervento 18).
Per promuovere l’esplicitazione e una riflessione su eventuali misconcetti relativi all’altezza, R2 pone una nuova domanda (intervento 19):

19. R2: «Nessuno ha trovato un caso in cui si è sbagliato? Dice, mi sono proprio sbagliato, l’ho messa proprio da un’altra parte l’altezza».
20. R2: «Ecco [rivolgendosi a S5 che ha la mano alzata], vuoi farci vedere com’è andata? Quale tipo di errore? E poi come hai fatto?»
21. Prof.: «Ti ricordi come l’avevi messa? [rivolgendosi a S5 che si è alzato e sta camminando verso la LIM]».
22. S5: «Così [mette l’altezza coincidente con un lato del triangolo, **Figura 8a**]».
23. S1: «No, l’aveva messa in centro [S5 sposta l’altezza in modo che abbia un estremo nel punto medio del lato opposto al vertice selezionato, **Figura 8b**]».

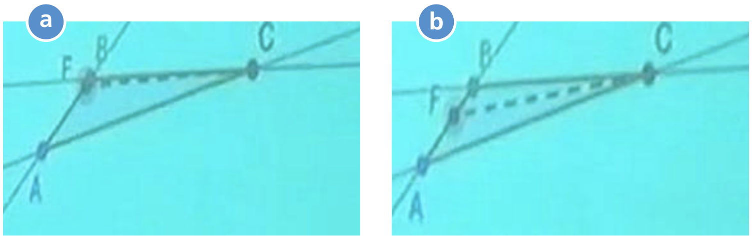


Figura 8a, b. Figure alla LIM proposte durante la discussione di classe.

Alla LIM S5 tenta di riprodurre un errore che ha commesso nella precedente fase di gioco (intervento 22), nel ruolo di verificatore. È però il suo compagno sfidante S1 a ricordare precisamente l’errore (intervento 23). Si può quindi osservare l’effetto prototipo, nel quale un attributo non critico per il concetto di altezza, ossia il fatto di avere un estremo nel punto medio del lato, è stato attribuito erroneamente ad esso. È possibile, pertanto, ipotizzare che l’immagine concettuale personale che ha orientato la mossa di S5 sia in conflitto con la definizione formale del concetto di altezza, ossia che S5 abbia un misconcetto relativo all’altezza. Infatti, in questo caso ad orientare la mossa del verificatore non è stato l’angolo di 90° o la relazione di perpendicolarità, ma il punto medio della base, cosa che funziona per la categoria subordinata a cui appartiene il triangolo isoscele ma non sempre per la categoria base. L’attributo non critico associato erroneamente al concetto di altezza viene messo in luce dalle parole di S1 (intervento 23). Il feedback del computer ha permesso agli studenti di notare l’incongruenza tra dove hanno posizionato il segmento (in base alla loro immagine concettuale personale di altezza) e la costruzione corretta di altezza, come è possibile notare dal fatto che ripropongono all’attenzione di tutta la classe quanto vissuto nel gioco. Notare tale differenza può consentire all’immagine concettuale personale di altezza dello studente di evolvere.
Dall’estratto successivo emerge che l’incongruenza può essere percepita non soltanto attraverso il feedback del computer ma anche grazie all’osservazione delle mosse dei compagni.

24. R1: «E questo succedeva magari all’inizio delle partite? Oppure…».
25. S1: «Sì all’inizio, la seconda partita».
26. R1: «La seconda partita».
27. S3: «Io sbagliavo sempre!»
28. R2: «Chi dice che sbagliava sempre poi come ha fatto? Poi hai smesso di sbagliare?»
29. S3: «Sì ho perso tutte e due le volte e poi dopo cioè quando abbiamo finito tutto quanto, durante le domande ho capito come fare».
30. Prof.: «Hai capito cosa sbagliavi?»
31. S3: «Sì, perché vedevo lui come le faceva e quindi ho capito poi come metterle».
32. R2: «Ma lui ti ha anche spiegato il suo trucco oppure no…guardavi».
33. S3: «No, guardavo e basta».

Dalle parole di S3 (intervento 31) emerge che l’osservazione attenta della mossa compiuta da un avversario più esperto assume un ruolo formativo nel capire come posizionare l’altezza e quindi può far prendere coscienza dei propri errori e far evolvere l’immagine concettuale personale dello studente. Il compagno di sfida è un avversario nel gioco ma un alleato nell’apprendimento.
Infine, per indagare se i triangoli proposti dal falsificatore abbiano promosso l’esplorazione di esempi non-prototipici di altezza e per porre l’attenzione degli studenti su di essi, R2 pone una nuova domanda:

34. R2: «Erano tutti ugualmente difficili i triangoli che vi proponevano i falsificatori o c’erano dei casi più facili e dei casi più difficili?»

35. S6: «Secondo me questo caso qua [indica il triangolo rettangolo isoscele alla LIM] è più semplice, invece quando è ottusangolo allungato è più difficile».
36. S2: «Secondo me è il contrario perché quando è più grande sono più allargati, sono più all… allargati quindi c'è più spazio e quindi è più difficile vedere, invece quando lo fai piccolo c'è tanto così tra le tue cose quindi è vicinissimo».
37. Prof.: «E se sono più o meno della stessa dimensione? Perché S6 ha usato un termine che è interessante, quindi capito il discorso del piccolo e del grande… ma se sono tutti e due abbastanza grandi che ci si può lavorare, quand'è più semplice e quand'è meno semplice? Hai voglia S6 di ridirlo e poi sentiamo… perché la tua teoria era diversa…»
38. S6: «Quando è ottusangolo è più difficile, quando è acutangolo è più facile».
39. S7: «Anche perché devi percepire se bisogna far cadere l'altezza all'interno o all'esterno».

Dall'estratto è possibile osservare che il gioco promuove la produzione di altezze in triangoli ottusangoli (intervento 35) e in triangoli molto grandi e molto allargati (intervento 36). Nel primo caso si tratta di altezze non prototipiche in quanto, se non vengono fatte partire dal vertice in corrispondenza dell'angolo ottuso, cadono esternamente. Nel secondo caso a creare la difficoltà nella sfida è invece l'approssimazione del software: in configurazioni molto zoomate un piccolo errore di posizionamento si nota immediatamente e quindi anche nel caso in cui a orientare la mossa del verificatore sia un'immagine concettuale corretta di altezza, è possibile che questa risulti non precisa e quindi errata nel contesto del gioco. L'intervento dell'insegnante (intervento 37) mostra la sua intenzionalità didattica a richiamare l'attenzione su quelli che possono essere elementi, legati alla matematica e svincolati dalle dinamiche del gioco, che possono creare difficoltà nella produzione di altezze.

4 Riflessioni conclusive

Attraverso il gioco-indagine, le domande di riflessione contenute nella scheda e la discussione di classe, la progettazione didattica si era posta l'obiettivo di esplicitare e far evolvere l'immagine concettuale personale degli studenti relativa al concetto di altezza, includendo anche esempi non prototipici. Dalle osservazioni a posteriori emerse sulle attività sperimentate in classe sono stati evidenziati alcuni passaggi chiave di questa evoluzione.
Il gioco-indagine innesca una successione di figure di varia natura: immaginate dai giocatori, prodotte sullo schermo dal verificatore e prodotte sullo schermo dal feedback digitale (**Figura 9**).

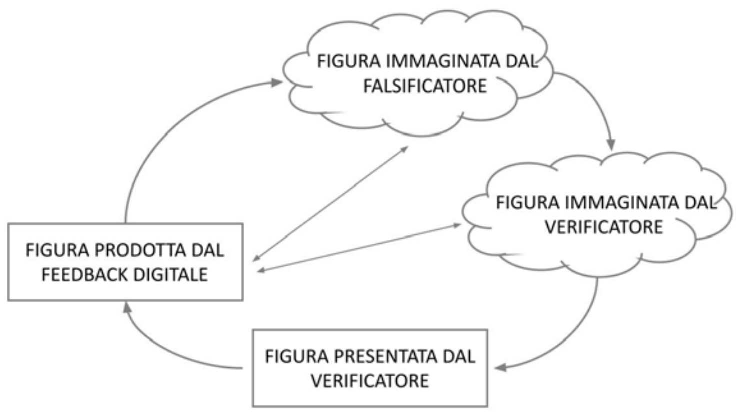


Figura 9. Dialettica creata dal gioco tra figure immaginate e figure visibili sullo schermo.

All'inizio del gioco, gli studenti hanno una data immagine concettuale personale di altezza, che si manifesta nelle figure che immaginano. Attraverso il gioco, solo la figura immaginata dal verificatore viene resa visibile. Grazie al feedback del computer gli studenti possono notare un'eventuale incongruenza tra le figure immaginate, la figura presentata dal verificatore e la figura feedback. Il contrasto tra la figura data dal feedback digitale e quella immaginata può essere un indicatore di errore per lo studente, che può prenderne consapevolezza. L'osservazione dell'incongruenza offre l'occasione per una prima evoluzione dell'immagine concettuale personale di altezza degli studenti. Se tale evoluzione si è verificata, allora questa avrà effetti nelle successive partite in cui verranno prodotte nuove figure immaginate, presentate e feedback. Come osservato in alcuni casi durante la sperimentazione, anche l'osservazione attenta delle mosse dell'avversario può aiutare lo studente a modificare il proprio gioco, con possibili implicazioni sull'immagine concettuale personale. Naturalmente potrebbe anche succedere che gli studenti, pur notando l'incongruenza tra la figura immaginata e la figura feedback, non mettano in discussione la propria immagine concettuale. Diversamente, per gli studenti che possiedono già l'immagine concettuale corretta di altezza, il gioco ha un ruolo di consolidamento dell'immagine stessa.
Questi diversi comportamenti possono essere osservati dall'insegnante durante il gioco e influenzare l'organizzazione della discussione di classe, durante la quale l'evoluzione dell'immagine concettuale personale dello studente può avvenire non solamente dal confronto tra le figure (immaginate, presentate e feedback) realizzate durante le partite condivise alla LIM, ma anche attraverso la condivisione di errori emersi durante le precedenti sfide. Nello studio di caso presentato, tale evoluzione è stata supportata dal pensiero metacognitivo attivato dalle domande delle ricercatrici e dell'insegnante, come è emerso dall'analisi delle risorse semiotiche (parole, gesti, rappresentazioni in GeoGebra) prodotte dagli studenti per esplicitare gli attributi critici del concetto di altezza e la loro immagine concettuale.
Più in generale, le dinamiche innescate dalle attività di gioco-indagine possono offrire allo studente la possibilità di arricchire lo spazio degli esempi, di esplicitare e prendere consapevolezza della propria immagine concettuale e di metterla a confronto con quella dei compagni e dell'insegnante. Al contempo l'insegnante, grazie a questo tipo di attività, può cogliere informazioni generalmente poco accessibili riguardanti l'immagine concettuale degli studenti e gli attributi critici conferiti a un oggetto matematico, può individuare eventuali misconcetti che stanno alla base delle difficoltà degli studenti e potrebbe, successivamente, proporre attività ad hoc per affrontare le criticità individuate.
Questo tipo di processi in cui gli allievi immaginano un certo oggetto geometrico in figure diverse e in posizioni non prototipiche e si sforzano nel comprendere come i propri compagni hanno immaginato lo stesso concetto possono promuovere quel "saper vedere in matematica" auspicato da Bruno de Finetti: «Giova soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi svariati ed a modificarli o costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre saper vedere per dominare un problema» (de Finetti, 1967, p. 1).

Ringraziamenti

Siamo grate agli studenti e agli insegnanti sperimentatori. Ringraziamo anche i referatori per i loro suggerimenti sulla prima versione dell'articolo.

Bibliografia

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista latino americana de investigación en matemática educativa*, Número Especial, 267–299.

Baruk, S. (1998). *Dizionario di matematica elementare*. Zanichelli. (Titolo originale: *Dictionnaire de mathématiques élémentaires* pubblicato nel 1992).

Botta, E., & Sbaragli, S. (2016). Il caso dell’altezza. Un sapere fondante. *Nuova secondaria, XXXIV*(1), 112–116.
de Finetti, B. (1967). *Il “saper vedere” in matematica*. Loescher.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconcepts in basic geometry - or when “a little learning is a dangerous thing”. In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol. 3, pp. 238–51). Cornell University.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the seventh international conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223–228). Department of Science Teaching, The Weizmann Institute of Science.

Hintikka, J. (1998). *The principles of Mathematics revisited*. Cambridge University Press.

Hintikka, J. (1999). *Inquiry as Inquiry: A logic of Scientific Discovery*. Springer Science+Business Media Dordrecht.

Rosch, E. (1999). Principles of categorization. In E. Margolis & S. Laurence (Eds.), *Concepts: Core Readings* (pp. 189–206). MIT Press.

Sabena, C. (2011). Studiare la multimodalità dell’insegnamento-apprendimento: focus sui gesti. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *34*(3), 333–342.

Soldano, C. (2019). Apprendere con la logica dell’indagine: attività di gioco-indagine all’interno di ambienti di geometria dinamica. *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *42*(3), 237–259.

Soldano, C., & Arzarello, F. (2017). Learning with the logic of inquiry: game-activities inside Dynamic Geometry Environments. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceeding of CERME 10-Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 267–274). DCU Institute of Education & ERME.

Soldano, C., & Sabena, C. (2019). Exploring non-prototypical configurations of equivalent areas through inquiring-game activities within DGE. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME 11-Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Routledge.

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 71 - 89, DOI: 10.33683/ddm.23.13.4

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una classe di seconda media

Analogy in mathematics: beliefs and competences in a seventh-grade class

Giada Bordogna
Scuola media Giubiasco – Svizzera

giada.bordogna@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo presenta il percorso didattico svolto in una classe di seconda media con lo scopo di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei problemi di matematica. Dopo aver raccolto le convinzioni iniziali degli allievi è stato sviluppato un itinerario composto da molteplici attività finalizzato ad approfondire e rafforzare la consapevolezza degli allievi rispetto alle diverse tipologie di analogia e al loro utilizzo per facilitare la risoluzione di problemi. I risultati ottenuti mostrano come la consapevolezza degli allievi sulle diverse tipologie di analogie e sulla loro utilità sia migliorata. In particolare, essi riconoscono che saper individuare due problemi analoghi rispetto al procedimento facilita la risoluzione di situazioni nuove. Al termine del percorso si riscontra anche che la capacità di una parte degli allievi di applicare il pensiero analogico nella risoluzione dei problemi è aumentata, favorendo così l'attività di transfer di conoscenze.

Parole chiave: analogia; pensiero analogico; problem solving; strategia risolutiva; transfer di conoscenze.

Abstract / This paper illustrates the didactic itinerary performed in a 7th-grade class with the aim of investigating the development of the students' beliefs and skills regarding the use of analogy in solving mathematical problems. After collecting the students' initial beliefs, an itinerary consisting of multiple activities was developed to deepen and strengthen the students' awareness of the different types of analogy and their use to facilitate problem solving. Results show how students' awareness of the different types of analogies and their usefulness has improved. They recognize that knowing how to identify two similar problems with respect to the procedure facilitates the resolution of unknown situations. At the end of the itinerary, it is also found that the ability of a part of the students to apply analogical thinking in solving problems has increased, thus favoring the transfer of knowledge.

Keywords: analogy; analogical thinking; problem solving; resolution strategy; transfer of knowledge.

1 La risoluzione di problemi

Fin dall'antichità, la risoluzione di problemi (o problem solving) costituisce una parte fondamentale dello studio della matematica, che si rivela essere piena di ostacoli e insidie per gli studenti.
Polya (1945), tra i primi ricercatori a studiare l'apprendimento della risoluzione di un problema, descrive questa attività come la scoperta di mezzi non ancora noti per raggiungere uno scopo ben definito:

> «Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».
>
> (Polya, 1945, citato in D'Amore & Fandiño Pinilla, 2006, p. 649)

Le definizioni di *problema* presenti in letteratura sono varie e complesse. Di seguito, si è deciso di considerare la distinzione tra problemi ed esercizi adottata da D'Amore (2014): entrambi propongono dei contesti "problematici", con la differenza che un esercizio può essere risolto utilizzando regole già apprese e in via di consolidamento, mentre la risoluzione di un problema necessita l'utilizzo di più regole (alcune delle quali introdotte proprio in quell'occasione) o la successione di operazioni frutto di una scelta strategica da parte dell'allievo. Il confine tra il significato dei due termini è labile, in quanto una stessa situazione può essere vissuta come esercizio o problema a dipendenza del grado scolastico in cui viene proposto o, all'interno della stessa classe, della padronanza dei concetti da parte degli allievi stessi. Fatta questa distinzione, circoscriviamo il ragionamento all'oggetto "problema di matematica".
Dal punto di vista operativo, Polya (1945) suddivide il processo risolutivo di un problema in quattro fasi ben distinte:

1. *comprendere il problema*, ovvero comprendere la cornice di senso, identificare i dati, determinare cosa si sta cercando ecc.;
2. *concepire un piano*, individuando il rapporto tra i dati del problema e l'incognita;
3. *mettere in atto il piano*;
4. *esaminare la soluzione ottenuta*, riflettendo sulla sua compatibilità con i vincoli e le condizioni del problema.

Gli allievi sembrano riscontrare maggiori difficoltà nelle prime fasi del processo risolutivo, quelle cioè di lettura e comprensione del problema, senza le quali non è possibile ideare una strategia. Gli ostacoli riguardanti la comprensione del testo possono essere legati a diversi aspetti come alla presenza di un lessico o di un contesto sconosciuto all'allievo, a una lettura superficiale oppure all'incapacità di definire con chiarezza l'obiettivo del problema (Zan, 2007). Superato lo scoglio della comprensione del testo, non sempre gli studenti sono in grado di attivare le proprie conoscenze per elaborare un piano d'azione: si tratta infatti di un processo complesso e personale, non lineare, in cui entrano in gioco fattori cognitivi, metacognitivi ed emozionali. Come sottolinea Zan (2007, p. 159), «il fatto di avere a disposizione un repertorio di strategie non risolve automaticamente il problema centrale di quali utilizzare e come».
È a questo punto che l'analogia entra in gioco: essa può essere utilizzata per concepire un piano, per selezionare o per rigettare possibili strategie risolutive. L'analogia, dunque, può essere utilizzata come «strumento didattico esplicito, per ragionare, per pensare, per sperimentare, per porsi domande intelligenti ed acute» (Sbaragli et al., 2008, p. 5).
L'esperienza didattica qui presentata si è proposta di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi di una seconda media riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei

problemi di matematica. Per maggiori dettagli sul quadro teorico, sulle attività descritte e sull'analisi dei dati raccolti si rimanda al lavoro di tesi completo,[1] da cui è tratto il presente contributo.

2 Analogia come strategia di pensiero

Il significato etimologico del termine *analogia*, derivante dal greco αναλογία, è quello di proporzione matematica: un'uguaglianza di rapporti tra quattro grandezze diverse che può essere rappresentata secondo lo schema $a : b = c : d$. Esiste però un'interpretazione più ampia del termine, secondo la quale l'analogia «fa riferimento alla costruzione di un nesso di similitudine che la mente può costruire tra cose, situazioni e processi che sono differenti, determinando così un'estensione probabile della conoscenza» (Treccani, 2009).
È proprio questo secondo significato che ci interessa, in quanto l'obiettivo dell'esperienza didattica qui descritta è quello di promuovere l'utilizzo dell'analogia come strategia risolutiva, favorendo così il transfer di conoscenze da un contesto conosciuto a uno ignoto.
A questo proposito, Polya (1954, p. 13) parla dell'analogia come di una somiglianza che può essere definita in modo chiaro a un livello concettualmente più alto. Due oggetti con degli aspetti in comune possono essere definiti analoghi solo se è possibile ridurre gli aspetti in cui si accordano a dei concetti ben definiti. Uno degli esempi discussi dall'autore riguarda l'analogia tra il triangolo nel piano e il tetraedro nello spazio, legati dal fatto che entrambi rappresentano il poligono (rispettivamente il poliedro) con il minor numero di lati (rispettivamente facce) possibili.
Richland e Begolli (2016), rifacendosi all'interpretazione di Gentner et al. (1997), definiscono il pensiero analogico come il processo cognitivo che permette agli esseri umani di comprendere i fenomeni del mondo con sistemi di relazioni che possono essere manipolati e confrontati tra loro.
L'importanza dell'analogia come strategia di pensiero è largamente sostenuta nella letteratura, sia da un punto di vista didattico, sia per l'evoluzione stessa della disciplina matematica.
Speranza (1988) dichiara espressamente l'importanza dell'analogia nella didattica perché essenziale per lo sviluppo del pensiero critico e matematico. Brown (1989) e Vosniadou e Ortony (1989) sottolineano come l'utilizzo dell'analogia comporti l'attivazione delle conoscenze pregresse per la costruzione di nuovi concetti, favorendo così l'attività di transfer. Quest'idea è sostenuta anche da Stavy e Tirosh (2001), secondo cui lo scopo primario dell'insegnamento matematico è proprio quello di incoraggiare gli studenti a trasferire la propria conoscenza da una situazione a un'altra. Inoltre, la ricerca di analogie può portare a una maggiore comprensione delle preconoscenze e dunque a una loro ristrutturazione concettuale, perché il processo di comparazione permette di scoprire e comprendere nuove peculiarità degli oggetti matematici coinvolti (Gentner & Wolff, 2000, citato in Vamvakoussi & Vosniadou, 2012).

Riconosciuta la valenza dell'analogia come strumento didattico, è importante essere consapevoli della sua duplice natura e delle insidie che essa nasconde, come ben espresso da Bazzini (1995, citato in Sbaragli et al., 2008, p. 18) che la definisce come «una lama a doppio taglio». Il pensiero analogico può essere infatti fonte di misconcezioni e conclusioni sbagliate, se gli elementi su cui si basa l'analogia non fanno in realtà parte della struttura matematica condivisa dai due sistemi messi a confronto (Fischbein, 1987).
Inoltre, Richland e Begolli (2016) evidenziano la difficoltà degli studenti nel riconoscere la possibilità

1. Lavoro di Diploma di Giada Bordogna (2022), intitolato "L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una seconda media", svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrici: Silvia Sbaragli, Marta Barbero. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: https://tesi.supsi.ch/4269/.

e/o l’utilità di effettuare un ragionamento per analogia, oltre al grande sforzo richiesto a livello cognitivo in questo tipo di attività: il ragionamento analogico è infatti considerato un processo cognitivo complesso, che richiede all’allievo di manipolare contemporaneamente diverse rappresentazioni mentali durante la ricerca e l’esecuzione di una strategia risolutiva, mettendo sotto forte pressione la limitata capacità della memoria di lavoro.
Vamvakoussi (2017), riprendendo il lavoro di Clement (2008), sottolinea come, in alcuni casi, la difficoltà del cogliere analogie risieda nella poca familiarità degli studenti con il contesto di riferimento; oltre al fatto che spesso le relazioni di similitudine tra l’esempio analogico e il concetto desiderato siano chiare solo al docente che le propone. Vamvakoussi (2019) approfondisce questo aspetto rimarcando come gli studenti dimostrino di avere grandi difficoltà nell’identificare la stessa struttura matematica soggiacente a due problemi presentati in contesti differenti, in quanto essi si focalizzano su aspetti superficiali (legati ad esempio alla presenza di uno stesso oggetto) piuttosto che sulle relazioni in atto. Questa idea viene approfondita anche da Richland e McDonough (2010), i quali sottolineano come due problemi possono essere analoghi oppure no a livello contestuale, indipendentemente dalla struttura matematica soggiacente.
Oltre ai vantaggi e alle difficoltà intrinseci nella natura dell’analogia come strategia di pensiero, bisogna tenere in considerazione altri aspetti, come le misconcezioni e le discrepanze tra i significati personali e quelli formali della matematica che possono formarsi nel tempo.

3 Modelli intuitivi, misconcezioni e analogia

Fischbein (1985a) attribuisce all’influenza dei modelli intuitivi impliciti molte delle difficoltà riscontrate nell’apprendimento della matematica. Con il termine *modelli intuitivi impliciti* si intende la «rappresentazione di certe nozioni matematiche astratte che si sviluppano ad uno stadio iniziale del processo di apprendimento e che continuano ad influenzare, tacitamente, le interpretazioni e le decisioni risolutive dell’allievo» (Fischbein, 1992, p. 26). Si tratta dunque di modelli mentali personali con caratteristiche tali da essere considerati autoevidenti e utilizzati con piena fiducia dall’allievo.
Generalmente, questi modelli intuitivi suggeriscono direttamente l’operazione da utilizzare nella risoluzione di un problema. Spesso però, il significato intuitivo e quello formale di un’operazione non coincidono, mettendo così in difficoltà gli allievi.[2]
Un’altra problematica riscontrata da Fischbein è legata alla natura stessa dei numeri utilizzati all’interno del testo proposto agli allievi. Rinomato è l’esempio che l’autore propone proprio legato alle misconcezioni dell’operazione divisione: «Una bottiglia di aranciata da 0,75 L costa 2 dollari. Qual è il prezzo di 1 litro di aranciata?».
Sebbene la risoluzione di questo problema sia semplice, è stato riscontrato come la maggior parte degli studenti di scuola media esiti o non sia in grado di indicare la divisione come operazione risolutiva. Questa difficoltà non è invece rilevata con il seguente problema, analogo al primo dal punto di vista strutturale e formale, ma che coinvolge solamente numeri naturali: «Una bottiglia di aranciata da 2 L costa 6 dollari. Qual è il prezzo di 1 litro di aranciata?». La risposta a questo secondo problema è quasi scontata; infatti, il modello intuitivo implicito secondo cui “la divisione diminuisce sempre” coincide con il modello formale (Fischbein, 1985b).
Per aggirare questo ostacolo, Fischbein suggerisce proprio l’analogia come strategia risolutiva efficace, proponendo l’utilizzo di una classe di problemi analoghi che richiedono la stessa operazione riso-

2. Per un maggior approfondimento sul tema, si faccia riferimento a Fischbein (1985b) e Vergnaud (1982).

lutiva, in cui però i dati numerici siano in accordo con i modelli intuitivi degli allievi: «Il problema può anche essere risolto per mezzo dell'analogia con il problema che ha la stessa struttura matematica, ma che usa solo numeri interi» (Fischbein, 1998, p. 9).
Stavy e Tirosh (2001) propongono una strategia simile, basata sul passaggio da una situazione neutra (che non attiva quindi modelli intuitivi ingannevoli) a una situazione-obiettivo che invece innesca proprio questi modelli intuitivi fuorvianti, tramite l'utilizzo di una o più situazioni intermedie, collegate tra di loro da analogie di vario genere.
Brown e Clement (1989) espongono invece la teoria delle analogie ponte (*bridging analogies*) come strategia per il superamento di misconcezioni. L'idea consiste nel collegare le preconoscenze degli allievi al concetto scientifico desiderato attraverso una serie di situazioni intermedie (chiamate *anchoring situations*) legate tra loro tramite analogia. È auspicabile che queste situazioni intermedie attivino delle intuizioni positive che possono essere sviluppate nei passaggi successivi verso la conoscenza desiderata.
La letteratura mostra dunque come il pensiero analogico sia necessario da un lato per il superamento dei modelli intuitivi formatisi con il passare del tempo, e che portano lo studente a sbagliare quando i significati intuitivi non corrispondono a quelli formali e astratti della matematica, dall'altro per la comprensione di situazioni complesse e per l'introduzione di nuovi concetti teorici che richiedono uno sforzo cognitivo maggiore. L'agire dell'insegnante dovrebbe dunque essere guidato da un uso consapevole ed esplicito dell'analogia, prevedendo e anticipando le possibili difficoltà degli studenti e fornendo tutti i supporti visivi e gestuali possibili.

4 Metodologia

L'esperienza didattica che si presenta in questo contributo è stata proposta a una classe seconda della scuola media di Giubiasco in Canton Ticino composta da 20 allievi. Il lavoro è stato suddiviso in tre fasi: questionario iniziale, intervento didattico e questionario finale. Il questionario iniziale (Allegato 1) aveva l'obiettivo di indagare le convinzioni degli allievi riguardo agli elementi che rendono analoghi o differenti due problemi matematici, oltre alla loro capacità di riconoscere analogie e differenze tra alcune coppie di problemi. Successivamente, è stato proposto agli studenti un percorso didattico con l'obiettivo di renderli consapevoli della presenza di vari aspetti dell'analogia nei diversi contesti matematici e soprattutto della loro utilità per facilitare la risoluzione di problemi. L'intervento didattico (Allegati 2-9) è stato strutturato come segue:

1. Le lenti di ingrandimento: tre diverse tipologie di analogia.
2. Le analogie che possono trarre in inganno.
3. L'analogia come strategia per il transfer di conoscenze.
4. Analogie e misconcezioni.
5. Creare e riconoscere analogie.

L'evoluzione delle competenze degli allievi nel riconoscere analogie è stata sondata dalla docente attraverso l'osservazione degli studenti sia durante tutto il percorso didattico sia durante la normale pratica quotidiana. Per quanto riguarda l'evoluzione delle loro convinzioni sul tema, invece, è stato somministrato un questionario finale (Allegato 10).
Per la creazione del percorso didattico, si è deciso di impiegare le unità didattiche previste dal programma di seconda media, focalizzando l'attenzione sui processi analogici che emergono all'interno dei vari argomenti. Le attività sono state proposte nel periodo tra novembre e metà marzo.

5 Descrizione del percorso didattico

Nei paragrafi seguenti vengono illustrate nel dettaglio le attività realizzate durante il percorso didattico proposto agli allievi e il riscontro di ciò che è avvenuto in aula, con una particolare attenzione alle difficoltà riscontrate.

5.1 Le lenti di ingrandimento: tre diverse tipologie di analogia

L'esame delle risposte degli allievi al questionario iniziale (Allegato 1) ha permesso di identificare tre livelli di analisi del testo di un problema: il contesto (ovvero la situazione in cui è ambientato un problema), i numeri (intesi sia come tipologia di numeri sia come numeri stessi presenti nel problema, a dipendenza della situazione) e la strategia risolutiva (ovvero la strategia necessaria per risolvere un problema). Per facilitarne l'utilizzo da parte degli studenti, si è deciso di associare ogni livello a una lente di ingrandimento differente, come mostrato nella **Figura 1**: più la lente è "preziosa", più l'osservazione è profonda (Allegato 2). L'analogia con le lenti di ingrandimento è stata scelta per cercare di trasmettere il messaggio che nel percorso, lavorando come dei detective, si sarebbero cercati quegli elementi che avrebbero facilitato la risoluzione del problema.

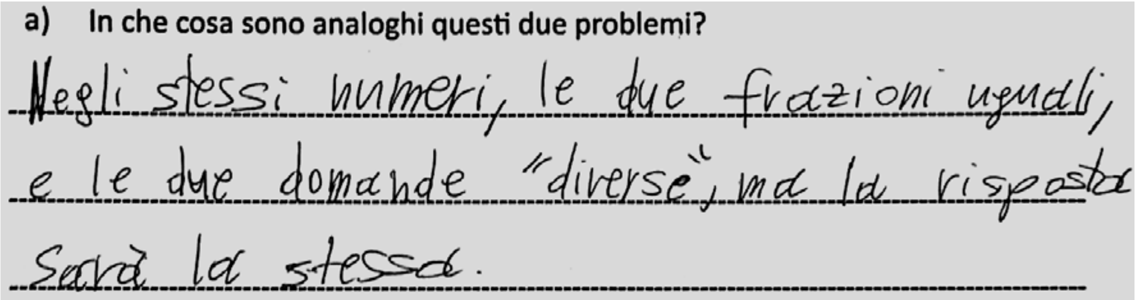
Figura 1. I tre livelli di analogia presentati come lenti di ingrandimento.

L'esemplificazione delle diverse analogie durante la presentazione delle risposte al questionario iniziale e in particolare il fatto che metà della classe sostenesse di non aver mai incontrato problemi analoghi nelle lezioni di matematica ha suscitato emozioni e reazioni contrastanti: un certo smarrimento per chi era convinto della propria risposta negativa e incredulità da parte di chi invece riconosceva analogie tra le diverse attività affrontate. Questo ha permesso di motivare gli studenti alla fase successiva dell'attività, ovvero cercare esercizi analoghi, relativamente alla strategia risolutiva, tra le diverse situazioni trattate in classe e i problemi proposti durante le verifiche formative e sommative. La ricerca ha permesso a una parte degli studenti, che dichiaravano di non avere mai incontrato analogie, di rendersi conto di quante volte vengano proposti problemi simili tra loro dal punto di vista del procedimento risolutivo. Per gli altri, invece, la ricerca è stata infruttuosa: si tratta degli studenti con fragilità disciplinari più evidenti.

5.2 Le analogie che possono trarre in inganno

In questa seconda attività sono stati proposti due problemi, analoghi nel contesto e nei numeri, ma diversi nella domanda e quindi nella strategia risolutiva (Allegato 3). La prima richiesta consisteva nell'indicare tutte le analogie e le differenze che gli studenti erano in grado di identificare.
Le risposte da parte degli allievi sono state varie: tutti hanno individuato le analogie relative al contesto e ai numeri; invece, per quanto concerne le differenze, metà classe ha riconosciuto una differenza nella domanda e solo due allievi hanno citato la strategia risolutiva.

Quattro studenti, nonostante si siano resi conto che le domande dei problemi sono differenti, hanno affermato che questi si risolvono nello stesso modo (**Figura 2**), accendendo così una discussione con i compagni di classe:


a) In che cosa sono analoghi questi due problemi?

Negli stessi numeri, le due frazioni uguali, e le due domande "diverse", ma la risposta sarà la stessa.

Figura 2. Protocollo di un allievo che, nonostante identifichi la diversa natura delle domande, afferma che la risposta sarà la stessa.

Questa discussione ha permesso agli studenti di analizzare nel dettaglio le informazioni in loro possesso e di risolvere i due problemi. Durante la messa in comune finale è stato fondamentale l'utilizzo della rappresentazione grafica: solo così anche gli allievi più scettici si sono convinti della differenza tra le due situazioni.
Durante la seconda fase dell'attività, svolta a gruppi, gli studenti dovevano cercare analogie tra sei diversi problemi con le frazioni (Allegato 3). Volutamente non sono state fornite indicazioni riguardo le tipologie di analogie da cercare. La maggior parte dei gruppi si è dapprima concentrata sul contesto, individuando quattro diverse tematiche nei problemi proposti, mentre un paio di gruppi ha analizzato i numeri (**Figura 3**); solo un gruppo di allievi si è concentrato invece direttamente sul processo risolutivo.

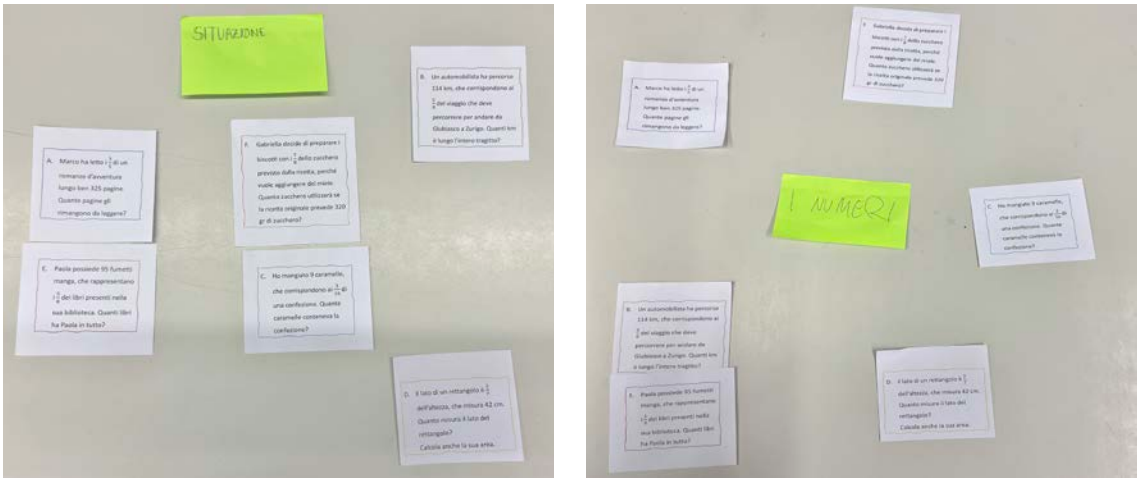


Figura 3. Categorizzazione dei problemi secondo le diverse lenti di ingrandimento. A sinistra si trova una categorizzazione secondo l'analogia del contesto, mentre a destra si trova una caratterizzazione dei problemi secondo l'analogia dei numeri.

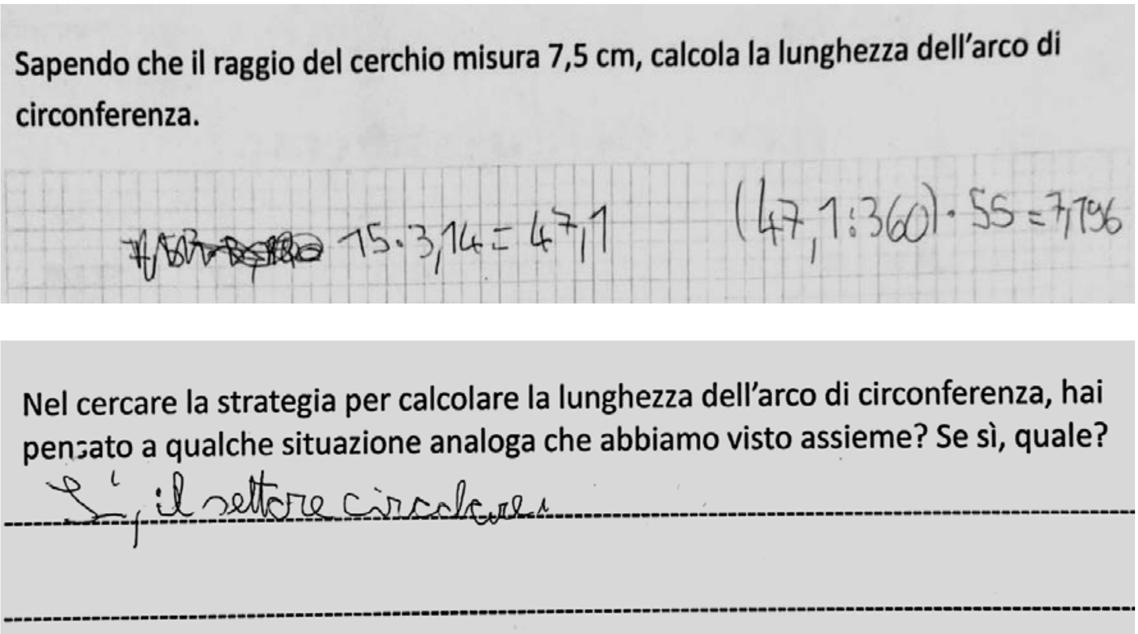
Agli allievi è stato chiesto di annotare quale lente di ingrandimento avessero scelto per cercare l'analogia e, una volta terminato il lavoro di categorizzazione dei problemi, di provare a utilizzare le altre lenti di ingrandimento viste con l'attività precedente. In questo modo hanno potuto sperimentare come un diverso punto di vista cambi completamente la suddivisione dei problemi.
Il bilancio dell'attività è positivo: gli allievi hanno potuto rendersi conto di come il contesto uguale e la presenza di una frazione non implichino l'utilizzo della stessa strategia risolutiva, portandoli così a riflettere con attenzione sulla natura della domanda posta dal problema.

5.3 L'analogia come strategia per il transfer di conoscenze

Per lavorare sull'analogia come strategia di stimolo al transfer di conoscenze si è deciso di proporre due attività diverse: la prima, sull'arco di circonferenza, richiedeva agli allievi di utilizzare le proprie conoscenze per sviluppare una strategia di calcolo per la lunghezza dell'arco di circonferenza. Nella seconda attività, invece, si presentava la stessa situazione geometrica in due contesti differenti: uno più astratto e un contesto di vita reale.

5.3.1 Arco e settore a confronto

L'obiettivo di questa terza attività (Allegato 4) era di promuovere il transfer di conoscenze da una situazione nota (il settore circolare) a una incognita (l'arco di circonferenza), entrambe riferite a una stessa circonferenza e allo stesso angolo al centro. Inizialmente, gli allievi dovevano cercare analogie e differenze tra un settore circolare e il corrispondente arco di circonferenza. Poi veniva loro chiesto di calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza.
Tutti gli allievi hanno indicato l'ampiezza dell'angolo al centro come analogia tra le due figure. Alcuni studenti hanno rilevato delle analogie aggiuntive, sia legate al contesto matematico (come il raggio) sia più superficiali (come il colore della linea). La ricerca di differenze si è dimostrata più difficile, infatti più della metà degli studenti si è focalizzata su aspetti superficiali ed estranei alla matematica (colore e tipo di linea), a conferma di quanto sostenuto da Richland e Begolli (2016). Sette allievi hanno indicato come differenza il fatto che il settore circolare rappresenta una superficie, mentre l'arco di circonferenza una lunghezza, anche se non sempre questo concetto è stato espresso utilizzando i termini corretti.
La seconda parte dell'attività consisteva nel calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza, senza alcuna ulteriore indicazione. Lo scopo era infatti quello di osservare quanti allievi sarebbero stati in grado di utilizzare le conoscenze sul settore circolare per trovare una strategia da applicare nel caso della lunghezza dell'arco di circonferenza.
Un solo allievo è stato in grado di calcolare con successo la lunghezza dell'arco di circonferenza, affermando di aver utilizzato il settore circolare come ispirazione per la strategia messa in atto, come mostrato nella Figura 4.


Sapendo che il raggio del cerchio misura 7,5 cm, calcola la lunghezza dell'arco di circonferenza.

15 · 3,14 = 47,1 (47,1 : 360) · 55 = 7,196

Nel cercare la strategia per calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza, hai pensato a qualche situazione analoga che abbiamo visto assieme? Se sì, quale?

Sì, il settore circolare.

Figura 4. Protocollo dell'allievo che identifica una strategia di calcolo per la lunghezza di un arco di circonferenza sfruttando l'analogia con la situazione nota del settore circolare.

Un altro allievo ha calcolato un'approssimazione del risultato (**Figura 5**), ragionando sul numero di volte che l'angolo al centro è contenuto nell'angolo giro e dividendo la circonferenza del cerchio per 6.

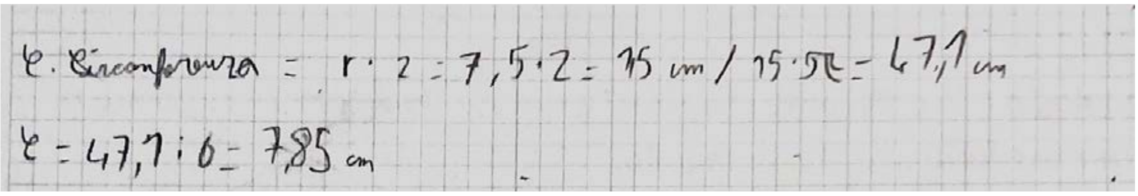


Figura 5. Protocollo dell'allievo che ha calcolato la lunghezza dell'arco di circonferenza tramite un processo di approssimazione.

La messa in comune di queste diverse soluzioni ha permesso di evidenziare il ragionamento svolto dai due studenti e di sottolineare come, in entrambi i casi, essi si siano ispirati a quanto fatto in precedenza per il settore circolare. Dopo aver messo a confronto il calcolo per la superficie del settore circolare e quello effettuato per la lunghezza dell'arco di circonferenza, tutta la classe si è dichiarata convinta della validità della strategia proposta e dell'utilità di confrontare le nuove situazioni con quelle già studiate.
Anche se il risultato dell'attività non ha coinciso con quello sperato in fase di progettazione, le difficoltà riscontrate dagli allievi hanno permesso di avviare una discussione interessante sulle possibili strategie risolutive e su come comportarsi di fronte a un problema che si pensa di non essere in grado di risolvere. Probabilmente la maggior parte di loro non aveva ancora acquisito appieno la strategia per calcolare l'area di un settore circolare e per questo non è stata in grado di trasferirla all'arco di circonferenza.

5.3.2 Irrigazione circolare

La seguente attività si è svolta sull'arco di due lezioni, poiché lo scopo era quello di verificare se gli allievi fossero in grado di ricordare le situazioni presentate nella prima parte dell'attività per risolvere una situazione reale più complessa presentata nella seconda parte.
La prima parte consisteva nel risolvere due problemi analoghi per strategia risolutiva, in quanto entrambi richiedevano di calcolare l'area di un rettangolo non occupata da cerchi congruenti e tangenti inscritti nel rettangolo (Allegato 5). Gli allievi hanno lavorato individualmente su entrambi i problemi, senza particolari indicazioni da parte della docente.
È seguita una messa in comune in cui sono state discusse le strategie risolutive adottate dagli allievi e le eventuali analogie riscontrate. Il primo problema è stato risolto correttamente da tutti gli allievi, mentre un quarto degli allievi ha avuto difficoltà con il secondo problema.
Per quanto riguarda le analogie riscontrate, un quarto della classe ha indicato la situazione geometrica (cerchi tangenti inscritti in un rettangolo), metà degli allievi ha individuato la stessa lunghezza del raggio del cerchio e ben tre quarti degli studenti ha dichiarato di aver riconosciuto la strategia risolutiva analoga (**Figura 6**).

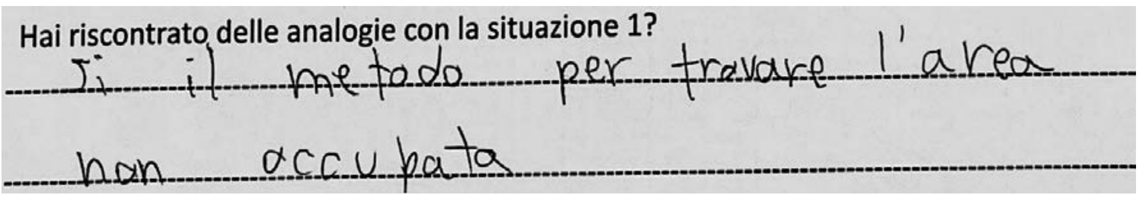
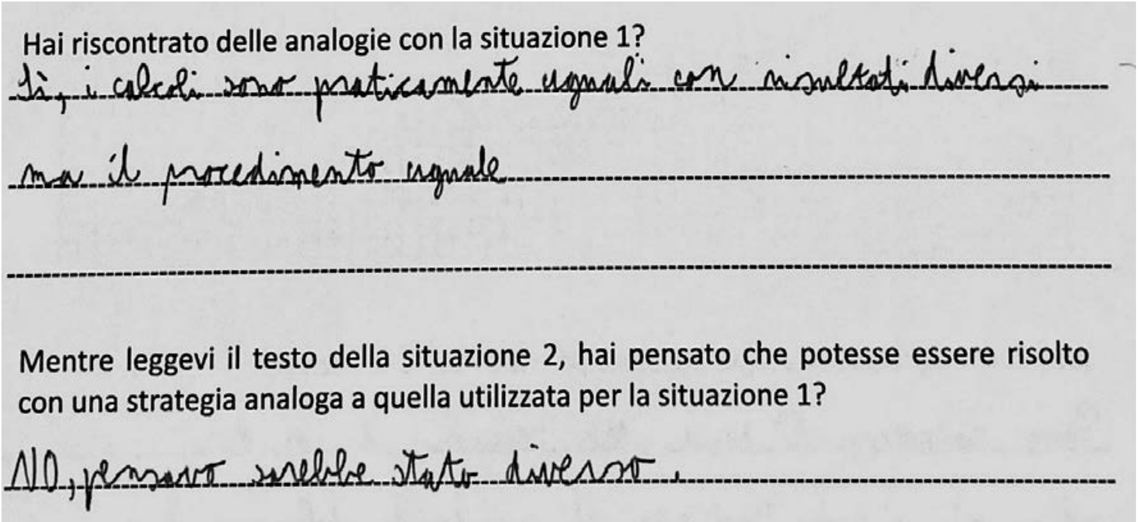


Figura 6. Protocollo di un allievo che ha riscontrato l'analogia della strategia risolutiva tra le situazioni proposte.

Un solo allievo ha dichiarato di non aver riscontrato nessun tipo di analogia tra le situazioni proposte, mentre altri quattro allievi hanno affermato di non aver pensato che la seconda situazione potesse essere risolta con la stessa strategia risolutiva della prima (Figura 7).


Hai riscontrato delle analogie con la situazione 1?
Sì, i calcoli sono praticamente uguali con risultati diversi ma il procedimento uguale

Mentre leggevi il testo della situazione 2, hai pensato che potesse essere risolto con una strategia analoga a quella utilizzata per la situazione 1?
NO, pensavo sarebbe stato diverso.

Figura 7. Protocollo di un allievo che inizialmente non aveva riscontrato l'analogia della strategia risolutiva.

Nella seconda parte dell'attività, è stata presentata la situazione della costruzione di un orto cittadino (Allegato 6), spiegando che il compito di ogni gruppo era quello di trovare una soluzione più efficace del posizionare un unico irrigatore al centro dell'orto, ma che allo stesso tempo fosse ecologica.
Un gruppo ha mostrato parecchie difficoltà nell'approcciare il problema. È stato dunque necessario rivedere la situazione insieme a loro e indirizzare il loro ragionamento tramite delle domande-stimolo. Tutti gli altri gruppi invece hanno affrontato autonomamente la situazione.
Al termine dell'attività, tutti i gruppi tranne uno hanno proposto la soluzione ottimale (Figura 8), ovvero posizionare quattro irrigatori in modo che le aree bagnate siano tangenti tra loro. Il gruppo che non ha trovato la soluzione ottimale ha suggerito invece di posizionare cinque irrigatori in modo da coprire anche la superficie al centro, dimenticandosi della richiesta di essere ecologici e quindi di non sprecare acqua.

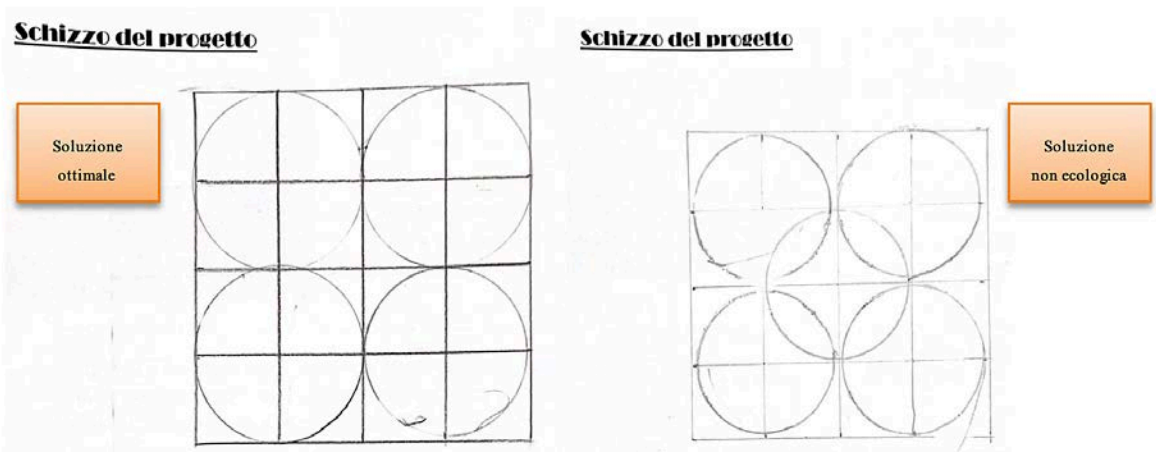
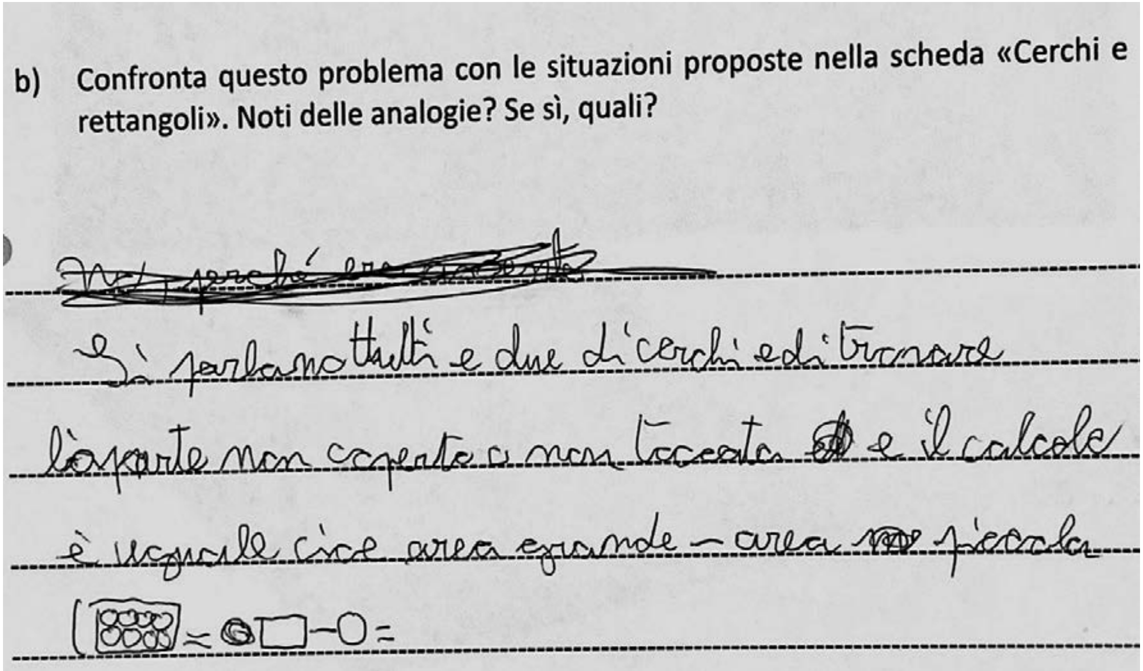


Figura 8. Progetti a confronto. A sinistra è presentata la soluzione ottimale, a destra la soluzione non ecologica proposta da un gruppo di allievi.

Durante la discussione dei diversi progetti, un'allieva ha dichiarato che per non sprecare l'acqua i campi dovrebbero essere a forma circolare, anticipando l'applicazione reale dell'attività.
Alla domanda se questa attività avesse ricordato loro dei problemi visti precedentemente, due quinti della classe ha risposto negativamente, un quinto ha affermato di sì senza specificare però cosa ricordasse loro e i restanti studenti hanno citato l'attività "Cerchi e rettangoli" (Allegato 5).
Alla richiesta di confrontare la situazione con quelle proposte nell'attività "Cerchi e rettangoli", tutti gli allievi tranne uno hanno riscontrato l'analogia legata alla strategia risolutiva (**Figura 9**).


b) **Confronta questo problema con le situazioni proposte nella scheda «Cerchi e rettangoli». Noti delle analogie? Se sì, quali?**

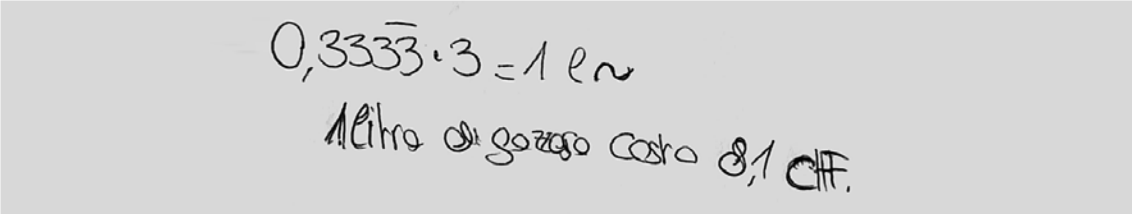
Sì parlano tutti e due di cerchi e di trovare la parte non coperta o non toccata e il calcolo è uguale cioè area grande – area piccola

Figura 9. Protocollo di un allievo che riconosce l'analogia della strategia risolutiva con l'attività precedente.

Nel complesso, l'attività proposta si è rivelata soddisfacente, sia come opportunità per allenare la capacità di transfer di conoscenze a situazioni complesse, sia come occasione per riflettere sull'analogia legata alla strategia risolutiva e su come la capacità di riconoscerla possa essere un aiuto nell'affrontare situazioni sconosciute.

5.4 Analogie e misconcezioni: problemi al supermercato

Lo scopo di questa attività (Allegato 7) era di presentare l'utilizzo di una classe di problemi analoghi nella struttura, ma con numeri diversi, come strategia per sorpassare l'ostacolo dei numeri in forma decimale che influenzano il processo risolutivo, come suggerito da Fischbein (1998).
È stato così proposto agli allievi dapprima il seguente problema: «Se una bottiglia di gazzosa da 0,35 L costa 2.70 Fr., quanto costerà 1 L di gazzosa?».
Le reazioni e i tentativi di risoluzione da parte degli studenti sono stati molto diversi tra loro. Metà della classe ha infatti dichiarato che non era possibile risolvere il problema a causa della presenza di numeri in forma decimale, un quarto della classe ha affermato di non sapere come fare e solo il restante quarto ha provato a risolvere il problema con due approcci distinti. Il primo è stato quello di riflettere sul fatto che 0,35 L è circa un terzo di un litro, riflessione che li ha portati a moltiplicare il prezzo per 3, trovando un risultato approssimato, come mostrato nella **Figura 10**.

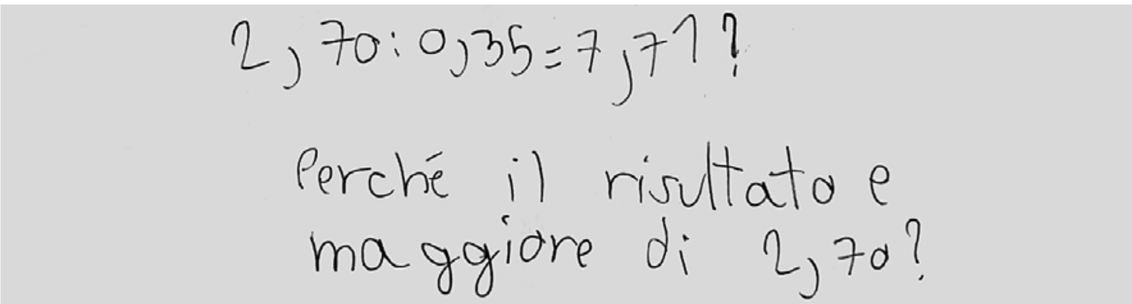


$0{,}333\overline{3} \cdot 3 = 1$ l ~

1 litro di gazzosa costa 8,1 CHF.

Figura 10. Risoluzione del problema per approssimazione.

Il secondo approccio è stato quello di risolvere algebricamente il problema attraverso una divisione, trovando così il risultato esatto. Tutti gli allievi che hanno utilizzato questa strategia però, al vedere il risultato finale maggiore del prezzo iniziale, hanno dichiarato che il loro metodo era sicuramente sbagliato, in quanto la divisione non può far aumentare il dividendo (**Figura 11**).

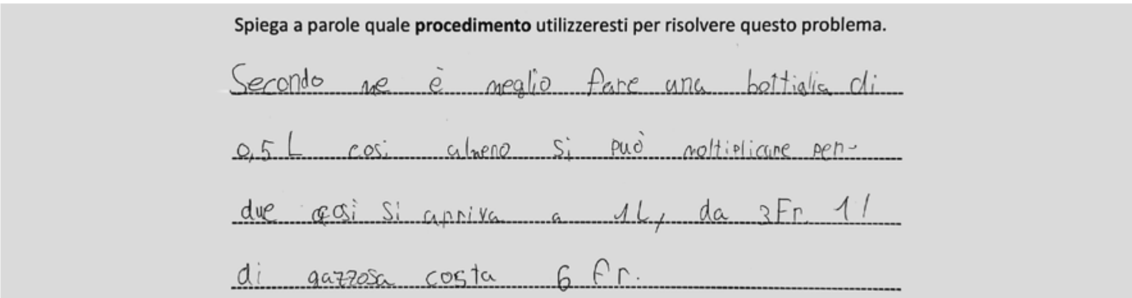


2,70 : 0,35 = 7,71 ?

Perché il risultato e maggiore di 2,70?

Figura 11. Protocollo di un allievo che si domanda perché il risultato della divisione è maggiore del valore di partenza.

Senza rivelare quale fosse la risposta esatta, si è proseguita l’attività consegnando lo stesso problema, ma questa volta con i numeri coperti, chiedendo agli allievi di riflettere sulla strategia generale di risoluzione (Sbaragli, 2009).
Tre quarti della classe ha inserito dei numeri nel testo del problema e poi calcolato il risultato. È interessante notare come la maggior parte di loro abbia scelto la capacità della bottiglia in modo che moltiplicata per un fattore intero il risultato fosse 1 litro (**Figura 12**), così da rendere più facile il procedimento risolutivo.



Spiega a parole quale procedimento utilizzeresti per risolvere questo problema.

Secondo me è meglio fare una bottiglia di 0,5 L così almeno si può moltiplicare per due così si arriva a 1L, da 3Fr. 1 l di gazzosa costa 6 Fr.

Figura 12. Protocollo di un allievo che risolve il problema scegliendo dei numeri a lui più congeniali.

Gli studenti restanti sono stati in grado di individuare nella divisione la corretta operazione da applicare, specificando che per risolvere il problema bisognava dividere il prezzo per la capacità della bottiglia, come mostrato nella **Figura 13**.

Spiega a parole quale **procedimento** utilizzeresti per risolvere questo problema.

5:2 = 2,5 franchi. Ho preso il prezzo della bottiglia da 2 l e poi ho fatto diviso 2.

Figura 13. Protocollo di un’allieva che riconosce la strategia risolutiva necessaria.

L’ultima richiesta posta agli allievi è stata quella di risolvere un terzo problema analogo, ma con numeri naturali e in accordo con il modello intuitivo implicito secondo cui “la divisione diminuisce sempre”. Come previsto, quest’ultimo problema è stato risolto senza nessuna difficoltà da tutti gli allievi. Alla richiesta di confrontare quest’ultimo problema con il primo è nata una discussione abbastanza accesa tra gli allievi, suddivisi tra chi riconosceva l’analogia tra i problemi e chi invece continuava a sostenere che la presenza di numeri in forma decimale rendesse i due problemi diversi.
La discussione è continuata esponendo i tre problemi alla lavagna contemporaneamente e ragionando assieme sul motivo che ha reso difficile la risoluzione del primo problema. Gli allievi hanno modificato il problema sostituendo i numeri presenti con dei numeri che ritenevano più o meno facili, giungendo tutti alla conclusione che la difficoltà maggiore era rappresentata dalla presenza di due numeri in forma decimale.
L’attività conclusiva ha richiesto di risolvere alcuni problemi aggiuntivi, riguardanti sia la divisione che la moltiplicazione, in cui la scelta dei numeri era contro-intuitiva. Agli allievi è stata lasciata la libertà di scegliere come approcciarli, anche se è stato consigliato di utilizzare una delle tecniche introdotte precedentemente (ovvero coprire i numeri o sostituirli con numeri naturali). Osservate le risoluzioni degli allievi, si è deciso di discutere i problemi presenti in Figura 14, perché in entrambi i casi la scelta dell’operazione errata portava ad un risultato senza senso (come, ad esempio, il fatto che un trancio di focaccia costasse più dell’intera focaccia), consentendo così di lavorare sul processo cognitivo “Interpretare e riflettere sui risultati” promosso dal Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese (Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015).

2. **Se 1 kg di focaccia costa 9,90 Fr., quanto costerà un trancio da 0,250 kg?**
3. **Martina ha acquistato 25 limoni per un peso complessivo di 3,75 kg. Quanto pesa all’incirca ogni limone?**

Figura 14. Problemi discussi assieme alla classe per individuare la strategia risolutiva soggiacente.

Il bilancio dell’attività è stato sicuramente positivo e in linea con le aspettative. Gli allievi hanno partecipato con interesse, affrontando alcune delle misconcezioni più comuni legate alla divisione e alla moltiplicazione e riflettendo sulla possibilità di utilizzare l’analogia per modificare i dati del problema, facilitando così l’individuazione di una strategia risolutiva.

5.5 Gara di analogie

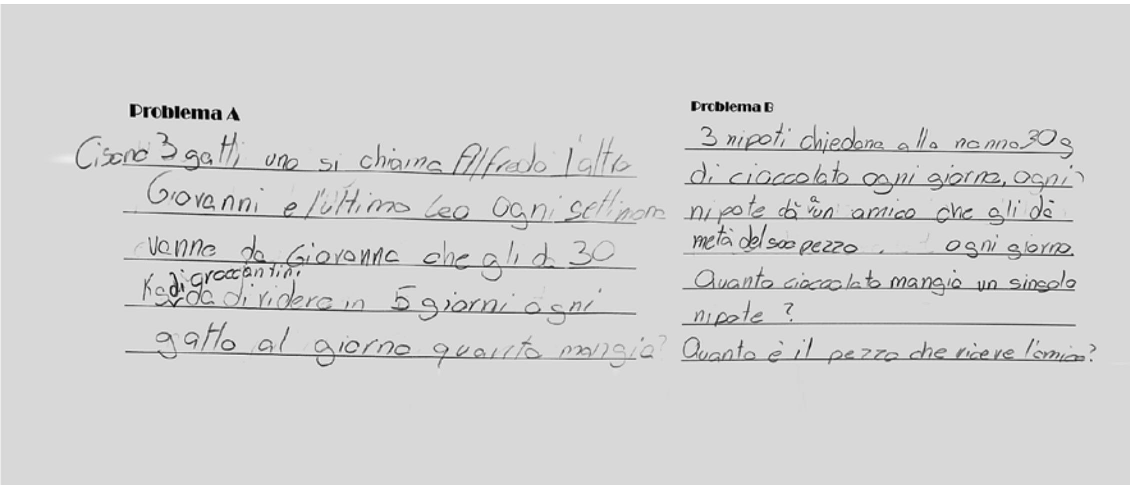
L’attività seguente si è svolta sull’arco di due lezioni: la prima subito dopo l’attività “I problemi con le frazioni” (Allegato 3), la seconda come attività conclusiva del percorso didattico prima del questionario finale (Allegato 10).

Durante la prima parte dell’attività (Allegato 8), svolta a coppie, è stato chiesto agli allievi di scegliere due lenti di ingrandimento (e quindi la tipologia di analogia) e di creare il testo di due problemi analoghi secondo quelle lenti. I problemi sarebbero serviti in seguito per la seconda parte dell’attività che consisteva in una gara di analogie (Allegato 9).

La presenza della competizione ha motivato gli allievi nell’utilizzare la tipologia di analogia che, secondo loro, fosse la più difficile da trovare. In alcuni casi, è stato scelto di combinare le diverse tipologie di analogia per mettere ancora più in difficoltà i compagni. La stesura dei testi, con l’aggiunta dei vincoli imposti dall’analogia, si è rilevata più complicata del previsto. È stato dunque necessario aiutare gli allievi, soprattutto chi aveva scelto la strategia risolutiva come fonte di analogia.

A distanza di circa tre mesi dalla stesura dei problemi, dopo aver terminate l’attività “Problemi al supermercato” (Allegato 7), si è svolta la gara di analogie. La scelta di far trascorrere così tanto tempo tra le due fasi dell’attività è motivata dal fatto di voler osservare se, a conclusione del percorso didattico descritto, gli allievi fossero in grado di individuare correttamente le analogie all’interno dei problemi da loro creati.

Durante la gara, si è deciso di mantenere la classificazione dei problemi rispetto alle analogie indicate dagli allievi, anche se nel caso dell’analogia legata al contesto a volte le situazioni scelte risultavano ambigue. Ad esempio, gli autori dei testi presenti nella **Figura 15** hanno dichiarato di aver creato due problemi con contesti differenti, ma metà della classe li ha invece giudicati analoghi. Durante la discussione avvenuta in aula, gli allievi hanno giustificato la loro interpretazione di contesti differenti affermando che, nel secondo problema, il fatto che oltre ai nipoti fossero coinvolti degli amici cambiava la situazione. Dopo aver ascoltato le argomentazioni dei compagni che invece li giudicavano analoghi, gli autori hanno ammesso di aver creato due situazioni che possono essere considerate simili. Questa discussione ha permesso alla classe di concludere che, rispetto all’analogia del contesto, ci possono essere più interpretazioni.


Problema A

Ci sono 3 gatti uno si chiama Alfredo l'altro Giovanni e l'ultimo Leo. Ogni settimana vanno da Giovanna che gli dà 30 Kg di croccantini da dividere in 5 giorni ogni gatto al giorno quanto mangia?

Problema B

3 nipoti chiedono alla nonna 30 g di cioccolato ogni giorno, ogni nipote dà a un amico che gli dà metà del suo pezzo, ogni giorno. Quanto cioccolato mangia un singolo nipote? Quanto è il pezzo che riceve l'amico?

Figura 15. Coppia di problemi ambigui rispetto all’analogia del contesto.

Dall’analisi delle risposte degli allievi risulta che l’analogia legata al contesto sia quella che ha creato più confusione. Al contrario, l’analogia legata ai numeri è stata individuata correttamente in quasi tutte le coppie di problemi.

Per quanto riguarda la strategia risolutiva, invece, la situazione varia molto da una coppia di problemi a un'altra. Ad esempio, è interessante notare come, nella coppia di problemi mostrati nella Figura 16, tutti gli allievi abbiano correttamente identificato il diverso procedimento risolutivo: i problemi creati dagli studenti riprendevano gli esempi dei problemi con le frazioni affrontati nell'attività "I problemi con le frazioni" (Allegato 3).

Pietro deve andare alla Decathlon a comprare un pallone che costa 25.- Fr. Nel portafoglio Pietro ha 60.- Fr., ma può spenderne solo i $\frac{2}{6}$. Riuscirà a comprare il pallone?	Giuseppino il nonnino spende i $\frac{2}{6}$ dei suoi risparmi per comprare un prosciutto da 60.- Fr. Gli restano così solo 25.- Fr. Quanti soldi aveva all'inizio?

Analogie: ....

Figura 16. Coppia di problemi creata dagli allievi, analoghi a quelli proposti nell'attività "I problemi con le frazioni".

L'esito dell'attività è risultato soddisfacente: tutti gli allievi hanno indicato correttamente le analogie nei problemi creati da loro stessi e, rispetto all'inizio del percorso, si è notato un miglioramento da parte degli studenti nell'identificare diverse categorie di analogie nei problemi matematici creati dai loro compagni.

6 Sintesi dei risultati

Dall'analisi del questionario iniziale somministrato agli allievi a inizio percorso è risultato che essi fossero poco o per nulla consapevoli dei diversi aspetti dell'analogia e soprattutto dei vantaggi del ragionamento analogico come strategia risolutiva nei problemi di matematica. La richiesta di spostare la propria attenzione dal prodotto finale alla strategia messa in atto è risultata insolita per gran parte degli studenti, segnale che nel corso della loro carriera scolastica sono stati probabilmente poco stimolati in questo senso. Infatti, se in linea teorica circa metà della classe ha dichiarato di ritenere due problemi analoghi quando è possibile risolverli con la stessa strategia, durante l'atto pratico di confrontare due problemi quasi tutti hanno focalizzato la loro attenzione su aspetti superficiali e irrilevanti dal punto di vista matematico, ignorando il procedimento risolutivo.
Al termine del percorso didattico si è riscontrato un cambiamento in positivo nelle convinzioni e nelle competenze degli allievi riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei problemi di matematica. Tra le risposte fornite dagli studenti nel questionario finale (Allegato 10), è interessante confrontare quelle date alla seconda domanda riguardo gli elementi che rendono analoghi due problemi in matematica, riassunte nella Figura 17.

	Questionario iniziale	Questionario finale
A.1	2	3
A.2	1	1
A.3	1	
A.4	1	
A.5	2	3
A.6	1	3
A.7	0	3
A.8	2	3
A.9	0	
A.10	1	3
A.11	1	3
A.12	1	2
A.13	1	
A.14	2	3
A.15	3	3
A.16	2	3
A.17	1	3
A.18	0	3
A.19	0	3
A.20	1	3

C0. Non lo so / Aspetti irrilevanti

C1. Contesto

C2. Tipologia di numeri / Figura geometrica

C3. Strategia risolutiva

Elementi in comune

Figura 17. Confronto delle risposte alla domanda “Cosa rende due problemi analoghi in matematica?” nel questionario iniziale e finale.

Le risposte sono state categorizzate secondo i tre livelli di analogia (contesto, numeri e strategia risolutiva); nel caso in cui uno studente avesse dato più risposte appartenenti a categorie differenti, si è considerata la categoria più evoluta dal punto di vista dell’analogia, indicando comunque la quantità di livelli citati.
Si può notare come a fine percorso tutti gli allievi siano stati in grado di definire l’analogia tra due problemi matematici: il 75% degli studenti cita tutte le categorie di analisi studiate nel percorso, mentre i restanti allievi migliorano la loro risposta iniziale aumentando il numero di categorie citate o indicando un livello di analogia più profondo.
Sebbene alcuni allievi affermino di non ritenere utile il processo di ricerca di analogie, la maggior parte di loro dichiara che saper riconoscere due problemi analoghi rispetto alla strategia risolutiva è molto utile e vantaggioso nell’affrontare situazioni sconosciute. Questo permette infatti di ipotizzare possibili strategie risolutive e di scartarne altre, effettuando con efficacia il transfer di conoscenze, abilità molto importante sia per la vita scolastica sia per la vita professionale di ogni individuo. Rispetto alle competenze, dalle attività svolte emerge come riconoscere analogie sia un’attività complessa, che richiede un allenamento costante e intenzionale. Si è potuto notare una maggiore consapevolezza degli allievi e un miglioramento nel riconoscere strategie risolutive analoghe, anche al di fuori delle attività del percorso didattico dedicato. Questo processo è sicuramente facilitato nell’ambito Geometria dalla presenza di immagini, più semplici da confrontare per gli allievi rispetto a dei problemi puramente algebrici. Per quanto riguarda l’applicazione di questo processo di analisi nella risoluzione dei problemi, si notano dei miglioramenti in una parte degli allievi, ma non in tutti. Gli allievi con un basso rendimento nella disciplina sono quelli che hanno faticato maggiormente durante il percorso, proprio per la richiesta di riflettere in modo astratto sui problemi, senza doverli per forza risolvere.

7 Conclusioni

Il percorso didattico descritto nei paragrafi precedenti fornisce una panoramica sull’analogia in matematica e sulle sue possibili applicazioni all’interno del programma di una classe di seconda media.
La ricerca di analogie su diversi livelli richiede l’attivazione di processi cognitivi superiori ed è perciò

un lavoro complesso. Per questo motivo, si è deciso di limitare il numero di tipologie di analogia considerate a tre grandi categorie: contesto, numeri e strategia risolutiva.
Le varie attività svolte avevano l'obiettivo di mostrare vantaggi e criticità del ragionamento analogico. Gli allievi hanno dunque affrontato situazioni diverse, in cui individuare la presenza di un'analogia rispetto alla strategia risolutiva poteva rappresentare un vantaggio per la loro risoluzione oppure situazioni in cui le analogie rispetto al contesto e ai numeri potevano trarre in inganno e far pensare che anche il procedimento risolutivo fosse analogo.
Una delle problematiche principali di questo percorso didattico è legata all'esiguo campione di ricerca, che non permette la generalizzazione dei risultati ottenuti. Un altro limite è rappresentato dal tempo trascorso tra le diverse attività e dal loro numero ridotto, determinati da esigenze di programma e dalle tante assenze degli allievi dovute dalla pandemia in corso. Nonostante si sia cercato di utilizzare le tematiche previste dal programma di seconda media per progettare le attività, in futuro si potrebbe pensare a un'integrazione maggiore dell'analogia sull'arco di tutto l'anno scolastico. Per un intervento ancora più efficace, si dovrebbe iniziare questo lavoro già dalla prima media o, se possibile, anche prima.
In un mondo in continua evoluzione, diventa fondamentale essere in grado di analizzare la realtà e di trovare soluzioni per problemi complessi attraverso il pensiero strategico, la riflessione critica e la creatività. Lo sviluppo di un pensiero analogico consapevole è dunque cruciale per promuovere le competenze di problem solving negli allievi come futuri cittadini del mondo.

Bibliografia

Bordogna, G. (2022). *L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una seconda media.* Tesi Master, Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://tesi.supsi.ch/4269/

Brown, A. L. (1989). Analogical learning and transfer: What develops?. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 369–412). Cambridge University Press.

Brown, D. E., & Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*, *18*(4), 237–261.

Clement, J. (2008). The role of explanatory models in teaching for conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (pp. 417–452). Lawrence Erlbaum Associates.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica.* INDEX Editore.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi!. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *6*(29), 645–664.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds

Fischbein, E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Zanichelli – UMI.

Fischbein, E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Zanichelli – UMI.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Mathematics Education Library, Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 25–38). Pitagora.

Fischbein, E. (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica. *La matematica e la sua didattica*, *4*, 365–401.

Gentner, D., Brem, S., Ferguson, R., Markman, A., Levidow, B., Wolff, P., & Forbus, K. (1997). Analogical reasoning and conceptual change: A case study of Johannes Kepler. *Journal of The Learning Sciences*, *6*(1), 3–40.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton University Press.

Richland, L. E., & Begolli, K. N. (2016). Analogy and higher order thinking: Learning mathematics as an example. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, *3*(2), 160–168.

Richland, L. E., & McDonough, I. M. (2010). Learning by analogy: Discriminating between potential analogs. *Contemporary Educational Psychology*, *35*(1), 28–43.

Sbaragli, S. (2009). Le insidie della divisione. *La Vita Scolastica*, *14*, 18–19.

Sbaragli, S., Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., & Ricci, M. (2008). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in ambito geometrico* (Matematica per gli insegnanti e la classe, Vol. 1). Armando Editore.

Speranza, F. (1988). Salviamo la geometria!. *La matematica e la sua didattica*, *2*(3), 6–13.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze? Alcune regole intuitive generano errori clamorosi*. Erickson.

Treccani. (2009). Analogia. In *Dizionario di filosofia*. Consultato in data 16 ottobre 2021, da https://www.treccani.it/enciclopedia/analogia_%28Dizionario-di-filosofia%29/

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, *49*(4), 497–507.

Vamvakoussi, X. (2019). The use of analogies in mathematics instruction: Affordances and challenges. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. J. Ochsendorf & K. Mann Koepke (Eds.), *Cognitive foundations for improving mathematical learning* (Mathematical Cognition and Learning Series, Vol. 5, pp. 247–267). Academic Press, Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265–284.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and substraction* (pp. 39–59). Lawrence Erlbaum.

Vosniadou, S., & Ortony, A. (Eds.). (1989). *Similarity and analogical reasoning.* Cambridge University Press.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Springer-Verlag.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 90 - 114, DOI: 10.33683/ddm.23.13.5 OPEN ACCESS

Spazio... alla matematica!

Space... to mathematics!

Chiara De Sanctis• e Irene Manara°
•Gruppo MIR, Matematica in Rete, Corinaldo (Ancona) – Italia
°Rete di Istituti Comprensivi – Capofila Istituto Comprensivo Corinaldo (Ancona) – Italia

chiara.desanctis26@gmail.com, alecanali77@gmail.com

Sunto / L'articolo ripercorre il viaggio vissuto dalle allieve e dagli allievi di una sezione dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia nel mondo della matematica: nel corso dell'intero anno scolastico i bambini, accompagnati dal personaggio mediatore Galileo Galilei, si sono cimentati in significative esperienze che hanno permesso loro di avvicinarsi a concetti matematici in modo profondo e allo stesso tempo ludico.
Sono state sperimentate una varietà di proposte, nella convinzione che l'apprendimento, in età prescolare, debba avvenire per esperienza concreta attraverso il contatto diretto con gli oggetti, tramite il fare corporeo, il movimento e il gioco.
Lo scopo del percorso è stato di avviare i bambini allo sviluppo di quei prerequisiti importanti per permettere loro di affrontare la scuola primaria[1] con maggiore sicurezza, come la conoscenza dei concetti topologici e delle relazioni spaziali, il potenziamento delle funzioni esecutive, le capacità di enumerazione e di conteggio.

Parole chiave: apprendimento riflessivo; corporeità; scuola dell'infanzia; processi comunicativi; apprendimento ludico.

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

Abstract / The article traces the journey experienced by the pupils of a section of the last year of kindergarten in the world of mathematics: during the entire school year the children, accompanied by the mediator Galileo Galilei, tried their hand at significant experiences that have allowed them to approach mathematical concepts in a profound and at the same time playful way.
A variety of proposals have been tested, in the belief that learning, in the preschool age, must take place through concrete experience through direct contact with objects, through bodily action, movement and play.
The aim of the educational path was to initiate the children to develop those important prerequisites which allow them to face primary[1] school with greater confidence such as the knowledge of topological concepts and spatial relationships, the strengthening of executive functions, the ability to enumerate and count.

Keywords: reflective learning; corporeality; kindergarten; communication processes; playful learning.

1. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.

1 Presentazione

Il percorso progettuale descritto in questo articolo è stato proposto ai bambini dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia "Colorella" dell'Istituto Comprensivo "M. Ricci" di Polverigi (Ancona). Il percorso si inserisce in un più ampio progetto del gruppo Matematica in Rete (MIR), un gruppo di lavoro-studio costituito da insegnanti di scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di primo grado[1] di diversi Istituti Comprensivi della provincia di Ancona e di Pesaro-Urbino, di cui è capofila l'Istituto Comprensivo di Corinaldo, che per l'anno scolastico 2021/22 ha lavorato sul tema "Comunicare e argomentare in matematica".[2]
Il progetto prende spunto da quanto sottolineato dalle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* previste in Italia per quanto riguarda l'importanza della risoluzione di problemi «intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana» (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012, p. 49) e delle competenze comunicative cruciali per tutti i campi di esperienza:

> «[...] la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili della vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri».
> (MIUR, 2012, p. 49)

Partendo da questi presupposti, il narrare, il descrivere, l'ipotizzare e il domandare diventano collante di senso tra fatti, eventi e oggetti matematici di cui i bambini fanno esperienza.
L'età della scuola dell'infanzia è caratterizzata dalla spontaneità attraverso cui i bambini esprimono e mostrano curiosità e meraviglia per i diversi ambiti del sapere, utilizzando domande che nascono dal bisogno di interpretare il mondo che li circonda e di trovare risposte alle proprie curiosità; curiosità che, come ricorda Bruner (1982, p. 17) «è un tipico esempio di motivazione intrinseca […] essenziale per la sopravvivenza, non solo dell'individuo ma della specie».
Partendo da queste considerazioni di base, si potrebbe formulare la domanda: di quale matematica parliamo nella scuola dell'infanzia?
Quando si sceglie di affrontare l'ambito della matematica con bambini di questo livello scolastico bisogna essere consapevoli di come questa debba essere impostata sull'atteggiamento di interesse, curiosità e gioia, tipici dei bambini che prendono la palla e la fanno rotolare, che impilano cubi, che si confrontano con il mondo dei numeri, dei percorsi e delle figure.
Del resto, fare matematica non significa solo fare i conti, o misurare, ma riguarda anche il trovare la strategia risolutiva di un problema di qualunque natura, parlare correttamente di ciò che ci circonda, organizzare i propri pensieri, rendere consequenziali i fatti della giornata, raccontare in maniera ordinata una storia; si tratta cioè di un atteggiamento da assumere verso le cose, un certo modo di vedere e interpretare l'esperienza e il mondo che ci circonda.
Nella scuola dell'infanzia, non essendo luogo di insegnamento specializzato di discipline, questo approccio prende le caratteristiche di un lavoro attraverso situazioni che presentano una valenza matematica, che possono essere semplificate, commentate e tradotte con un linguaggio appropriato, con rappresentazioni pittoriche, schemi e simboli per rappresentare gli oggetti reali e quindi in grado di stimolare lo sviluppo di processi cognitivi di tipo matematico.
Diverse sono le piste che permettono di sostenere l'avventura dei bambini nel mondo della matema-

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. Il gruppo è coordinato da ventidue anni da Lorella Campolucci e Danila Maori, con la supervisione della professoressa Silvia Sbaragli.

tica: il linguaggio naturale, serbatoio inesauribile, con i suoi numerosi registri, per sviluppare molti elementi (precisione, ordine, relazioni tra le parti) del pensiero matematico; il gioco e la discussione che è spesso suscitata dalle domande per le quali si cerca insieme una risposta e dai problemi per i quali si cercano processi risolutivi. La stessa intensa attività esplorativa del bambino gli consente di formare spontaneamente concetti attraverso ciò che percepisce e incontra nella sua esperienza globale, soprattutto attraverso la funzione della parola.

1.1 Il ruolo delle neuroscienze per la scelta del percorso

Nello strutturare il percorso ci si è basati su quelle che sono evidenze pedagogiche scientificamente confermate dalle ricerche delle neuroscienze e che ci permettono di capire sempre meglio le diverse sfere affettive, cognitive, sensoriali che caratterizzano l'età infantile (si vedano, ad esempio, Dehaene, 2010; Fogassi & Regni, 2019). Ciò che emerge sempre più chiaramente è che tutto ciò che sta "intorno" al bambino e che determina il suo ambiente ha un ruolo fondamentale nello sviluppo, che è il risultato di una complessa interazione tra un progetto biologico geneticamente determinato e il continuo rimodellamento dello stesso da parte delle esperienze ambientali. Le capacità di vedere, capire, sviluppare reazioni emotive, parlare, coordinare la motricità e tutte le altre competenze del bambino dipenderanno dunque anche da come e quanto l'ambiente circostante saprà interagire efficacemente con ciò che egli ha geneticamente ereditato.

Già Vygotskij definiva il pensiero come mente in azione, in interazione con l'altro e con gli strumenti della propria cultura (Sempio, 1998). Il *contesto* diventa dunque un concetto prioritario in un approccio socio-costruttivista della conoscenza (all'interno del contesto si realizzano attività in interazione con gli altri e la sezione diventa una comunità di apprendimento), così come il concetto di *zona di sviluppo prossimale*, cioè la distanza tra il livello di sviluppo attuale e il livello di sviluppo potenziale, che può essere raggiunto con l'aiuto di altre persone, che siano adulti o pari con un livello di competenza maggiore. Concetto questo che si collega direttamente a quello di motivazione intrinseca, delineata da Bruner (Sempio, 1998), e confermata dalle ricerche delle neuroscienze, come spinta interna e naturale e per questo autogratificante: i bambini apprendono agendo, e l'azione dipende molto dal comportamento esplorativo guidato dalla curiosità e sorretto da una motivazione interna che spinge ad esplorare l'ambiente, a porre domande, a creare connessioni tra conoscenze.

Infatti, le recenti ricerche delle neuroscienze, in particolare gli studi sulla maturazione neurologica nel bambino, confermano quanto sia importante l'integrazione dei sistemi sensoriali nei primi anni di vita. La psicologa ed ergoterapista statunitense Anna Jean Ayres iniziò a sviluppare fin dagli anni '60 la teoria dell'integrazione sensoriale (Jean Ayres, 2012) per spiegare il processo neurologico che organizza le sensazioni provenienti dal proprio corpo e dall'ambiente esterno e che permette di organizzare efficacemente il proprio comportamento adattivo in relazione all'ambiente. L'integrazione sensoriale attiene alla capacità, da parte del cervello, di elaborare le informazioni sensoriali che riceve, sia dal mondo esterno che dal corpo, in modo adeguato, di classificarle e di organizzarle in maniera efficace e funzionale al nostro muoverci ed esserci nel mondo. Attraverso il tatto, la percezione della posizione e del movimento del corpo, la vista, l'olfatto, l'udito e il gusto, queste informazioni arrivano al cervello continuamente e in grande quantità. Una buona integrazione di queste informazioni ci consente di produrre delle risposte adattive adeguate all'ambiente e a ciò che accade intorno a noi. Questo processo è fondamentale poiché è il meccanismo che si trova alla base dell'apprendimento e del comportamento sociale.

L'educazione in questo senso può essere un sostegno concreto al neurosviluppo, se accuratamente definito nella pratica didattica, per favorire una migliore evoluzione degli aspetti psicomotori, linguistici, emotivi e cognitivi del bambino.

Da questi principi si è strutturato un percorso laboratoriale ed esperienziale, inserito all'interno della progettazione annuale di sezione, e basato sulla didattica di *coding unplugged* e sulla *pixel art*, che ha preso spunto dagli interessi e dalle curiosità dei bambini: i pianeti, il sistema solare e la domanda

«Che cosa c'è lassù?». Un percorso che ha coinvolto in modo interconnesso le varie aree di sviluppo di competenze:

– alfabetica funzionale;
– matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria;
– personale, sociale e capacità di imparare ad imparare;
– in materia di consapevolezza ed espressione culturali – il corpo e il movimento;
– in materia di cittadinanza.[3]

1.2 Il ruolo del coding unplugged e della pixel art alla scuola dell'infanzia

Con l'espressione "pensiero computazionale" si intende la capacità, da parte di un individuo, di attivare in modo personale e creativo strategie di pensiero chiare, logiche e operative per la risoluzione di problemi non solo scientifici, ma anche quotidiani, in quanto «il pensiero computazionale è un'abilità fondamentale per tutti, non solo per gli informatici. Oltre alla lettura, alla scrittura e all'aritmetica, dovremmo aggiungere all'abilità analitica di ogni bambino anche il pensiero computazionale» (Wing, 2006, p. 33, traduzione delle autrici).
L'espressione è stata portata all'attenzione della comunità scientifica dai lavori della scienziata informatica Jeannette Wing, che ha definito il pensiero computazionale come:

> «[...] il processo di pensiero necessario per la formulazione e la soluzione di problemi in modo che le soluzioni siano comprensibili e possano essere effettivamente eseguite da un agente di elaborazione delle informazioni. […] La soluzione può essere eseguita da un essere umano o da una macchina, o più generalmente, da combinazioni di uomini e macchine».
>
> (Wing, 2010, p. 1, traduzione delle autrici)

In realtà il concetto di pensiero computazionale e di coding (cioè dell'attività di programmazione informatica) era già stato introdotto nel 1980 dal matematico, filosofo, pedagogista, informatico statunitense Seymour Papert. Papert ha lavorato a teorie dell'apprendimento avvicinandosi al pensiero di Jean Piaget e, proprio partendo dal costruttivismo di quest'ultimo, elabora il "costruzionismo", una teoria dell'apprendimento basata su un approccio multidisciplinare che vede la scuola come luogo di costruzione e non di trasmissione della conoscenza.
Nel discorso pronunciato il 2 giugno presso l'Imperial College di Londra, Papert affermò che:

> «L'unica abilità davvero competitiva è l'abilità di essere in grado di imparare. È l'abilità di essere in grado di non dare la risposta giusta alle domande su ciò che ti è stato insegnato a scuola, ma di dare la risposta giusta a situazioni che esulano dall'ambito di ciò che ti è stato insegnato a scuola. Dobbiamo produrre persone che sappiano come agire quando si trovano di fronte a situazioni per le quali non erano specificamente preparate».
>
> (Papert, 1998, p. 4, traduzione delle autrici)

L'idea fondante di questa teoria è che l'apprendimento sia più efficiente e proficuo se avviene mediante la produzione, da parte di chi apprende, di oggetti concreti e reali, cioè di quelli che vengono chiamati "artefatti cognitivi".
In altre parole, la mente, per apprendere e per generare un'idea, avrebbe bisogno di costruire oggetti e dispositivi, di maneggiare materiali. In questi tentativi di rappresentazione del mondo che ci circonda, si procede per prove ed errori e l'apprendimento si sviluppa tramite la discussione, l'analisi, il confronto, l'esposizione e tramite la costruzione, lo smontaggio e la ricostruzione degli artefatti cognitivi.

3. Le aree di competenza fanno riferimento a quanto indicato dai documenti del MIUR nel 2012 e 2018 per la strutturazione del curricolo verticale.

Come si collega questa idea di apprendimento con il coding? Le *Indicazioni nazionali e nuovi scenari* redatti dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca italiano definiscono il pensiero computazionale come un:

> «[...] processo mentale che consente di risolvere problemi di varia natura seguendo metodi e strumenti specifici, pianificando una strategia […]. Ogni situazione che presupponga una procedura da costruire, un problema da risolvere attraverso una sequenza di operazioni, una rete di connessioni da stabilire si collocano in tale ambito, a patto che le procedure siano accompagnate da riflessione, ricostruzione metacognitiva, esplicitazione e giustificazione delle scelte operate».
>
> (MIUR, 2018, p. 13)

Anche nella scuola dell'infanzia è possibile definire un percorso per lo sviluppo del pensiero computazionale nei bambini; il presupposto è quello di educarli ad essere soggetti attivi che costruiscono, pensano, provano e verificano, ponendo in sinergia l'attenzione selettiva, la memoria verbale, la memoria visuo-spaziale e la flessibilità cognitiva. In questo senso, il coding può rappresentare un ambito estremamente efficace per l'avvio allo sviluppo del pensiero computazionale, perché abitua al ragionamento logico nelle molteplici situazioni di vita quotidiana in cui ci si imbatte: realizzando un'idea o risolvendo un problema, i bambini apprendono a suddividere un processo e a concentrarsi prima su ogni singolo passo e infine sulla risoluzione di tutto il problema.
La mente del bambino tra gli 0 e i 6 anni è essenzialmente concreta, perché in questo periodo si sviluppano le aree sensoriali e motorie mentre le aree frontali e prefrontali, deputate all'astrazione, si evolvono in seguito: il lavoro per questa fascia d'età deve quindi necessariamente e irrinunciabilmente profilarsi attraverso il fare, il gioco e il movimento. In questa prospettiva, nella scuola dell'infanzia si parla di *coding unplugged* perché i bambini programmano, verificano e sperimentano in maniera tangibile attraverso il fare corporeo (Travaglini, 2002). *Unplugged* sono quindi tutte quelle attività e giochi che non prevedono l'utilizzo di dispositivi elettronici ma che introducono comunque alla logica della programmazione: basta avere a disposizione un reticolo, della carta, dei colori e bambini pronti a cimentarsi in sfide di coppia in cui, a turno, dovranno alternarsi tra il ruolo di programmatore e quello di esecutore.
In questo modo i bambini possono imparare a pensare come programmatori dando le loro istruzioni dopo aver progettato i vari passaggi, comunicando i comandi in maniera chiara e semplice, dando spazio alla loro fantasia e creatività e al contempo verificando in maniera ludica e giocosa la coerenza tra quanto pianificato e quanto eseguito, avendo la possibilità di comprendere e correggere eventuali errori senza che questi vengano vissuti in maniera negativa.
Fare *coding unplugged* alla scuola dell'infanzia significa quindi allenare il pensiero e favorire la crescita di un bambino abituato a ragionare, pianificare e risolvere problemi in situazioni quotidiane.
Il coding rappresenta quindi un ambiente fertile per la costruzione di una delle più importanti competenze chiave: "imparare ad imparare" che consiste nel

> «[…] l'abilità di perseverare nell'apprendimento, di organizzare il proprio apprendimento anche mediante una gestione efficace del tempo e delle informazioni. […] Il fatto di imparare a imparare fa sì che i discenti prendano le mosse da quanto hanno appreso in precedenza e dalle loro esperienze di vita per usare e applicare conoscenze e abilità in tutta una serie di contesti. […] Un'attitudine positiva comprende la motivazione e la fiducia per perseverare e riuscire nell'apprendimento lungo tutto l'arco della vita».
>
> (Parlamento europeo e Consiglio dell'Unione Europea, 2006, p. 7)

In quest'ottica si è scelto di proporre attività di *coding unplugged*, che prevedessero la costruzione di sequenze di istruzioni e di comandi, di combinazioni di frammenti di percorsi per immaginare, visualizzare e testare i movimenti nello spazio di un corpo che può essere il proprio o il corpo di un altro rispetto a sé. Non solo, attraverso i percorsi programmati dai bambini su reticoli con ostacoli, rappresentati prima sul pavimento e poi su schede-reticolo, e il successivo sviluppo narrativo attraverso la *pixel art*, i bambini hanno avuto modo di sperimentare processi di riflessione, decisione, programmazione, comunicazione, ascolto, attenzione e concentrazione, nonché il lavoro cooperativo per la risoluzione di un problema. Le attività sono state intenzionalmente proposte e strutturate secondo la logica dell'imparare facendo, incoraggiando nei bambini, attraverso domande-stimolo e continui rilanci, la descrizione dei procedimenti ideati per la soluzione di un problema, o per lo sviluppo di un'idea utile, favorendo l'acquisizione delle competenze linguistiche e matematiche.

2 Approccio metodologico

Le prospettive teoriche alle quali si è fatto riferimento nei paragrafi precedenti mettono in evidenza il ruolo che svolge la curiosità come potente motore motivazionale che spinge ad esplorare, fare domande rispetto a fenomeni e a oggetti che suscitano interesse.
Essendo ben consapevoli che nell'età dell'infanzia non è di primaria importanza lavorare sull'acquisizione di saperi e conoscenze formali, bensì sul pensiero riflessivo (Filogrosso & Travaglini, 2004), i cui risultati si manifesteranno nel lungo periodo attraverso l'acquisizione di abiti disciplinari e *formae mentis*, il percorso "Galileo, noi e… la scienza" si è sviluppato attorno all'obiettivo principale di stimolare nei bambini l'interesse, il piacere e la voglia di conoscere. Si è voluto pertanto porre al centro del processo educativo un apprendimento significativo (**Figura 1**), che consentisse cioè di dare un senso alle conoscenze, permettendo l'integrazione delle nuove informazioni con quelle già possedute e l'utilizzo delle stesse in contesti e situazioni differenti, sviluppando la capacità di problem solving, di pensiero critico, di metariflessione e trasformando le conoscenze e le abilità in vere e proprie competenze.

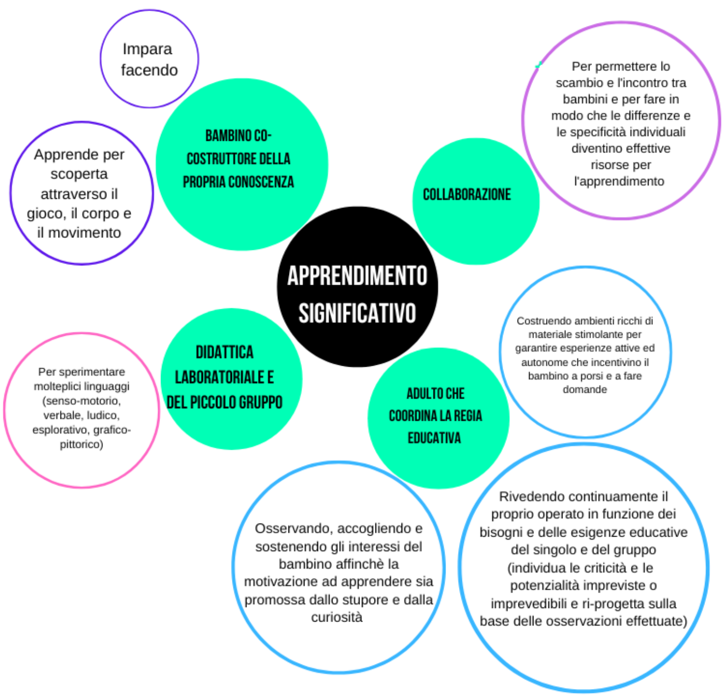


Figura 1. Elementi strutturanti l'apprendimento significativo.

Questi presupposti sono a fondamento del quadro metodologico messo in atto nel percorso "Galileo, noi e… la scienza".
Siamo convinte, infatti, che siano la meraviglia e lo stupore che aprono le porte alle domande, alle intuizioni, alla scoperta e alla creatività e che determinano la motivazione all'apprendere: ed è stata proprio la curiosità dei bambini per l'Universo e il collegamento fatto da una bambina tra i nomi dei giorni della settimana e quello dei pianeti[4] che ci hanno suggerito il percorso da intraprendere.
Quale Maestro migliore poteva accompagnare e guidare il nostro viaggio se non Messer Galileo Galilei, colui che è stato il padre del metodo scientifico-sperimentale e della scienza moderna, colui che ha aperto il mondo alla dimensione delle ipotesi e delle possibilità e colui che, per primo, ha avvicinato cielo e terra?
A ogni sua apparizione, corrispondente alle diverse fasi dell'esperienza (**Figura 2**), Galileo ha stimolato nei bambini domande, riflessioni e voglia di fare e di sperimentare.

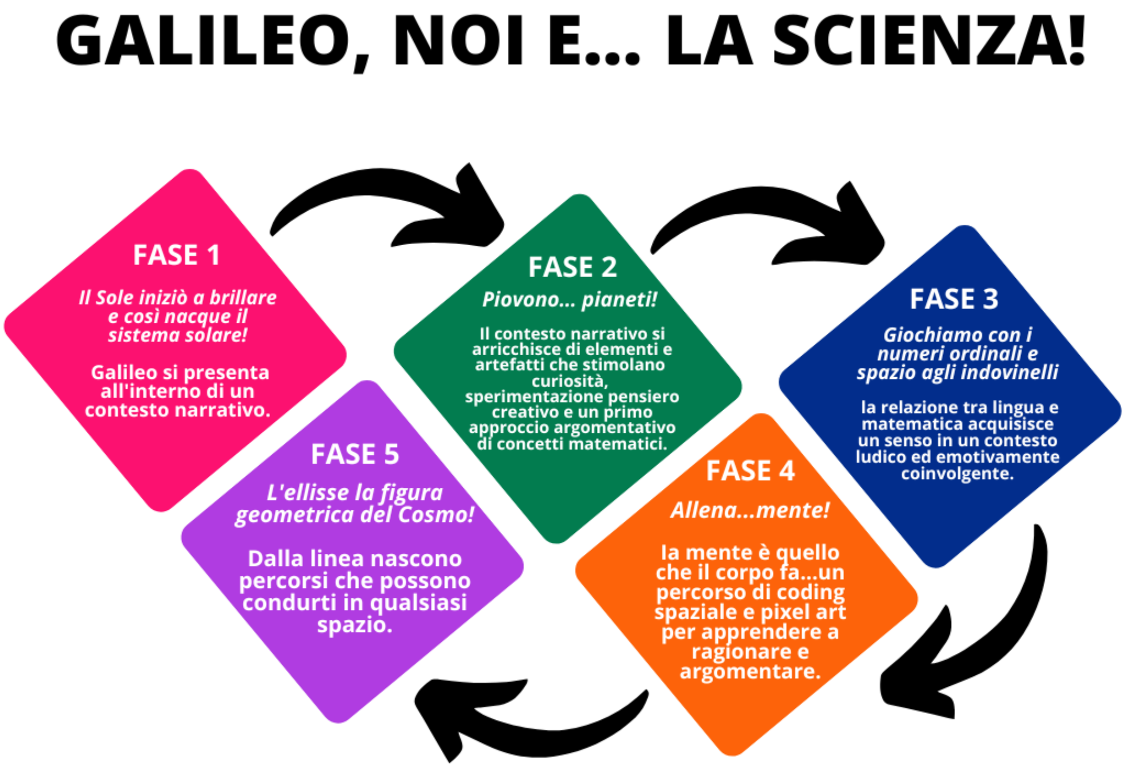


Figura 2. Sviluppo sequenziale del percorso.

3 Galileo, noi e... la scienza

Galileo si è presentato nella nostra sezione nel mese di ottobre e vi ha fatto successivamente ritorno in più occasioni, portando con sé oggetti e strumenti differenti che hanno coinvolto i bambini in attività sempre diverse e motivanti. Galileo si è fatto inizialmente conoscere dai bambini attraverso una lettera (Allegato 1) e la canzone "Messer Galileo" (https://youtu.be/c5IDmx5D5Oo) (**Figura 3**).
La narrazione di storie e la presenza di un personaggio mediatore hanno accompagnato i bambini

4. Durante una conversazione sui nomi dei giorni della settimana in un momento di routine in *circle time*, un'alunna ha affermato che essi derivano dai pianeti: martedì da Marte, giovedì da Giove ecc.

nel loro percorso, li hanno stimolati, fatti riflettere, impegnati in sfide e in prove da superare: tutto questo pensiamo abbia promosso occasioni di apprendimento, facilitato la comprensione di concetti, lo sviluppo di competenze legate al problem solving e reso tangibile e reale la matematica.

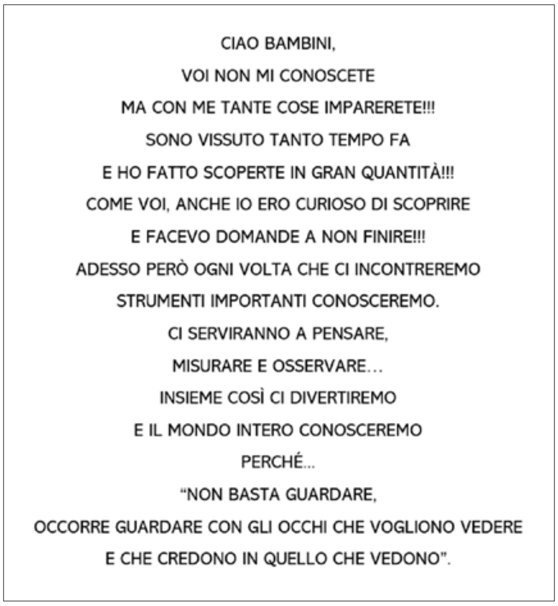

CIAO BAMBINI,
VOI NON MI CONOSCETE
MA CON ME TANTE COSE IMPARERETE!!!
SONO VISSUTO TANTO TEMPO FA
E HO FATTO SCOPERTE IN GRAN QUANTITÀ!!!
COME VOI, ANCHE IO ERO CURIOSO DI SCOPRIRE
E FACEVO DOMANDE A NON FINIRE!!!
ADESSO PERÒ OGNI VOLTA CHE CI INCONTREREMO
STRUMENTI IMPORTANTI CONOSCEREMO.
CI SERVIRANNO A PENSARE,
MISURARE E OSSERVARE…
INSIEME COSÌ CI DIVERTIREMO
E IL MONDO INTERO CONOSCEREMO
PERCHÉ…
“NON BASTA GUARDARE,
OCCORRE GUARDARE CON GLI OCCHI CHE VOGLIONO VEDERE
E CHE CREDONO IN QUELLO CHE VEDONO”.

Figura 3. Pupazzo del personaggio mediatore Galileo Galilei con la sua lettera di presentazione (Allegato 1).

3.1 «Il Sole iniziò a brillare e così nacque il sistema solare!»

Galileo, da pioniere dell’astronomia che spinse l’uomo ad interrogarsi sull’Universo e i suoi misteri attraverso le scoperte fatte sui corpi celesti grazie al perfezionamento del cannocchiale, ha presentato ai bambini l’albo illustrato “C’era una volta una stella” (Carter & Hernandez, 2018) che, come dichiarano gli autori stessi in copertina, permette di affrontare «un viaggio poetico nell’universo» (Figura 4). La lettura di tale albo ci ha permesso di introdurre il sistema solare e di condurre un primo dialogo utile per scoprire se e quali fossero le conoscenze pregresse sull’Universo, sul Sole, sui pianeti, e quali quelle sorte dopo la lettura. Di seguito se ne riportano alcune.

A.:[5] «Il sistema solare è un cerchio che tiene tutti i pianeti in ogni striscia. Le strisce servono a tenere i pianeti divisi e a non farli cadere, così possono girare intorno al Sole».
G.: «Se non c’era il Sole non esisteva il sistema solare».

Figura 4. Immagini dall’albo illustrato utilizzato.

5. Per garantire la privacy, i nomi degli alunni sono stati sostituiti con lettere maiuscole dell’alfabeto.

Successivamente i bambini, sotto la spinta della creatività, hanno riprodotto, con vari materiali a disposizione per giocare e per sperimentare, la loro personale interpretazione del sistema solare e del Big Bang. Nella seguente riproduzione di un gruppo di bambini (**Figura 5**) si nota la correlazione e l'affinità tra i colori dei materiali scelti e le immagini viste nel libro. Il supporto didattico è anche diventato strumento di pensiero divergente, producendo visioni alternative in cui poter cogliere significati diversi, non ovvi e interessanti.

Figura 5. Big Bang e sistema solare realizzati da un gruppo di bambini.

3.2 Piovono… pianeti!

Nell'incontro successivo Galileo ha consegnato ai bambini due oggetti misteriosi (cannocchiali) e una scatola chiusa contenente una filastrocca (Allegato 2) e i modellini dei pianeti del sistema solare.
Le domande-guida e i rilanci («Com'è fatto?», «Di che colore?», «A cosa potrebbe servire?», «Galileo per cosa lo avrebbe potuto utilizzare?») hanno aiutato i bambini a descrivere i due oggetti misteriosi sulla base della loro forma, dimensione e colore e, successivamente, a scoprirne nome e funzione:

G.: «Maestra sono due… neri e lunghi».
T.: «Sono lunghi come il mio braccio!»
F.: «Per me ci scopriva le cose».
Maestra: «Ma secondo voi cosa poteva scoprire Galileo con questi strumenti?»
F.: «Le cose della natura… tipo le formiche o gli animali piccoli».
Maestra: «E perché gli animali piccoli?»
F.: «Perché così li vedeva più grandi… li ingrandiva! È un microscopio!»
A.: «No, ma questo è fatto diverso…vedi?» (Il bambino indica e confronta il microscopio presente in sezione con i due oggetti in esame). Per me servono per vedere le cose che sono lontane, come il cielo o le stelle… Io ne ho uno a casa …però il mio è più pesante».
Maestra: «Il tuo è più pesante di questo?»
A.: «Ma sì, questo è leggero… è fatto di cartone… il mio …tipo …di ferro».
Maestra: «Ma ti ricordi anche come si chiama questo strumento?»
A.: «Certo! Il telescopio!»

Dopo tale scoperta si è passati a indagare il contenuto della scatola: in un primo momento i bambini se la sono passata, senza aprirla, scuotendola, alzandola, rovesciandola, avvicinando l'orecchio ecc. e ognuno di loro ha ipotizzato cosa vi potesse essere dentro; infine, aprendola, hanno scoperto il suo contenuto (**Figura 6**).

SIAMO I PIANETI

ECCOCI BIMBI SIAMO I PIANETI,
CI PRESENTIAMO E NE SIAMO LIETI,
I NOSTRI NOMI SON PROPRIO TANTI,
LI IMPARERETE, FORSE PIU' AVANTI.
ABITIAMO NEL CIELO BLU,
MA NON CI VEDRETE GUARDANDO ALL'INSU',
CI VUOLE UN OCCHIO ASSAI SPECIALE
CHE SI CHIAMA CANNOCCHIALE.
SIAMO TONDI E COLORATI,
SIAMO FIGLI DI SCIENZIATI.
NOI FACCIAMO CAPRIOLE
GIOCANDO INTORNO AL NOSTRO SOLE.
SULLA TERRA È UN PO' DIVERSO MA
TUTTI INSIEME È L'UNIVERSO.

Figura 6. Il contenuto della scatola misteriosa: una filastrocca (Allegato 2) e i modellini dei pianeti del sistema solare.

Visto l'interesse dei bambini, come supporto all'esperienza è stato proposto l'ascolto di una canzone (https://youtu.be/3UV12_bLM9E) in cui si affronta anche la distanza dei pianeti dal Sole e la visione di una parte di un filmato (https://youtu.be/KdgJqP1rVXQ), così da sostenerli nel loro percorso di apprendimento utilizzando vari linguaggi didattici che ne garantiscono la stimolazione sensoriale e percettiva. Dopo la visione e l'ascolto di queste proposte, si è impostata una fase di confronto e discussione, in cui tutti hanno fatto emergere le proprie interpretazioni e i propri ragionamenti a seguito dei quali i singoli pianeti, ricevuti precedentemente da Galileo, sono stati disposti in ordine di distanza dal Sole.

Maestra: «I pianeti hanno tutti la *stessa distanza* dal Sole?»
J.: «No, i pianeti non sono tutti distanti uguali dal Sole… altrimenti sbatterebbero tra di loro».
Maestra: «Allora li possiamo *ordinare*? Ma che cosa vuol dire ordinare?»
A.: «Si devono mettere in fila, come noi quando andiamo a pranzo».
E.: «Non possono stare tutti vicini».
J.: «Alcuni stanno più vicini e altri più lontani».
Maestra: «Cosa significa essere vicino? E cosa significa essere lontano?»
T.: «Io sto vicino a te… invece E. è lontana, non ti può toccare».
E.: «Io sto vicina a G. e lontana da A.»
B.: «Io invece sto vicino a F. e lontano da E.»
Maestra: «E quindi qual è il pianeta più *vicino* al Sole? E quello più *lontano*?»
E.: «Vedi (indicando i pianeti) … quello piccolo giallo è più vicino al Sole… quello blu invece è il più lontano».
A.: «Quello più vicino si chiama Mercurio e quello più lontano Nettuno».
Maestra: «Qual è il *primo* pianeta del sistema solare? E il *secondo*?»
A.: «Il primo è Mercurio, il secondo Venere… quello più luminoso».
Maestra: «E qual è il pianeta *precedente* (che viene prima) la Terra e qual è quello *successivo* (che viene dopo)?»
T.: «La Terra è quella che ha il mare e le montagne… quello che viene prima è quello rosso».
G.: «No! quello lo dici dopo. Quello che viene prima è Venere».
E.: «Quello successivo… che viene dopo la Terra… è Marte, il pianeta rosso».

Negli incontri successivi i pensieri, le scoperte, le ipotesi dei bambini sono stati poi esperiti e messi in pratica attraverso la realizzazione di un grande plastico del sistema solare (**Figura 7**).

Figura 7. Il plastico del sistema solare.

3.3 Giochiamo con i numeri ordinali

I pianeti del sistema solare sono stati lo spunto da cui partire per avviare il lavoro sui numeri ordinali tramite il gioco "Un sistema solare tutto mio!", che si compone di due fasi.
Nella prima fase, otto bambini scelgono un pianeta e, tenendolo in mano, si posizionano casualmente in fila uno dietro l'altro; il compagno-Sole deve riordinare i pianeti nell'ordine che solitamente occupano all'interno del sistema solare, dando le indicazioni verbali ai propri pari (**Figura 8**), ad esempio: «Mercurio posizionati per primo, Venere posizionati per seconda, Terra posizionati per terza...».

Figura 8. I bambini-pianeta si dispongono secondo il sistema solare.

Nella seconda fase, i bambini-pianeta si posizionano in ordine, mentre il bambino-tempesta porta scompiglio creando un sistema solare "personale" attraverso le sue particolari richieste:
«Urano posizionati per primo! Terra posizionati per ultima! Giove posizionati per sesto!». In questo modo, si lavora sull'acquisizione degli ordinali sia dal punto di vista del lessico, sia dal punto di vista concettuale.

3.4 Spazio... agli indovinelli

In una delle sue visite successive Galileo racconta di aver portato con sé un nuovo strumento a lui molto utile e caro, che i bambini potranno adoperare solo arrivando alla fine di una caccia al tesoro basata su un indovinello.

Il testo dell'indovinello (Allegato 3, **Figura 9**) è stato ideato per testare le capacità di ascolto e di attenzione e per verificare, in un contesto ludico e attraverso l'azione, i principali concetti topologici (dentro/fuori) e di relazione spaziale (prima di/dopo di, destra/sinistra, vicino/lontano).

Ehi bambini! Vi siete accorti che mi sono assentato?
Volete sapere dove sono andato?
Forza, facciamo una caccia al tesoro, venite a cercarmi *dentro* la scuola.
In una piccola stanza vi sto aspettando,
vicino a uno strumento che sto utilizzando.
Anni fa lo usai tante volte, con lui ho rimirato il cielo, le stelle e i pianeti
e sono sicuro che anche a voi renderà lieti.
Quindi si parte, ci si muove in fila indiana,
andiamo a scoprire l'idea galileiana.
Dovrete percorrere il lungo corridoio,
e quando arriverete *prima* della palestrina,
a *destra* c'è una piccola porticina.
Entrate piano, io lì vi aspetto con la mia sorpresa,
faremo insieme una bella impresa!

Figura 9. Indovinello di Galileo.

I bambini, al termine del percorso, hanno trovato uno degli strumenti basilari per gli studi di Galileo: il telescopio (**Figura 10**).

Figura 10. Alcune fasi in sequenza della caccia al tesoro.

Naturalmente è stato spiegato loro che non si tratta di quello utilizzato dallo scienziato pisano ai suoi tempi, ma di un moderno telescopio che deriva però dalle sue intuizioni. Alla scoperta dello strumento è seguita una fase di esplorazione e osservazione dello stesso: i bambini hanno fatto ipotesi su come potesse funzionare, hanno provato a verificarle, mettendo in atto una modalità di apprendimento collaborativo e condiviso. Si è così potuto lavorare su importanti processi trasversali come: esplorare, descrivere e rappresentare in diversi linguaggi, immaginare, cercare somiglianze e analogie, costruire modelli, confrontarsi con altri e difendere le proprie idee argomentando.
E finalmente pronti all'azione: tutti a osservare il cielo (**Figura 11**)!

Figura 11. Una bambina che osserva il cielo con il telescopio.

3.5 Allena... mente

Una nuova e avvincente missione da parte di Galileo è stata il pretesto per introdurre il coding: in questo caso i bambini sono stati chiamati a inventare ed eseguire delle istruzioni per aiutare lo scienziato a raggiungere la sua destinazione, cercando di eludere gli ostacoli presenti all'interno di un reticolo.
Considerando le tappe dello sviluppo infantile e la maturazione cerebrale del bambino in età prescolare, i bambini:

– hanno vissuto esperienze che hanno coinvolto a pieno la loro corporeità (par. 3.5.1);
– hanno realizzato lo stesso percorso attraverso un tabellone più piccolo in cui muovevano un segnalino (par. 3.5.2);
– sono giunti, infine, all'esecuzione del percorso in una scheda-reticolo (par. 3.5.3).

3.5.1 Un percorso spaziale!

Dopo aver letto il nuovo messaggio di Galileo, i bambini arrivano in palestra dove trovano tutto il materiale per questa nuova missione (Figure 12a e 12b):

– un reticolo quadrettato di cartone di dimensioni 180 × 240 cm;
– la signora Freccia (che indica l'inizio del percorso), delle frecce verdi (*avanti*), arancioni (*indietro*), blu (*destra*), rosse (*sinistra*); [6]
– degli asteroidi (giornali accartocciati) posizionati all'interno di alcuni quadrati del tabellone;
– il pianeta Terra (che indica il termine del percorso e l'arrivo a destinazione di Galileo).

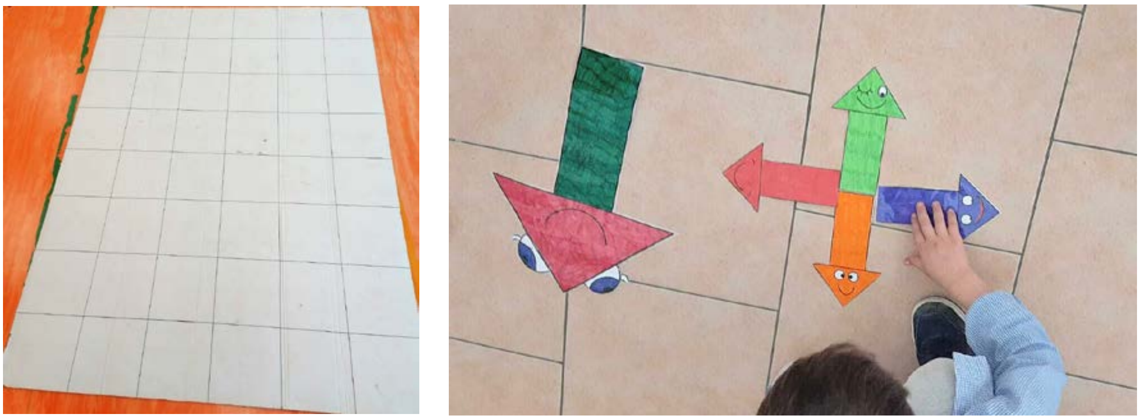


Figura 12a. Il reticolo di cartone e le frecce direzionali.

6. Gli alunni avevano già lavorato con le frecce direzionali all'interno di un laboratorio del gesto grafico.

Figura 12b. Gli asteroidi di carta accartocciata e la Terra.

I bambini, sollecitati a riflettere attraverso alcune domande-stimolo («A cosa serviranno tutti questi oggetti? E perché Galileo ha bisogno di aiuto?»), comprendono che Galileo deve affrontare un viaggio per ritornare sul pianeta Terra, che le frecce indicano la direzione da seguire e che i giornali accartocciati sono degli ostacoli da evitare.
A questo punto si inizia il gioco a cui partecipano due bambini alla volta. Il bambino che fa il navigatore sceglie di volta in volta una freccia tra quelle proposte e la posiziona nel reticolo, selezionandone il colore coerentemente con la direzione che vuole far prendere al proprio compagno; l'altro, che impersona Galileo, si muove sul reticolo in base alle frecce disposte dal compagno (**Figura 13**).[7]

Figura 13. Alcuni momenti dello svolgimento del gioco e un percorso realizzato.

3.5.2 Percorsi spaziali… a misura ridotta

In sezione è arrivato un nuovo gioco da tavola, "Il piccolo reticolo… spaziale" (**Figura 14**), costituito da:

- un reticolo quadrettato di dimensioni 70 × 100 cm;
- delle frecce verdi, arancioni, blu e rosse con le stesse funzioni del gioco precedente;
- un segnalino-Galileo;
- degli ostacoli (asteroidi, pianeti, astronauti, alieni, razzi spaziali);
- i pianeti.

7. In una fase successiva si sono utilizzati un maggior numero di ostacoli e si è fatto sì che questi si muovessero durante il percorso, per sollecitare le capacità di flessibilità di risposta.

Figura 14. Immagine del reticolo di dimensioni 70 × 100 cm.

Il gioco si svolge in modo analogo al precedente. Nelle prime manches sono le docenti a posizionare il punto iniziale, quello finale e gli ostacoli; successivamente sono i bambini stessi a scegliere da dove far partire Galileo, dove farlo arrivare, quanti ostacoli mettere e dove posizionarli.
Si gioca a coppie: un bambino a turno posiziona una freccia fino ad arrivare alla fine del percorso; solo una volta messe tutte le frecce, si muove il segnalino-Galileo seguendo le frecce per verificare l'esattezza del percorso.

Figura 15. I bambini alle prese con il gioco.

3.5.3 Il percorso nello spazio… del foglio

Dopo un periodo di tempo in cui i bambini si sono allenati con i macro-percorsi e tramite il reticolo 70 × 100 cm da tavolo, è stata introdotta la scheda-reticolo (su un foglio A4) nella quale i bambini hanno riprodotto con le frecce direzionali il percorso svolto precedentemente con il gioco da tavolo.
Il reticolo sul foglio A4 presenta delle caselle annerite che riproducono la disposizione degli ostacoli relativa a uno dei tanti percorsi individuati dai bambini durante il gioco per portare Galileo sui pianeti. La docente, in questa fase, ha effettuato continui rilanci sulla base di quanto veniva da loro ipotizzato.

Maestra: «L'immagine riprodotta sul foglio a cosa corrisponde?»
A.: «Al percorso che abbiamo fatto fare a Galileo per arrivare ai pianeti».
Maestra: «Come posizionate il foglio rispetto al reticolo-gioco?»
G.: «Di fronte con i quadrati neri che sono gli ostacoli messi nel gioco grande».
Maestra: «Perché?»
E.: «Perché è lo stesso percorso e noi lo vediamo dalla stessa posizione».
Maestra: «Quante colonne ci sono?»
M.: «6».
Maestra: «Quante righe?»
A.: «8».
Maestra: «Partendo dalla sinistra del foglio in basso posizionati nella terza colonna e tocca la quinta casella… Cosa trovi?»
A: [Indica la casella in **Figura 16**].

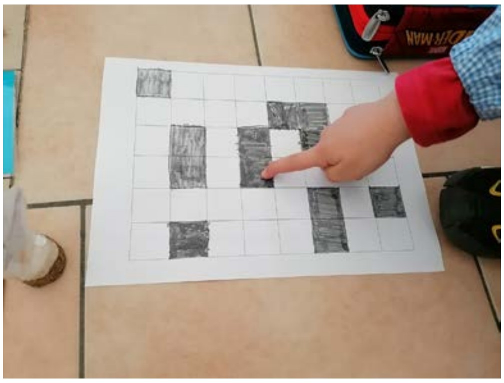


Figura 16. Alla richiesta della maestra, il bambino indica la quinta casella della terza colonna partendo a contare in basso a sinistra.

Nell'ultima fase i bambini hanno riprodotto il percorso ideato nel reticolo di gioco sul foglio A4, stando attenti a utilizzare le frecce colorate corrispondenti nelle caselle giuste (**Figura 17**). È stato importante osservare l'acquisizione di coordinazione visuo-spaziale, abilità visuo-percettive, attenzione, memoria di lavoro e flessibilità cognitiva.

Figura 17. Il reticolo di gioco e il foglio A4 a confronto: i bambini riproducono il percorso sul foglio.

3.5.4 Big Bang... art

Dopo queste attività su reticolo, ai bambini è stata proposta un'attività di pixel art collettiva; i bambini, posti di fronte a un nuovo tabellone reticolato, hanno notato immediatamente che vi sono anche delle lettere e dei numeri posizionati all'esterno (Figura 18). Tale scelta è stata dettata dal fatto che i bambini nel corso dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia vivono immersi all'interno di un ambiente ricco di simboli grafici e numerici, che sperimentano sia nel corso di alcuni momenti specifici della giornata sia in maniera spontanea spinti dal loro interesse.

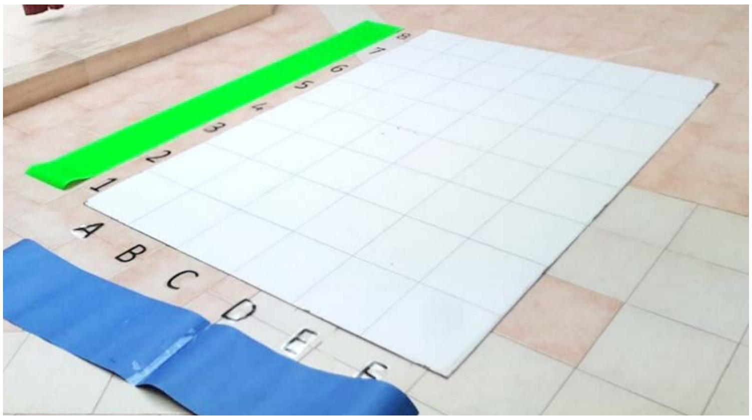


Figura 18. Tabellone-reticolo con simboli alfabetici e numerici, con due strisce di colore diverso per indicare colonne (verde) e righe (blu).

A questo punto le docenti hanno fatto notare che nel tabellone-reticolo si ritrovano *colonne* e *righe*, terminologia già utilizzata con i bambini nei momenti di percorsi su reticolo. Prima ancora di indicarle, si è chiesto ai bambini il significato dei termini *colonna* e *riga*. Di seguito alcune risposte degli allievi:

> E.: «La colonna è una cosa che tiene su un'altra cosa [indicando la colonna del teatrino]».
> M.: «È una cosa alta che tiene su un'altra cosa».
> A.: «La riga invece è quella orizzontale».

Dal confronto con e tra bambini è emerso che le colonne sono disposte dall'alto verso il basso e che le righe vanno invece da sinistra verso destra.
A questo punto si è chiesto di individuare colonne e righe all'interno del tabellone. A turno, quindi, ciascun bambino ha scelto una colonna, denominandola attraverso la lettera, l'ha percorsa e vi ha sovrapposto la striscia di carta verde (Figura 19).

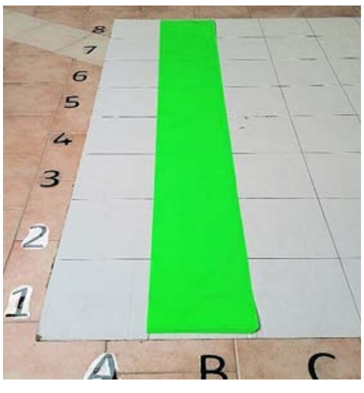


Figura 19. Individuazione visiva delle colonne.

In seguito, si è passati alle righe: ogni bambino ne ha scelta una (definendola attraverso il numero), l'ha percorsa e vi ha sovrapposto la striscia di carta blu (**Figura 20**).

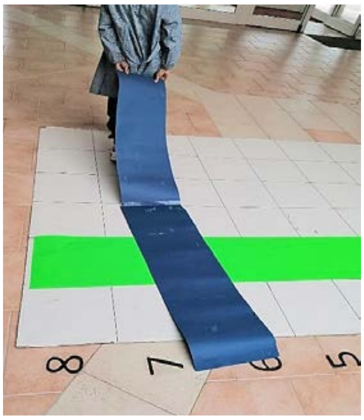


Figura 20. Individuazione visiva delle righe.

La scelta di utilizzare due strisce di colori diversi ci è sembrata la soluzione migliore per rendere più visibile e più vicino il concetto di colonna e di riga e per favorire l'individuazione del loro punto di incrocio. Infatti, vedere, toccare e sperimentare attraverso esperienze corporee globali e attraverso l'utilizzo di supporti visivi aiuta il bambino a migliorare la comprensione e la chiarezza del messaggio; solo in questo modo anche i concetti più astratti possono essere interiorizzati essendo vissuti. Ma come si trova e si rende nota la posizione di questo incrocio?
L'insegnante si è posizionata all'interno della casella in cui si incontravano la colonna A e la riga 5 (**Figura 21**), e ha avviato la seguente discussione.

> Maestra: «Dove mi trovo?»
> S.: «Lì».
> Maestra: «Come si può dire in maniera più precisa?»
> A.: «Dentro quella casella!»
> Maestra: «Ma di caselle ce ne sono tante… Come si può fare per indicare con esattezza la mia posizione?»
> G.: «Sei nella colonna A».
> Maestra: «Basta dire questo? La colonna A è lunga».
> G.: «E anche nella riga 5».

Figura 21. Individuazione visiva dell'incrocio tra riga e colonna.

I bambini hanno scoperto, quindi, che per individuare la posizione di una casella del tabellone è necessario indicare la coppia di coordinate, corrispondenti a una lettera e a un numero.
Giunti a queste considerazioni, Galileo ha consegnato loro un gioco composto da tante tessere quadrate di cartone, aventi dimensioni 30 × 30 cm (come le caselle del tabellone-reticolo), che sul fronte presentano un disegno, mentre sul retro sono scritte delle coordinate. Solo posizionando tutte le tessere nella giusta collocazione i bambini potranno completare il gioco e scoprire un'immagine davvero speciale e particolare per loro.
A turno i bambini prendono una tessera quadrata e leggono le coordinate sul retro. Quindi si muovono all'interno del tabellone per raggiungere la casella avente le coordinate appena lette e posizionano il pezzo. Tessera dopo tessera, il disegno misterioso viene così svelato.

Figura 22. I bambini individuano le caselle seguendo le coordinate indicate.

Figura 23. Pixel art: risultato finale.

3.6 «L'ellisse: la figura geometrica del cosmo»

Questa parte del percorso è scaturita da un'affermazione che A. ha fatto durante uno dei momenti di discussione in plenaria: «Maestra ma queste linee che girano intorno al Sole e dove abbiamo messo i pianeti, sono tipo delle strade… che per esempio Marte deve seguire se no si perde!».
Accogliendo questa osservazione, abbiamo inserito nel percorso un altro elemento geometrico, sul quale innestare, come fatto fino a quel momento, lo sviluppo e il potenziamento di competenze matematiche, narrative, argomentative, motorie.

Sono stati avviati diversi momenti di discussione, dove, sotto la regia dell'adulto, sono emerse ipotesi su cosa potessero essere quelle *linee*, sulla loro forma, sulla loro funzione ecc.
Così siamo andati a visionare alcuni filmati e dapprima abbiamo sperimentato il moto di rotazione, quindi l'alternanza del dì e della notte. Si è pensato di utilizzare un proiettore e un mappamondo per rendere visibile ai bambini i concetti che si stavano definendo (**Figura 24**); successivamente, posizionandosi con il loro corpo al posto del mappamondo hanno visto come anche il loro corpo poteva essere illuminato per metà dalla luce del proiettore così come la Terra presenta una metà al buio e l'altra illuminata dal Sole.

Figura 24. I bambini sperimentano il moto di rotazione della Terra, l'alternanza dì/notte.

A.: «Maestra, te l'ho detto che la Terra ha la *forma* di un *cerchio*».
N.: «Maestra, *metà* Terra è al sole e *metà* è al buio».
Maestra: «Cosa significa *metà*?»
G.: «Significa che puoi dividere una cosa in due parti uguali, senza nemmeno qualcosa di sbagliato».
E.: «La Terra sembra *divisa* in *due* parti uguali da una linea che però noi non vediamo».
A.: «Anche noi ci possiamo dividere in *due metà* uguali… ma diverse perché il cuore sta solo a *sinistra*».

Dopo che i bambini hanno esperito con il proprio corpo in azione e hanno avuto modo di verificare le loro ipotesi, sostenuti dai continui rilanci dell'insegnante, si è giunti a introdurre il moto di rivoluzione della Terra e degli altri pianeti: i bambini, abituati a cogliere i cambiamenti e le differenze stagionali nella pratica educativa che caratterizza la scuola dell'infanzia, sono arrivati a ipotizzare un collegamento tra la vicinanza della Terra al Sole e l'alternanza delle stagioni, attraverso l'osservazione di un'immagine raffigurante l'orbita ellittica percorsa dalla Terra (**Figura 25**).

A.: «Maestra, adesso ho capito».
Maestra: «Cos'hai capito?»
A.: «Quando la Terra è vicina al Sole è estate, quando si sposta un po', tipo quasi a metà ma un po' più vicino al Sole è primavera, quando è lontana dal Sole è inverno e quando è quasi a metà ma un po' più lontano dal Sole è autunno».

Figura 25. A. ipotizza le diverse posizioni in cui potrebbe trovarsi la Terra, in base al susseguirsi delle stagioni.

A. ha utilizzato le sue rappresentazioni mentali delle stagioni per formulare delle ipotesi sulla base delle nuove conoscenze acquisite, integrando, ampliando e cercando di darsi una spiegazione plausibile per un evento naturale.[8]
In una fase successiva, seguendo le associazioni a cui sono arrivati i bambini, e su sollecitazione dell'insegnante, si è affrontata la differenza tra cerchio, ovale ed ellisse.
Siamo partiti dal ragionare e dal formulare ipotesi sulla difformità tra cerchio e ovale e solo in un secondo momento tra ovale ed ellisse (Figura 26).

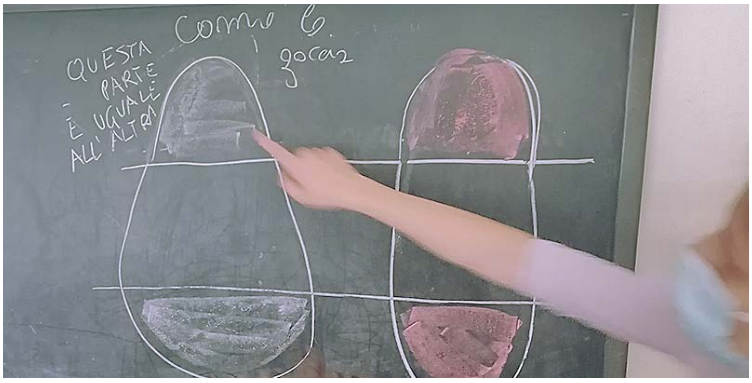


Figura 26. Differenza tra ovale e ellisse.

I bambini si sono accorti che il primo assomigliava più a un uovo o a una goccia e che, se veniva diviso da due linee (parallele), la parte superiore differiva da quella inferiore, mentre sull'ellisse questo non succedeva, deducendo che l'ellisse, rispetto a un semplice ovale, ha come caratteristica quella di "essere perfetta".
In seguito, le insegnanti hanno costruito sul pavimento un'ellisse (Figura 27) e invitato i bambini a camminare lungo il suo contorno, mettendo un piede davanti all'altro. Gradatamente è stata aumentata la difficoltà delle richieste: percorrere l'ellisse, sempre mettendo un piede davanti all'altro, con un cucchiaio in bocca; successivamente dentro il cucchiaio è stata posta una pallina, prima leggera e poi pesante (Figura 28).

8. Siamo consapevoli che l'ipotesi formulata da A. è inesatta, poiché l'alternarsi delle stagioni dipende in maniera determinante dall'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano orbitale del pianeta. Tuttavia, ci è sembrato non opportuno bloccare un'ipotesi che, seppur sbagliata, rappresenta a questo livello di scolarità un primo tentativo di spiegazione di fenomeni naturali attraverso proprietà geometrico-spaziali.

Figura 27. Ellisse costruita sul pavimento.

Si è così offerta la possibilità ai bambini di ragionare, interpretare e interrogarsi per affinare l'auto-consapevolezza corporea e la coscienza di sé e del proprio movimento attraverso domande mirate e opportuni rilanci derivanti dalle loro risposte e considerazioni:

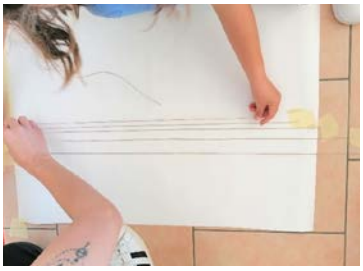
- «Sei andato sempre alla stessa velocità percorrendo il contorno dell'ellisse? Dove andavi più lentamente? E dove più velocemente?»
- «È stato più semplice percorrere l'ellisse la prima volta oppure con il cucchiaio?»
- «È stato più semplice percorre l'ellisse con il cucchiaio con la pallina leggera o con quella pesante?»

Figura 28. Sperimentazione dell'ellisse con il corpo; prima a corpo libero, poi operando con i concetti di leggero, pesante, ricerca di equilibrio.

In seguito, è stata realizzata un'elisse con la sabbia cinetica che permette ai bambini di ripercorre, con l'ausilio di una biglia, l'orbita seguita dai pianeti attorno al Sole (Figura 29).

Figura 29. Ellisse costruita con la sabbia cinetica, con il Sole in uno dei fuochi e il pianeta che gira spinto dalle dita.

Si è giunti infine a realizzare le ellissi degli otto pianeti del sistema solare.
In una prima fase, i bambini hanno compiuto una seriazione delle lunghezze di otto corde (Figura 30): la corda più corta ci avrebbe permesso di realizzare l'ellisse del pianeta più vicino al Sole, la corda più lunga quella del pianeta più lontano dal Sole. In questo modo i bambini hanno potuto consolidare competenze matematiche operando confronti tra misure di lunghezza e facendo proprio un registro linguistico sempre più pertinente, per descrivere il processo e la situazione ottenuta, in una dialettica costante tra matematica e italiano.



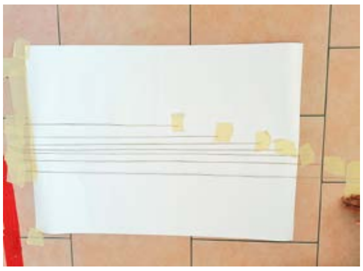


Figura 30. Due momenti in azione per confrontare le lunghezze delle corde.

Il passo successivo è consistito nel legare gli estremi delle corde ai due fuochi dell'ellisse, ricollegandoci alla cosiddetta ellisse del giardiniere, che prevede la costruzione dell'ellisse attraverso l'utilizzo di due pioli, una funicella e un punteruolo. Con la matita si fa scorrere la corda, badando che questa risulti sempre ben tesa, per realizzare l'orbita ellittica del pianeta corrispondente; si ripete il procedimento con ciascuna delle otto corde, ottenendo così le orbite ellittiche degli otto pianeti (Figura 31).

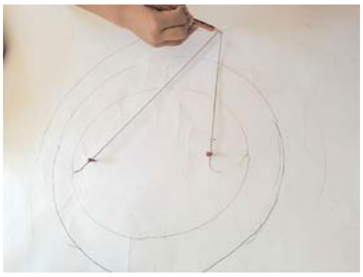


Figura 31. Le varie fasi di costruzione dell'ellisse sul foglio secondo il metodo dell'ellisse del giardiniere.

Infine, i bambini hanno posizionato i modellini dei pianeti in ordine di distanza dal Sole e disegnato quest'ultimo in uno dei due fuochi (**Figura 32**), come ribadisce la prima legge di Keplero[9] che si studierà nei livelli scolastici successivi.

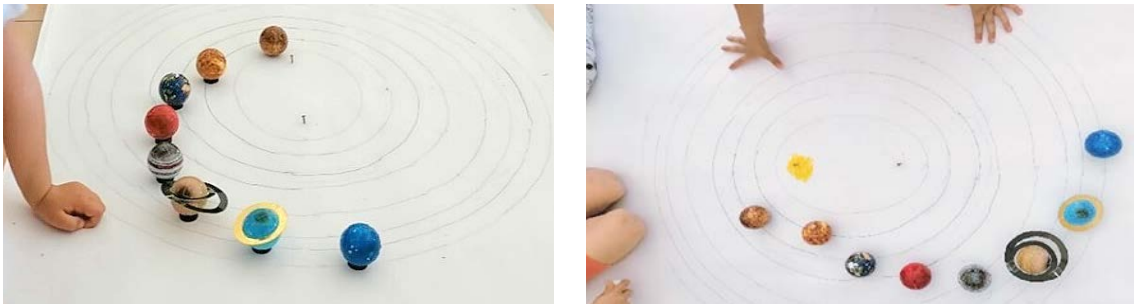


Figura 32. I vari momenti della costruzione del sistema solare.

4 Conclusioni

Il fascino della matematica può essere appreso sin dalla tenera età: ben venga, quindi, l'insegnamento di alcuni aspetti di tale disciplina fin dalla scuola dell'infanzia, chiaramente con i modi e gli strumenti idonei all'età e alla fase di apprendimento in cui i bambini si trovano.
Non pensiamo all'insegnamento della matematica nel senso più tradizionale del termine, pensiamo piuttosto ad attività che basano l'apprendimento su e attraverso esperienze concrete da vivere in prima persona. Non si tratta di anticipare conoscenze strutturate e formali (per quello ci saranno i livelli scolastici successivi) ma di predisporre la mente del bambino, di "seminare" per raccogliere negli anni a venire. Incoraggiare lo sviluppo del pensiero matematico per questa fascia d'età significa sostenere il bambino nel ragionare, nel descrivere, nel confrontare e nel trovare strategie risolutive a problemi della quotidianità o che scaturiscono dalla loro curiosità per il mondo che li circonda. Da ciò si evince il ruolo centrale che svolge la scuola nello sviluppare il potenziale di cui dispone il bambino e l'impatto determinante che ha lo stile relazionale dell'adulto che, a seconda della sua postura educativa, dà vita a relazioni ed esperienze di qualità diverse.
Man mano che il percorso "Galileo, noi e… la scienza" si è dipanato, si è visto affiorare un vero spirito da ricercatori: bambini che hanno posto e si sono posti delle domande, che hanno riflettuto, che hanno formulato ipotesi, che hanno sperimentato e verificato; che sono diventati costruttori intraprendenti e solerti delle proprie conoscenze, abilità e competenze, provando piacere nel fare e nell'esplorare, nell'esprimere le proprie idee e opinioni e nello scambio con l'altro.
Questo percorso laboratoriale ha visto la realizzazione di contesti efficaci dal punto di vista della relazione, dei luoghi, degli strumenti e dei materiali usati per lo sviluppo dei processi formativi.
Ci ha visto coinvolte insieme ai bambini in un processo di costruzione delle conoscenze e di sviluppo di conoscenze, abilità e competenze che hanno tenuto conto delle variabili che influenzano i processi di insegnamento-apprendimento: le modalità con le quali il materiale da apprendere viene strutturato; le interazioni che si svolgono tra bambino e ambiente; le caratteristiche personali dell'allievo (ad esempio i processi e le strategie usate di preferenza per la risoluzione di un compito); gli strumenti di valutazione. Il laboratorio, per antonomasia, necessita l'uso della metodologia della ricerca, e questo ci ha portate

9. La prima legge di Keplero afferma che l'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

a realizzare un percorso che fosse “in situazione”, dove insieme ai bambini si è progettato, sperimentato, ricercato e agito con la loro fantasia e la loro creatività, ponendo l’enfasi sulla relazione educativa come costruzione della conoscenza, sulla motivazione, sulla curiosità, sulla partecipazione, sulla problematizzazione, sull’apprendimento personalizzato, sull’uso degli stili cognitivi e della metacognizione, sul metodo della ricerca e sulla socializzazione.
Se è vero che il bambino possiede a livello embrionale sin dalla nascita certe competenze matematiche, allora la scuola dell’infanzia ha il dovere di farle emergere, allenarle e potenziarle, sostenendo questa naturale predisposizione attraverso l’organizzazione di un ambiente ricco: in questo modo si favorisce un apprendimento per prove ed errori, fatto di esperienze dirette con il corpo all’interno di situazioni problematiche significative, nell’ottica dell’imparare facendo.

Bibliografia

Bruner, J. S. (1982). *Verso una teoria dell’istruzione.* Armando.

Carter, J., & Hernandez, M. (2018). *C’era una volta una stella. Un viaggio poetico nell’universo.* Lapis.

Dehaene, S. (2010). *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi.* Raffaello Cortina Editore.

Filogrosso, N., & Travaglini, R. (2004). *Dewey e l’educazione della mente.* FrancoAngeli.

Fogassi, L., & Regni, R. (2019). *Maria Montessori e le neuroscienze.* Fefè editore.

Jean Ayres, A. (2012). *Il bambino e l’integrazione sensoriale. Le sfide nascoste della sensorialità.* Giovanni Fioriti.

Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale.* Le Monnier. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2018). *Indicazioni nazionali e nuovi scenari.* https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/

Parlamento europeo e Consiglio dell’Unione Europea. (2006). *Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l’apprendimento permanente.* https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:IT:PDF

Sempio, L. O. (1998). *Vygotskij, Piaget, Bruner. Concezioni dello sviluppo.* Raffaello Cortina Editore.

Travaglini, R. (2002). *Corpo e creatività in educazione.* Quattroventi.

Papert, S. (1998, giugno). *Child power: Keys to the new learning to the digital century* [Discorso]. Eleventh Colin Cherry Memorial Lecture, Imperial College, Londra. http://www.papert.org/articles/Childpower.html

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. M. (2010). Computational thinking: What and why?. *The LINK. The Magazine of Carnegie Mellon University’s School of Computer Science.* https://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 115 - 134, DOI: 10.33683/ddm.23.13.6
OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Il ruolo delle attività ludodidattiche nella scuola media

The role of game-based learning activities in lower secondary school

Ilaria Iacopini
Scuola media Lugano centro – Svizzera

ilaria.iacopini@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo presenta una sperimentazione svolta in un corso base[1] di terza media con lo scopo di indagare lo sviluppo delle convinzioni degli allievi riguardo al ruolo delle attività ludodidattiche nell'apprendimento della matematica e il relativo incremento della motivazione durante le ore di lezione. La sperimentazione è stata suddivisa in tre fasi. Inizialmente è stato somministrato agli allievi un questionario con l'obiettivo di raccogliere le loro convinzioni sul ruolo delle attività ludodidattiche in ambito matematico. Successivamente è stato proposto agli allievi un percorso didattico finalizzato a sviluppare convinzioni favorevoli in merito alla valenza didattica e motivazionale della ludodidattica. Il percorso si compone di otto attività ludodidattiche, alternate ad attività di insegnamento tradizionale, che trattano diversi argomenti relativi agli ambiti matematici previsti dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese. Infine, domande di approfondimento al termine di ogni attività e un questionario finale hanno permesso di indagare l'evoluzione delle convinzioni degli allievi. I risultati ottenuti mostrano come, a seguito dell'intervento didattico, si sia verificato nella maggioranza dei casi un cambio di convinzioni a favore delle attività ludodidattiche sia per quanto riguarda l'efficacia che per la motivazione.

Parole chiave: cambio di convinzioni; ludodidattica; gioco; motivazione; scuola media.

1. In Canton Ticino a partire dalla terza media gli allievi vengono inseriti in corsi base e attitudinale in funzione delle competenze matematiche raggiunte alla fine della seconda.

Abstract / This paper illustrates the teaching experiment carried out in an 8th-grade basic[1] class, in order to investigate the development of the students' beliefs about the role of mathematics game-based learning activities in terms of effectiveness and increasing motivation in learning. The experiment was organized into 3 phases. Initially, a questionnaire was submitted to gather students' beliefs on the role of game-based learning activities in mathematics. Then, a didactic project was proposed to students in order to develop favorable beliefs about the didactic and motivational value of game-based learning activities in mathematics. The project consists of eight game-based learning activities, interchanging with traditional ones, and faces several mathematical topics according to the *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Finally, follow-up questions at the end of each activity, and a final questionnaire allowed to investigate the evolution of students' beliefs. The results obtained show how the majority of students, after the didactic intervention, have changed their beliefs in favor of game-based learning activities, both in terms of effectiveness and increasing motivation.

Keywords: beliefs' change; game-based learning; game; motivation; lower secondary school.

1. In Canton Ticino starting from 8th grade the students are inserted into basic and attitudinal courses depending on the mathematical skills reached at the end of the 7th grade.

1 Introduzione

Questo percorso è nato dall'esigenza di coinvolgere studenti poco motivati che considerano la matematica noiosa e ripetitiva. Tale esigenza è emersa in modo marcato durante un'esperienza condotta precedentemente dall'autrice con allievi di un corso base di quarta media, la maggior parte dei quali viveva delle situazioni personali complesse e non era affatto motivata; in questo contesto, erano state rilevate diverse difficoltà nel prestare attenzione alle lezioni e uno scarso interesse per la disciplina.
Lasciandosi ispirare da Gardner (1989), che afferma che «[…] il modo migliore per rendere interessante la matematica agli studenti e ai profani sia quello di accostarvisi con uno spirito giocoso» (p. 1, traduzione dell'autrice), si è deciso di proporre dei giochi in ambito matematico che contribuissero a creare in classe un clima piacevole e formativo, coinvolgendo attivamente gli allievi in modo da permetter loro di acquisire non solo conoscenze disciplinari, ma anche di sviluppare competenze trasversali. Gardner continua infatti sottolineando che

> «[...] il miglior modo di tener sveglio uno studente è presentargli giochi matematici interessanti, enigmi, trucchi, battute, paradossi [...]. Nessuno dice che un insegnante non debba fare altro che divertire i propri studenti. Deve esserci un interscambio tra serietà e divertimento: quest'ultimo tiene desto l'interesse, mentre la serietà giustifica il divertimento».
> (Gardner, 1989, p. 2, traduzione dell'autrice)

Accanto al desiderio di cercare e progettare attività ludiche da proporre in classe che, al fine di sfatare lo stereotipo che la matematica sia noiosa e poco divertente, fossero in grado di interessare e coinvolgere gli allievi, è emersa l'idea di indagare come cambiano le convinzioni degli allievi sul ruolo delle attività ludodidattiche in merito all'apprendimento della matematica e se si può rilevare un incremento della motivazione a seguito di un percorso di insegnamento-apprendimento che alterni queste ultime ad attività di insegnamento tradizionali.
Partendo dalle considerazioni evidenziate in precedenza si è deciso di realizzare questa sperimentazione in un corso base di terza media. Per maggiori dettagli sul quadro teorico, sulle attività descritte e sull'analisi dei dati raccolti si rimanda al lavoro di tesi completo,[1] di cui questo articolo rappresenta una sintesi.

2 Le attività ludodidattiche

Le attività ludodidattiche sono attività di apprendimento, relative a specifici temi, intrinsecamente simili ai giochi, ovvero progettate in modo da avere le caratteristiche e i principi del gioco (Kiili, 2005). Alcune attività, ad esempio enigmi, quiz, giochi di magia, si prestano ad essere svolte singolarmente; altre, come giochi di investigazione, escape room o la classica caccia al tesoro, coinvolgono solitamente più giocatori; data la loro versatilità e valenza didattica possono essere utilizzate efficacemente in diversi momenti del processo di apprendimento.

2.1 Il ruolo delle attività ludodidattiche ai fini dell'apprendimento e della motivazione

A partire dagli anni '80, da quando è stato rilevato che le convinzioni determinano e condizionano le

1. Lavoro di Diploma di Ilaria Iacopini (2022), intitolato "Il ruolo delle attività ludodidattiche nella scuola media", svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrici: Silvia Sbaragli, Marta Barbero. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: https://tesi.supsi.ch/4281/.

conoscenze (Schoenfeld, 1983), l'interesse per il tema ha cominciato a crescere. Schoenfeld (1983, citato da Zan, 2007), per esempio, propone una distinzione fra convinzioni sulla disciplina, sull'ambiente, sul compito e su di sé, mostrando, analogamente ad altri autori (Pehkonen & Pietilä, 2003; Woolfolk, 2016; Zan, 2007), come le convinzioni sulla disciplina e su di sé influenzino l'apprendimento e la motivazione. In queste ricerche si è messo in evidenza come una valutazione negativa di sé e delle proprie abilità in relazione alla matematica possa avere un effetto paralizzante sull'apprendimento, ma anche che può avvenire un cambio di convinzioni inteso come sviluppo o modifica delle convinzioni con il passare del tempo (Wilson & Cooney, 2002) a seguito di un intervento didattico in grado di coinvolgere le convinzioni centrali e primarie (Zan, 2007). A questo proposito, in letteratura sono molteplici i riferimenti teorici favorevoli all'utilizzo del gioco. Corbalán (1994), per esempio, sostiene che utilizzare giochi matematici nella scuola media induca un cambio di convinzioni sulla disciplina. Infatti, l'utilizzo di attività ludiche, che interrompono la routine di esercizi meccanici e ripetitivi, motiva maggiormente gli studenti e li rende più attivi nel processo di apprendimento. Tale dinamica aiuta a sviluppare un'attitudine positiva verso la materia, determinando un cambio di atteggiamento e di convinzione in quegli studenti per cui la matematica risulta ripetitiva e non creativa (Frank, 1985).

Sbaragli e Peres (2021) sottolineano come la valenza didattica e motivazionale delle attività ludiche fosse già presente fin dall'antichità. Il filosofo greco Platone (428-348 a.C.), infatti, fu il primo che sostenne l'importanza del gioco nella formazione scolastica dei giovani per valorizzarne le caratteristiche individuali osservando «quale sia la naturale disposizione di ciascuno» (La Repubblica, VII, 536 e 537, citato da Sbaragli & Peres, 2021, p. 30).

Dal punto di vista pedagogico, furono Piaget (1979) e Vygotskij (1981) i primi a mettere in luce la valenza delle attività ludiche nello sviluppo del bambino. Secondo la corrente costruttivista, infatti, il soggetto deve avere un ruolo attivo nel processo di apprendimento (Woolfolk, 2016), intervenendo in modo diretto nella costruzione della propria conoscenza. Per farlo, è indispensabile che l'allievo si trovi in una situazione di insegnamento-apprendimento a-didattica (Brousseau, 1998) che si realizza quando vi è devoluzione della responsabilità di apprendere. Il gioco può essere considerato un'attività ideale per realizzare una situazione a-didattica; infatti, il giocatore è coinvolto completamente nell'attività, che diventa fulcro del suo interesse, e interagisce direttamente con il *milieu* (gli oggetti che costituiscono il gioco e le sue regole) apprendendo in modo autonomo; solo in seguito, la conoscenza contestualizzata e personalizzata, acquisita in modo diretto, viene istituzionalizzata dall'insegnante. L'attività di gioco, infatti, fa leva sul piacere di portare a termine l'esperienza stessa, generalmente realizzata all'interno di un contesto sociale, in modo da attivare la motivazione intrinseca dello studente, stimolando i suoi interessi, e portandolo, spesso inconsciamente, a raggiungere gli obiettivi di apprendimento (Prensky, 2005). Le attività ludiche sono uno strumento didattico che soddisfa il cosiddetto *forgetting principle* (Krashen, 1982): l'allievo viene coinvolto nel gioco a tal punto da dimenticare che sta lavorando didatticamente riuscendo a superare gli eventuali filtri affettivi della paura e dell'ansia che possono ostacolare l'apprendimento. L'attività ludodidattica risulta quindi uno strumento di apprendimento automotivante che, al tempo stesso, dà costanti feedback permettendo all'allievo-giocatore di autoregolarsi e autovalutarsi (Botturi & Betrus, 2010).

2.2 Principali tipologie di attività ludodidattiche nella didattica della matematica

Esistono diversi tipi di giochi, e relative attività ludodidattiche, che posso essere classificati a seconda del loro obiettivo e del momento in cui vengono proposti all'interno della progettazione annuale di matematica (Corbalán, 1994). Una prima distinzione riguarda il loro obiettivo: sono *giochi di strategia* quelli che, attraverso la ricerca di una tattica vincente, allenano i processi mentali attivati durante la risoluzione di problemi – la lettura e l'interpretazione di dati, l'esplorazione e la formulazione di congetture, l'individuazione di strategie risolutive e la verifica della loro efficacia – (Barbero, 2020; de Guzmán Ozámiz, 1986; Gómez-Chacón, 1992); sono *giochi di conoscenza* quelli relativi a specifici argomenti curricolari, che permettono di realizzare un insegnamento più stimolante, attivo e creativo e di acquisire in modo ludico sia conoscenze disciplinari che competenze trasversali. Questa seconda tipologia di attività ludiche è stata presa in considerazione in questa sperimentazione.

Una seconda possibile distinzione sottolineata da Corbalán (1994) riguarda il momento in cui vengono utilizzate le attività ludiche all'interno del processo di apprendimento. I *giochi pre-didattici* vengono utilizzati per introdurre un nuovo concetto o un nuovo procedimento; quelli *co-didattici* permettono di realizzare la costruzione del sapere, rafforzano la spiegazione di concetti e procedimenti; infine, i *giochi post-didattici* sono impiegati per consolidare o verificare il livello di apprendimento di conoscenze e di procedimenti studiati precedentemente. È inoltre possibile operare ulteriori distinzioni tra *giochi individuali* e *giochi a più giocatori* (a coppie o gruppi); tra *giochi collaborativi* e *giochi competitivi*, potendo così classificare ogni attività in modo specifico.
Il percorso di seguito presentato è stato progettato per un corso base di terza media composto da 11 allievi (d'ora in poi indicati con A*n*) e utilizza attività ludodidattiche di conoscenza pre-, co- e post-didattiche per sviluppare e consolidare risorse e processi cognitivi previsti dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (in seguito denominato Piano di studio, Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015), trattando argomenti curriculari trasversali ai diversi ambiti: teorema di Pitagora, numeri razionali e operazioni con frazioni, areogrammi, istogrammi, grafici cartesiani e relazioni tra grandezze.

3 Le convinzioni iniziali degli studenti

All'inizio del percorso si è sentita l'esigenza di conoscere le convinzioni iniziali, quello che pensavano e sentivano gli allievi, in merito alle attività ludodidattiche nell'apprendimento della matematica e al tipo di attività che renderebbe gli allievi più motivati durante le ore di lezione. È stato quindi realizzato un questionario iniziale composto da sette domande (Allegato 1), finalizzato a far emergere il pensiero degli studenti in merito alla disciplina, al ruolo delle attività ludodidattiche e alle loro capacità personali. A seguito del questionario sono state proposte interviste di approfondimento.

Prima e seconda domanda. Per far emergere le convinzioni iniziali degli allievi in merito alla matematica e al gioco, si è scelto di proporre una lista di aggettivi, gli stessi per entrambe le domande, tra cui scegliere. Come emerge dai risultati (**Figura 1**), le parole abbinate alla matematica in modo più ricorrente sono state "difficile" e "utile". Dalle interviste è possibile ipotizzare una certa correlazione tra l'essere in un corso base e la percezione che la matematica sia difficile.

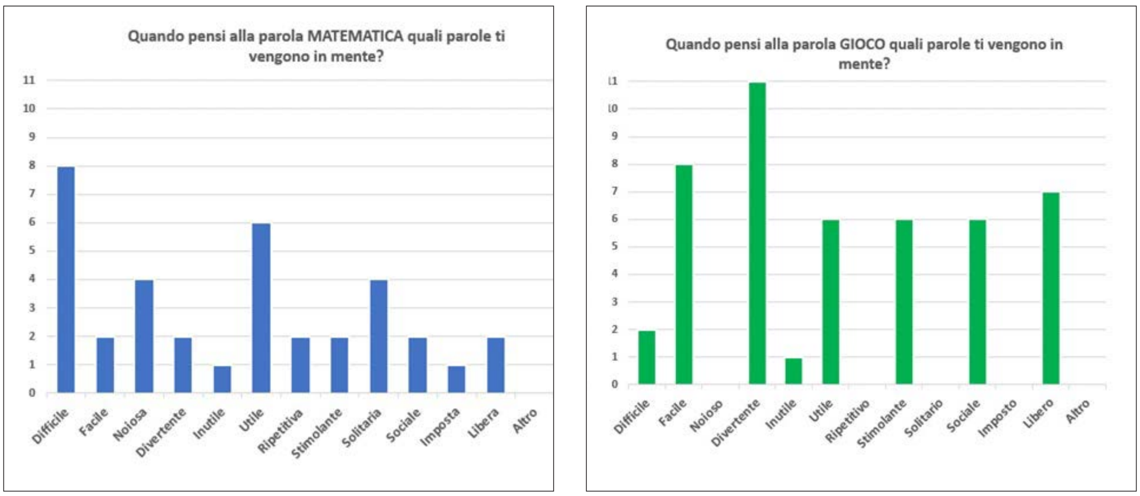


Figura 1. Risposte alle domande 1 e 2 del questionario iniziale.

È importante notare che i 2 allievi (A2, A7) che l'hanno definita "facile" ritengono di essere bravi in matematica sono gli stessi allievi che hanno selezionato anche gli aggettivi "divertente" e "stimolante". A questi 2 allievi è stato concesso il passaggio al corso attitudinale. Dei 6 alunni che hanno scelto la parola "utile", 2 (A1, A5) associano tale caratteristica alla possibilità di accedere al liceo. Tra le parole più selezionate, troviamo anche "noiosa", "ripetitiva" e "solitaria". Quanto al gioco, tutti gli allievi concordano che sia "divertente"; la maggioranza ritiene sia "facile", "stimolante", "sociale" e "libero", in accordo con le definizioni presenti in letteratura.

Terza, quarta e quinta domanda. Le domande centrali del questionario, per cui è possibile dare una sola risposta, utilizzano la scala Likert (per niente d'accordo; abbastanza in disaccordo; né in accordo né in disaccordo; abbastanza d'accordo; del tutto d'accordo) e mirano a indagare le convinzioni degli allievi sul ruolo delle attività ludodidattiche. La maggioranza degli allievi (su 11 studenti, 3 sono abbastanza d'accordo, 3 del tutto d'accordo) crede che la matematica possa essere appresa alla scuola media attraverso il gioco e ritiene più efficace per l'apprendimento l'utilizzo di attività ludodidattiche rispetto ad attività di insegnamento tradizionale (6 sono abbastanza d'accordo). Inoltre, la maggioranza degli allievi (5 abbastanza d'accordo, 1 del tutto d'accordo) dichiara che sarebbe più motivata se durante le ore di matematica le attività venissero svolte sotto forma di gioco (**Figura 2**).

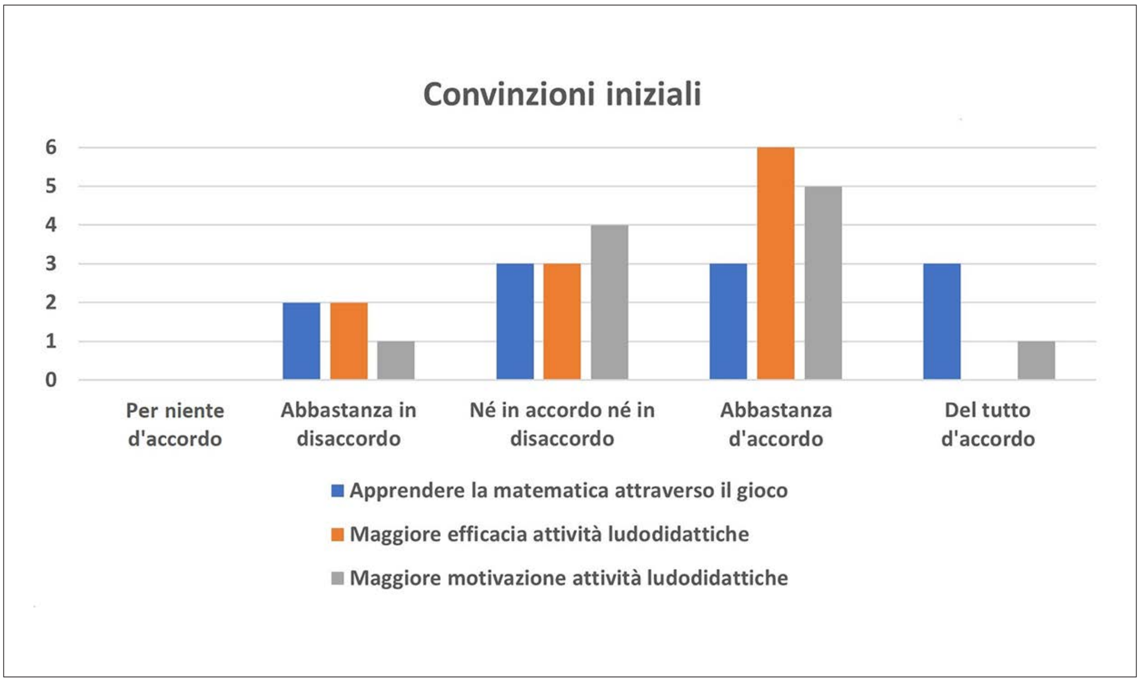
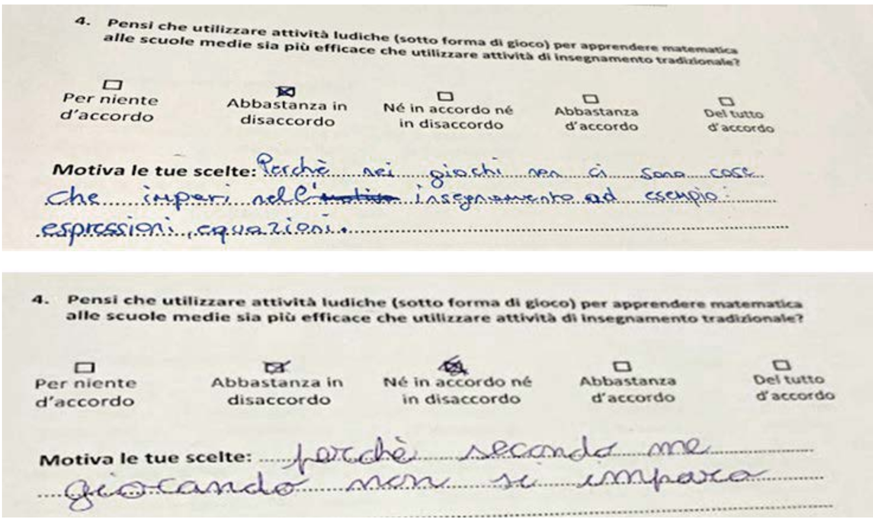


Figura 2. Convinzioni iniziali sul ruolo delle attività ludodidattiche.

Anche se più della metà degli allievi esprime convinzioni favorevoli in merito alla maggiore efficacia delle attività ludodidattiche, 3 allievi non sono né in disaccordo né in accordo e 2 sono abbastanza in disaccordo (**Figura 3**). Uno di questi è l'allievo (A2) che ritiene la matematica facile, di essere abbastanza bravo e non crede che le attività ludodidattiche possano motivarlo maggiormente. L'altro è lo stesso allievo (A8) che ha definito il gioco inutile e che ha scelto come frase «La Matematica non è un gioco». Contrariamente ad A2, A8 ha dichiarato che sarebbe più motivato se alcune attività venissero svolte sotto forma di gioco. Approfondendo la sua convinzione durante l'intervista, questo allievo ha espresso il desiderio di rendere il gioco "utile" in modo da poterlo sfruttare a scuola.


4. Pensi che utilizzare attività ludiche (sotto forma di gioco) per apprendere matematica alle scuole medie sia più efficace che utilizzare attività di insegnamento tradizionale?

☐ Per niente d'accordo ☒ Abbastanza in disaccordo ☐ Né in accordo né in disaccordo ☐ Abbastanza d'accordo ☐ Del tutto d'accordo

Motiva le tue scelte: Perchè nei giochi non ci sono cose che impari nell'~~[illegible]~~ insegnamento ad esempio: espressioni, equazioni.

4. Pensi che utilizzare attività ludiche (sotto forma di gioco) per apprendere matematica alle scuole medie sia più efficace che utilizzare attività di insegnamento tradizionale?

☐ Per niente d'accordo ☒ Abbastanza in disaccordo ☒ Né in accordo né in disaccordo ☐ Abbastanza d'accordo ☐ Del tutto d'accordo

Motiva le tue scelte: perchè secondo me giocando non si impara

Figura 3. Esempi di risposte in disaccordo alla domanda 4 del questionario iniziale (in alto: protocollo di A2, in basso: protocollo di A8).

Sesta domanda. In questa domanda gli allievi dovevano scegliere una o più frasi, tra quelle proposte, che rispecchiassero maggiormente il proprio pensiero in merito all'insegnamento-apprendimento della matematica (Figura 4).

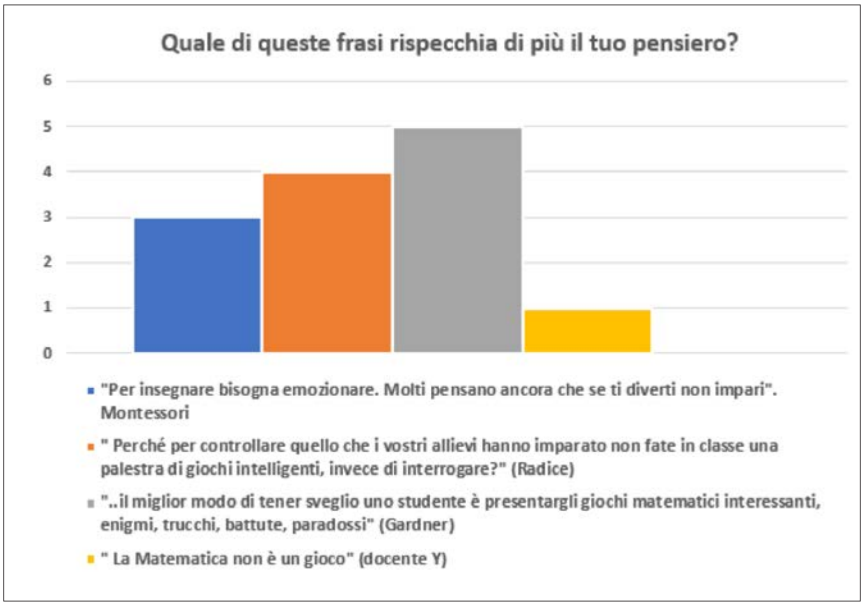


Figura 4. Risposte alla domanda 6 del questionario iniziale.

Coerentemente con le risposte precedentemente riscontrate, le frasi di Gardner e Radice riportate nel grafico riflettono il pensiero della maggioranza degli studenti.

Settima domanda. L'ultima domanda del questionario indaga l'immagine di sé rispetto alla disciplina. Le risposte ricevute sono varie e bilanciate: 2 allievi non si sentono per niente bravi, 2 non abbastanza, 3 non si sentono né bravi né non bravi, 3 pensano di essere abbastanza bravi e 1 si sente del tutto bravo (Figura 5).

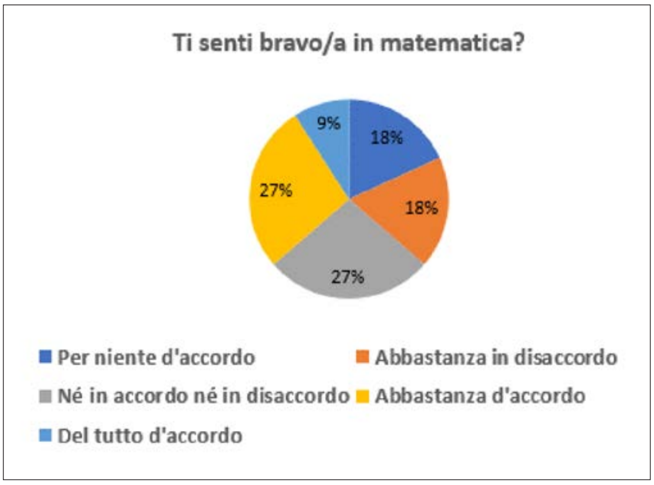


Figura 5. Risposte alla domanda 7 del questionario iniziale.

4 Descrizione del percorso didattico e analisi degli effetti prodotti

Sulla base delle risposte ottenute nel questionario iniziale e degli argomenti disciplinari previsti per la terza media dal Piano di studio, è stato progettato un percorso didattico, durato 4 mesi, costituito da 8 attività ludodidattiche alternate ad attività di insegnamento più tradizionale.
Ogni attività è stata progettata in funzione di specifici traguardi disciplinari con l'intento di offrire un'esperienza positiva in termini di motivazione e apprendimento. Per poter analizzare l'impatto di ogni attività sul singolo allievo e monitorare le sue convinzioni è stata inserita una domanda di approfondimento alla fine di ogni unità didattica.
Di seguito vengono presentate in breve le attività realizzate durante l'intervento didattico e i principali effetti prodotti. Si rimanda agli allegati per la consultazione completa delle schede consegnate agli allievi.

4.1 Gara di stima – 1ª attività

Descrizione e obiettivi. La prima attività (Allegato 2), rivisitazione di una proposta contenuta nei materiali didattici selezionati dagli esperti di matematica per la scuola media[2] (Antognini et al., 2007), consiste in una gara di stima svolta individualmente. Un'asta lunga un metro viene appoggiata più volte al muro cambiandone il punto d'appoggio sulla parete e ogni volta viene misurata e resa nota agli allievi la distanza da questo punto fino al pavimento (*h*, in Figura 6).

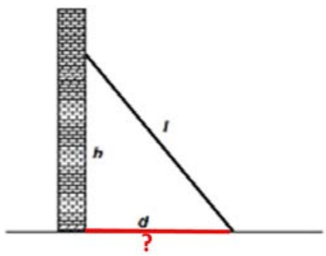


Figura 6. Rappresentazione dell'asta appoggiata alla parete fornita nel materiale relativo all'attività "Gara di stima".

2. Le funzioni degli esperti di materia sono indicate nel Regolamento della Scuola Media, art. 9, consultabile al seguente link: https://m3.ti.ch/CAN/RLeggi/public/index.php/raccolta-leggi/legge/num/646

Ogni alunno deve stimare la distanza tra il muro e il punto in cui l'asta è appoggiata sul pavimento (*d*, in Figura 6). Viene poi misurata tale distanza e ogni allievo è tenuto a calcolare la differenza rispetto alla propria stima (in valore assoluto). Questa operazione viene ripetuta 5 volte; alla fine, ogni allievo somma le differenze stima-misura. Chi ottiene il risultato minore viene proclamato vincitore. A questa gara partecipa anche la docente che, sfruttando il teorema di Pitagora, riesce ogni volta a stimare la distanza corretta o quasi (a causa di errori di misurazione), vincendo probabilmente così la competizione.
Questa prima attività, utilizzata nella fase introduttiva al teorema di Pitagora, vuole da una parte incuriosire gli studenti, motivandoli a scoprire la relazione tra le grandezze, dall'altra allenare la stima e il confronto di misure presentando una situazione concreta che possa essere richiamata facilmente alla memoria durante il percorso.

Riscontro. Le risposte alla domanda di approfondimento proposta al termine di questa gara mostrano come le finalità dell'attività siano state in parte raggiunte, sia sul piano disciplinare sia sul piano motivazionale. Durante questa attività, gli allievi si sono mostrati curiosi e si sono allenati a stimare, misurare e confrontare grandezze in situazioni reali. In particolare, 2 allieve con competenze piuttosto fragili (A3 e A9) in ambito matematico hanno attivato una competenza che non pensavano di avere: riuscire a stimare le distanze osservate in modo accurato, battendo compagni ritenuti "più forti in matematica". Questa scoperta potrebbe aver rafforzato il loro senso di autoefficacia, deduzione confermata da affermazioni pronunciate durante la gara, quali: «anche noi allora siamo capaci», «anche noi possiamo farcela». Tra gli effetti prodotti dall'attività viene indicato da 3 allievi (A1, A7, A8) il senso di sana competitività che li stimola ad essere attivi, a mettersi in gioco, esprimendo al meglio il proprio potenziale. Questo effetto diventa ricorrente nelle attività successive e insieme all'aspetto sociale viene considerato nella progettazione del percorso.

4.2 Il pavimento del tempio – 2ª attività

Descrizione e obiettivi. La seconda attività (Allegato 3), anche in questo caso rivisitazione di una proposta contenuta nel materiale didattico selezionato dagli esperti (Antognini et al., 2007), viene utilizzata nella lezione successiva alla gara di stima con lo scopo di introdurre storicamente il teorema di Pitagora. Le squadre devono rispondere a 4 domande proiettate sullo schermo (Figura 7). A ogni risposta corretta la squadra ottiene degli indizi (i quadrati gialli che compaiono in sequenza sulla griglia) che permettono di scoprire la relazione geometrica che Pitagora riuscì a esplicitare osservando le piastrelle del pavimento del tempio. La squadra che per prima riesce a scrivere la relazione tra le aree delle piastrelle evidenziate in giallo vince il gioco. Anche in questo caso, l'obiettivo è duplice: motivare gli allievi a scoprire la relazione tra le grandezze attraverso una gara a squadre e realizzare un'esperienza significativa che possa essere ricordata.

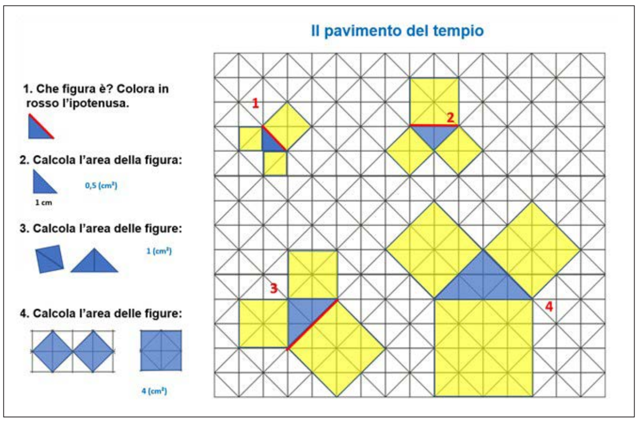


Figura 7. Domande e indizi (quadrati gialli) relativi all'attività "Il pavimento del tempio".

Riscontro. La maggioranza degli allievi ha dichiarato di aver provato soddisfazione nello scoprire il teorema di Pitagora attraverso l'attività e di aver apprezzato il gioco di squadra. Durante la gara, la partecipazione è stata maggiore rispetto alle lezioni tradizionali e si è riscontrato un minor imbarazzo nel condividere i risultati di fronte agli altri; gli allievi stessi hanno dichiarato come il gioco di squadra riesca a coinvolgerli di più rispetto a lezioni standard riducendo stress o ansia da prestazione. Inoltre, il gioco di squadra ha attivato un meccanismo regolativo all'interno del gruppo: grazie al confronto con i compagni alcuni alunni hanno capito dove stavano sbagliando e si sono autocorretti, come emerge dalle risposte alla domanda di approfondimento.

4.3 Space race – 3ª attività

Descrizione e obiettivi. L'attività "Space race" vuole essere una verifica formativa svolta a squadre per misurare la capacità di riconoscere e applicare il teorema di Pitagora ai triangoli nel piano (Allegato 4). Si tratta di un quiz realizzato con una piattaforma web based (Socrative) composto da domande a risposta multipla, da svolgere online (tramite PC o telefono). A ogni squadra viene associato un colore e un razzo. Quest'ultimo avanza di una posizione se la risposta risulta corretta, altrimenti rimane fermo; in questo modo gli allievi ricevono un feedback in tempo reale (Figura 8). Dato un intervallo di tempo prestabilito, la squadra corrispondente al razzo che avanza di più vince. Una volta terminata la gara, l'insegnante proietta il report con tutte le risposte date (la piattaforma permette di visualizzarle in forma anonima o meno), potendo così osservare e discutere gli errori e le difficoltà comuni alle squadre. Questa fase permette di chiarire eventuali dubbi degli allievi riguardo al tema trattato.

Figura 8. Momento di svolgimento dell'attività "Space race".

Riscontro. Questa attività è stata acclamata dagli allievi, esaltati al pensiero di poter utilizzare un dispositivo elettronico. Tutte le squadre si sono impegnate al massimo per vedere avanzare il proprio razzo. La soddisfazione provata è emersa dalle risposte date alla domanda di approfondimento al termine dell'attività. Anche il meccanismo di autoregolazione intrinseco all'attività è stato riconosciuto dalla maggioranza degli allievi: vedere avanzare il proprio razzo e la possibilità di confrontarsi all'interno della squadra hanno permesso di capire dove fossero gli errori. La fase finale di debriefing ha poi permesso di mettere a fuoco le difficoltà e risolvere i dubbi.

4.4 Puzzle dei numeri razionali – 4ª attività

Descrizione e obiettivi. Quella del puzzle è un'attività diffusa e circolante online e viene utilizzata in fase di consolidamento alla fine di un percorso sui numeri razionali (Allegato 5); percorso che è iniziato con la ripresa del concetto di frazione come misura e come operatore, per poi passare al concetto di frazione come numero, trattando le sue diverse forme di rappresentazione. In questa attività di consolidamento gli allievi, lavorando a coppie, devono ricomporre il puzzle accostando le tessere triangolari in modo che i lati coincidenti riportino la rappresentazione dello stesso numero razionale e ottenendo, in conclusione, un esagono come quello di partenza (Figura 9).

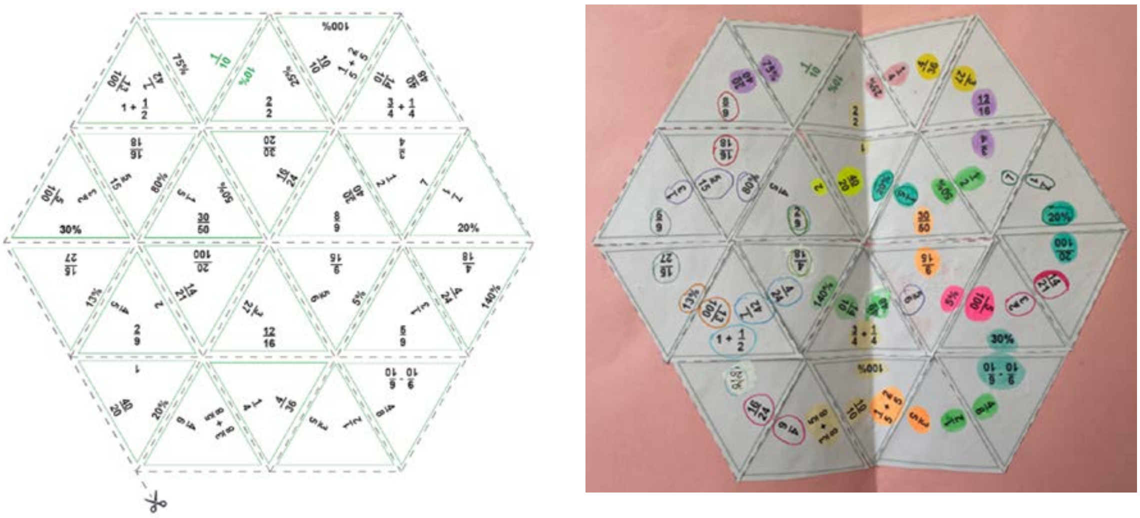


Figura 9. A sinistra: il puzzle dei numeri razionali da comporre. A destra: il puzzle composto.

Questa attività vuole sia motivare gli allievi a riconoscere le varie forme di rappresentazione di un numero razionale, sia permettere di lavorare a livello metacognitivo, allenando gli studenti al controllo del proprio operato, individuando in autonomia eventuali errori commessi e affrontando i propri dubbi.

Riscontro. Durante l'attività sono stati osservati due atteggiamenti diversi: alcune coppie procedevano con metodo sottolineando le rappresentazioni equivalenti dello stesso colore, altri procedevano a tentativi accostando i pezzi del puzzle senza un ordine preciso. Nel momento in cui, seguendo le istruzioni, gli allievi hanno ritagliato i triangoli e provato a ricomporre l'esagono, il meccanismo retroattivo del puzzle ha permesso alla maggioranza di capire dove stava sbagliando. La differenza tra i due approcci alla risoluzione si riflette sulla capacità di autocorreggersi e di riuscire a portare a termine l'attività: chi ha utilizzato un approccio sistematico e organizzato è riuscito a completare l'attività in meno tempo e con maggiore facilità. La soddisfazione per aver completato il gioco è stata di fatto riconosciuta da un numero inferiore di alunni rispetto all'effetto di autoregolazione, come emerge dalle risposte alla domanda di approfondimento finale.
Tra le coppie che hanno terminato con successo l'attività sono presenti anche allieve che generalmente presentano maggiori difficoltà (A1, A4, A9). Le allieve hanno sostenuto che, grazie a questo gioco, hanno scoperto competenze che non pensavano di avere: l'essere precise e organizzate è stato probabilmente decisivo per completare la prova. Al contrario, due allievi che generalmente presentano meno difficoltà (A7, A6), non dando importanza all'ordine e all'organizzazione e confidando solo nelle proprie conoscenze disciplinari, non sono riusciti a concludere l'attività.

4.5 Carte trasparenti – 5ª attività

Descrizione e obiettivi. In questo gioco, ispirato all'attività *Multiply Fraction with Area Models* (Rudtke, 2021), ogni coppia di studenti riceve un set di carte trasparenti che rappresentano diverse frazioni (Allegato 6). Le carte sono suddivise in regioni congruenti, alcune delle quali sono colorate: in questo modo viene rappresentata la frazione dell'intero. Ad ogni coppia viene dato anche un set di carte in cui sono rappresentate delle moltiplicazioni di frazioni che si richiede di calcolare. Per calcolare le operazioni si possono utilizzare le carte trasparenti: sovrapponendo le carte raffiguranti i due fattori si ottiene il loro prodotto. Osservando le carte in trasparenza, il numero totale di parti formatosi nel nuovo modello indica il denominatore del prodotto, mentre il numero di parti che risulta avere un colore più scuro rappresenta il numeratore (**Figura 10**).

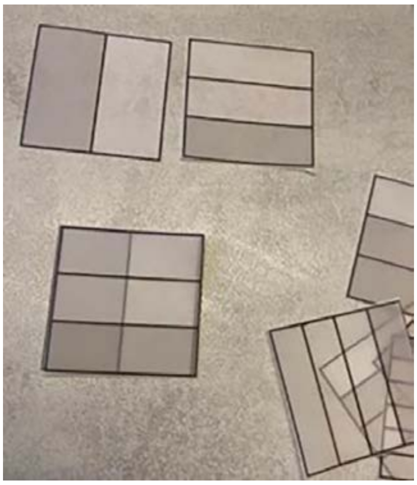


Figura 10. Carte trasparenti raffiguranti frazioni e un esempio di sovrapposizione.

La coppia che per prima scopre il procedimento ed esegue correttamente le moltiplicazioni, vince il gioco. Quest'attività viene utilizzata nella fase di costruzione della conoscenza relativa alla moltiplicazione di frazioni e vuole allenare il processo cognitivo promosso dal Piano di studio "Esplorare e provare", rendendo attivi gli allievi. Questi ultimi sono chiamati ad effettuare tentativi di sovrapposizione pertinenti per cercare di individuare la procedura di calcolo della moltiplicazione di frazioni.

Riscontro. Durante l'attività tutti gli allievi hanno lavorato con impegno, collaborando con il proprio compagno, anche gli allievi che solitamente sono più distratti e disinteressati. Analizzando le risposte date alla domanda di approfondimento si riscontra soddisfazione nel riuscire a scoprire la procedura di calcolo, curiosità e sorpresa nell'utilizzo del modello ad aree. L'attività delle carte trasparenti, grazie al confronto con il compagno di squadra e all'utilizzo degli artefatti, pare abbia permesso agli alunni di individuare autonomamente gli errori e di comprendere con maggiore facilità il senso della procedura.

4.6 Battaglia navale – 6ª attività

Descrizione e obiettivi. L'idea di progettare la battaglia navale relativa alle 4 operazioni tra frazioni è nata a seguito di una verifica formativa che ha messo in luce come molti allievi confondessero le operazioni (ad esempio risolvendo la somma tra frazioni applicando le regole della moltiplicazione) e avessero difficoltà a ridurre le frazioni ai minimi termini. L'attività è ispirata alla proposta *Battle my math ship* (Frederick, 2018). Questo gioco, utilizzato in fase di consolidamento come attività di recupero, ha come obiettivi: allenare le 4 operazioni con le frazioni in modo divertente e dare agli allievi un feedback immediato in modo da farli riflettere sui propri errori e diventare maggiormente consapevoli in merito al proprio processo di apprendimento. Si gioca a coppie, uno contro l'altro. Ogni giocatore ha 2 tabelle (Figura 11), le caselle della prima tabella indicano i risultati delle operazioni che dovrà risolvere l'avversario, su 10 di queste caselle può posizionare le proprie navi (6 singole, 2 doppie). Le caselle della seconda tabella contengono invece le operazioni che il giocatore dovrà risolvere per colpire e affondare le navi avversarie. Il giocatore che affonda tutte o il maggior numero delle navi dell'avversario viene proclamato vincitore (Allegato 7). Si gioca a turni. Durante il proprio turno, ogni giocatore sceglie una casella da attaccare, esegue l'espressione corrispondente nel foglio di lavoro e annuncia il risultato all'avversario. Se il risultato è corretto e sulla casella è presente una nave, essa è affondata o colpita. In caso contrario il giocatore che ha sbagliato può ritentare al turno successivo ma deve rivedere il calcolo e individuare i propri errori.

BARBAROSSA (girone 1)

Evidenzia 10 caselle, corrispondenti alle tue navi. Dopo che il tuo avversario ha indicato la casella da attaccare, se il risultato è corretto, fai una croce sulla casella e rivela se la nave è affondata o colpita o meno.

	A	B	C	D	E
1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{5}$
2	$\frac{41}{21}$	1	$\frac{9}{16}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{45}{2}$
3	$\frac{6}{35}$	$\frac{9}{20}$	1	14	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{7}$	2	$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{16}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{25}{2}$

Scegli la casella da attaccare, esegui l'espressione sul foglio di lavoro per sapere se hai colpito, affondato o meno la nave nemica.

	A	B	C	D	E
1	$\frac{1}{2}:\frac{3}{8}=$	$\frac{2}{7}\times\frac{7}{3}=$	$\frac{1}{12}:\frac{3}{8}=$	$\frac{2}{9}\times\frac{2}{3}=$	$\frac{24}{5}\times\frac{50}{12}=$
2	$\frac{2}{7}+\frac{7}{3}=$	$\frac{120}{2}:\frac{3}{20}=$	$\frac{6}{8}\times\frac{3}{120}=$	$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=$	$(-\frac{9}{6})\times(-\frac{1}{3})=$
3	$\frac{3}{5}:\frac{3}{2}=$	$(-\frac{2}{7})\times(\frac{2}{3})=$	$\frac{3}{2}:\frac{3}{2}=$	$\frac{12}{3}\times\frac{3}{54}=$	$\frac{1}{3}:\frac{6}{9}=$
4	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$	$\frac{20}{5}:\frac{5}{2}=$	$\frac{32}{10}\times\frac{5}{4}=$	$(-\frac{3}{7}):(\frac{6}{5})=$	$\frac{6}{8}\times\frac{5}{4}=$
5	$\frac{16}{2}\times\frac{1}{44}=$	$\frac{5}{20}+\frac{2}{5}=$	$\frac{1}{20}:\frac{1}{40}$	$\frac{2}{7}-\frac{2}{3}=$	$\frac{35}{27}:\frac{21}{36}=$

BARBANERA (girone 1)

Evidenzia 10 caselle, corrispondenti alle tue navi. Dopo che il tuo avversario ha indicato la casella da attaccare, se il risultato è corretto, fai una croce sulla casella e rivela se la nave è affondata o colpita o meno.

	A	B	C	D	E
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	20
2	$\frac{55}{21}$	400	$\frac{3}{160}$	-1	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{21}$	1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{5}$	4	$-\frac{5}{14}$	$\frac{15}{16}$
5	$\frac{2}{11}$	$\frac{13}{20}$	2	$-\frac{8}{21}$	$\frac{20}{9}$

Scegli la casella da attaccare, esegui l'espressione sul foglio di lavoro per sapere se hai colpito, affondato o meno la nave nemica.

	A	B	C	D	E
1	$\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=$	$(-\frac{2}{7})\times(\frac{7}{3})=$	$\frac{1}{12}:\frac{5}{8}=$	$\frac{2}{9}\times\frac{2}{5}=$	$\frac{24}{25}\times\frac{10}{6}=$
2	$\frac{2}{7}+\frac{5}{3}=$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=$	$\frac{6}{8}\times\frac{3}{4}=$	$\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=$	$\frac{150}{18}:\frac{30}{81}=$
3	$\frac{3}{5}:\frac{7}{2}=$	$(-\frac{6}{8})\times(-\frac{6}{10})=$	$\frac{3}{5}:\frac{3}{5}=$	$\frac{36}{12}\times\frac{28}{6}=$	$\frac{1}{3}:\frac{6}{3}=$
4	$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=$	$(-\frac{2}{7}):(\frac{2}{3})=$	$\frac{16}{10}\times\frac{5}{4}=$	$\frac{1}{3}:\frac{3}{5}=$	$\frac{6}{8}\times\frac{3}{4}=$
5	$\frac{13}{42}\times\frac{14}{26}=$	$\frac{3}{15}+\frac{1}{2}=$	$\frac{1}{42}:\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}-\frac{1}{3}=$	$\frac{25}{3}:\frac{10}{15}=$

Figura 11. Schede utilizzate dai due giocatori avversari nella battaglia navale di operazioni con le frazioni.

Riscontro. Non tutti gli allievi conoscevano il gioco, contrariamente alle aspettative dell'insegnante, situazione che ha inizialmente rallentato l'attività, decollata poi una volta compreso il meccanismo del gioco. La maggioranza degli allievi (10 su 11) ha segnalato che, grazie a questa attività, è riuscita a capire dove venivano commessi degli errori. Due allieve (A3, A9) si sono immedesimate a tal punto da dichiarare di essersi scordate di stare a scuola. Una di queste (A9), sebbene in difficoltà in ambito matematico, si è talmente concentrata da riuscire a risolvere correttamente la maggior parte delle operazioni e vincere il gioco. Si è dunque sentita competente e soddisfatta, condizione che raramente, nel suo caso, si realizza in una lezione tradizionale.

4.7 Gioco d'investigazione: Caso John Miller – 7ª attività

Descrizione e obiettivi. Il gioco di investigazione è stato utilizzato in fase di consolidamento dopo aver trattato gli argomenti dei diagrammi cartesiani, degli areogrammi e degli istogrammi. L'obiettivo di questa attività è allenare, in modo originale, la lettura dei grafici: riconoscere quali grandezze sono rappresentate, leggere la relazione funzionale che le lega e determinare le immagini di argomenti dati e viceversa.

Si vuole anche stimolare la riflessione negli allievi attraverso l'interpretazione degli indizi e l'analisi dei risultati, sviluppando così lo spirito critico e la ricerca della coerenza tra i dati matematici e la realtà. Il gioco prevede una narrazione iniziale: è stato commesso un delitto, gli allievi a coppie, come fossero squadre di poliziotti, devono scoprire l'orario del delitto, il principale sospettato e il movente. A supporto dell'indagine vengono forniti 5 indizi: grafici cartesiani che mostrano battiti cardiaci (Figura 12) e tracciati GPS, areogrammi e istogrammi relativi a miscele non ancora brevettate ecc. Per maggiori dettagli si rimanda all'Allegato 8.

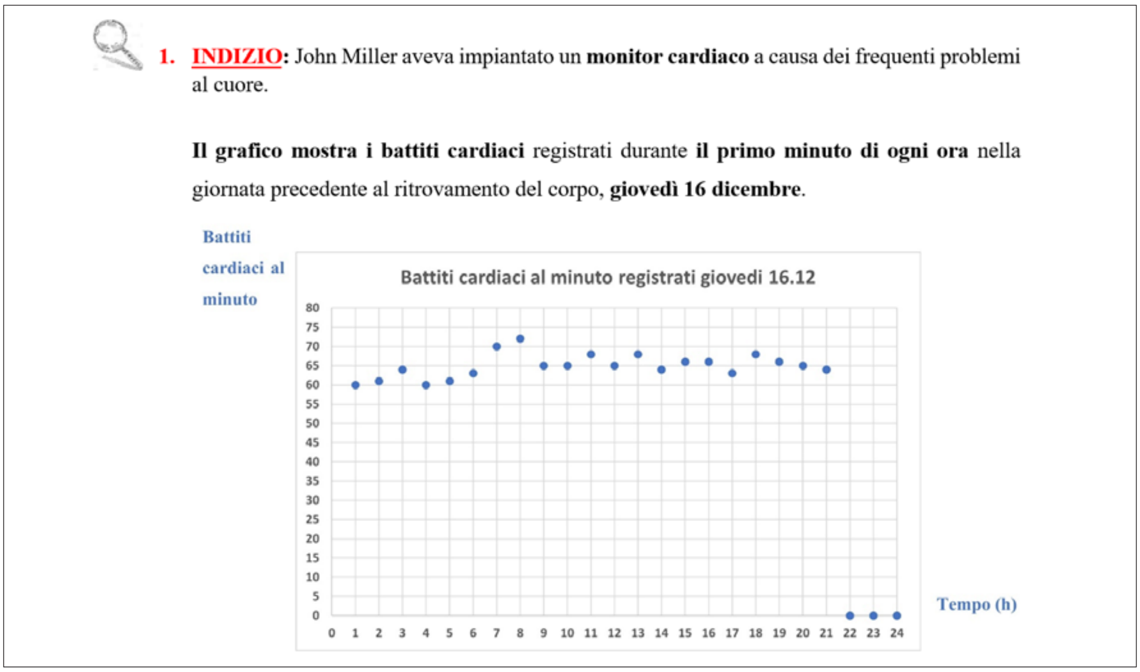


Figura 12. Primo indizio del gioco di investigazione "Caso John Miller": il grafico cartesiano dei battiti cardiaci.

Riscontro. Gli allievi hanno accolto con entusiasmo il caso poliziesco, tutti hanno partecipato attivamente. La scelta di allenare la lettura dei grafici attraverso un gioco di investigazione ha incuriosito quasi tutti gli allievi. La narrazione ha permesso a 2 allievi (A3, A7) di immedesimarsi a tal punto da "scordarsi di essere a scuola", come si può osservare dalle loro risposte (Figura 13). 5 allievi hanno provato soddisfazione a risolvere il caso e sono riusciti a comprendere meglio dove sbagliavano grazie al debriefing finale e al contesto reale che permetteva loro di validare la coerenza dei risultati trovati.

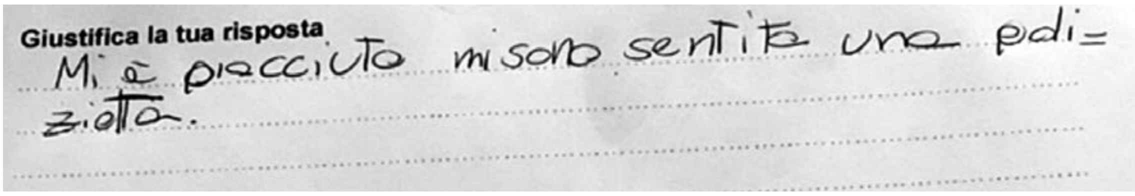


Figura 13. Risposta di A3 alla domanda di approfondimento dopo il gioco d'investigazione.

4.8 Escape room – 8ª attività

Descrizione e obiettivi. L'attività finale, conclusione riassuntiva del percorso didattico, vuole ripercorrere i principali argomenti trattati durante l'itinerario. Impiegata allo scopo di consolidare le conoscenze, rappresenta una sorta di verifica formativa svolta a squadre di 3-4 allievi. La scelta di progettare una escape room permette, grazie a una narrazione appropriata, di ideare enigmi coerenti con gli argomenti svolti. L'obiettivo è verificare la comprensione dei concetti chiave evitando la pressione della verifica tradizionale e la ripetitività delle esercitazioni classiche, coinvolgendo e attivando gli allievi il più possibile. L'escape room è ambientata in un paese di montagna, in inverno. I giocatori hanno una missione: in 50 minuti evitare che si verifichi una slavina provocata artificialmente e salvare il paese. Per compiere la missione devono risolvere 4 enigmi (2 uguali per tutte le squadre, 2 differenziati). Per maggiori dettagli sugli enigmi si rimanda all'Allegato 9. La risoluzione dell'ultimo quesito permette di disinnescare l'esplosivo ed evitare la valanga, ma per disinnescarlo occorre che tutte le squadre arrivino al termine.

Figura 14. In alto a sinistra: scatola contenente l'esplosivo chiusa da lucchetto hasp. In alto a destra: modello di drone ed enigma da risolvere. In basso: tre scatole contenenti modelli di drone e tre diversi enigmi da risolvere.

Riscontro. Tale struttura di gioco ha favorito non solo la collaborazione all'interno della singola squadra ma anche fra le squadre, soprattutto nel momento in cui hanno capito che per aprire il lucchetto finale erano necessarie le combinazioni trovate da tutti i concorrenti (Figura 14). Oltre alla curiosità suscitata, nessuno studente aveva mai partecipato a una escape room. La presenza di una narrazione e la missione da completare hanno coinvolto gli allievi facendoli immedesimare nella situazione, tanto che 6 di loro hanno dichiarato di essersi "scordati di stare a scuola".
Tra i principali effetti prodotti dall'attività vi è anche la soddisfazione per essere riusciti a sventare l'esplosione e il piacere di giocare in squadra con altri compagni. La fase di debriefing finale è stata fondamentale non solo per capire quali enigmi hanno trovato più difficili, ma anche per approfondire dubbi e comprendere gli errori commessi. Grazie al confronto finale e ai lucchetti, che durante il gioco fornivano una retroazione immediata in caso di errore, gli allievi hanno compreso dove sbagliavano e per quale motivo.

4.9 Analisi degli effetti prodotti dalle attività ludodidattiche

Considerando tutte le risposte alle domande di approfondimento è possibile osservare quali siano i principali effetti prodotti e come questi siano correlati alle diverse tipologie delle attività ludodidattiche. Curiosità e soddisfazione per essere riusciti a portare a termine il gioco sono gli effetti maggiormente ricorrenti. In tutte le attività ludodidattiche realizzate a coppie o piccoli gruppi è stata apprezzata la componente sociale perché ritenuta maggiormente motivante e al tempo stesso una modalità per comprendere i propri errori grazie al confronto e alla condivisione. L'effetto "mi ha permesso di capire dove sbagliavo" si è manifestato principalmente durante attività che integravano meccanismi autoregolativi quali le corrispondenze del puzzle, l'avanzare della navicella nell'attività "Space race" e i lucchetti nella escape room. Altri effetti rilevati dalle risposte alle domande di approfondimento, meno frequenti ma non per questo meno interessanti, sono: la scoperta di nuove competenze e una forte immedesimazione a tal punto da "scordarsi di essere a scuola" e dimenticarsi del contratto didattico, favorendo un'efficace devoluzione dell'attività da parte del docente e una più profonda implicazione dell'allievo nel compito da svolgere.

Attività quali la "Gara di stima" e il "Puzzle dei numeri razionali" richiedono competenze come la capacità di stima e la pianificazione, competenze che non frequentemente vengono richieste durante le attività didattiche tradizionali e che alcuni studenti hanno scoperto di avere attraverso il gioco.
Infine, è emerso come durante lo svolgimento di attività ludodidattiche caratterizzate da una parte narrativa più estesa, come il gioco di investigazione e l'escape room, devoluzione e implicazione siano stati favoriti in modo più forte grazie a una maggiore immedesimazione.

5 Cambio di convinzioni

Alla fine del percorso didattico è stato proposto un questionario simile a quello iniziale (Allegato 10) finalizzato a rilevare un possibile cambio di convinzioni sul ruolo delle attività ludodidattiche e ad avere dei feedback costruttivi per ottimizzare il percorso in futuro.
Le prime cinque domande sono esattamente le stesse del questionario iniziale in modo da poter osservare più facilmente un eventuale cambiamento di convinzioni in merito alla disciplina e alla valenza didattica e motivazionale delle attività ludodidattiche. Le ultime due domande, invece, sono di approfondimento e mirano a capire quali attività svolte sono risultate più motivanti e più efficaci per l'apprendimento rispetto ad attività di insegnamento tradizionali e per quale motivo.

Prima e seconda domanda. Le prime 2 domande, analogamente al questionario iniziale, sondano le convinzioni sulla disciplina e sul gioco. In entrambi i casi, confrontando le risposte ai due questionari si nota un cambio di convinzioni. In merito alla matematica, 8 studenti hanno scelto un numero maggiore di aggettivi con una connotazione positiva rispetto al questionario iniziale e 7 allievi (Figura 15) un numero minore di aggettivi con una connotazione negativa.

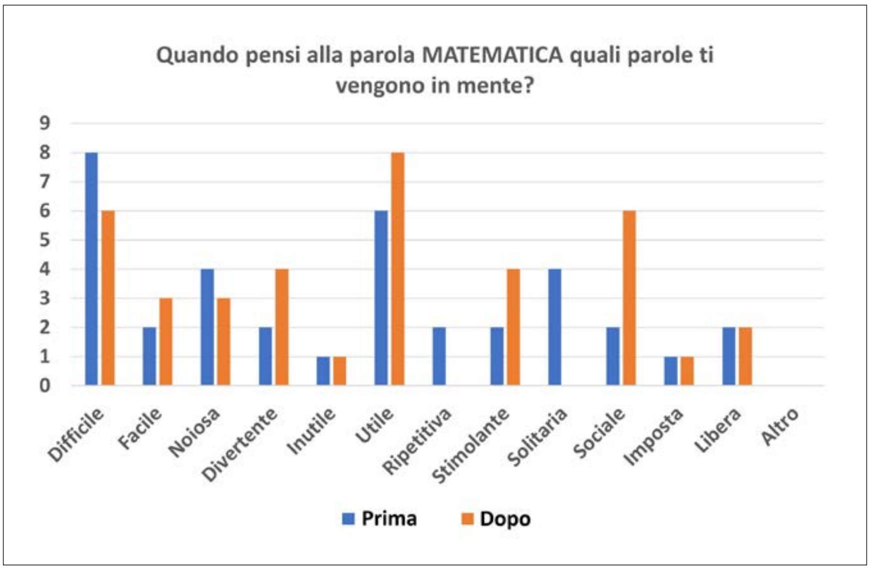


Figura 15. Confronto tra le risposte alla domanda 1 del questionario iniziale e di quello finale.

Questo cambio di convinzioni è probabilmente dovuto al fatto che tutti gli allievi, durante le attività del percorso, hanno apprezzato la possibilità di giocare in squadra con i propri compagni, situazione che ha influenzato positivamente motivazione e apprendimento grazie al confronto e all'autoregolazione.

Anche per quanto riguarda il gioco si osserva un cambio di convinzione (Figura 16): a fine percorso 2 allievi in più rispetto al numero iniziale ritengono "utile" il gioco perché ha avuto un effetto positivo sull'apprendimento destando maggiore curiosità, attenzione e impegno.

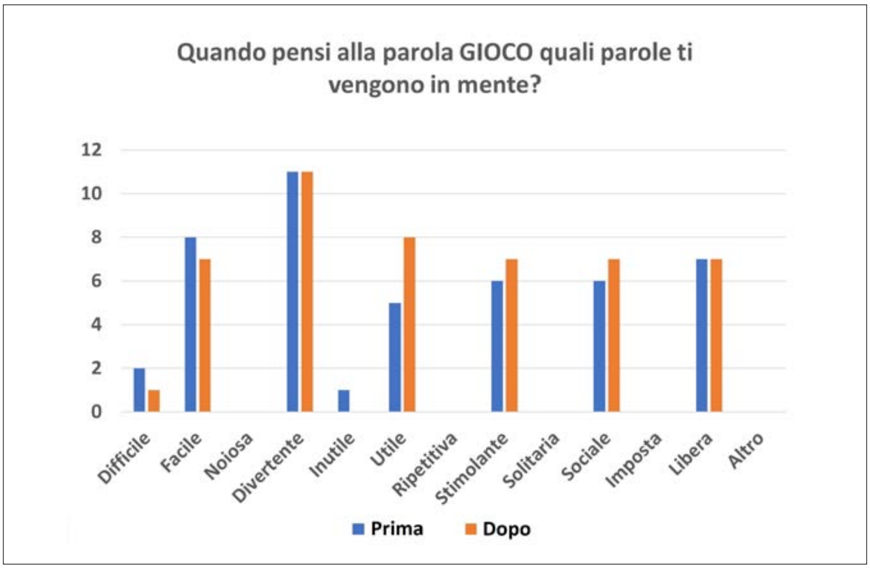


Figura 16. Confronto tra le risposte alla domanda 2 del questionario iniziale e di quello finale.

Terza, quarta e quinta domanda. Le domande centrali del questionario mirano a indagare il cambio di convinzioni degli allievi sul ruolo delle attività ludodidattiche. A seguito dell'intervento didattico si è verificato un cambio di convinzioni a favore delle attività ludodidattiche in termini di efficacia sia per l'apprendimento che per la motivazione. A fine percorso, 10 allievi su 11 ritengono possibile apprendere la matematica attraverso attività ludiche e le considerano più motivanti delle attività tradizionali; inizialmente erano 6 su 11. A fine percorso, 8 allievi su 11, ritengono le attività ludodidattiche più efficaci rispetto a quelle tradizionali; inizialmente 6 allievi su 11.
Un solo allievo nel questionario finale dichiara ancora di essere abbastanza in disaccordo con una maggiore efficacia delle attività ludodidattiche per l'apprendimento e di non essere né in accordo né in disaccordo rispetto a una maggiore motivazione. Tale allievo non ritiene le attività ludodidattiche più motivanti rispetto all'insegnamento tradizionale, in quanto sostiene che la risoluzione di un esercizio, o di un problema, sia motivante di per sé. Aspetto che, ovviamente, è da considerarsi molto positivo.

Sesta e settima domanda. Le ultime due domande mirano a capire quali, tra le attività svolte, sono risultate più motivanti e più efficaci per l'apprendimento e per quale motivo.
Per quanto riguarda la motivazione, nessuna attività emerge come particolarmente dominante, dipende dagli interessi e dalle predisposizioni dei singoli allievi. Dal punto di vista dell'apprendimento, sono ritenute più efficaci le attività che destano maggiore curiosità, che sono in grado di coinvolgere maggiormente gli allievi e di fornir loro feedback per comprendere i propri errori.
Le attività più motivanti risultano essere l'escape room e la battaglia navale, ed emerge una distribuzione abbastanza omogenea riguardo alle risposte alla sesta domanda a testimonianza del fatto che ogni allievo è motivato da fattori diversi (Figura 17).
Tra i fattori motivazionali, la curiosità è stata selezionata dalla maggioranza degli studenti (9 su 11), mentre 7 allievi su 11 hanno selezionato il divertimento, la collaborazione e il sentirsi capace.

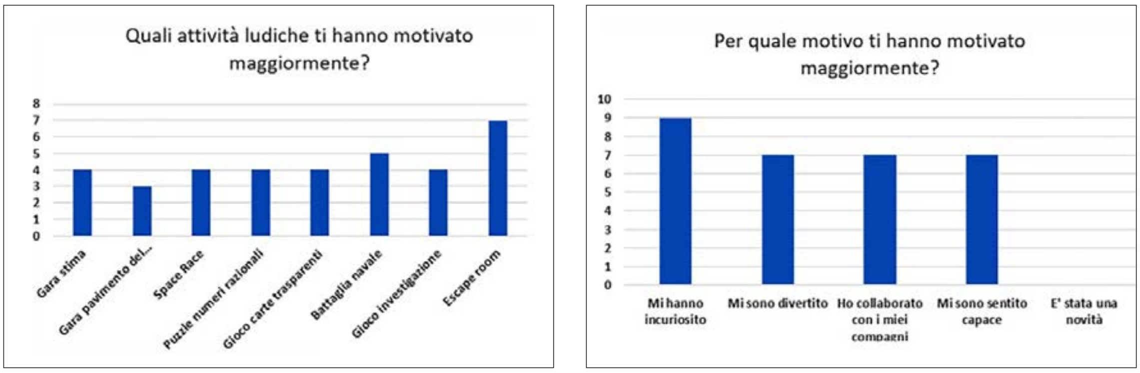


Figura 17. Risposte alla domanda 6 del questionario finale.

Un divario maggiore si nota rispetto alla scelta delle attività ludiche che hanno permesso di comprendere meglio un concetto matematico (Figura 18). L'escape room è al primo posto (8 su 11), seguita dal gioco di investigazione, dal gioco delle "Carte trasparenti" e dal "Puzzle dei numeri razionali" a pari merito (6 su 11). Le motivazioni principali per queste scelte riguardano il riuscire a capire dove si commettono gli errori e una maggiore attenzione suscitata dalla curiosità. Intervistando gli allievi è emerso chiaramente come il meccanismo autoregolativo del puzzle mettesse in evidenza gli errori e come l'utilizzo di artefatti nel gioco delle "Carte trasparenti" e nella escape room, insieme alla fase finale di debriefing, permettesse di comprenderli meglio.
Anche la curiosità (10 su 11 allievi) provata durante il gioco di investigazione ha permesso una maggiore concentrazione e comprensione dei concetti matematici.

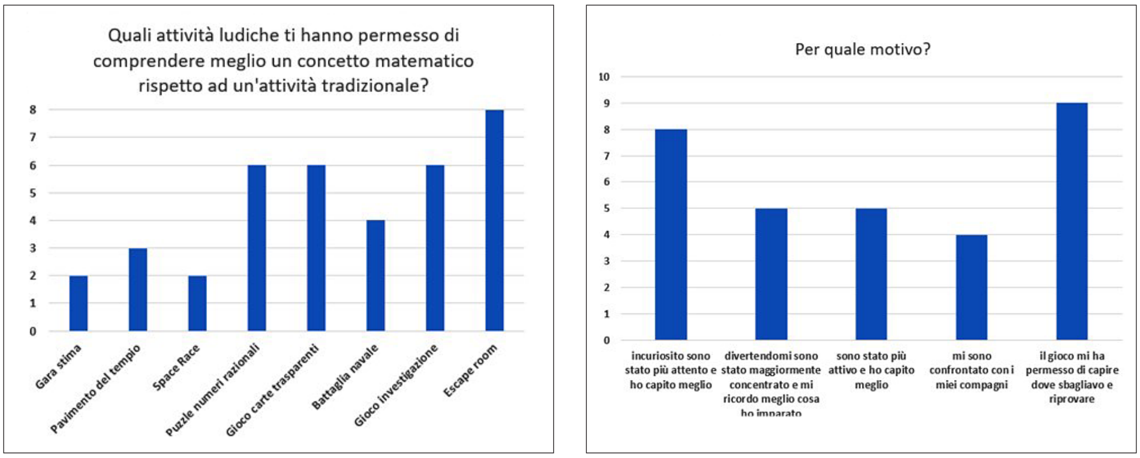


Figura 18. Risposte alla domanda 7 del questionario finale.

6 Conclusioni e possibili sviluppi

La maggioranza degli allievi ha accolto con entusiasmo e apprezzato le attività ludodidattiche proposte, partecipando più attivamente e prestando maggiore attenzione rispetto alla partecipazione e all'interesse mostrati durante le lezioni tradizionali. I giochi di squadra hanno favorito la collaborazione e il confronto, innescando un miglior clima di classe sebbene abbiano generato una gestione

più articolata e complessa per l'insegnante. Un altro aspetto positivo da sottolineare è che anche allievi con competenze più avanzate in matematica hanno scoperto di avere competenze trasversali funzionali al raggiungimento dell'obiettivo, rafforzando così il proprio senso di autoefficacia. La capacità di incuriosire e di fornire feedback immediati per comprendere gli errori, grazie ad artefatti e a meccanismi autoregolativi, sono stati effetti determinanti per rafforzare la convinzione in merito alla maggiore efficacia delle attività ludodidattiche rispetto ad attività standard. Il fatto che nessuna attività emerga come particolarmente dominante per la motivazione conferma l'ipotesi iniziale che questa dipenda dagli interessi e dalle predisposizioni dei singoli allievi, motivo per cui è importante variare le attività ludiche proposte in modo da riuscire a raggiungere i più disparati gusti personali.
Uno dei limiti principali di questa sperimentazione è il numero esiguo di allievi del campione di riferimento. Sarebbe più significativo proporre questo percorso a un numero maggiore di allievi di terza base, ma non solo, sarebbe interessante sperimentarlo anche in classi di terza attitudinale, magari modificando alcune attività e differenziandole per contenuti. Tale riflessione è nata dopo aver analizzato le risposte di A2, allievo che si ritiene abbastanza bravo in matematica, passato poi al corso attitudinale, il quale non ritiene le attività ludodidattiche più efficaci delle attività tradizionali e non ha cambiato idea dopo il percorso. Considerando la sua posizione ci si chiede quali potrebbero essere le convinzioni iniziali degli studenti di un corso attitudinale di terza media, se il percorso verrebbe apprezzato con lo stesso entusiasmo e se riuscirebbe a produrre eventuali cambi di convinzioni. Allo stesso tempo, potrebbe essere realizzato un percorso analogo in prima, seconda e quarta media per osservare come le convinzioni si modificano con il variare dell'età e delle esperienze degli allievi. Un altro grande limite è stato il tempo: sarebbe stato più significativo realizzare il percorso su tutto l'anno scolastico individuando degli indicatori per misurare l'efficacia per l'apprendimento e la motivazione, magari realizzando un gruppo di controllo e allargando così il campo di analisi. Il tempo ha rappresentato un limite non soltanto perché il percorso è stato realizzato in un intervallo circoscritto a causa del passaggio di 3 allievi al corso attitudinale, ma anche per la fattibilità della progettazione. Ogni attività ha richiesto ricerca, adattamento, inventiva che si è tradotta in ore di lavoro progettuale. Considerando possibili sviluppi futuri, un aspetto interessante da esplorare è l'interdisciplinarità, che implica uno studio più dettagliato dei programmi delle altre materie, una buona relazione con i colleghi e tempo aggiuntivo per la progettazione.
Questo percorso non solo permette di coinvolgere e motivare maggiormente gli allievi ma anche di sviluppare ascolto e osservazione da parte dell'insegnante, per identificare più puntualmente cosa faciliti l'apprendimento e di instaurare una relazione autentica con i propri studenti.

Bibliografia

Antognini, P., Boggian, M. G., Cometti, M., Kraft, F., & Piffaretti, L. (2007). Materiali per la matematica dei corsi base (3a classe). ScuolaLab: Il portale ticinese della didattica. http://www.scuoladecs.ti.ch/scuolamedia/materie/matematica/materiali-didattici/materiali-strutturati/Indice_GCB_0607.htm

Barbero, M. (2020). *Backward Reasoning in problem-solving situations: a multidimensional model.* Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Torino e Universidad Complutense de Madrid.

Botturi, L., & Betrus, A. (2010). Principles of using simulations and games for teaching. In A. Hirumi (Ed.), *Playing games in schools: Engaging learners through interactive entertainment* (pp. 33–56). International Society for Technology in Education, ISTE.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Síntesis.

de Guzmán Ozámiz, M. (1986). Juegos matemáticos en la enseñanza. In Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" (Eds.), *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 49–86). SCPM.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese. DECS. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds

Frank, M. L. (1985). What myths about mathematics are held and conveyed by teachers?. *Arithmetic teacher, 37*, 10–12.

Frederick, T. (2018, 24 gennaio). Battleship in math class. Algebra and beyond. https://www.algebra-and-beyond.com/blog/bringing-back-battleship

Gardner, M. (1989). *Mathematical Carnival*. The Mathematical Association of America.

Gómez-Chacón, I. M. (1992). Los juegos de estrategias en el curriculum de matemáticas. *Colleción Apuntes IEPS*, *55*. Narcea.

Iacopini, I. (2022). *Il ruolo delle attività ludodidattiche nella scuola media.* Tesi Master, Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://tesi.supsi.ch/4281/

Kiili, K. (2005). Digital game-based learning: Towards an experiential gaming model. *The Internet and Higher Education*, *8*(1), 13–24.

Krashen, S. D. (1982). *Principles and practice in second language acquisition*. Pergamon.

Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. In M. A. Mariotti (Ed.), *European Research in Mathematics Education III: Proceedings of Third conference of the European society for research in mathematics education.* University of Pisa and ERME.

Piaget, J. (1979). *Lo sviluppo della nozione di tempo nel bambino.* La nuova Italia.

Prensky, M. (2005). Computer games and learning: digital game-based learning. In J. Raessens & J. Goldstein (Eds.), *Handbook of computer games studies* (pp. 97–122). MIT Press.

Rudtke, D. (2021, 23 gennaio). Multiply Fraction with Area Models Print & Digital BUNDLE. *Teacherspayteachers*. https://www.teacherspayteachers.com/Product/Multiply-Fractions-with-Area-Models-Print-Digital-BUNDLE-6481923

Sbaragli, S., & Peres, E. (2021). Gioco e Matematica: un connubio per la mente, *Rivista Ticinese*, *340*: Anno L, Serie IV, 2, 29–36.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science*, *7*(4), 329–363. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0704_3

Vygotskij, L. S. (1981). Il ruolo del gioco nello sviluppo mentale del bambino. In J. S. Bruner, A. Jolly & K. Sylva (Eds.), *Il gioco. Il gioco in un mondo di simboli* (Vol. 4, pp. 657–678). Armando.

Wilson, M., & Cooney, T. J. (2002). Mathematics teacher change and development. The role of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (pp. 127–148). Kluwer.

Woolfolk, A. (2016). *Psicologie dell'educazione. Teorie, metodi, strumenti.* Pearson.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: Osservare, interpretare, intervenire.* Springer.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 135 - 156, DOI: 10.33683/ddm.23.13.7
OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Educare alla "matematizzazione e modellizzazione" attraverso l'uso delle rappresentazioni semiotiche nella scuola media

Mathematical modelling education based on the use of semiotic representations in lower secondary school

Maria Giuseppina Chiara Nestola
Scuola media Viganello – Svizzera

maria.nestola@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo descrive un'esperienza didattica svolta in una classe di quarta media attitudinale[1] con lo scopo di indagare le convinzioni e le competenze degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella comprensione e risoluzione di una situazione matematica. Il percorso didattico si compone di molteplici attività volte a stimolare l'uso di differenti registri semiotici (linguistico, numerico, algebrico e grafico) nell'attività di risoluzione di un problema. Gli allievi hanno partecipato con motivazione e interesse alle varie attività, apprezzando i relativi riferimenti al mondo reale. I risultati mostrano come accompagnare l'allievo a matematizzare situazioni attraverso la gestione di differenti rappresentazioni dello stesso oggetto matematico favorisca una comprensione più profonda del problema e un utilizzo più consapevole degli strumenti matematici necessari per la sua risoluzione.

Parole chiave: registri semiotici; rappresentazioni semiotiche; funzioni; problemi matematici; ciclo della matematizzazione.

1. In Canton Ticino a partire dalla terza media gli allievi vengono inseriti in corsi base e attitudinale in funzione delle competenze matematiche raggiunte alla fine della seconda.

Abstract / The article describes a didactic experience carried out in a 9th grade attitudinal class[1] and aims to investigate the students' beliefs and skills regarding the use of semiotic representations in understanding and solving a mathematical situation. The didactic path consists of multiple activities aimed at stimulating the use of a vast range of semiotic registers (linguistic, numerical, algebraic and graphic) in mathematical problem-solving activity. The students participated with motivation and interest in the various activities, appreciating the relative references to the real world. The results show how accompanying the student to mathematize situations through the management of different representations of the same mathematical object allows for a deeper understanding of the mathematical problem and a more conscious use of the mathematical tools necessary for its resolution.

Keywords: semiotic registers; semiotic representations; functions; mathematical problems; mathematization cycle.

1. In Canton Ticino starting from 8th grade the students are inserted into basic and attitudinal courses depending on the mathematical skills reached at the end of the 7th grade.

1 Le rappresentazioni semiotiche

Il ruolo fondamentale svolto dalla semiotica (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) nell'apprendimento e comprensione della matematica è stato esplicitato in diverse ricerche (D'Amore et al., 2013; Duval, 1993, 2006a, 2006b, 2008). In particolare, Duval (1993) sostiene che la caratteristica principale degli oggetti matematici è la loro inaccessibilità percettiva e strutturale: non è possibile fare alcuna esperienza diretta di un piano, un punto, un'equazione, un numero, una funzione. Di conseguenza, poiché ciò che è possibile vedere, toccare, manipolare sono solo le rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici cui ci si riferisce, in matematica la costruzione concettuale non può che essere strettamente legata alla capacità di gestire opportune rappresentazioni semiotiche dello stesso oggetto. Per Duval, quando si parla di registro semiotico ci si riferisce ad «un sistema di segni» che permette di «riempire le funzioni di comunicazione, trattamento e oggettivizzazione» (D'Amore, 2001, p. 155). Una rappresentazione semiotica è sempre prodotta all'interno di un registro semiotico e non è concepibile al di fuori di esso (Duval, 2008). Essa ha una struttura del tipo: {contenuto della rappresentazione (R), registro semiotico (r), oggetto rappresentato (O)}. Dato un oggetto matematico O, la sua rappresentazione richiede una scelta del registro semiotico. Tuttavia, non esiste la rappresentazione perfetta ed esaustiva di un oggetto matematico, in quanto ognuna ne esplicita una determinata qualità. È la molteplicità di rappresentazioni che consente una costruzione efficace di un oggetto matematico. Un esempio spesso utilizzato nella scuola media, riportato in D'Amore et al. (2013), riguarda l'oggetto matematico *quadrato di un binomio* la cui rappresentazione algebrica risulta essere $(a + b)^2$. Una possibile rappresentazione grafica, utilizzata dallo stesso Euclide, si compone di un quadrato avente lati lunghi $(a + b)$ come mostrato in Figura 1a. A questa rappresentazione si può aggiungere la scrittura algebrica, come riportato in Figura 1b.

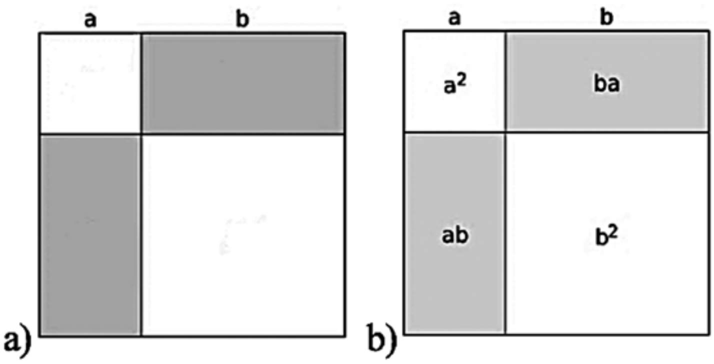


Figura 1. Rappresentazione grafica e algebrica del quadrato di un binomio.

Le due rappresentazioni dell'oggetto matematico *quadrato di un binomio* sono complementari.
La prima risulta una rappresentazione puramente algebrica, che talvolta porta gli allievi a dimenticare il doppio prodotto (scrivendo $(a + b)^2 = a^2 + b^2$); la seconda associa alla rappresentazione algebrica la corrispondente rappresentazione grafica che, dando una veste geometrica a tutti gli elementi dell'espansione algebrica, può rendere maggiormente evidente la relazione $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. L'inaccessibilità dell'oggetto matematico rende i processi cognitivi mobilitati nell'apprendimento della matematica strettamente dipendenti dalla capacità di scegliere un registro semiotico e di saper gestire quelle che sempre Duval chiama trasformazioni semiotiche. La scelta del registro, dunque, è determinante per garantire un'efficace costruzione di un oggetto matematico.
Secondo Duval (2006a) una rappresentazione è interessante solo se può essere trasformata in un'altra rappresentazione. Dal punto di vista cognitivo si possono distinguere due tipi di trasformazioni: trat-

tamento e conversione. Il trattamento è inteso come trasformazione tra due distinte rappresentazioni semiotiche all'interno dello stesso registro. Si riporta in **Figura 2** un esempio di trattamento dell'oggetto matematico *un mezzo*.

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

Figura 2. Trattamento nel registro numerico.

La conversione è invece una trasformazione tra due rappresentazioni semiotiche espresse in registri semiotici differenti. In **Figura 3** viene proposto un esempio di conversione dell'oggetto matematico *un mezzo* dal registro numerico a quello grafico-figurale.

Registro numerico: $\frac{1}{2}$

Registro grafico-figurale:

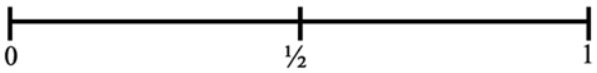


Figura 3. Conversione dal registro numerico al registro grafico-figurale.

La conversione tra due registri differenti può risultare difficile per l'allievo a causa delle differenze esistenti tra il registro di partenza e quello di arrivo. In tal caso, il ricorso a rappresentazioni ausiliarie che mescolano caratteristiche appartenenti al registro di partenza e di arrivo può facilitare il passaggio dall'uno all'altro (Iori, 2015). Si pensi, a titolo esemplificativo, a un'attività che richieda di descrivere una data situazione matematica attraverso una funzione. In questo caso, la tabella è una efficace rappresentazione ausiliaria che facilita la conversione dal registro linguistico del problema al registro algebrico e/o grafico con cui rappresentare la funzione.
L'esperienza didattica qui presentata si è proposta di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella comprensione e risoluzione di una situazione matematica. Per maggiori dettagli sul quadro teorico, sulle attività descritte e sull'analisi dei dati raccolti si rimanda al lavoro di tesi completo,[1] da cui è tratto il presente contributo.

2 Il ricorso alle rappresentazioni semiotiche nel processo di problem-solving

Il processo di problem-solving è complesso e legato a diversi fattori, sia interni al soggetto che apprende (di tipo cognitivo, emotivo e fisiologico) sia esterni, di tipo socioculturale. Nel processo risolutivo di un problema matematico, la conoscenza coinvolta è complessa e articolata e comprende

1. Lavoro di Diploma di Maria Giuseppina Chiara Nestola (2022), intitolato "Il ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione dei problemi", svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrici: Silvia Sbaragli, Marta Barbero. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: https://tesi.supsi.ch/4286/.

definizioni, procedure e competenze (Schoenfeld, 1992). Schoenfeld (1981) sostiene che un buon solutore di problemi è in grado di attuare precise decisioni strategiche sintetizzate in sette episodi: lettura, analisi, esplorazione, pianificazione, implementazione, verifica e transizione. Un buon solutore ottimizza la distribuzione del proprio lavoro, dedica molto tempo alla comprensione del testo e alla sua rappresentazione tramite disegni, grafici e schemi. Un solutore competente esplora differenti strategie prima di implementare quella più efficace alla risoluzione di un dato problema. Un cattivo solutore dedica poco tempo alla lettura, comprensione e rappresentazione del problema, dedicandosi principalmente all’implementazione di diversi tentativi.
Per la risoluzione di un problema matematico è, dunque, necessario che l’allievo sia in grado di individuare le informazioni utili, porsi domande, intuire, provare, pianificare, riflettere e analizzare il processo risolutivo e i risultati ottenuti, attuando una vera e propria riflessione e penetrazione nel problema matematico. Queste azioni rappresentano le tappe fondamentali di uno tra i processi cognitivi più importanti indicati nel Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese (Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015): “Matematizzare e modellizzare”. Tale processo si riferisce infatti «all’attività di organizzazione e analisi di qualsiasi situazione di realtà attraverso strumenti matematici, cioè alla traduzione, riorganizzazione e (ri)costruzione di un problema all’interno del contesto reale nel mondo simbolico» (Jupri & Drijvers, 2016, p. 2481, traduzione dell'autrice).
La risoluzione di un problema attraverso strumenti matematici richiede la traduzione del problema reale a problema in contesto matematico, la successiva risoluzione matematica del problema e l’interpretazione del risultato nel mondo reale. Questo approccio viene ben descritto nello schema del ciclo della matematizzazione delineato dall’indagine internazionale PISA (*Programme for International Student Assessment*), promossa dall’OCSE (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2016). I processi coinvolti nel ciclo sono *formulare*, *utilizzare*, *interpretare* e *valutare*, come riportato in Figura 4.
I processi *formulare* e *interpretare* costituiscono la matematizzazione orizzontale e fungono da ponte comunicativo tra il mondo reale e quello matematico. I processi *utilizzare* e *valutare* costituiscono la matematizzazione verticale, ovvero la capacità di applicare procedure e strategie all’interno dello stesso mondo, reale o matematico, verificandone l’uso in funzione del contesto (e la relativa possibilità di generalizzazione in contesti nuovi).

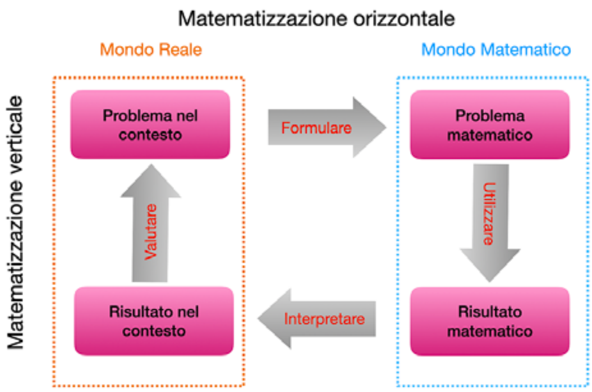


Figura 4. Il ciclo della matematizzazione (OECD, 2016).

Il processo di risoluzione di un problema consiste nella capacità di saper formulare, utilizzare, interpretare un modello matematico, valutandone la coerenza con la situazione matematica. Per poter risolvere un problema è necessario operare una variazione, ovvero una trasformazione che richiede il ricorso a uno o più registri semiotici (numerico, grafico, iconico, algebrico e/o geometrico). Le rappresentazioni semiotiche svolgono un ruolo fondamentale nell’attività di risoluzione di una situazione

matematica. Ricerche nell'ambito della didattica matematica (Clements, 1980; Demartini & Sbaragli, 2019; Salvisberg et al., 2019; Sbaragli & Franchini, 2018) dimostrano come le difficoltà degli allievi nella risoluzione dei problemi siano associate anche a carenze linguistiche, all'incomprensione del testo e alla difficoltà di trasformare la descrizione testuale del problema in un modello matematico, ossia al primo processo del ciclo di matematizzazione: *formulare*. Queste difficoltà risultano principalmente dovute all'incapacità di stabilire un collegamento tra linguaggio naturale e linguaggio specifico della matematica e di gestire le rappresentazioni semiotiche.
L'importanza delle trasformazioni semiotiche nei processi di problem-solving è stata evidenziata da diversi autori. Polya (1945), ad esempio, sostiene che «la variazione del problema è essenziale» e che il successo nella risoluzione del problema dipende dalla capacità dell'allievo di riconoscerne «il lato più accessibile» (Polya, 1945, p. 68, traduzione dell'autrice). A riguardo, un esempio classico è il calcolo della somma dei numeri naturali da 1 a n. La risoluzione del problema può essere affrontata seguendo diversi approcci che prevedono un ricorso a registri differenti, quali, ad esempio, il registro numerico e quello geometrico-figurale. Nel primo caso (**Tabella 1**) si può ricorrere all'uso di una tabella per rappresentare il calcolo che consente di ottenere il risultato desiderato.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Calcolo	$\frac{2 \cdot 1}{2}$	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	$\frac{4 \cdot 3}{2}$	$\frac{5 \cdot 4}{2}$	$\frac{6 \cdot 5}{2}$	$\frac{7 \cdot 6}{2}$	$\frac{8 \cdot 7}{2}$	$\frac{9 \cdot 8}{2}$	$\frac{10 \cdot 9}{2}$	…

Tabella 1. Somme parziali dei numeri naturali da 1 a 10.

Nel secondo caso la somma può essere rappresentata da un rettangolo, avente lati di dimensioni rispettivamente pari a (n+1) e n, la cui area restituisce esattamente il doppio della somma dei numeri naturali da 1 a n. In **Figura 5** viene riportata una rappresentazione geometrica figurale nel caso in cui $n = 6$.

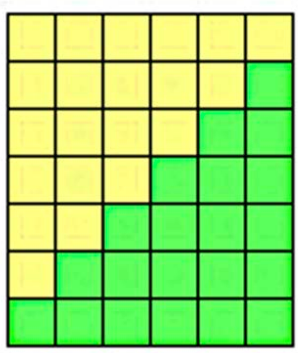


Figura 5. Rappresentazione geometrico-figurale della somma S_6 (De Petris, 2017).

Polya non è l'unico a interrogarsi sull'importanza di "variare" la presentazione del problema. Vygotskij (1978) riconosce nell'uso dei segni un elemento cruciale per l'attuazione di processi cognitivi in grado di orientare il comportamento dell'uomo. Per Vygotskij il segno è uno strumento dell'attività psichica paragonabile all'utensile nel lavoro. D'Amore et al. (2013) sottolineano come l'esplorazione delle strategie risolutive di un problema necessiti di una significativa gestione semiotica, il cui apprendimento rappresenta una tappa fondamentale nell'insegnamento della matematica. Duval (2011,

2013) sostiene che alcune difficoltà riscontrate dagli allievi nelle attività di problem-solving debbano essere ricondotte al mancato riconoscimento delle correlazioni esistenti tra i contenuti dei diversi registri semiotici coinvolti nella risoluzione del problema.
È fondamentale che la prassi didattica consenta agli allievi di appropriarsi della capacità di cambiare registro. Le capacità di conversione e trattamento devono essere opportunamente educate affinché l'allievo si appropri in modo consapevole delle diverse rappresentazioni semiotiche cogliendo i vantaggi e gli svantaggi di ciascuna a dipendenza della situazione matematica presentata. Rappresentazioni semiotiche distinte dello stesso oggetto matematico veicolano infatti contenuti differenti e la capacità di gestire più rappresentazioni dello stesso oggetto matematico può favorire una comprensione più profonda della situazione matematica, un utilizzo più consapevole degli strumenti matematici necessari per la sua risoluzione e una riflessione sulla plausibilità del risultato ottenuto e la sua coerenza con la situazione iniziale.

3 Metodologia

Viene presentata in questo articolo un'esperienza didattica che mira a supportare e analizzare il cambio di convinzioni e competenze nelle attività di problem-solving a seguito di un percorso che valorizzi l'uso delle rappresentazioni semiotiche. Il percorso didattico è stato svolto in una classe quarta (corso attitudinale) della scuola media di Chiasso composta da 19 allievi.
Il percorso si è articolato in tre fasi: nella prima fase è stato analizzato attraverso un questionario lo stato iniziale delle convinzioni e delle competenze degli allievi; nella seconda fase è stato proposto un percorso didattico centrato sull'uso delle diverse rappresentazioni semiotiche delle funzioni, durante il quale è stata valutata l'evoluzione delle competenze degli allievi; nella terza fase sono state analizzate le conseguenze del percorso sulle convinzioni degli allievi attraverso un questionario finale.
Più nello specifico, il questionario iniziale (Allegato 1) era composto di tre parti: la prima parte ha permesso di indagare le convinzioni degli allievi sull'uso delle rappresentazioni semiotiche nell'attività di risoluzione di un problema; la seconda parte ha consentito di indagare le capacità dell'allievo nell'utilizzo delle rappresentazioni semiotiche; la terza parte è stata tratta da Arrigo (2014) e ha consentito di indagare le capacità dell'allievo nell'utilizzo delle diverse rappresentazioni semiotiche nell'attività di risoluzione di un problema. Dall'analisi del questionario iniziale è emerso come la maggior parte degli allievi sottostimasse il contributo delle operazioni di conversione e trattamento alla comprensione di una situazione matematica e incontrasse difficoltà nell'uso delle rappresentazioni all'interno del ciclo della matematizzazione. Per tale motivo, è stato proposto un percorso didattico che stimolasse l'uso di diversi registri semiotici nell'attività di risoluzione di un problema. Sono state progettate sette attività (Allegato 2) attinenti principalmente agli ambiti "Funzioni" e "Numeri e calcolo" del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015). I principali registri coinvolti sono stati: il registro algebrico, il registro grafico, il registro numerico e il registro linguistico.
Con lo scopo di fornire un'analisi quantitativa delle competenze manifestate dai singoli allievi relativamente all'uso delle rappresentazioni semiotiche e dei livelli di padronanza attinenti ai processi attivati nel ciclo della matematizzazione e modellizzazione sono state progettate due griglie osservative (Griglia A e Griglia B nell'Allegato 3). L'impiego della Griglia A ha permesso di valutare le sole operazioni di trattamento e conversione. L'impiego della Griglia B ha consentito di valutare l'uso dei registri semiotici all'interno dei vari processi coinvolti nel ciclo della matematizzazione.
Infine, la prima parte del questionario iniziale è stata somministrata nuovamente al termine del percorso come questionario finale. Tale indagine ha permesso di identificare eventuali cambi di convinzioni degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche nell'attività di risoluzione di un problema.

4 Descrizione del percorso didattico

In questa sezione vengono presentate la descrizione del percorso didattico e l'analisi delle attività ritenute più significative. Nello specifico, nel par. 4.1 viene riportata una descrizione degli obiettivi e della struttura di ciascuna delle sette attività svolte in classe. Nell'Allegato 2 vengono riportati i dettagli di ciascuna attività: una tabella riassuntiva che presenta l'argomento, lo scopo, la descrizione dell'attività, i principali luoghi di difficoltà, i registri e i processi (trasformazioni) semiotici coinvolti, processi del ciclo della matematizzazione coinvolti, durata e modalità di lavoro; a seguire, viene riportata la scheda consegnata agli allievi con le specifiche consegne. Nel par. 4.2 vengono descritte le riflessioni emerse dall'analisi dei protocolli più significativi.

4.1 Descrizione delle attività

La *prima attività* ha riguardato il confronto tra due differenti offerte per il noleggio di uno scooter. Ciascuna delle due offerte poteva essere matematizzata con una funzione lineare. Agli studenti è stato chiesto dapprima di stilare una tabella che descrivesse la situazione proposta, poi di derivare la forma algebrica delle relazioni funzionali per rappresentare le singole offerte. A seguito di una messa in comune, che aveva lo scopo di stimolare una riflessione sulle differenti rappresentazioni semiotiche di una funzione, è stato richiesto di confrontare le due tariffe presentate in termini di convenienza economica, attraverso alcune domande stimolo. Si è infine proceduto con un'ulteriore messa in comune, che aveva l'obiettivo di stimolare un uso consapevole delle rappresentazioni semiotiche per interpretare e valutare la coerenza delle soluzioni ottenute.

La *seconda attività* ha richiesto all'allievo di confrontare tre tariffe per il roaming di dati in termini di convenienza economica. Lo scopo dell'attività è stato stimolare l'uso individuale e autonomo di tabelle e grafici per analizzare una situazione reale. L'attività ha previsto due differenti fasi di lavoro autonomo. Nella prima fase agli allievi è stato richiesto di utilizzare le rappresentazioni semiotiche che si ritenevano più adeguate a descrivere la situazione presentata. I registri più adottati sono stati: il registro numerico e grafico. Durante la messa in comune sono state confrontate le strategie risolutive emerse. Nella seconda fase, agli allievi è stato richiesto di rispondere ad alcune domande con lo scopo di stimolare i processi di interpretazione e valutazione dei risultati ottenuti.

La *terza attività* è stata presentata sotto forma di articolo di giornale da cui dedurre informazioni sui costi dell'autosilo di Lugano in due diverse fasce orarie: diurna e notturna. I costi di ciascuna fascia oraria potevano essere matematizzati con una funzione costante a tratti. L'attività ha previsto due fasi di lavoro. Nella prima fase di lavoro, la classe è stata suddivisa in due gruppi, A e B. Al gruppo A è stato richiesto di descrivere la situazione tramite una tabella; al gruppo B invece è stato chiesto di utilizzare una rappresentazione grafica. Durante la prima messa in comune è emerso come principale luogo di difficoltà la rappresentazione grafica della funzione discontinua. Nella seconda fase di lavoro, sono stati formati nuovi gruppi di tre/quattro allievi, due del gruppo A e uno/due del gruppo B, per favorire il confronto, l'interpretazione e la valutazione dei due differenti processi risolutivi tramite l'utilizzo di domande stimolo. Durante la messa in comune, che aveva lo scopo di confrontare le rappresentazioni tabulare e grafica, è emerso che per i due terzi degli allievi la tabella risultava lo strumento più utile e semplice da consultare.

La *quarta attività* ha tratto spunto da un compito di realtà della collana DeAScuola (2021) e ha richiesto di stabilire se fosse possibile suddividere in modo equo un numero dato di tavolini e coperti tra due differenti camerieri. L'attività poteva essere modellizzata tramite una equazione. Anche altre rappresentazioni semiotiche differenti da quella algebrica erano ammesse. Lo scopo dell'attività era stimolare l’utilizzo dei registri algebrico e numerico per descrivere una situazione matematica reale. La messa in comune è stata dedicata alla condivisone e al confronto delle diverse strategie risolutive impiegate per la rappresentazione e risoluzione della situazione matematica presentata.

La *quinta attività* ha previsto l’analisi e il confronto di due diverse tariffe per la ricarica di auto elettriche e l’identificazione di una terza tariffa sulla base di informazioni note. L’attività si componeva di due quesiti. Il primo quesito riguardava il confronto di due tariffe di differenti distributori di energia per auto elettriche. Il secondo quesito prevedeva la rappresentazione grafica di una terza tariffa sulla base di informazioni date. Tutte le tariffe proposte potevano essere modellizzate tramite due funzioni lineari. Agli allievi è stato richiesto di utilizzare i registri che ritenevano più opportuni per rappresentare la situazione presentata. La prima messa in comune è stata utilizzata per confrontare le varie strategie risolutive. Durante lo svolgimento del secondo quesito è emersa la difficoltà da parte degli allievi di individuare una strategia efficace per identificare la terza tariffa. È stata svolta, pertanto, una seconda messa in comune per supportare gli allievi nella decodifica del quesito e condividere i limiti e le potenzialità delle varie strategie risolutive adottate.

La *sesta attività* è stata tratta dalla Banca di problemi del Rally Matematico Transalpino (Associazione del Rally Matematico Transalpino, 2013). Il testo dell’attività richiedeva di calcolare le dimensioni della recinzione di un terreno di forma rettangolare. L’attività poteva essere modellizzata tramite una equazione. Gli allievi hanno avuto a disposizione il software GeoGebra. Nella lezione successiva sono state confrontate le strategie risolutive emerse.

La *settima attività* ha richiesto di ricavare le dimensioni di un contenitore ottenuto da un foglio di tetrapak ed è tratta da un esame del corso di Didattica disciplinare del Master. L’attività poteva essere modellizzata tramite una equazione. Gli allievi hanno avuto a disposizione il software GeoGebra. Durante la messa in comune sono state confrontate le varie strategie emerse.

La sesta e settima attività hanno previsto una modalità di lavoro individuale con lo scopo di indagare l’evoluzione delle competenze relative all’uso delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione di un problema al termine del percorso didattico.

4.2 Analisi di alcune attività

Qui di seguito vengono analizzati i protocolli più significativi della prima, quarta e sesta attività con lo scopo di evidenziare in che modo il percorso didattico abbia stimolato l’uso delle rappresentazioni semiotiche nell’attività di risoluzione di un problema e reso l’allievo un solutore più efficace e competente. Le tre attività sono analizzate in riferimento ai processi del ciclo della matematizzazione attivati in ciascuna di esse.

4.2.1 Analisi della prima attività

Relativamente al ciclo della matematizzazione, in questa attività vengono analizzati i processi:
– *utilizzare*: quando gli allievi stilano tabelle e grafici per rappresentare la situazione matematica;
– *interpretare* e *valutare*: quando si chiede agli allievi di verificare la plausibilità dei risultati ottenuti e la loro coerenza con la situazione proposta.

Sebbene la formulazione di un modello matematico sia sempre presente nell’attività di risoluzione del problema, si è ritenuto opportuno non analizzare il processo *formulare* in quanto guidato dall’intervento del docente.

In merito al processo *utilizzare*, circa un terzo degli allievi ha effettuato correttamente una conversione dapprima dal registro linguistico al registro numerico (rappresentazione tabulare) e successivamente dal registro numerico al registro algebrico, derivando la funzione che descrive la relazione tra la distanza percorsa e il costo totale. La tabella è stata, inoltre, utilizzata come rappresentazione ausiliaria nel passaggio dal registro algebrico a quello grafico, come emerge, ad esempio, nel protocollo in Figura 6.

OFFERTA SM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	0	30	48	90	120	150	180	1,20x

OFFERTA FM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	30	50	62	90	110	130	150	30+0,80x

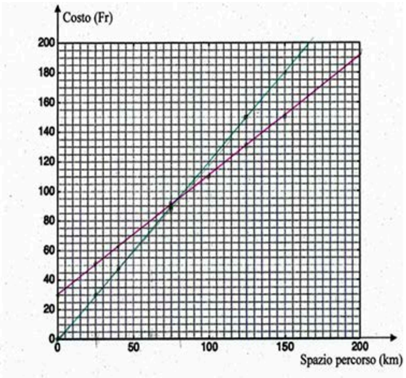


Figura 6. Esempio di conversione nel registro grafico utilizzando la tabella come rappresentazione ausiliaria.

Circa due terzi degli allievi hanno compiuto errori di trattamento e conversione. Nello specifico, gli errori sono stati di due tipologie. La prima ha riguardato la decodifica del testo e la conversione nel registro numerico (rappresentazione tabulare). Ad esempio, nel protocollo mostrato in Figura 7 l’allievo dimentica di aggiungere la quota fissa in tutti i calcoli numerici successivi al primo e così anche nel registro algebrico quando scrive la funzione che esprime la relazione tra costo e distanza percorsa secondo l’offerta FM.

OFFERTA SM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	0	30	48	90	120	150	180	1,20·x

OFFERTA FM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	30	20	32	60	80	100	120	(0,80x)

Figura 7. Protocollo di un allievo che compie un errore di decodifica nella conversione dal registro linguistico al registro numerico.

La seconda, invece, ha riguardato errori di conversione dal registro numerico impiegato per stilare la tabella a quello grafico impiegato per rappresentare le due funzioni associate alle due tariffe nel diagramma cartesiano, come emerge dai due protocolli mostrati in Figura 8.

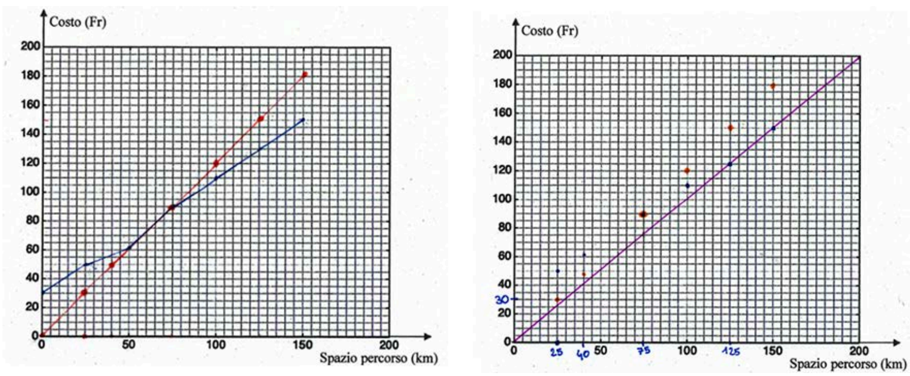
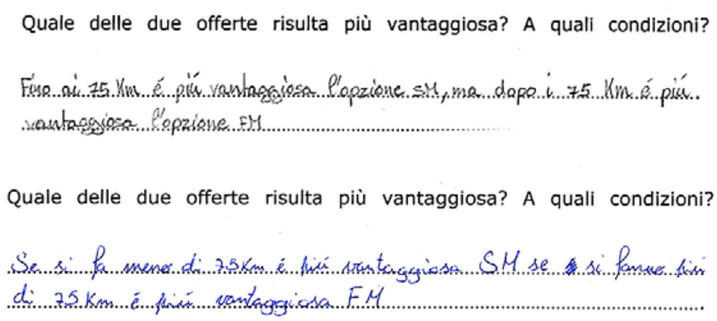


Figura 8. Protocolli di due allievi che compiono un errore di conversione dal registro numerico al registro grafico.

I processi *interpretare* e *valutare* sono stati analizzati sulla base della risposta al quesito «Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?» presentato nella seconda fase della prima attività. Dall'analisi dei protocolli emerge che circa un quarto degli allievi ha commentato in modo completo e dettagliato la convenienza in termini economici delle due tariffe di noleggio dello scooter presentate nell'attività. Due esempi sono riportati in Figura 9.


Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

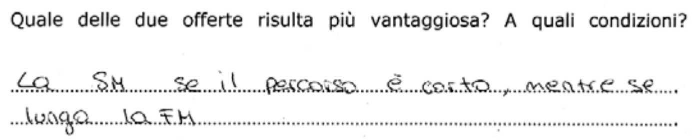
Fino ai 75 Km è più vantaggiosa l'opzione SM, ma dopo i 75 Km è più vantaggiosa l'opzione FM

Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

Se si fa meno di 75Km è più vantaggiosa SM se si fanno più di 75 Km è più vantaggiosa FM

Figura 9. Due protocolli con descrizione del confronto tra le due tariffe.

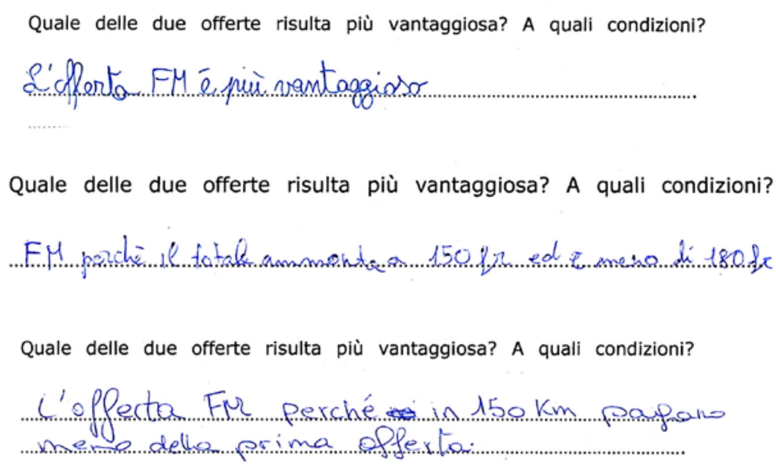
Due terzi degli allievi hanno fornito risposte incomplete o errate dimostrando una riflessione superficiale sui risultati ottenuti e la difficoltà di identificare tutte le possibili informazioni che le rappresentazioni di una funzione forniscono. La Figura 10 riporta, ad esempio, il protocollo di un allievo che confronta la convenienza economica delle due tariffe senza precisare la distanza che rende l'una più vantaggiosa dell'altra.


Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

La SM se il percorso è corto, mentre se lungo la FM

Figura 10. Protocollo di un allievo che propone una descrizione corretta ma poco precisa.

La Figura 11 riporta i protocolli di tre allievi: nel primo e nel secondo protocollo si nota come i due allievi considerino vantaggiosa l'offerta che consente di spendere meno sulle lunghe distanze; il terzo protocollo mostra come l'allievo non fornisca alcuna argomentazione in merito alla propria scelta.


Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

L'offerta FM è più vantaggiosa

Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

FM perchè il totale ammonta a 150 fr ed è meno di 180 fr

Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

L'offerta FM perché in 150 Km pagano meno della prima offerta.

Figura 11. Protocolli di tre allievi che forniscono una descrizione superficiale della situazione presentata nella prima attività.

4.2.2 Analisi della quarta attività

I processi del ciclo della matematizzazione analizzati in questa attività sono:

– *formulare*: agli allievi è richiesto di identificare variabili significative, riconoscere la struttura geometrica del problema e decodificare il testo in un modello matematico;
– *utilizzare*: gli allievi devono utilizzare i registri scelti per produrre una risposta al problema presentato;
– *interpretare* e *valutare*: gli allievi devono verificare la coerenza dei risultati ottenuti con la situazione presentata, individuare eventuali limiti e le potenzialità delle strategie adottate.

In merito al processo *utilizzare*, circa la metà degli allievi ha utilizzato in modo autonomo, e senza compiere errori, le operazioni di trattamento e conversione coinvolte nella strategia scelta. La maggior parte degli allievi che hanno individuato una strategia risolutiva efficace e fornito una risposta coerente con la situazione presentata ha utilizzato il registro algebrico, come mostrato, ad esempio, nel protocollo in Figura 12.

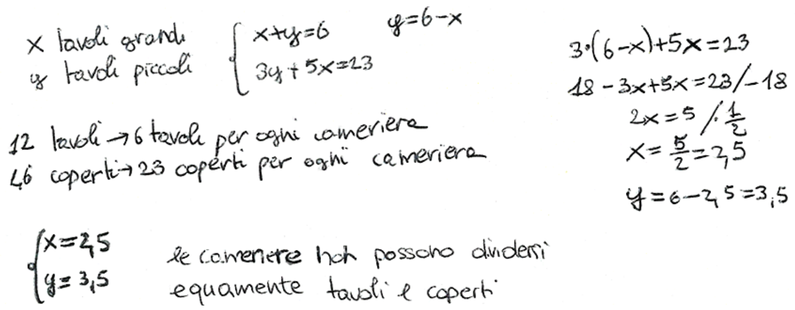


Figura 12. Protocollo di un allievo che converte correttamente il registro linguistico nel registro algebrico.

Oltre al registro algebrico, un altro registro adottato è stato quello iconico come mostrato, ad esempio, nel protocollo in Figura 13. In questo caso, l'uso del registro iconico fornisce una rappresentazione efficace e immediata della situazione matematica. L'analisi del protocollo dimostra, inoltre, come l'allievo sia in grado di riflettere e interpretare in modo corretto la propria strategia risolutiva.

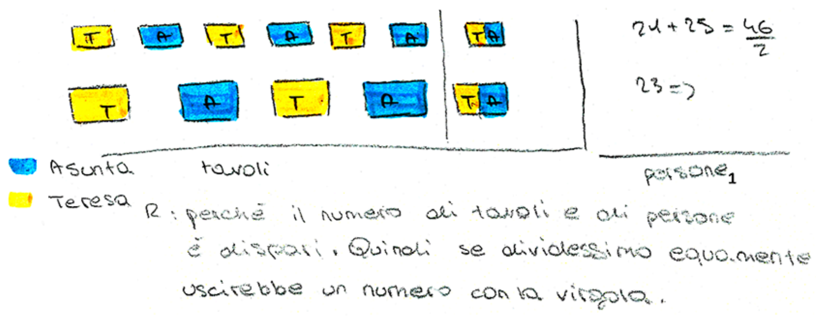


Figura 13. Protocollo di un allievo che converte il testo nel registro iconico.

I principali errori emersi durante lo svolgimento dell'attività sono stati errori di conversione e trattamento. Ad esempio, la Figura 14 mostra il protocollo di un allievo che attribuisce erroneamente a ciascuna cameriera il numero totale di tavolini. Il sistema algebrico, pertanto, non rappresenta una matematizzazione e modellizzazione coerente con la situazione proposta. Il risultato ottenuto è un valore negativo che non risulta plausibile sulla base delle condizioni fornite dal problema. L'allievo dimostra, inoltre, di non attivare i processi *interpretare* e *valutare* e di non verificare che il processo risolutivo abbia senso nel contesto reale di partenza.

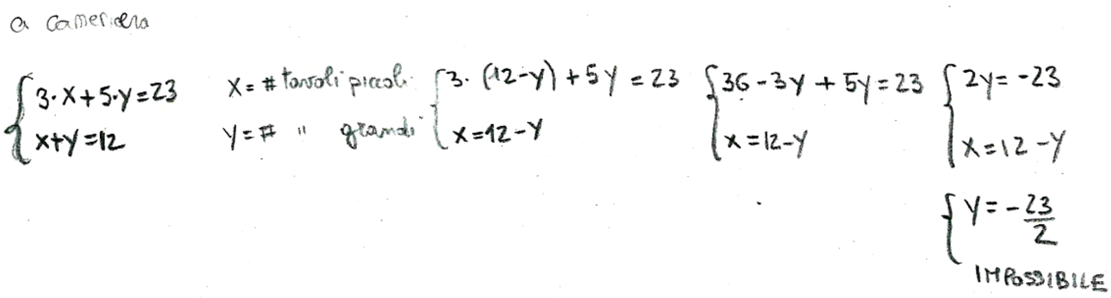


Figura 14. Protocollo di un allievo che compie errori di decodifica nella conversione dal registro linguistico al registro algebrico.

Nel protocollo riportato in Figura 15 l'allievo decodifica correttamente il testo utilizzando rappresentazioni linguistiche e iconografiche ausiliarie. L'analisi del protocollo mostra come l'allievo compia alcuni errori di trattamento nel registro algebrico, utilizzando in modo errato le proprietà delle operazioni aritmetiche nella risoluzione del sistema di equazioni. Tuttavia, la soluzione trovata risulta plausibile con la situazione presentata. In questo caso, riflettere sul significato di soluzione di un sistema di equazioni avrebbe potuto consentire all'allievo di effettuare le opportune retroazioni correttive in modo autonomo.

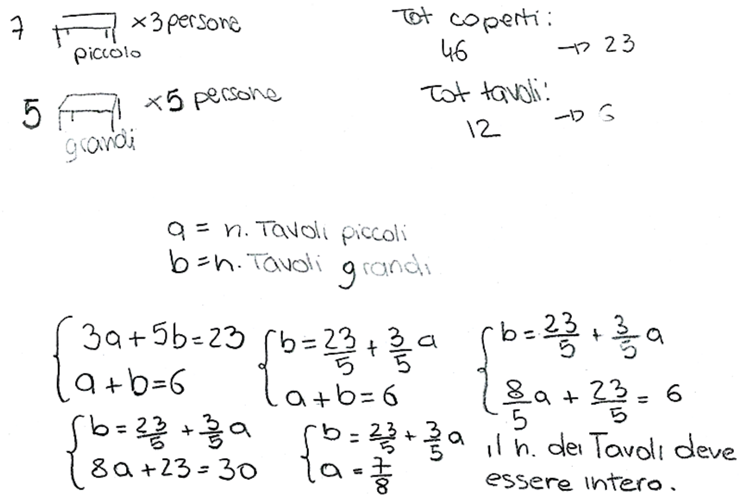


Figura 15. Protocollo di un allievo che compie errori di trattamento nel registro algebrico.

In merito ai processi *interpretare* e *valutare* circa la metà degli allievi ha interpretato il risultato in modo coerente rispetto alla situazione posta, rendendosi conto che la richiesta del problema non poteva essere soddisfatta. Alcuni degli allievi che hanno compiuto errori di conversione dal registro linguistico al registro algebrico non hanno verificato che la coppia di valori numerici fosse soluzione del sistema di equazioni e non hanno effettuato alcuna retroazione sulla strategia adottata.

4.2.3 Analisi della sesta attività

I processi del ciclo della matematizzazione analizzati in questa attività sono gli stessi menzionati nell'analisi dell'attività precedente. Dall'analisi dei protocolli emerge che circa i due terzi degli allievi ha formulato una strategia risolutiva in modo autonomo, dimostrando una adeguata comprensione del testo del problema. Circa un quinto degli allievi ha compiuto errori di decodifica dovuti ad una errata comprensione della situazione proposta.

Per quanto riguarda il processo *utilizzare*, circa metà degli allievi ha utilizzato in modo autonomo e corretto le operazioni di trattamento e conversione coinvolte nella strategia scelta. Un terzo degli allievi ha compiuto errori di conversione e/o trattamento. A tal proposito, la **Figura 16** riporta il protocollo con un errore di decodifica. L’allievo suppone di dover recintare tutti i lati del terreno, ignorando la presenza di una preesistente recinzione menzionata nel testo del problema e rappresentata nell’immagine ad esso associata.

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ y = \frac{40}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + x + y + y = 20 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

$$10 - x = \frac{40}{x}$$
$$x(10-x) = \frac{40}{x} \cdot x$$
$$10x - x^2 = 40$$
$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Figura 16. Protocollo di un allievo che compie un errore di decodifica nella conversione dal registro linguistico al registro algebrico.

In **Figura 17** si mostra il protocollo di un allievo che matematizza e modellizza la situazione descritta nel testo del problema tramite l’impiego di un sistema di due equazioni in due incognite (*b* e *a*). Le operazioni di trattamento compiute nel registro algebrico dimostrano come l’allievo abbia riconosciuto in ciascuna delle due equazioni una funzione reale (f_1: $b \rightarrow 20 - 2b$ e f_2: $b \rightarrow \frac{40}{b}$) cui è associato un campo di esistenza ($\mathbb{R}$ per la prima funzione e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per la seconda funzione) che non è specificato con la dovuta precisione. Il protocollo mostra, inoltre, come l’allievo converta una rappresentazione nel registro algebrico in una rappresentazione nel registro grafico, individuando tutte le possibili soluzioni del sistema di equazioni.

$$\begin{cases} a \cdot b = 40 \\ a + 2b = 20 \end{cases}$$

$a = \frac{40}{b}$ $\quad a = 20 - 2b$ $\quad b \neq 0$

$a = 20 - 2b$

$A = (2,8 ; 14,5)$

$B = (7,2 ; 5,5)$

I grafici si intersecano nei punti A e B

le dimensioni del terreno sono

$a \simeq 14,5$ m $\quad b \simeq 2,8$ m

$a \simeq 5,5$ m $\quad b \simeq 7,2$ m

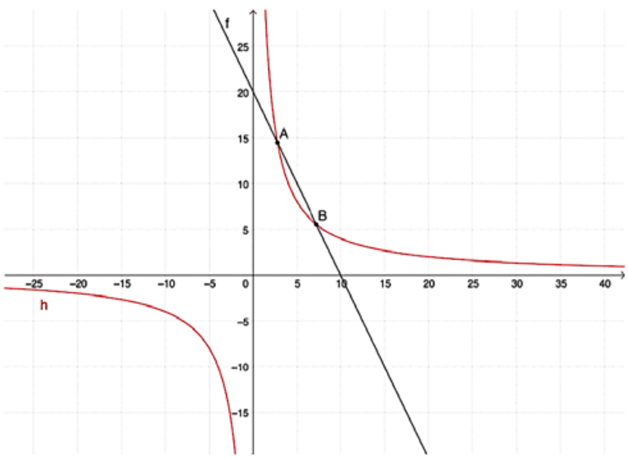


Figura 17. Protocollo di un allievo che utilizza correttamente i registri algebrico, numerico e grafico.

La **Figura 18** e la **Figura 19** mostrano due protocolli in cui il testo del problema è stato correttamente decodificato nel registro algebrico tramite l’impiego di un sistema di equazioni in due variabili (*x* e *y*).

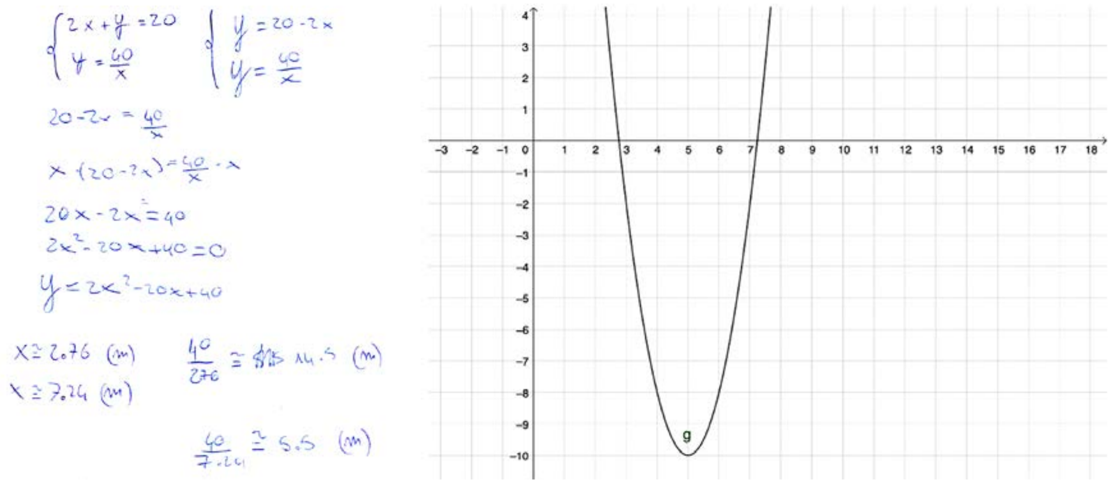


Figura 18. Protocollo di un allievo che dimentica di identificare il valore eccezionale della equazione in una sola variabile risultante dalle operazioni di trattamento nel registro algebrico.

Le differenze di trattamento operate nel registro algebrico dai due allievi conducono a due differenti equazioni in una sola incognita di cui solo l’allievo del protocollo riportato in Figura 19 identifica correttamente il valore eccezionale (x = 0). In entrambi i protocolli, infine, la strategia risolutiva prevede la conversione del registro algebrico nel registro grafico. Le rappresentazioni mostrate in Figura 18 ed in Figura 19 sono differenti, ma coerenti con la situazione descritta nel testo del problema e le operazioni di trattamento effettuate dai due allievi durante l’implementazione della strategia risolutiva. Nello specifico, nel protocollo in Figura 18 l’allievo individua graficamente gli zeri della funzione $x \to 2x^2 - 20x + 40$.

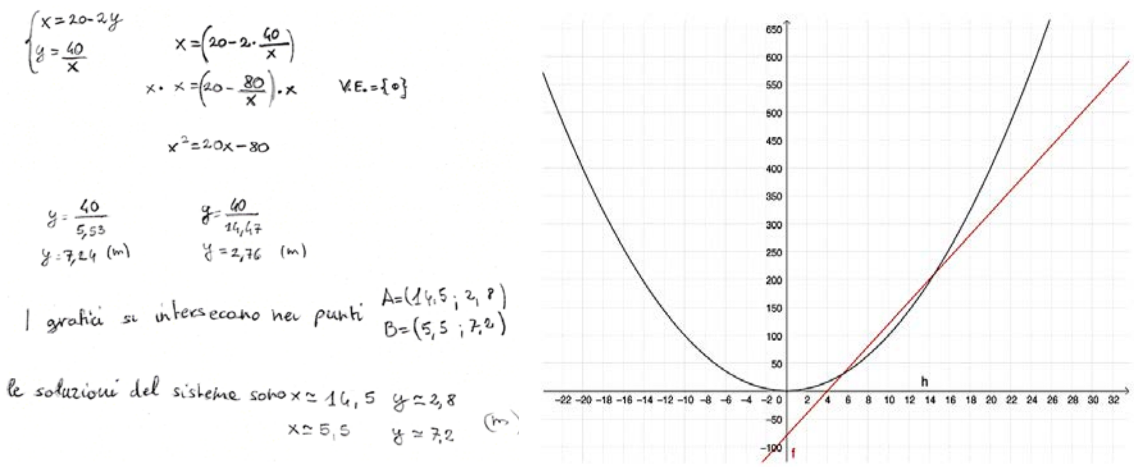


Figura 19. Protocollo di un allievo che utilizza correttamente i registri algebrico, numerico e grafico.

Nel protocollo in Figura 19 l’allievo identifica graficamente le coppie di valori in cui le funzioni reali f_1: $x \to x^2$ e f_2: $x \to 20x - 80$ assumono la stessa immagine. Infine, le risposte riportate nei due protocolli consentono di verificare come entrambi gli allievi attivino in modo adeguato tutti i processi coinvolti nel ciclo della matematizzazione.

La Figura 20 invece mostra il protocollo di un allievo che, dopo aver decodificato il testo del problema correttamente, cerca le soluzioni dell’equazione risultante per tentativi senza tuttavia riuscire a individuare le possibili soluzioni del problema. Durante la messa in comune (svolta nella lezione successiva) si è, pertanto, ritenuto opportuno confrontare le varie strategie emerse mettendo in luce i limiti e le potenzialità di ciascuna di esse.

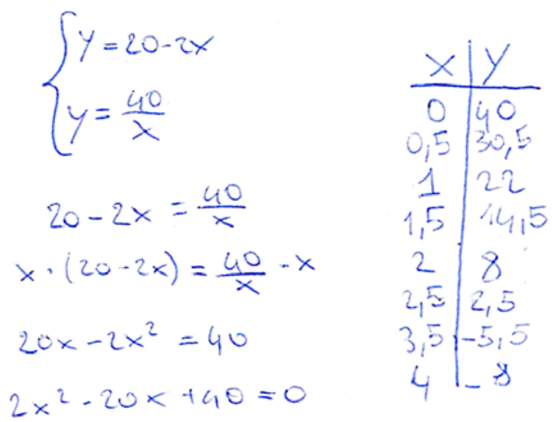


Figura 20. Protocollo di un allievo che procede per tentativi nella ricerca della soluzione del sistema di equazioni.

Riguardo ai processi *interpretare* e *valutare*, circa i tre quarti degli allievi ha interpretato correttamente il risultato assegnando al terreno tutte le possibili dimensioni che il rettangolo poteva assumere. Circa i due quinti degli allievi hanno, inoltre, verificato che i risultati ottenuti fossero soluzione del sistema algebrico che matematizzava la situazione presentata. Circa un quinto degli allievi ha ipotizzato che la "base" del rettangolo dovesse possedere misura maggiore della sua "altezza", individuando una sola soluzione del problema.

5 Evoluzione delle competenze

In questo paragrafo viene analizzata l'evoluzione delle competenze degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche all'interno del ciclo della matematizzazione. Nello specifico, viene presentato un confronto tra la terza parte del questionario iniziale e la settima attività svolta all'interno del percorso. Usando la Griglia A e la Griglia B (Allegato 3), ad ogni allievo è stato attribuito un livello che poteva variare tra avanzato, intermedio e parziale: il livello avanzato prevedeva autonomia e correttezza nell'uso delle strategie scelte; il livello intermedio prevedeva un lavoro autonomo con la presenza di errori; il livello parziale comportava l'intervento del docente a supporto dell'allievo.
La Figura 21 e la Figura 22 riportano i due diagrammi a barre ottenuti analizzando la terza parte del questionario iniziale tramite le Griglie A e B. Dal diagramma in Figura 21 emerge come nella fase iniziale del percorso la maggior parte degli allievi fosse in grado di identificare varie rappresentazioni di uno stesso oggetto matematico. Tuttavia, il diagramma in Figura 22 evidenzia la difficoltà da parte degli allievi di dare un senso a tali rappresentazioni all'interno del ciclo della matematizzazione. Solo due allievi sono stati in grado di utilizzare correttamente le rappresentazioni semiotiche per risolvere la situazione matematica presentata.

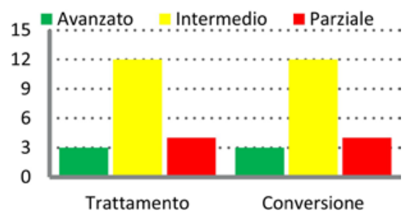


Figura 21. Diagramma a barre delle trasformazioni semiotiche relative al questionario iniziale ottenuto tramite l’impiego della Griglia A.

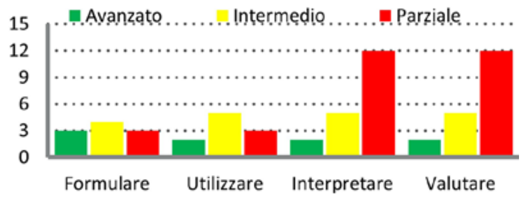


Figura 22. Diagramma a barre dei processi attivati nella risoluzione del questionario iniziale ottenuto tramite l’impiego della Griglia B.

I diagrammi a barre riportati in **Figura 23** e **Figura 24** si riferiscono all’analisi della settima attività. Dal grafico in **Figura 23** emerge come la maggior parte degli allievi abbia raggiunto un livello avanzato/intermedio nell’uso delle operazioni di trattamento e conversione coinvolte nella risoluzione di un’attività matematica. Il diagramma in **Figura 24** evidenzia come circa la metà degli allievi abbia raggiunto un livello avanzato nell’uso dei registri semiotici all’interno del ciclo della matematizzazione. Circa un terzo degli allievi dimostra, invece, di saper utilizzare le rappresentazioni semiotiche in modo consapevole e adeguato, seppur compiendo errori di conversione e trattamento.

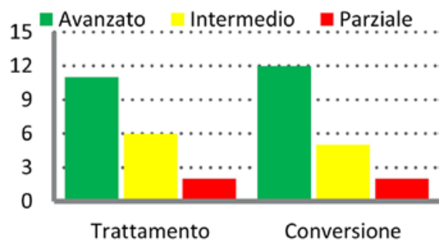


Figura 23. Diagramma a barre delle trasformazioni semiotiche relative alla settima attività ottenuto tramite l’impiego della Griglia A.

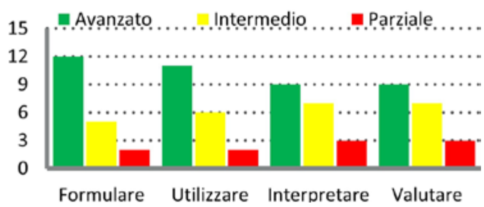


Figura 24. Diagramma a barre dei processi attivati nella risoluzione della settima attività ottenuto tramite l’impiego della Griglia B.

Il confronto dei grafici relativi al questionario iniziale (**Figure 21-22**) con i diagrammi ottenuti dall’analisi dell’ultima attività (**Figure 23-24**) evidenzia come, al termine del percorso, la maggior parte degli allievi sia in grado di identificare le rappresentazioni semiotiche più efficaci alla comprensione e risoluzione di un problema. È possibile, dunque, ipotizzare che il percorso didattico abbia reso gli allievi più consapevoli del ruolo svolto dalle rappresentazioni semiotiche e del significato che esse veicolano all’interno del ciclo della matematizzazione.

6 Cambi di convinzioni

Di seguito vengono descritti i cambi di convinzione attinenti all'aspetto linguistico, all'aspetto strategico e all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione di problemi matematici. Si ricorda che le domande analizzate sono quelle della prima parte del questionario in Allegato 1 e che un'analisi completa dei dati raccolti è disponibile nel lavoro di tesi completo (Nestola, 2022).

6.1 Aspetto linguistico

La Figura 25 presenta il confronto tra i diagrammi a barre riguardanti le convinzioni iniziali e finali relativamente all'aspetto linguistico nella risoluzione di problemi matematici.

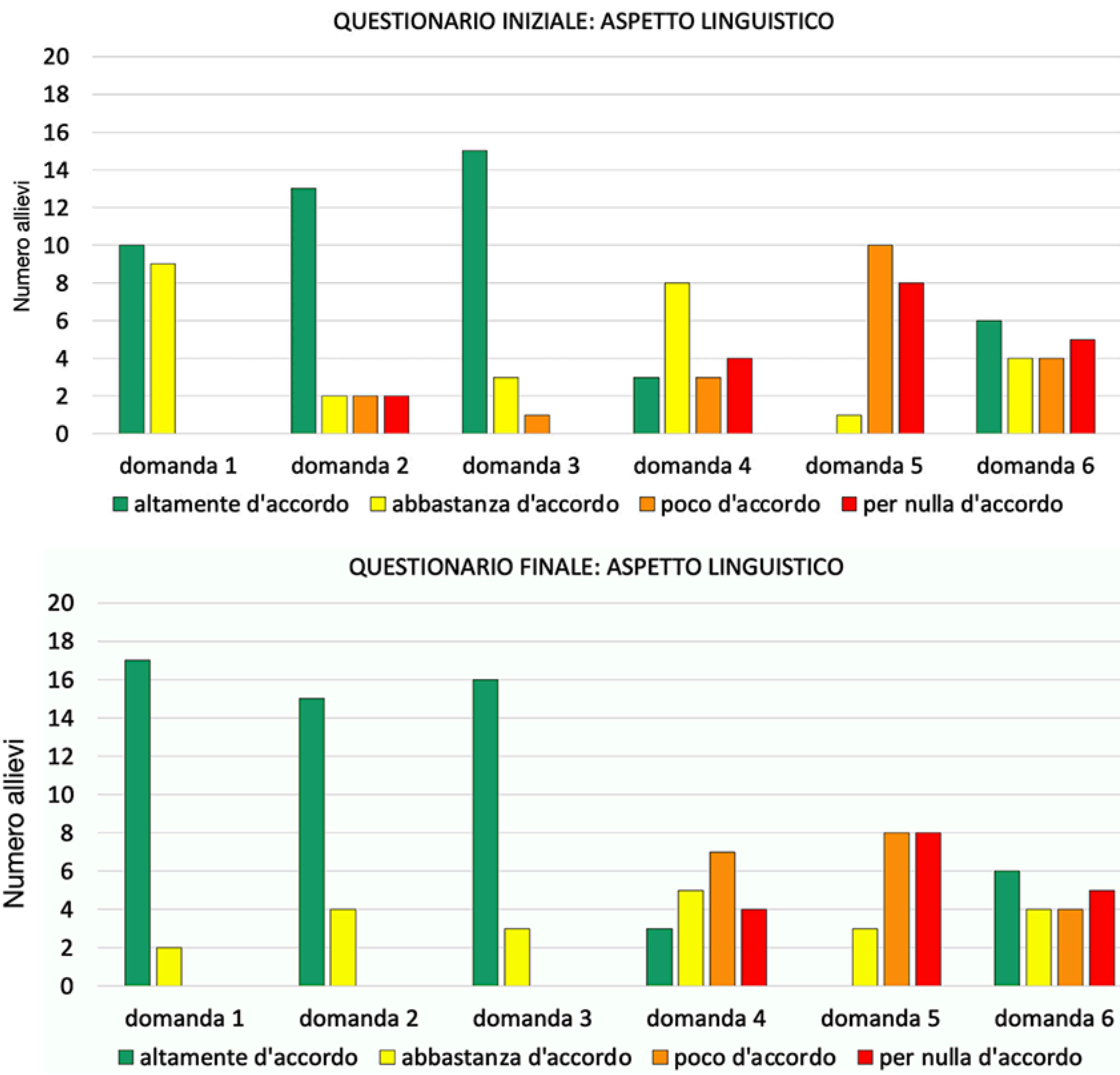


Figura 25. Confronto tra questionario iniziale e finale sull'aspetto linguistico.

Dal confronto dei diagrammi e dall'analisi delle singole risposte si possono notare i cambiamenti di convinzione più significativi su alcune specifiche domande:

– 7 allievi su 19 cambiano la propria convinzione sull'importanza di capire gli argomenti coinvolti nel problema (domanda 1), passando da *abbastanza d'accordo* ad *altamente d'accordo*.

– 4 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sull'importanza di capire il significato delle domande del problema (domanda 2). Tra questi, 2 allievi modificano la propria convinzione passando da *per nulla d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*, 2 allievi modificano la propria convinzione passando da *poco d'accordo* ad *altamente d'accordo*.
– 2 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni circa l'importanza di capire bene la situazione proposta dal problema (domanda 3). Tra questi, 1 allievo modifica la propria convinzione passando da *abbastanza d'accordo* ad *altamente d'accordo* e 1 allievo modifica la propria convinzione passando da *poco d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*.
– 3 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sull'utilità della ricerca di parole chiave nel testo del problema (domanda 4), passando da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*.

6.2 Aspetto strategico

La Figura 26 presenta il confronto tra i diagrammi a barre riguardanti le convinzioni iniziali e finali relativamente all'aspetto strategico nella risoluzione di problemi matematici.

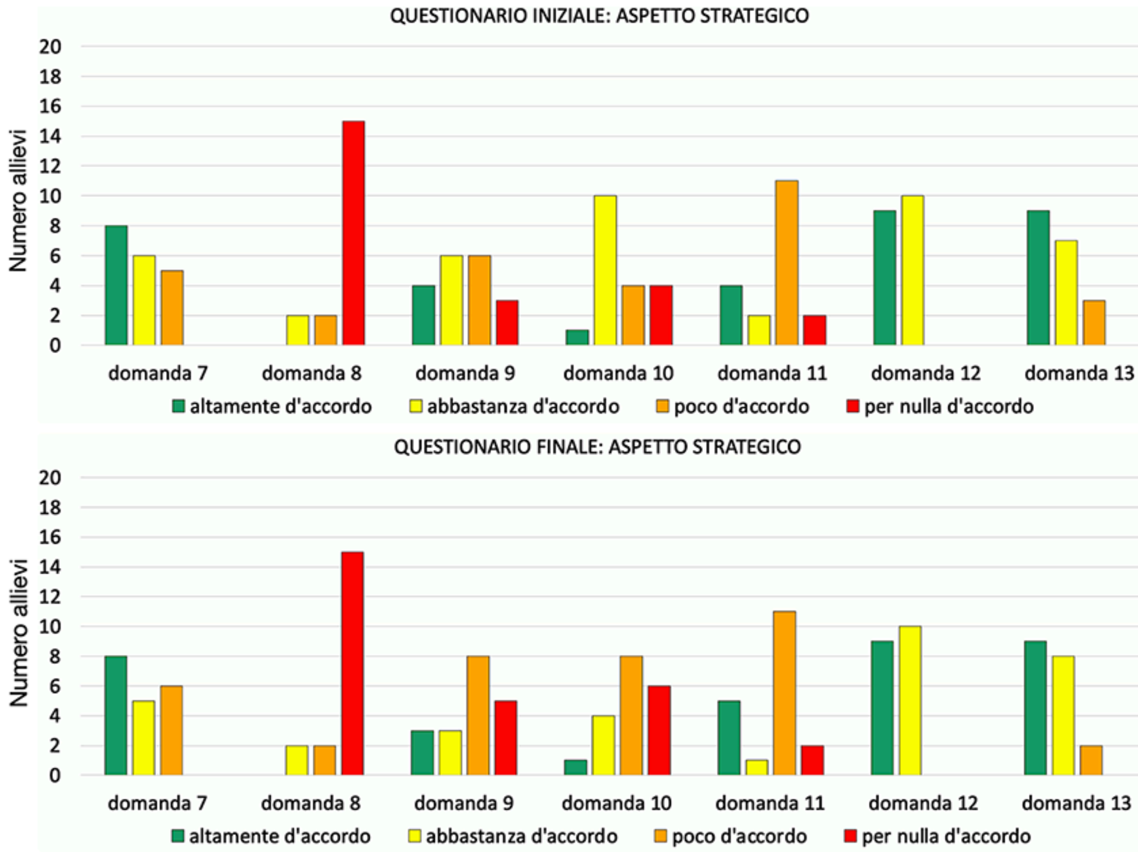


Figura 26. Confronto tra questionario iniziale e finale sull'aspetto strategico.

Dal confronto emerge come per la maggior parte degli allievi il focus si sposti dal prodotto al processo, dal risultato alla strategia. Nello specifico, commentando solo le domande dove il cambiamento di convinzione è più significativo:
– 5 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sulla credenza che risolvere un problema matematico significhi trovare la soluzione corretta (domanda 9). Tra questi, 1 allievo passa da *altamente d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 2 allievi su 19 passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*; 2 allievi su 19 passano da *abbastanza d'accordo* a *per nulla d'accordo*.

- 6 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sulla credenza che se il risultato è giusto allora la strategia è corretta (domanda 10). Tra questi, 4 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*; 2 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *per nulla d'accordo*.
- 1 allievo modifica la propria convinzione in merito all'importanza di esplorare diverse strategie (domanda 11) passando da *poco d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*. Tuttavia, sono ancora tanti (13 su 19) gli allievi che si dichiarano *poco d'accordo* o *per nulla d'accordo*.

6.3 Ruolo delle rappresentazioni semiotiche

La Figura 27 presenta il confronto tra i diagrammi a barre riguardanti le convinzioni iniziali e finali relativamente al ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione di problemi.

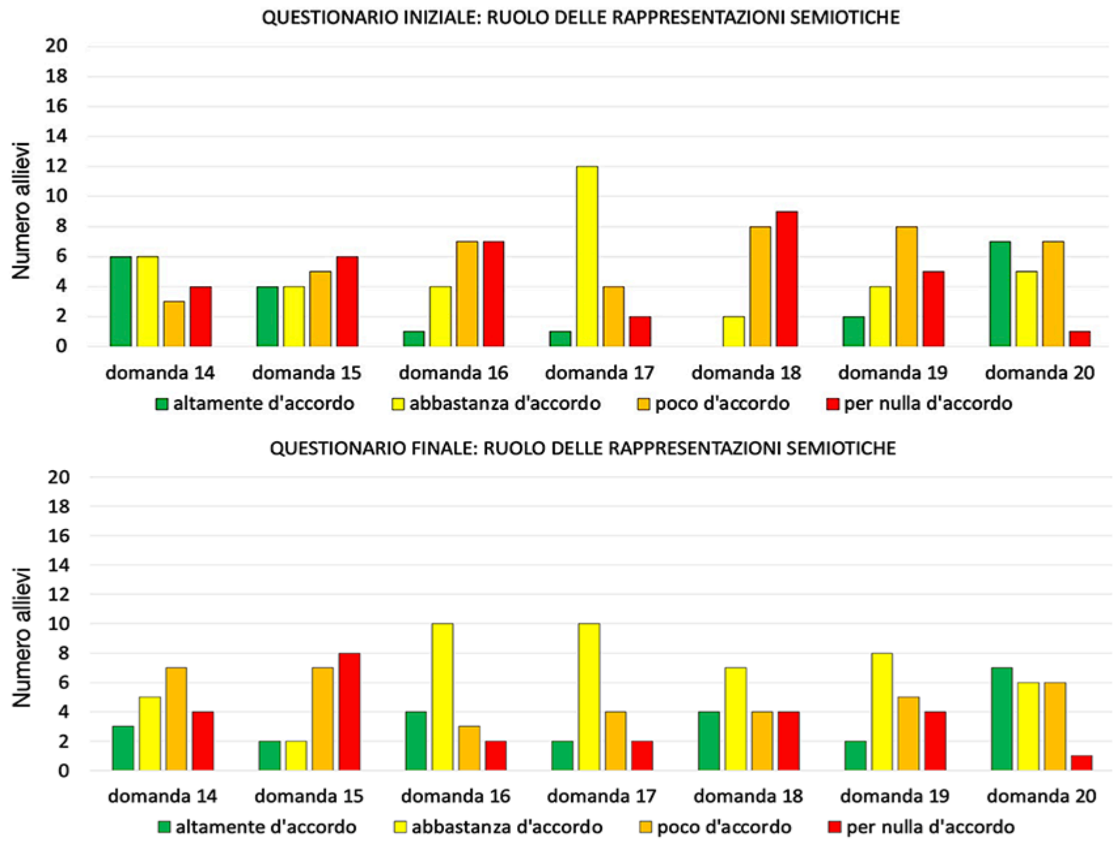


Figura 27. Confronto tra questionario iniziale e finale sul ruolo delle rappresentazioni semiotiche.

Dal confronto dei diagrammi e dall'analisi delle singole risposte sulle domande più significative emerge che:

- 6 allievi su 19 modificano la propria convinzione sull'esistenza di una rappresentazione matematicamente più corretta per ogni problema (domanda 14). Nello specifico, 2 allievi passano da *altamente d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 1 allievo passa da *altamente d'accordo* a *poco d'accordo*; 3 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*.
- 6 allievi su 19 modificano la propria convinzione sulla possibilità di trascurare alcune tra le informazioni fornite nei diversi registri per comprendere il problema (domanda 15). Nello specifico, 2 allievi passano da *altamente d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 2 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*; 2 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *per nulla d'accordo*.
- 14 allievi su 19 modificano la propria convinzione sull'uso di disegni, schemi e grafici per rappresentare una situazione matematica data (domanda 16). Nello specifico, 3 allievi passano da *abbastanza d'accordo* ad *altamente d'accordo*; 6 allievi passano da *poco d'accordo* ad *abbastanza*

d'accordo; 3 allievi passano da *per nulla d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 2 allievi passano da *per nulla d'accordo* a *poco d'accordo*.
- 11 allievi su 19 modificano la propria convinzione sull'uso di strumenti software per risolvere equazioni (domanda 18). Nello specifico, 2 allievi passano da *abbastanza d'accordo* ad *altamente d'accordo*; 2 allievi passano da *poco d'accordo* ad *altamente d'accordo*; 2 allievi passano da *poco d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 5 allievi passano da *per nulla d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*.
- 5 allievi su 19 modificano la propria convinzione in merito all'uso di rappresentazioni per verificare la correttezza di un procedimento (domanda 19). Nello specifico, 4 allievi passano da *poco d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 1 allievo passa da *per nulla d'accordo* a *poco d'accordo*.

7 Conclusioni

Il percorso didattico presentato in questo articolo è stato progettato con il duplice scopo di rendere l'allievo maggiormente consapevole del ruolo svolto dalle rappresentazioni semiotiche nella comprensione e risoluzione di un problema matematico e competente nella gestione delle operazioni di conversione/trattamento coinvolte in una strategia risolutiva.
Le attività scelte per il percorso didattico si sono rivelate stimolanti e adeguate all'obiettivo di favorire l'acquisizione di competenze partendo da attività il più possibile significative e vicine alla vita quotidiana e che restituiscono il senso di quanto appreso durante le lezioni di matematica. Le situazioni matematiche presentate hanno accompagnato gradualmente gli allievi a matematizzare e modellizzare situazioni reali simili tra loro con l'obiettivo di tradurle in problemi matematici accomunati dallo stesso modello matematico: le funzioni.
Durante il percorso, si è avuto modo di osservare una crescita nella maggior parte degli allievi in termini di competenze attinenti al ciclo della matematizzazione. Nello specifico, l'analisi dei protocolli raccolti durante lo svolgimento del percorso didattico dimostra come valorizzare l'uso di vari registri semiotici consenta all'allievo di appropriarsi delle varie rappresentazioni di un oggetto matematico per poterle impiegare efficacemente nell'attività di risoluzione di un problema. Gli allievi hanno lavorato con interesse e partecipazione, dimostrando anche di saper cercare e applicare diverse strategie nella fase di esplorazione, arrivando a tradurre la realtà in un modello matematico. A seguito del lavoro svolto in classe, si è anche avuto modo di notare che gli allievi si rivelano maggiormente disposti a mettersi in gioco e a cercare possibili strategie risolutive all'interno di contesti noti e non noti. Il percorso ha, dunque, avuto delle ricadute positive anche dal punto di vista della disposizione ad agire e a esplorare situazioni di apprendimento con un atteggiamento positivo.
Uno dei principali limiti dell'analisi didattica qui presentata è il numero esiguo di allievi del campione di riferimento. Sarebbe opportuno proporre il percorso a un numero maggiore di allievi estendendolo anche a classi di prima, seconda e terza media. Il presente lavoro, inoltre, non valuta se le convinzioni e le competenze si mantengono costanti nel tempo. A questo riguardo, sarebbe interessante studiare il cambio di competenze e convinzioni nell'arco di un ciclo scolastico, estendendo l'applicazione del tema anche ad ambiti differenti dalle funzioni.
I risultati ottenuti confermano come le rappresentazioni semiotiche svolgono un ruolo importante non solo nella costruzione del sapere matematico, sia esso concettuale o procedurale, ma anche nella risoluzione dei problemi. Inoltre, rendere consapevoli gli allievi dell'importanza di tale ruolo può favorire un cambiamento delle loro convinzioni in merito alla risoluzione di problemi e all'uso di rappresentazioni e trasformazioni semiotiche come strumento fondamentale per matematizzare e modellizzare situazioni reali.

Bibliografia

Arrigo, G. (2014). Conversioni e trattamenti semiotici nel problem solving. *Bollettino dei docenti di matematica*, *69*, 85–103.

Associazione del Rally Matematico Transalpino. (2013). Il prato di zio Francesco (II). *Studio ARMT, Gruppo funzione.* http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/studio-fn6-it.pdf

Clements, M. K. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(1), 1–21. https://doi.org/10.1007/BF00369157

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 150–173.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica.* Pitagora.

DeAScuola. (2021). *Compiti di realtà. Zona Matematica.* https://zonamatematica.deascuola.it/i-grado/aree-e-percorsi/compiti-di-realta/

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 9–43. https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.1

De Petris, V. (2017). Quattro itinerari diversi per arrivare alla formula di Gauss per la somma dei numeri naturali. *Maths on the web – Un sito web per le Scienze Matematiche e Fisiche.* http://www.vdepetris.it/t10/Text10.htm

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006b). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *4*, 585–619.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (vol. 1, pp. 39–61). Brill Sense.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas* (a cura di T. M. M. Campos, trad. M. A. Dias). PROEM.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*(1), 1–45. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p1

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica.* Tesi di dottorato. Università di Palermo.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481–2502. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1299a

Nestola, M. G. C. (2022). *Il ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione dei problemi.* Tesi Master, Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://tesi.supsi.ch/4286/

Organization for Economic Co-operation and Development. (2016). *The PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy.* OECD Publishing.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Salvisberg, M., Crotta, F., & Sbaragli, S. (2019). *Verifica delle Competenze Fondamentali (VeCoF) 2016. Risultati ticinesi in matematica nell'11° anno scolastico.* Centro innovazione e ricerca sui sistemi educativi. http://repository.supsi.ch/id/eprint/12304

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2018). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare.* Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://repository.supsi.ch/10150/1/Valutazione%20didattica%20prove%20standardizzate_5%20elementare.pdf

Schoenfeld, A. H. (1981). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (Los Angeles, USA, 13-17 aprile 1981). https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED201505.pdf

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). Macmillan Publishing Co, Inc.

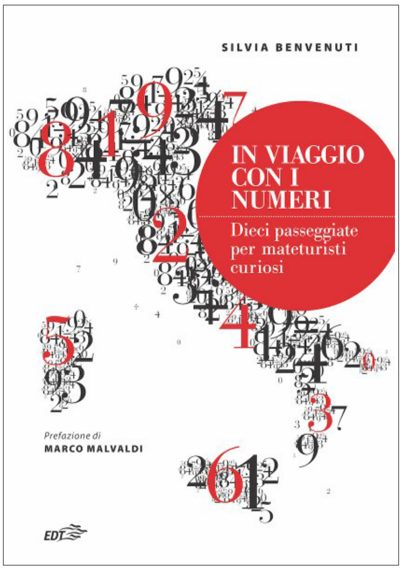
Vygotskij, L. (1978). *Mind in Society. The development of Higher Psychological Processes.* Harward University Press.

Recensioni

DdM

Recensioni[1]

Benvenuti, S. (2022). *In viaggio con i numeri. Dieci passeggiate per mateturisti curiosi.* EDT.



Nove città italiane, scelte tra quelle che chiunque abbia interesse per la storia e l'arte del Bel Paese non può non visitare almeno una volta nella vita: Pisa, Torino, Bologna, Milano, Urbino… e poi ovviamente Roma, Venezia, Napoli e Firenze. Sì, d'accordo, ma cosa c'entra il turismo culturale con la matematica?

Silvia Benvenuti, docente di matematiche complementari presso l'Università di Bologna, lo fa capire benissimo, immergendosi nella matematica che fa da struttura portante a opere architettoniche e pittoriche (ma non solo) sparse ovunque in Italia. Così, quella turistica diventa una scusa per guardare alle città attraverso prospettive singolari: quelle della geometria, dell'algebra, della storia della scienza.

Facciamo un esempio. Roma viene presentata, inizialmente, prendendo in prestito una citazione attribuita a Giotto, come città degli echi e delle illusioni. A sostegno di questa posizione si descrive il portico di Palazzo Spada, oggi sede del Consiglio di Stato. Il portico è un sublime esempio di illusione prospettica: all'entrata, a occhio e croce si stima che sia profondo circa 40 metri, ma se poi lo si attraversa, si scopre con sorpresa che non è più lungo di otto metri. Com'è possibile? Ebbene è possibile, soprattutto se si considera che Borromini, architetto del palazzo e del portico, fu aiutato nella progettazione dal matematico e padre agostiniano Giovanni Maria da Bitonto. Nel narrare la questione, la Benvenuti non si accontenta di presentare la cosa in termini fascinatori ed elusivi, come spesso accade in contesti divulgativi, ma propone in modo semplice ed efficace una spiegazione che deriva niente di meno che da alcuni teoremi dell'*Ottica* di Euclide. Il lettore è così accompagnato a riconoscere quali precisi elementi geometrici contribuiscono all'illusione ottica. E già questo sarebbe più che sufficiente, se si considera il non banale obiettivo esplicativo. Ma non finisce qui: proseguendo

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

nella descrizione, infatti, l'autrice mette in relazione l'idea di illusione architettonica, possibile grazie alla matematica, con il suo significato allegorico: dando a chi entra la percezione di una profondità che poi si rivela finta, si voleva rappresentare così l'inganno delle grandezze terrene. In questo modo, implicitamente, si propone una visione della matematica come disciplina che può sostenere la rappresentazione di significati umani, esistenziali. Una visione della matematica, cioè, totalmente distante da quella che la taccia di aridità, di mancanza di calore. Chi si occupa di matematica sa che sono tutte sciocchezze. Ma un conto è sapere per sé, un altro è aiutare altri nella comprensione. Quello di Palazzo Spada non è che un piccolo esempio scelto fra i tantissimi proposti nel libro. Ecco dunque che *In viaggio con i numeri* si rivela non solo un ottimo testo da portare con sé durante le gite fuori porta del finesettimana (o da consultare durante le uscite scolastiche con gli studenti), ma anche un serio contributo a quella umanizzazione delle matematiche che è diventata ormai un obiettivo culturale di molti: insegnanti, ricercatori, studiosi, appassionati.

Michele Canducci
Dipartimento formazione
e apprendimento SUPSI, Svizzera

D'Amore, B. (2021). *Memorie di una vita: i personaggi, le storie, le idee.* Pitagora.

Un libro di memorie ha di per sé qualcosa di malinconico, narra avvenimenti passati che l'autore ha deliberatamente collocato nelle terre dei ricordi, più o meno lontani, intensi, importanti; irrimediabilmente conclusi, ma impressi nel cuore, rivissuti nel presente e proiettati nel futuro. Ma quando il lettore curioso apre questo libro e inizia a leggere… viene catapultato nel centro di una narrazione gioiosa, vivace, appassionata, intensa e avvincente, i cui personaggi hanno fatto la storia della didattica della matematica a partire dai suoi più lontani esordi. Strada facendo si incontrano Efraim Fischbein, Gerard Vergnaud, Hermann Maier, Georges Papy, Zoltan Dienes, Guy Brousseau, Ubiratan D'Ambrosio, Athana(s)sios Gagatsis, Luis Rico, Juan Godino, Vicenç Font, Salvador Llinares, Ricardo Cantoral, Carlos Vasco, Luis Carlos Arboleda, Raymond Duval, Luis Radford, solo per elencare alcuni dei personaggi che per la maggior parte dei giovani ricercatori sono figure quasi leggendarie, ma che per il nostro autore sono invece «esseri umani tangibili, veri, reali, compagni di formidabili avventure intellettuali, talvolta intensi avversari tematici, talaltra fantastici alleati dialettici». E quindi la narrazione delle memorie personali si trasforma nella narrazione della storia di una disciplina, dalla sua nascita ai giorni più recenti, attraverso un intreccio affascinante di ritratti di persone, narrazioni di eventi, riflessioni personali e metariflessioni illuminanti. Così più che sentirsi lettore di un libro di memorie o spettatore di una conferenza dotta, ci si sente un commensale a una tavola conviviale, dove il maestro condivide episodi ed eventi vissuti in prima persona con i suoi allievi, conducendoli in una navigazione che tocca molte terre, sulle quali egli ha lasciato le sue impronte indelebili: prima di tutte, quella della didattica della matematica, ma accanto a essa anche terre meno frequentate da parte degli studiosi di questa disciplina, almeno non in veste di esperti: l'arte figurativa, la narrativa, lo sport agonistico e naturalmente la matematica, compresa la sua storia e la sua divulgazione. Quelle "terre straniere" si trasformano quindi in universi paralleli in cui il protagonista incontra guide d'eccezione che lo conducono e accompagnano alla scoperta di mondi all'apparenza privi di contatto tra loro, ma che sono tutti intimamente connessi nella narrazione di queste memorie, tutti necessari per ricostruire la poliedrica personalità e la ricchezza della vita personale e professionale del nostro autore.

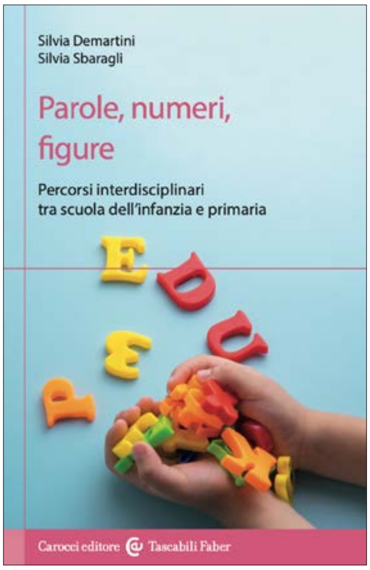
In una narrazione in cui le trame sono fortemente intrecciate il percorso non è mai lineare, ma se proprio volessimo introdurre il lettore nel contesto iniziale della narrazione, dovremmo trasportarci indietro nel tempo fino agli inizi degli anni '70 del secolo scorso: il nostro protagonista si è laureato da poco in matematica e si accinge a diventare "matematico di professione", accedendo all'incarico

di assistente presso l'Istituto di Geometria dell'Università di Bologna. Nonostante la grande passione per le ricerche puramente matematiche e l'impegno dedicato alle pubblicazioni in questo ambito, alcuni incontri con coloro che all'epoca si occupavano dell'insegnamento della matematica in Italia (tra gli altri, Emma Castelnuovo, Mario Ferrari, Liliana Chini Artusi, Rosa Rinaldi Carini, Mario Barra, Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Fulvia Furinghetti) e fuori dall'Italia (Georges e Fréderique Papy in Belgio, Zoltan Paul Dienes in Ungheria) lasciano il segno e inducono il nostro protagonista a rivolgere la mente sempre più spesso alle problematiche dell'insegnamento e dell'apprendimento. Ma sono ancora gli anni della New Math, dell'insiemistica alla scuola primaria, della produzione di libri di testo come contributo considerato determinante in questo senso; è un'epoca in cui la didattica della matematica come disciplina non esiste ancora, ma in cui alcuni matematici, sensibili alle problematiche aventi strettamente a che fare con l'insegnamento, conducono riflessioni e avanzano proposte su questo tema.
Seguono poi gli anni in cui si intensifica l'attività di formazione per gli insegnanti, si conducono le prime prove sperimentali in aula, un periodo che per il nostro protagonista culmina con un convegno organizzato dall'Unione Matematica Italiana nel 1980 a Cognola di Trento, al quale egli è invitato, accanto ad altri studiosi militanti in questo settore, e al quale sono invitati anche i più famosi studiosi stranieri di problematiche didattiche relative all'insegnamento della matematica dell'epoca: Zoltan Dienes, Georges Papy, Fréderique Papy, Zofia Krygowska ed Efraim Fischbein.
L'incontro con Fischbein, che diventa il primo mentore di didattica della matematica per il nostro giovane protagonista, è fondamentale: si tratta di un incontro che segna una svolta epocale, fa intravedere la possibilità di una teoria scientifica nell'ambito dell'apprendimento della geometria, che inizia ad andare ben oltre la semplice euristica, come lascia intendere la teoria dei concetti figurali. A quell'epoca, per l'autore, il passaggio dalla matematica alla matematica per la scuola è quasi definitivo.
Gli anni '80 sono poi segnati dall'incontro fondamentale, dirompente, fulminante, cruciale, decisivo con Guy Brousseau, amico e collega carissimo, e la sua teoria delle situazioni didattiche, che segna la nascita della didattica della matematica come disciplina scientifica. Seguono poi tre eventi che segneranno ulteriormente e profondamente tutta la vita scientifica e personale del nostro autore: la fondazione, nel 1984, del Nucleo di Ricerca Didattica (NRD) presso l'Università di Bologna, uno dei primi nuclei fondati in Italia, intorno al quale si costituì un gruppo di ricerca e divulgazione, di cui fecero (e fanno) parte molti insegnanti ricercatori; la fondazione, nel 1986, del Convegno "nazionale" *Incontri con la Matematica*, del quale la prima edizione, la numero 0, si tenne a Bologna, mentre le successive, dalla numero 1 in poi a Castel San Pietro Terme, tuttora il più grande convegno "nazionale" in didattica della matematica, che ha visto la partecipazione dei maggiori esponenti della ricerca nel campo a livello internazionale; la fondazione, nel 1987, della rivista *La matematica e la sua didattica*, una rivista internazionale di ricerca tuttora attiva.
Il lavoro e l'amicizia con Francesco Speranza, gli incontri, durante il Convegno n. 6 a Castel San Pietro Terme, con Efraim Fischbein e Gerard Vergnaud in contemporanea, la profonda passione per la divulgazione e la storia della matematica, per l'arte figurativa, oltre che per la didattica della matematica, gli incontri con Raymond Duval e la sua teoria dei registri di rappresentazione semiotica, una "vera bomba culturale", sono altre pietre miliari nella storia narrata dal protagonista di queste intense memorie.
Un libro di memorie ricco di dettagli curiosi e unici, di riflessioni profonde e argomentate, di citazioni preziose e stimolanti, di storie e di esperienze personali che si intrecciano nel tempo; un libro coinvolgente, scorrevole e avvincente nella narrazione che cattura e appassiona il lettore fino alle ultime pagine, più personali e intime.
Lo consigliamo vivamente a tutti coloro che desiderano conoscere più in profondità non solo la didattica della matematica e molti illustri personaggi, di altissimo spessore umano e culturale, che hanno contribuito a creare l'attuale didattica della matematica, ma anche il Nostro, le sue straordinarie

qualità umane e professionali, il suo illuminante percorso di formazione accademica e personale, la sua appassionata dedizione alla ricerca, alla divulgazione della matematica, alla formazione di allievi e insegnanti, la sua ricchissima produzione scientifica, i suoi grandi interessi in ogni campo della cultura, le sue peripezie esplorative e avventure intellettuali, dalle quali emerge con forza anche il modo in cui il Nostro vede la didattica della matematica: una "matematica applicata, applicata all'apprendimento", dunque una disciplina matematica.
Un libro molto atteso, non solo dai suoi più affezionati (ex) allievi di dottorato che si sono lasciati trasportare nel corso degli anni dalle sue affascinanti storie di vita, di esperienze e di ricerca vissute in prima persona con illustri personaggi che per molti, non solo (ex) allievi, sono prestigiose, qualificate, autorevoli, ricorrenti citazioni, riconosciute a livello internazionale.
Impossibile non leggere tutto d'un fiato questo prezioso libro e attingere alla sua ricchissima bibliografia generale per ulteriori approfondimenti, studi e ricerche.

Miglena Asenova, Maura Iori
e George Santi
Nucleo di Ricerca in didattica
della Matematica di Bologna, Italia

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2022). ***Parole, numeri, figure. Percorsi interdisciplinari tra scuola dell'infanzia e primaria*****. Carocci editore.**



È impossibile parlare di un libro come questo senza dire due parole preliminari sulle autrici. Iniziamo dalle cose in comune: entrambe portano lo stesso nome di battesimo, Silvia; entrambe, poi, concentrano le fatiche di ricerca presso il Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, in Canton Ticino, occupandosi di didattica. E qui le caratteristiche in comune, almeno quelle più in superficie, si fermano. Sì, perché Silvia Demartini viene da studi linguistici, mentre Silvia Sbaragli da studi matematici. Due mondi che, nel sentire comune, sono distanti anni luce. L'aver scritto questo libro a quattro mani non è, ovviamente, conseguenza di un caso, o di un esperimento improvvisato, bensì il frutto di un connubio intellettuale e professionale che dura ormai da un decennio e più. Il punto chiave risiede in un termine tanto importante quanto abusato, almeno in ambito didattico: interdisciplinarità. Ora, chiunque si sia cimentato nell'esplorazione delle regioni comuni a due discipline, sa bene quanto sia difficile mantenere l'orientamento ed evitarne le insidie: frequente è il rischio di imboccare salite sfiancanti, interruzioni di sentieri, terreni paludosi; oppure vie strette e complicate, in cui ci ritrova in bilico tra equilibrismi posticci e forzati. Fuor di metafora, meno frequente e molto dispendioso, sia in termini di tempo sia in termini di energie, è invece il vero lavoro interdisciplinare, che si realizza quando una prospettiva sostiene e rinforza l'altra: solo in questo modo due sguardi distinti diventano uno solo, e l'approccio interdisciplinare assume caratteristiche proprie.
Ebbene, in questa seconda via si inserisce il libro *Parole, numeri, figure*: un distillato di interdisciplinarità tra lingua e matematica rivolto alla continuità tra scuola dell'infanzia e scuola elementare. Dieci anni di ricerca con altri studiosi e di lavoro con i docenti, italiani e ticinesi dei diversi livelli scolastici, hanno permesso alle autrici da un lato di approfondire a livello teorico gli statuti epistemologici delle due discipline, al fine di indagare i nessi profondi sui quali innestare riflessioni didattiche (molte delle quali raccolte in Sbaragli & Demartini, 2021), dall'altro di ideare, progettare e sperimentare percorsi combinati di italiano e matematica per tutta la scuola dell'obbligo, percorsi che hanno portato allieve e allievi a sviluppare competenze congiunte, lavorando cioè in prospettive ampie e trasversali. Molti dei percorsi sperimentati negli anni per la scuola dell'infanzia, in continuità con la scuola elementare, vengono qui non solo descritti, ma commentati sulla base di un approccio didattico integrato tra lingua e matematica.
Tutto il materiale è suddiviso in cinque capitoli tematici, sempre di taglio trasversale: il primo incen-

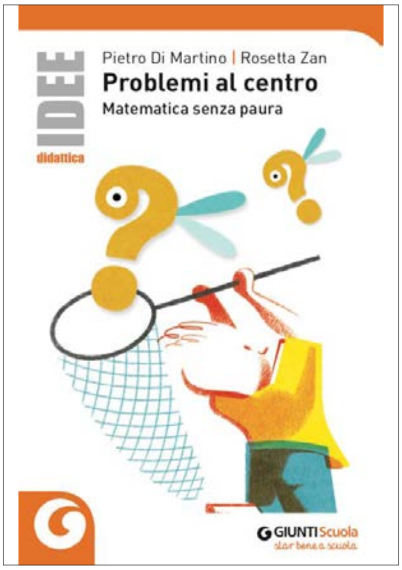
trato sul tempo, il secondo su parole, rime e matematica, il terzo su numeri e lettere, il quarto sui punti di vista e il quinto sulla narrazione legata a diversi ambiti della matematica. Come scrivono le autrici nell'introduzione, questa scelta è ben meditata, e corrisponde a «temi cruciali per la formazione dell'individuo: questi temi vengono regolarmente sviluppati nella scuola dell'infanzia e nella primaria e a essi è possibile agganciare le prime riflessioni su contenuti che, più avanti, diventeranno disciplinari e che saranno oggetto di insegnamento esplicito, sia nell'ambito della matematica sia in quello dell'italiano» (p. 9).
Il testo è improntato a una dimensione applicativa, grazie alla quale ogni docente può ricavare spunti da utilizzare nel proprio contesto. Ciò nonostante, non si rinuncia, in ogni capitolo, a una introduzione teorica rafforzata continuamente da riferimenti bibliografici puntuali. Particolarmente gustose, poi, sono due scelte: il continuo inserimento di riquadri con descrizioni puntuali delle attività da svolgere (eventualmente ricalibrandole) in classe, e il filo rosso degli albi illustrati, anch'essi riportati nel testo e in riquadri dedicati.
Non si può far altro che consigliare la lettura di questo testo a tutte le maestre e i maestri; di più: verrebbe da consigliarne lo studio e la messa in opera, così da realizzare una volta per tutte il rinnovamento di una didattica che possa basarsi un po' più sugli elementi di sinergia fra discipline, e un po' meno sugli elementi che le differenziano.

Bibliografia

Sbaragli, S., & Demartini, S. (2021). *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica.* Edizioni Dedalo.

Michele Canducci
Dipartimento formazione
e apprendimento SUPSI, Svizzera

Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.



Quante volte ci troviamo spiazzati davanti agli atteggiamenti, spesso negativi, degli allievi nei confronti della matematica? E quante volte non siamo in grado di capire il perché di questo atteggiamento, cioè di capire in quale punto si è spezzato il rapporto con la disciplina? E, ancora, quante altre volte ci adagiamo, presi da vari timori, su pratiche e modelli tradizionali che, pur essendo rassicuranti, non fanno che riproporre una visione della matematica per nulla aderente alla sua vera natura, o, per dirla in termini più corretti, al suo statuto epistemologico?
Chi insegna sa che non si tratta di domande retoriche, ma di vere questioni di fondo che animano la progettazione e l'agire del docente di matematica di ogni ordine e grado. Davanti all'insieme di atteggiamenti, emozioni, meccanismi, immagini, convinzioni, …, che compongono la matassa che è il rapporto dell'individuo con la matematica, i due autori si pongono con un intento ambizioso: cercare di dipanare il bandolo, e analizzare gli elementi che caratterizzano la complessità del mondo affettivo dietro all'insegnamento e apprendimento della matematica.
La franchezza e la chiarezza con la quale vengono affrontati temi delicati (ad esempio, la visione della matematica dell'insegnante, ma anche la visione dell'insegnamento della matematica dell'insegnante) rendono autorevole tutto il pensiero esposto. Ovviamente, questa autorevolezza non è solo frutto di abilità di composizione retorico-testuale: i due autori sono infatti ricercatori che hanno dedicato gran parte della loro vita professionale al problema dell'*affect* nell'educazione matematica, realizzando ad esempio una ricerca interessantissima e dalle dimensioni imponenti quale è stata *Io e la matematica. Il mio rapporto con la matematica (dalle elementari a oggi)*. Ebbene, l'obiettivo di questo testo è dichiarato dall'inizio: aiutare l'insegnante ad «accompagnare l'allievo nella costruzione di un rapporto sereno con la matematica e rispettoso delle caratteristiche di questa disciplina» (p. 11). Si parla in modo equo tanto di rapporto sereno quanto di rapporto rispettoso dell'epistemologia della matematica. La relazione tra questi due elementi è tutt'altro che semplice da sviscerare, eppure trae il fondamento in un assunto che, una volta enunciato, stupisce per il suo carattere di evidenza: l'atteggiamento nei confronti della matematica, del suo insegnamento e del suo apprendimento, dipendono in primo luogo da cosa si intenda con matematica, cioè dalla visione che si ha della disciplina. Si banalizza un po' il discorso, ma non si sbaglia di molto, affermando che una matematica fatta di regole da memorizzare, in cui l'errore è qualcosa da evitare con ogni mezzo, e in cui più si è capaci più si va svelti (approccio strumentale), è spesso collegata a emozioni quali ansia, rabbia, noia,

frustrazione e paura, emozioni che altrettanto spesso si accompagnano a comportamenti fallimentari da parte di chi è in via di apprendimento; al contrario, una visione della matematica che valorizza i collegamenti, i processi e i *perché* (approccio relazionale), non solo è più rispettoso della vera natura della disciplina, ma porta gli allievi a viverla con curiosità, desiderio di esplorare, stimolo a vederla nella sua utilità di disciplina capace di modellizzare il reale. Ma, viene da chiedersi, perché è ancora così raro che si instauri un insegnamento-apprendimento della matematica basato sull'approccio relazionale? Quali sono gli ostacoli che vive l'insegnante? E quali invece gli apparenti vantaggi di un approccio strumentale? Beh, basta leggere il primo capitolo del libro; dopo non potrete fare a meno di dire "Le cose stanno proprio così".
C'è da dire, poi, che il servizio che i due autori fanno alla scuola non riguarda solo l'analisi degli ingredienti affettivi dell'insegnamento-apprendimento della matematica. Infatti il libro si compone di altri tre capitoli, che dimostrano la serietà professionale di chi non si limita a esporre come dovrebbero andare le cose, ma cerca di delineare percorsi e soprattutto pilastri imprescindibili sui quali impostare l'insegnamento di tipo relazionale. Così, il testo prosegue affrontando il tema dei problemi (capitolo 2) e il tema della dimensione argomentativa (capitolo 3), arrivando a suggerire strategie e tecniche per la scelta di problemi di matematica significativi da proporre in classe.
Insomma, io l'ho trovato un libro formidabile per scientificità e chiarezza, e penso che tutti gli insegnanti di matematica dovrebbero leggerlo.

Michele Canducci
Dipartimento formazione
e apprendimento SUPSI, Svizzera

Navarra, G. (2022). *Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante.* UTET.

Che dire di un libro come questo, che fin dalle prime battute si presenta come il tentativo di raccogliere le idee, i metodi, gli stili, i nodi concettuali di un progetto *(ArAl – Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico)* che dura da più di vent'anni? Forse bisognerebbe semplicemente limitarsi a consigliarne la lettura a chiunque si occupi di didattica della matematica (insegnante o ricercatore non fa differenza) perché grande è il contributo che questo testo dona in termini riflessione, di strumenti e di capacità di avvicinare ciò che, nell'insegnamento-apprendimento della matematica, dovrebbe essere, a ciò che è. In che senso? Nell'unico senso che può intendere chiunque sia mai entrato in un'aula di scuola: la realtà delle dinamiche d'aula è tutt'altro che semplice da rendere affine a ciò sarebbe auspicabile, didatticamente parlando. Ebbene, l'autore ne è ben cosciente, e ha deciso di mettere nero su bianco anni di riflessioni e pratiche, condotte a metà tra il mondo della ricerca e quello della classe.
Un testo che, come ricorda l'autore nella prima riga della prefazione, è «un libro a una penna e a più voci», nel senso che è il distillato sintetico (pur dipanandosi in quasi 400 pagine) di un progetto che è frutto della sinergia di professionalità varie: ricercatori universitari, insegnanti ricercatori, insegnanti, specialisti in ambito matematico e linguistico, docenti di scuola secondaria, sia di matematica che di lingua. Formazioni culturali differenti, vari ordini scolastici, varie sensibilità educative. Insomma, un libro che racconta un esperimento complesso, articolato, profondamente connesso con la storia dell'insegnamento della matematica in Italia, esperimento che – per fortuna – è ancora in corso.
Dopo una introduzione, utile a definire la cornice di senso dentro alla quale il progetto ArAl è nato e cresciuto, l'autore sceglie di dividere il materiale informativo in cinque parti. La scelta organizzativa è necessaria per ovvi motivi testuali, ma anche perché rappresenta lo sforzo di strutturare un materiale che, per sua natura, è intrinsecamente collegato nelle sue parti. Ne è consapevole l'autore, quando afferma che, presi nel loro insieme, questi cinque capitoli definiscono nei loro contenuti l'impalcatura, i pilastri, del progetto ArAl.
Nei primi tre capitoli si tratta degli aspetti di carattere metodologico, sociale, e psicologico alla base del progetto, aspetti che altro non sono che una sintesi organizzata e ben meditata di risultati e posture che giungono direttamente dal mondo della pedagogia e della ricerca in didattica della matematica. Si richiamano, così, costrutti teorici come quello di contratto didattico, istituzionalizza-

zione, devoluzione, come imprescindibili supporti all'organizzazione di un'attività di classe in cui si possa promuovere la verbalizzazione, l'argomentazione e la pratica della discussione collettiva. Si fa esplicito riferimento all'approccio socio-costruttivista, evitando tuttavia di riferirsi a esso in toni esclusivamente teorici, bensì presentandolo attraverso la discussione di esperienze d'aula, che mostrano così la pregnanza e la sostanziale e pragmatica verità di alcune tesi alla base del pensiero di Vygotskij.
Gli altri due capitoli si addentrano nel cuore del progetto ArAl, formato come il cuore umano da due atri: quello linguistico e quello matematico. Questo perché se c'è una cosa chiara all'autore e a chi si occupa quotidianamente dell'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra, e dei vari moti di andata e ritorno tra questi due ambienti matematici, ebbene questa è la stretta relazione che c'è tra la dimensione del linguaggio naturale (nel nostro caso, la lingua italiana) e la dimensione simbolico-matematica. Vengono discusse questioni fondamentali, come la distinzione tra approccio procedurale e approccio relazionale, tra prodotto e processo, tra rappresentazione canonica e non canonica di un numero, tra l'impulso a risolvere rispetto a quello, più interessante, di rappresentare.
Le conclusioni cercano di tirare le somme, lasciando però aperti spiragli, prospettive, e nuove problematiche da affrontare, lasciando intendere che il progetto ArAl è tutt'altro che concluso, e che, anzi, «ha ali forti, e può volare ancora molto lontano» (p. 389).

Michele Canducci
Dipartimento formazione
e apprendimento SUPSI, Svizzera