Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 14

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI.

Impaginazione:
Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI.

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
matematica

14

Novembre 2023

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), I - II, DOI:10.33683/ddm.23.14.0
OPEN ACCESS

Editoriale

La didattica della matematica, nelle sue dimensioni di ricerca e di pratica scolastica, fin dal suo esordio come disciplina accademica ha esplorato visioni, costrutti, interpretazioni e contesti legati a campi del sapere anche in apparenza molto distanti dalla matematica; campi riguardanti altre discipline o forme di sapere più generali e trasversali. Questa scelta non è il frutto di un capriccio intellettuale o ideologico, ma un bisogno, che prende avvio dalla presa di coscienza che l'educazione in generale, e in particolare quella matematica, è un mondo nel quale convergono strade provenienti da vari mondi: quello delle scienze dell'educazione, della semiotica, della linguistica, dell'arte, del gioco, dell'ambiente ecc. Una necessità che parte dal bisogno di interpretare con diverse lenti il delicato processo di insegnamento-apprendimento della matematica.
La rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* non può che far parte – e lo fa con orgoglio – di questa prospettiva, accogliendo al suo interno contributi che mostrano una didattica della matematica sempre più aperta agli stimoli e agli interrogativi che le provengono sia dal mondo della ricerca sia da quello della pratica didattica, aprendosi anche ad altre prospettive e visioni. Anche il quattordicesimo numero, come altri in precedenza, mette in evidenza questa prospettiva.

Il primo articolo della sezione *Riflessione e ricerca* di questo numero presenta il costrutto teorico della Tripla S (Social, Strutturale e Specializzato), uno strumento semiotico per comprendere i meme matematici, cioè le mutazioni matematiche degli "Internet meme"; utilizzando dati provenienti da sperimentazioni con studenti di diversi gradi scolastici, l'autrice mostra come questo mezzo possa essere utilizzato nella ricerca per indagare i processi cognitivi degli studenti, e nella didattica per progettare attività basate sui meme matematici. Il secondo articolo presenta i risultati di una sperimentazione condotta in due classi prime di scuola secondaria di primo grado in Italia,[1] la cui progettazione integra attività di insegnamento-apprendimento in aula con una visita-laboratorio al museo di Palazzo Madama a Torino in Italia; nel contributo vengono presentate le scelte didattiche e metodologiche attivate nella sperimentazione, discutendole alla luce del quadro teorico della matematica informale, evidenziando in particolare il ruolo dell'insegnante, dell'equilibrio tra le attività di visita al museo e il curriculum di matematica, e della valutazione del percorso. Il terzo articolo, presente in lingua originale e in italiano, si occupa invece di indagare la comprensione delle figure geometriche da parte degli insegnanti di scuola secondaria di primo e di secondo grado,[2] in relazione a due aspetti: la loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e la loro capacità di prevedere didatticamente difficoltà ed errori degli studenti; la ricerca, condotta nell'ambito di un corso di formazione continua in didattica della matematica, mostra come alcuni concetti della teoria della comprensione delle figure geometriche di Duval possano far luce su vari aspetti dell'insegnamento-apprendimento della disciplina.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Nel primo articolo vengono presentati estratti di un percorso didattico svolto durante un anno scolastico in due biclassi del primo ciclo (ossia classi composte da allievi di prima e di seconda elementare) dell'Istituto di Lugano in Svizzera;

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. L'istruzione secondaria a Cipro consiste in due cicli: il *Gymnasio*, che corrisponde agli ultimi tre anni di scuola media nel Canton Ticino, e il *Lykeio*, che corrisponde ai primi tre anni di scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

il percorso mostra come i docenti possano convertire un contesto caratterizzato da vincoli e difficoltà di varia natura in opportunità per progettare attività in maniera nuova, fantasiosa e adatta agli allievi della propria classe, attivando al contempo precisi aspetti di competenza. Il secondo articolo presenta un percorso laboratoriale alla scoperta dei sistemi di numerazione, in particolare dei numerali dell'antica Cina, realizzato in una classe quarta di scuola primaria italiana;[3] i contesti storico e matematico, uniti ad attività di esplorazione del triangolo di Tartaglia-Pascal (nella sua versione cinese), hanno incentivato lo sviluppo di competenze matematiche nel campo dei numeri in linea con un'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole. Il terzo articolo presenta un percorso incentrato su un'esperienza di comunicazione fra classi di ordini diversi della scuola dell'obbligo; gli allievi di due classi prime della scuola media di Minusio in Svizzera hanno assunto il ruolo di docenti, preparando un itinerario di attività sui triangoli da sottoporre ai bambini di due classi terze della scuola elementare di Locarno; l'esperienza ha consentito agli allievi di sperimentare alcune peculiarità della professione di docente (dalla progettazione alla valutazione, passando per la realizzazione e la gestione di attività) e di lavorare in ottica interdisciplinare con l'italiano. Il quarto e ultimo articolo presenta un percorso nel quale si sperimentano differenti aree di apprendimento, tra cui le più rilevanti sono lo studio d'ambiente e l'area matematica; l'esperienza, vissuta da allievi della scuola dell'infanzia di Avegno in Svizzera, è incentrata sui giochi, in particolari i giochi di una volta, e ha attivato in ottica interdisciplinare competenze matematiche in relazione alla riproduzione e all'analisi dei giochi, e competenze linguistiche legate alla comprensione e alla produzione di testi descrittivi e regolativi.

Auguriamo una buona lettura a tutti coloro che ci seguono, siano essi docenti, ricercatori, lettori, studenti, curiosi provenienti dalle più variegate aree del sapere umano, consci della necessità di continuare a fornire un servizio di largo respiro, aperto a nuovi stimoli e prospettive.

Prof.ssa Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), III - IV, DOI:10.33683/ddm.23.14.0
OPEN ACCESS

Editorial

Since its beginnings as an academic discipline, mathematics education, in its dimensions of both research and school practice, has explored visions, constructs, interpretations and contexts which are linked to different fields of knowledge. Such fields might appear very distant from mathematics, concerning other disciplines or forms of knowledge that are more general and transversal. This choice is not the result of an intellectual or ideological whim, but a need, which stems from the awareness that education in general, and mathematics education in particular, is a world in which paths from various worlds come to converge: that of sciences of education, semiotics, linguistics, art, play, environment etc. A need that stems from the necessity of interpreting the delicate process of teaching-learning mathematics through different lenses.
The *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* journal cannot but be part of this perspective, and proudly so, by welcoming contributions that show a mathematics education which increasingly opens to the stimuli and questions coming from both the world of research and that of teaching practice, also opening up to other perspectives and visions. The fourteenth issue, like some of the previous ones, also highlights this perspective.

The first article in the *Riflessione e ricerca* section of this issue presents the Triple S (Social, Structural and Specialized) framework, intended as a semiotic tool for understanding mathematical memes, i.e. mathematical mutations of image memes. By using data from experiments conducted with students of various school grades, the author shows how this tool can be employed in research to investigate students' cognitive processes, as well as in teaching to design activities involving mathematical memes. The second article presents the results of an experiment carried out in two eight-grade classes of a lower secondary school in Italy,[1] designed to integrate classroom teaching-learning activities with a visit-laboratory to the museum of Palazzo Madama in Turin. The work presents the design and methodological choices, discussing them in the light of the theoretical framework of informal mathematics education, with a special focus on the teacher's role, the balance between the museum visit activities and the class curriculum, and the assessment methodology implemented. The third article, which is available both in the original language and in Italian, investigates in-service secondary[2] teachers' geometrical figure apprehension in relation to two aspects: their ability to construct geometrical proofs and to predict didactically their students' difficulties and mistakes. The research, conducted within the frame of an in-service training course in mathematics education, shows how certain concepts from Duval's geometrical figure apprehension can shed light to various facets of teaching and learning geometry.

There are four articles in the *Esperienze didattiche* section. The first article presents a didactic path carried out during an entire school year in two first cycle biclasses (i.e., classes composed of first and second graders) of the Istituto di Lugano in Switzerland. The experience shows how teachers can transform various kinds of constraints and difficulties into opportunities to design activities in a new, creative and suitable way for their pupils, while activating specific mathematical skills. The second article presents a teaching experiment to discover number systems, in particular the Chinese

1. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.
2. Secondary education in Cyprus consists of two cycles: the *Gymnasio*, which corresponds to the grades from 7 to 9, and the *Lykeio*, which corresponds to the grades from 10 to 12.

ancient numeral system. The path has been carried out in a fourth-grade Italian primary school[3] class; the historical and mathematical contexts, combined with explorations of the Tartaglia-Pascal's triangle (in its Chinese version), encouraged the development of mathematical skills in the numerical field in line with an active and conscious citizenship education. The third article focuses on a teaching and learning project centred on an experience of communication between classes of different compulsory school orders: the students of two eight-grade classes of the lower secondary school in Minusio, Switzerland, took on the role of teachers, preparing an itinerary of activities on triangles to be proposed to the children of two third-grade classes attending the primary school in Locarno. The experience allowed the pupils to experiment with some of the peculiarities of the teaching profession (from planning to assessment, through the realisation and management of the activities) and to work in an interdisciplinary perspective with Italian language. The fourth and last article presents a didactic experience in which different areas of learning are approached, the most relevant of which are the study of the environment and the mathematical area. The pupils of the kindergarten in Avegno, Switzerland, have experienced a path centred on games, in particular old-time games, by activating, from an interdisciplinary perspective, mathematical skills related to the game reproduction and analysis, and linguistic skills linked to the comprehension and production of descriptive and procedural texts.

We are aware of the need to continue providing a wide-ranging service, open to new stimuli and perspectives. That is the reason why we wish to all those who follow us to enjoy the reading, whether they are teachers, researchers, readers, students, interested people from the most varied areas of human knowledge.

Prof.ssa Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI

3. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 9 - 29, DOI: 10.33683/ddm.23.14.1 OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Social, Strutturale e Specializzato: tre significati per comprendere, studiare e utilizzare in classe i meme matematici

Social, Structural and Specialized: three meanings to decode, research and use mathematical memes in the classroom

Giulia Bini
Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques", Università degli Studi di Milano – Italia

giuliagiovanna.bini@unimi.it

Sunto / Il termine "Internet meme" si riferisce a contenuti digitali che si diffondono viralmente dopo essere stati mutati dagli utenti. Queste mutazioni narrano storie diverse mantenendo la riconoscibilità del meme originale. Tra questi, i meme immagine sono particolarmente popolari perché sono facili da creare e coinvolgenti. I meme matematici, a loro volta, sono mutazioni matematiche dei meme immagine e presentano potenzialità didattiche: possono facilitare l'apprendimento e stimolare la creatività degli studenti. Tuttavia, l'introduzione dei meme matematici in classe sfida il paradigma educativo tradizionale, il che può mettere in difficoltà gli insegnanti. Questo lavoro presenta il costrutto della Tripla S, uno strumento semiotico per comprendere i meme. Utilizzando dati provenienti da sperimentazioni con studenti di diversi gradi scolastici, viene mostrato come questo strumento possa essere utilizzato nella ricerca per indagare i processi cognitivi degli studenti, e nella didattica per progettare attività basate sui meme matematici.

Parole chiave: Internet meme; significati; creatività; cultura digitale; cooperazione interpretativa.

Abstract / The term "Internet meme" refers to digital content that spreads virally after being altered by users. These alterations result in mutations that tell different stories while preserving the recognizability of the original meme. Image memes are particularly popular because they are easy to create and engaging. Mathematical memes represent mathematical mutations of image memes and hold an educational potential by facilitating learning and stimulating students' creativity. However, the integration of mathematical memes in the classroom challenges the traditional educational paradigm, which can pose difficulties for teachers. This study presents the Triple S framework, a semiotic tool for understanding memes. By analysing data from experiments conducted with students of various grade levels, the study aims to demonstrate how this framework can be employed in research to investigate students' cognitive processes, as well as in teaching to design activities involving mathematical memes.

Keywords: Internet meme; meanings; creativity; digital culture; interpretative cooperation.

«Un testo vuole che qualcuno lo aiuti a funzionare».
(Eco, 1979, p. 52)

1 Meme, Internet meme e cooperazione interpretativa

Il concetto di meme viene dall'accademia: nel 1976 il biologo evoluzionista Richard Dawkins inventò questo termine, la cui radice etimologica sta nel termine greco μίμημα cioè "imitazione", per identificare il corrispondente culturale del gene. Nel suo libro *The selfish gene* (Il Gene egoista), Dawkins descrive i meme come «unità di cultura» (Dawkins, 1976/2016, p. 249): abitudini o mode che si moltiplicano e si diffondono per imitazione prevalendo sulle altre, in un corrispondente culturale della selezione della specie darwiniana. Nell'era di Internet, il significato del termine si è spostato per identificare contenuti digitali (immagini, testi, GIF, video) che si diffondono in modo virale sul web dopo essere stati modificati dagli utenti che intervengono sulla parte figurale o sul testo scritto con aggiunte personali. Queste aggiunte personali producono mutazioni che, mantenendo la riconoscibilità del meme originale, narrano storie diverse.
Questo lavoro si focalizza sui meme immagine, che sono particolarmente popolari perché tecnicamente facili da creare utilizzando siti appositi come MakeaMeme[1] o Imgflip.[2] Esempi di meme immagine sono presentati nella **Figura 1**: in questo caso la parte figurale, ovvero l'immagine di sfondo – detta *base* – (che qui rappresenta una catena di predatori marini nota come *Bigger fish* – Pesce più grande) viene modificata dagli utenti con l'aggiunta di testi sovrapposti, dando origine alle mutazioni memetiche. La mutazione a sinistra ci racconta la rivoluzione francese, quella al centro la rivalsa della natura sull'uomo e quella a destra la gerarchia dell'universo fantascientifico della saga cinematografica di Guerre Stellari.

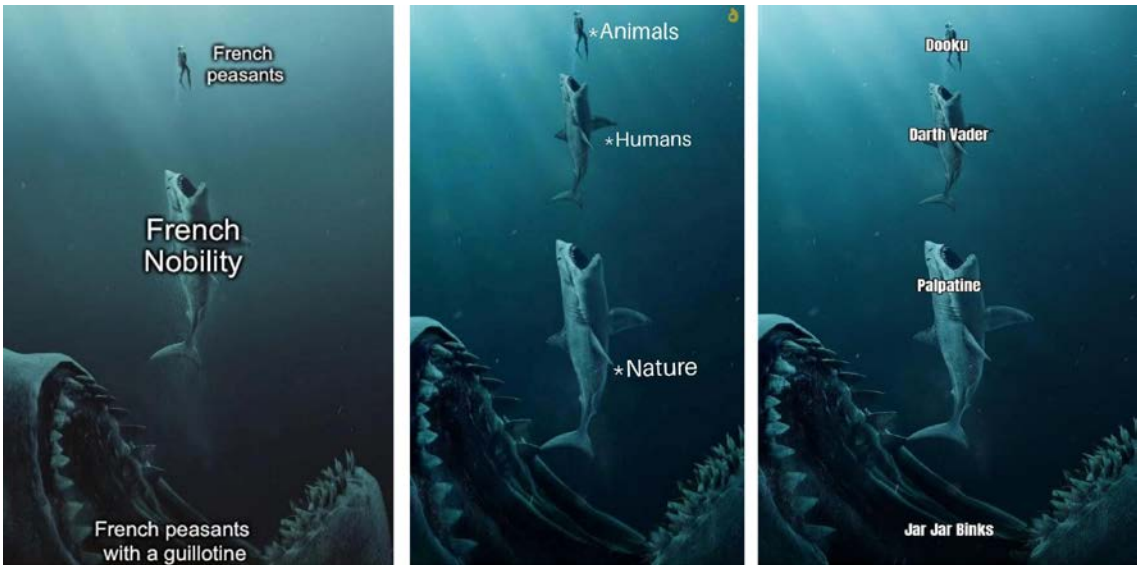


Figura 1. Tre mutazioni del meme Bigger fish (fonti: Facebook e Reddit).

1. https://makeameme.org/
2. https://imgflip.com/memegenerator

Nella **Figura 2** si vede invece una mutazione matematica della stessa base, elaborata dall'autrice del presente lavoro utilizzando il sito Imgflip: in questo caso la catena dei predatori viene interpretata come emblematica del concetto di inclusione insiemistica per rappresentare la relazione tra gli insiemi numerici $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

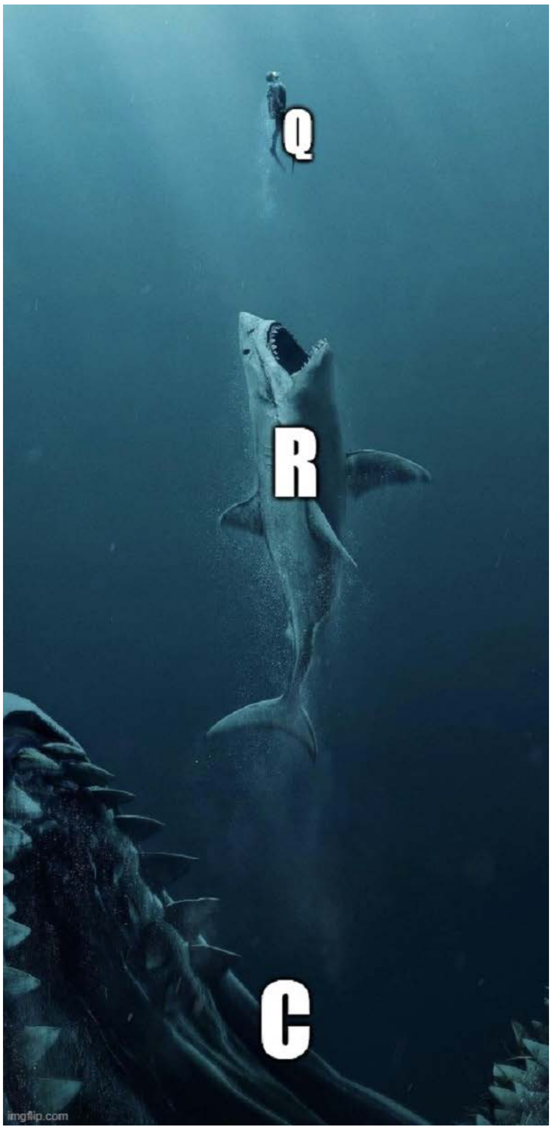


Figura 2. Una mutazione matematica del meme *Bigger fish* (elaborata dall'autrice).

Gli Internet meme non sono solo un nuovo genere di comunicazione online, ma sono considerati prodotti rappresentativi della cultura digitale (Nissenbaum & Shifman, 2017; Shifman, 2013; Wiggins, 2019). Questi oggetti digitali permeano il discorso online e aggregano comunità di centinaia di migliaia di follower all'interno dei social media, costituendo quella che è conosciuta come *memesfera* (Stryker, 2011). All'interno della memesfera, i meme hanno un valore sociale, legato al numero di condivisioni e di "mi piace", descritti come *ricompense tribali* nelle scienze sociali (Eyal, 2014). Spinti dal desiderio di ottenere tali ricompense tribali, gli utenti nella memesfera creano, condividono e mettono "mi piace" a centinaia di meme ogni giorno. Un esempio di questa tendenza è rappresentato dalle occorrenze dell'hashtag #memes su Instagram, che hanno raggiunto i 227 milioni a febbraio 2023, registrando una crescita di oltre il 400% rispetto ai 50 milioni del febbraio 2018 (**Figura 3**).

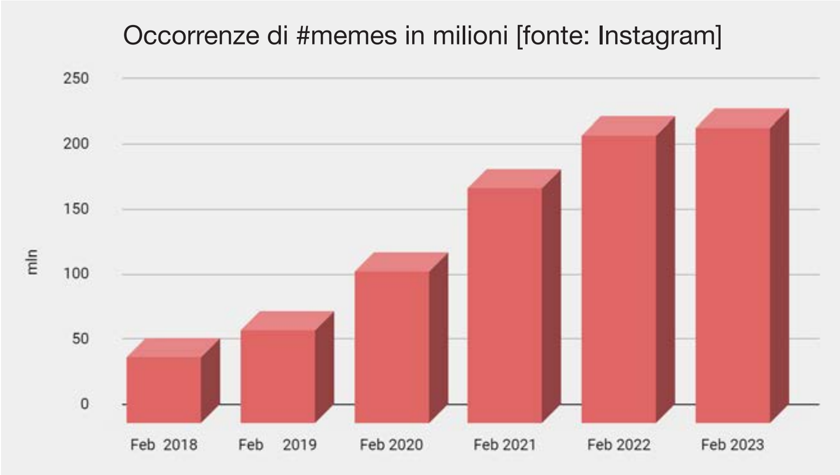


Figura 3. L'hashtag #memes su Instagram da febbraio 2018 (dati raccolti dall'autrice).

Nel caso specifico dei meme matematici, lo studio di Bini et al. (2022) illustra con svariati esempi il valore dei meme matematici come oggetti culturali all'interno della memesfera matematica, cioè l'insieme delle numerose comunità online dedicate ai meme matematici ospitate dai principali social network come Facebook, Instagram o Reddit. All'interno di queste comunità i meme matematici sono percepiti come identificatori di appartenenza e come opportunità di apprendimento. La condivisione di un meme matematicamente corretto e particolarmente ben congeniato diventa un elemento per contraddistinguersi tra i membri della comunità stessa, tanto che l'accuratezza con cui l'autore di un meme controlla il contenuto matematico del meme prima di condividerlo è diventata un tratto proverbiale all'interno delle comunità (Bini et al., 2022, p. 1268). Una volta condiviso il meme, lo spazio dei commenti sotto di esso si popola degli interventi dei membri della comunità che discutono e argomentano sul significato matematico del meme, rispondendo a domande di utenti che colgono l'opportunità di apprendimento chiedendo spiegazioni su aspetti matematici non chiari.
Gli esempi in Figura 1 e Figura 2 mostrano che, anche se i meme sono costruiti attraverso un processo di copia (che è uno degli elementi base della cultura digitale), essi sono intrinsecamente diversi dagli oggetti digitali virali che sono semplicemente copiati e condivisi nel web senza alcun intervento personale da parte dell'utente. Si tratta piuttosto di una concezione di copia simile a quella postmoderna di Queneau o Warhol, che chiama in gioco le capacità creative del suo autore (Bollini, 2017), e dunque anche le capacità interpretative del lettore. Autore e lettore di un meme sono quindi coinvolti in un processo di collaborazione che possiamo assimilare alla *cooperazione interpretativa* descritta da Eco nel suo saggio intitolato "Lector in Fabula" (1979). Secondo Eco, un testo è un «meccanismo pigro» (p. 52) che affida al lettore l'iniziativa interpretativa: il lettore, quindi, non è solo un destinatario passivo del testo, ma un collaboratore attivo nella costruzione del significato, ed è proprio questa cooperazione interpretativa a rendere la lettura coinvolgente, perché porta alla costruzione personale di significati. Fermo restando il ruolo del lettore, un testo (e dunque anche un meme) comunque «desidera essere interpretato con un margine sufficiente di univocità» (Eco, 1979, p. 52). Per guidare il suo lettore nel percorso di cooperazione interpretativa, il testo incorpora quindi precise strategie narrative, che devono essere riconosciute dal lettore per poter ricostruire il significato concepito nelle intenzioni dell'autore.
Il focus di questo articolo è esattamente la concettualizzazione delle strategie narrative dei meme immagine: verrà descritto il *costrutto della Tripla S*, uno strumento semiotico per decodificare e comprendere i meme, sia in generale che quelli di natura matematica. Sarà anche illustrato come questo strumento possa essere utilizzato come strumento di ricerca per indagare i processi cognitivi degli studenti durante l'interazione con i meme matematici e come strumento didattico per gli insegnanti che desiderano utilizzare i meme matematici in classe.

2 Razionale: la valenza didattica dei meme matematici

È un'idea condivisa in letteratura che il significato attribuito dagli studenti a un'attività educativa sia profondamente intrecciato con l'efficacia del compito in termini di apprendimento, ma anche che i significati attribuiti da studenti e insegnanti possano essere drammaticamente diversi (Howson, 2005; Kilpatrick et al., 2005; Skovsmose, 2005). Gli insegnanti possono ritenere «che un'attività abbia un significato come parte del curriculum, mentre gli studenti potrebbero ritenere che la stessa attività sia totalmente priva di significato» (Kilpatrick et al., 2005, p. 2, traduzione dell'autrice). Pur tenendo presente l'obiettivo finale di insegnare un concetto matematico, gli insegnanti non dovrebbero sottovalutare il ruolo di «rilevanza e significato personale» (Howson, 2005, p. 18, traduzione dell'autrice) nella creazione di significato da parte degli studenti che pone le basi per l'apprendimento.

Abbracciando la posizione di Skovsmose (2005) sull'importanza del significato personale dato a un'azione nel processo di apprendimento, rileviamo che «un compito educativo è quello di introdurre una cornice che possa sostenere le ragioni dell'apprendimento» (p. 94, traduzione dell'autrice). I meme matematici incarnano elementi di mondi diversi; possono quindi intercettare significati legati alla vita sociale degli studenti (creare un meme originale e divertente, avere visibilità all'interno del gruppo classe) che possono lavorare in sinergia con significati scolastici più tradizionali che riguardano l'apprendimento del concetto matematico. Inoltre, introdurre i meme matematici in classe non significa solo sfruttare la vita sociale degli studenti come risorsa per attivare motivazioni per l'apprendimento, ma offre anche agli insegnanti l'opportunità di conoscere meglio la cultura in cui vivono gli studenti al di fuori della scuola. Il compito dell'insegnante è introdurre gli studenti alla cultura della matematica, e questo processo di *inculturazione* è più agevole se l'insegnante è più consapevole della cultura da cui provengono gli studenti (Skovsmose, 2005).

In questi ultimi anni, la letteratura accademica ha infatti iniziato a rivolgere le sue attenzioni all'esplorazione delle potenzialità didattiche dei meme, sia nel campo della didattica della matematica (Abrams, 2021; Bini et al., 2021; Videla et al., 2022) sia in altri ambiti disciplinari, come la didattica della psicologia (Kath et al., 2022), delle lingue straniere (Romero & Bobkina, 2021) o della farmacia (Brown, 2020). Questi studi hanno mostrato che l'utilizzo dei meme nella didattica può essere efficace sotto diversi aspetti: catturare l'attenzione degli studenti e mantenere l'interesse durante le lezioni; aiutare gli studenti a sintetizzare informazioni, a cogliere l'essenza di un argomento e a ricordare concetti chiave; favorire l'associazione di idee e la memorizzazione; promuovere la creatività e l'interazione tra gli studenti, incoraggiando la condivisione e la discussione di contenuti rilevanti per il programma scolastico.

Tuttavia, l'introduzione in classe di un oggetto così intrinsecamente diverso da tutti gli altri strumenti di apprendimento, e spesso liquidato come prodotto di una sottocultura, sfida il tradizionale paradigma educativo e sposta l'insegnante da una zona di comfort a una zona a rischio (Skovsmose, 2001). Questo è il motivo per cui questo articolo si concentra sulla descrizione di uno strumento semiotico che faccia da guida nel mappare la connessione tra la cultura digitale e la cultura matematica nel meme. Questo strumento ha lo scopo di accompagnare gli insegnanti nella comprensione dei meme matematici, mettendo in evidenza le strategie narrative che conducono il lettore nel percorso di cooperazione interpretativa (Eco, 1979) che dà accesso al pieno significato matematico del meme, e dunque fornire agli insegnanti gli strumenti per progettare attività educative che incorporano i meme matematici.

3 Il costrutto della Tripla S: uno strumento semiotico per comprendere un meme

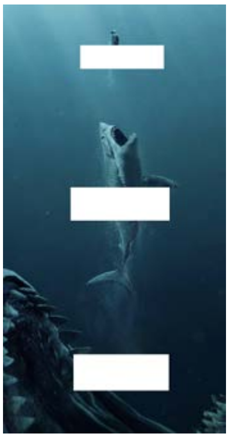
Sin dalla nascita del concetto nel 1976, la letteratura sui meme ha cercato di decostruire questi artefatti nelle loro componenti caratteristiche. Nella **Tabella 1** sono riassunti i quattro schemi interpretativi più citati nella letteratura sui meme.

<table>
<tr><th></th><th>Schema di interpretazione dei meme</th><th>Obiettivo</th></tr>
<tr><td>"The selfish gene"
(Dawkins, 1976/2016)</td><td>– Longevità: la durata della vita di un meme
– Fecondità: la rapidità e l'entità della diffusione nel meme pool
– Fedeltà alla copia: la misura in cui il meme rimane invariato durante la trasmissione</td><td>Definire il concetto di meme</td></tr>
<tr><td>"The language of Internet memes"
(Davison, 2012)</td><td>– Manifestazione: i fenomeni osservabili che costituiscono il meme
– Comportamento: l'azione intrapresa da un individuo per produrre il meme
– Ideale: il concetto o l'idea trasmessa dal meme</td><td>Scomporre il meme nelle sue componenti materiali</td></tr>
<tr><td>"Memes in digital culture"
(Shifman, 2013)</td><td>– Contenuto: idee e ideologie trasmesse dal meme
– Forma: incarnazione fisica del messaggio
– Posizione: la posizione dell'autore in relazione al contenuto espresso dal meme</td><td rowspan="2">Scomporre il meme nelle sue componenti materiali e associazioni relazionali</td></tr>
<tr><td>"Online memes, affinities and cultural production"
(Knobel & Lankshear, 2019)</td><td>– Sistema referenziale: l'idea trasmessa da un meme
– Sistema contestuale: relazioni sociali implicate dal meme
– Sistema ideologico: valori, credenze e visioni del mondo trasmessi dal meme</td></tr>
</table>

Tabella 1. Un'indagine sugli schemi di interpretazione dei meme in letteratura.

Questi schemi di interpretazione delineano sì le caratteristiche di un meme, ma ai fini dello studio presentato in questo articolo non forniscono informazioni semplici e chiare sulle strategie narrative necessarie per attivare il processo di creazione di significato di un meme e, nel caso di meme matematici, comprendere il significato matematico trasmesso. Lo schema di Dawkins è utile per definire i

meme, distinguendoli da altri oggetti culturali: questo può essere applicato, ad esempio, per identificare la Gioconda di Leonardo come meme. Le terzine di Davison, di Shifman e di Knobel & Lankshear evidenziano cosa si può leggere nel meme in termini di idee e punti di vista, ma non dove o come cercarlo. Per fornire aiuto concreto agli insegnanti, abbiamo bisogno di uno strumento che identifichi chiaramente le diverse componenti dei meme, collegando ciascuna componente al suo dominio culturale, consentendo così agli insegnanti di riconoscere e decodificare le componenti e infine riconnetterle insieme per comprendere l'idea matematica rappresentata dal meme.
Il costrutto della Tripla S realizza esattamente questo obiettivo. Esso è stato proposto da Bini e Robutti (2019), e comporta l'identificazione di tre livelli di significato cosiddetti parziali che concorrono alla costruzione del significato globale di un meme: *Social*, *Strutturale* e *Specializzato* (da cui il nome *Tripla S*). Nella **Tabella 2** vengono descritti i tre significati parziali e ne viene dato un esempio di applicazione nel caso del meme matematico presentato in **Figura 2**. Per il significato strutturale è stata adottata la terminologia di Bini et al. (2023, p. 149).

Significato parziale	Descrizione	Applicazione del costrutto al meme matematico in **Figura 2**
Social	Significato veicolato dal valore convenzionalmente attribuito nella memesfera alla componente figurale del meme (base)	 Significato social: descrivere una gerarchia tra elementi
Strutturale	Significato veicolato dal valore convenzionalmente attribuito nella memesfera alla composizione grafica del meme: stile del carattere, posizione e struttura del testo, disposizione complessiva della composizione	 Significato strutturale: object labelling (gli elementi nella figura incarnano l'oggetto descritto nel testo sovrapposto)

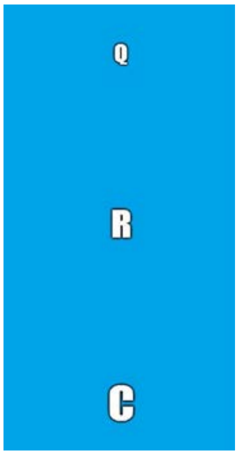
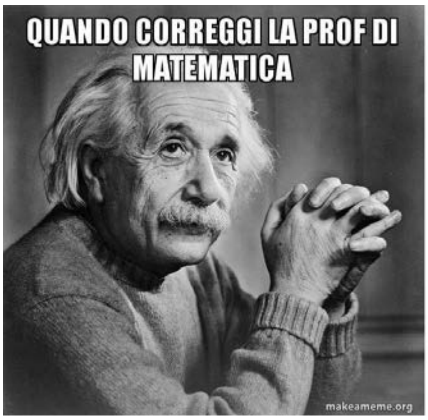
Specializzato	Significato veicolato da testi, elementi pittorici, aggiunte o alterazioni dell’immagine originale riferite a un argomento specifico	 Significato specializzato: algebra, relazioni tra gli insiemi numerici

Tabella 2. I tre significati parziali di un meme.

I significati social e strutturale sono elementi della cultura digitale e sono attribuiti alle basi memetiche attraverso un processo di semiosi collettiva. La «*memeificazione* delle immagini digitali è di fatto un processo di *resemiotizzazione*, per cui il contenuto viene prelevato da un testo nel dominio sorgente e rifuso in una forma modificata durante la produzione di un successivo testo derivato nel dominio obiettivo» (Laineste & Voolaid, 2016, p. 28, traduzione dell’autrice). La trattazione su quali siano le caratteristiche che rendono un’immagine adatta ad essere memeificata esula dallo scopo di questo lavoro, possiamo semplicemente sottolineare che diventano meme quelle immagini che sono particolarmente efficaci nel trasmettere idee o emozioni, cioè che hanno la *relatability* che Jenkins et al. (2013) associano all’idea di oggetti digitali adatti alla diffusione virale.
Quando l’immagine raggiunge una certa visibilità nella memesfera, i significati social e strutturale si stabilizzano e l’immagine guadagna un nome ufficiale, come nel caso di *Bigger fish*. Queste informazioni vengono quindi condivise nell’enciclopedia online KnowYourMeme.[3] I significati social e strutturale potrebbero apparire come poco distinguibili, ma in realtà essi sono ben differenziati nella cultura dei meme: mentre il significato social riguarda la base specifica del meme, il significato strutturale è una categorizzazione più astratta, che prescinde dalla specifica immagine, e fornisce a chi crea e interpreta il meme uno strumento per decodificare la posizione e l’aspetto generale del testo originale aggiunto dall’autore della mutazione memetica. È proprio grazie all’indipendenza tra significato social e strutturale che è possibile creare nuovi meme (e non solo nuove mutazioni memetiche di basi esistenti), cioè *memeificare* immagini prese dal web, attribuendo loro un significato strutturale che ne fissa l’estetica compositiva.
A parità di base memetica, i significati social e strutturale sono comuni a tutte le mutazioni e costituiscono l’essenza del processo memetico. Quando un utente di Internet crea una mutazione originale a partire da una base memetica, è tenuto a rispettare queste convenzioni di significato. Ciò garantisce all’autore del meme di essere riconosciuto come *insider* nella memesfera (Nissenbaum & Shifman, 2017) e guida il lettore nel percorso di cooperazione interpretativa, garantendo che il meme verrà «interpretato con un margine sufficiente di univocità» (Eco, 1979, p. 52).
Il significato specializzato è invece legato alla contestualizzazione culturale del meme immaginata

3. https://knowyourmeme.com

dall'autore della specifica mutazione, che è matematica nel caso dell'esempio in Figura 2 (ma potrebbe essere storica, ecologica o cinematografica come nelle mutazioni in Figura 1).
Tutti e tre i significati parziali sono necessari per la comprensione del meme, e il loro intreccio concorre alla individuazione del significato globale che, nel caso di un meme matematico, corrisponde a un enunciato matematico (Bini et al., 2022). Per l'esempio analizzato in Tabella 2 possiamo dire che l'enunciato rappresentato è la relazione insiemistica $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Non tutti gli oggetti digitali in rete che hanno una natura visuale e parlano di matematica sono meme matematici: il costrutto della Tripla S ci permette di operativizzare il concetto di *meme matematico*, delineando non solo *cosa* è un meme matematico ma anche *cosa non* è. Per essere tale, infatti, l'oggetto in questione deve essere prima di tutto un *meme*, cioè deve essere una mutazione di una base memetica con un significato social e strutturale, ed essere *matematico*, cioè deve avere un significato specializzato che si riferisce ad argomenti che appartengono all'ambito disciplinare della matematica.
Nella Figura 4 si vedono due esempi di oggetti digitali di natura visuale che *non* sono meme matematici: a sinistra un esempio di meme sulla base nota come *Serious Einstein*, una *reaction image*, ovvero un'immagine alla quale vengono sovrapposti testi in alto ed eventualmente in basso (significato strutturale), utilizzata per rappresentare situazioni in cui ci si sente particolarmente intelligenti (significato social). Questo meme non è matematico, perché il significato specializzato riguarda le emozioni legate al fare matematica e non la conoscenza disciplinare, in questo caso la sensazione di genialità che pervade lo studente che corregge l'insegnante di matematica. A destra, una vignetta che ha un contenuto propriamente matematico, accessibile solo a chi possiede le conoscenze disciplinari relative al ruolo del numero irrazionale π nel calcolo della lunghezza della circonferenza (o dell'area del cerchio), tuttavia essa non è un meme, ovvero non nasce dalla mutazione di una base memetica riconosciuta come tale nella memesfera, ma è un'opera unica (come testimonia la firma dell'autore della vignetta) che come tale viene condivisa sul web.



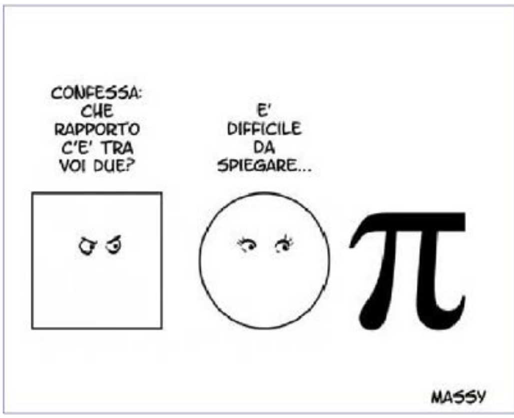


Figura 4. Due esempi di immagini dal web che non sono meme matematici (fonte: Facebook).

Questi due tipi di oggetti digitali possono avere potenzialità didattiche, che però sono profondamente diverse da quelle dei meme matematici. I meme emozionali non stimolano la rielaborazione di concetti matematici ma, quando sono creati dagli studenti, possono servire a dare visibilità alle sensazioni che essi associano con il fare matematica. La vignetta non si presta a fare da base a nuove mutazioni memetiche e quindi non promuove né la creatività degli studenti né la loro capacità di produrre nuove rappresentazioni di idee matematiche, ma può essere utilizzata dall'insegnante come spunto per una discussione matematica (Bartolini Bussi et al., 1995).
Il potenziale educativo dei meme matematici risiede, invece, nell'interazione e nella convergenza di significati provenienti da diversi sistemi culturali all'interno e all'esterno dell'ambiente scolastico, nonché

nella collaborazione dell'autore e del lettore nel processo di cooperazione interpretativa. Questi oggetti sono sia oggetti della cultura digitale che oggetti della cultura matematica e coinvolgono autore e lettore in un percorso di codifica e decodifica che mobilita competenze social e competenze matematiche. Quindi, creare o interpretare un meme matematico implica lavorare con una nuova forma di rappresentazione di idee matematiche, che richiede la capacità di riconoscere strutture matematiche in oggetti non matematici, una componente chiave del ragionamento matematico secondo il PISA 2022 Mathematics Framework.[4]

Dato che l'insegnante è di solito più a suo agio con la cultura matematica che con quella digitale, potrebbe trovarsi in difficoltà nel decodificare il significato social di alcune basi meno comprensibili: in questo caso gli studenti sono felici di trovarsi nel ruolo di detentori della conoscenza e il processo di insegnamento/apprendimento e di inculturazione (Skovsmose, 2005) si rinforzano perché diventano bidirezionali. Infine, le discussioni matematiche che scaturiscono da questi oggetti risultano particolarmente coinvolgenti per tutto il gruppo classe, perché si originano da oggetti prodotti dagli studenti e non proposti dall'insegnante, e arrivano a coinvolgere studenti che solitamente tendono a partecipare di meno, che in questo caso si sentono chiamati in causa proprio in quanto autori del meme.

Concludiamo questo paragrafo osservando che, se interpretiamo i significati social, strutturale e specializzato come dimensioni nello spazio della memesfera matematica, possiamo immaginare di rappresentare un meme matematico con un punto in uno spazio 3D come in Figura 5.

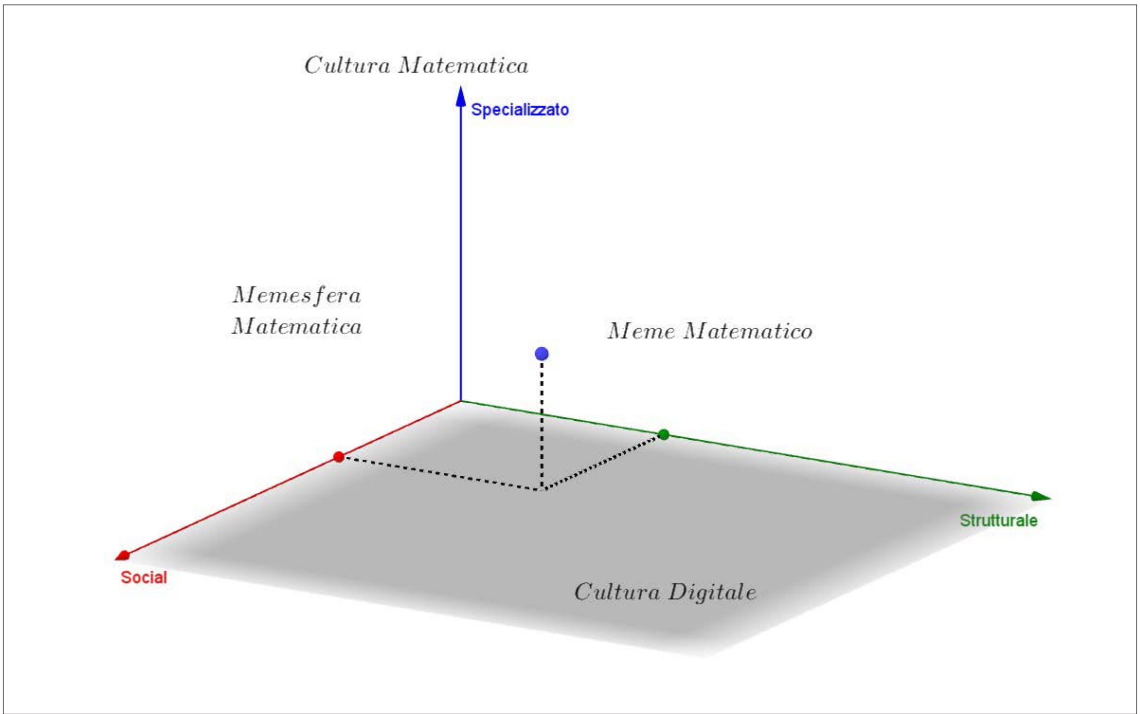


Figura 5. I significati parziali come dimensioni in uno spazio 3D.

Queste dimensioni sono caratteristiche osservabili che possono assumere solo valori qualitativi, quindi non possiamo aggiungere scale metriche agli assi cartesiani e non possiamo raccogliere informazioni numeriche da questo diagramma. Tuttavia, esso è utile per visualizzare alcune informazioni sui dati: la connessione tra i significati e i domini culturali, nonché l'assenza di gerarchia

4. https://pisa2022-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning

tra i tre significati parziali. Infatti, gli assi social e strutturale determinano il piano che appartiene alla cultura digitale, mentre l'asse specializzato è dove si colloca la cultura matematica; tutte e tre le coordinate sono necessarie per localizzare il punto nel diagramma: possiamo quindi dire che il meme matematico è un oggetto intrinsecamente *eteroglosso*, richiamando un neologismo coniato da Bakhtin (1981) per descrivere la coesistenza di linguaggi diversi in un unico stile narrativo. Nonostante questo aspetto eteroglosso e multiculturale, è possibile accedere alle coordinate nell'ordine con cui il lettore è più familiare: ciò offre agli insegnanti la possibilità di entrare nella memesfera matematica attraverso il significato specializzato con cui potrebbero sentirsi più a proprio agio. A questo proposito si veda ad esempio lo strumento euristico per la creazione di nuovi meme matematici proposto da Bini et al. (2023). L'interpretazione dei significati parziali come dimensioni in uno spazio 3D sarà anche utile per comprendere meglio la progettazione delle attività da parte degli insegnanti che verrà illustrata nel par. 5.

4 Il costrutto della Tripla S come strumento di ricerca

In questo paragrafo vedremo come il costrutto della Tripla S può passare dall'essere uno strumento semiotico interpretativo dei significati veicolati da un meme, a essere uno strumento di ricerca che consente l'indagine dei processi cognitivi degli studenti.
Gli esempi che seguono sono stati raccolti nel corso di un'attività di creazione di meme condotta da studenti e studentesse della Laurea Magistrale in Matematica presso l'Università di Torino. L'attività è stata svolta nel marzo 2022 e ha coinvolto 34 tra studenti e studentesse del corso di didattica della matematica. Inizialmente, l'autrice del presente articolo ha presentato loro il costrutto della Tripla S mostrando come può essere utilizzato per analizzare i significati veicolati da un meme matematico. Successivamente, gli studenti hanno lavorato a coppie per creare meme matematici sui significati specializzati previsti dalle Indicazioni nazionali per i licei (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010). I meme sono stati creati utilizzando il sito Imgflip e condivisi su una bacheca Padlet[5] appositamente creata per l'occasione. La bacheca era accessibile a tutti i partecipanti e consentiva l'utilizzo delle *reaction*, ovvero dava la possibilità di esprimere "mi piace" o "non mi piace" per i singoli meme pubblicati. Questo spazio di condivisione digitale per le produzioni è stato progettato per ricreare l'ambiente naturale dei meme nella memesfera, preservando così la loro natura originale e, in particolare, la possibilità di ricevere reaction che rappresenta un elemento importante nella vita di un meme come ricompensa tribale.
A questa attività in presenza è seguito un compito a distanza, sempre svolto a coppie, in cui agli studenti è stato chiesto di selezionare uno dei meme creati dai loro compagni che ritenevano adatto come punto di partenza per una discussione matematica in classe, analizzarlo identificando il suo significato specializzato e descrivere una possibile struttura di discussione matematica basata su quel meme. Il compito a distanza è stato svolto per iscritto e consegnato tramite la piattaforma Moodle dell'Università di Torino. Infine, è stato somministrato singolarmente a studenti e studentesse un questionario online volto a raccogliere le loro impressioni sull'attività e a indagare le scelte effettuate nella creazione del proprio meme e nell'analisi dei meme dei compagni. In questo contesto, il costrutto della Tripla S, e in particolare la connessione tra i significati parziali e i domini culturali, è stata una guida nella formulazione delle domande del questionario. Dal momento che il meme matematico è un prodotto eteroglosso che combina elementi della cultura digitale e della cultura matematica, si è voluto indagare quale ambito culturale avesse ispirato gli studenti nella creazione del proprio meme e nella scelta del meme per la discussione. Nel questionario, tra le altre domande, agli studenti sono state quindi proposte le seguenti domande a scelta multipla.

5. https://padlet.com/

Domanda 1: Nella creazione del meme da dove siete partiti?
- a. Dalla base.
- b. Dall'argomento matematico.

Domanda 2: Cosa vi ha guidati nella scelta del meme su cui impostare la discussione?
- a. La base del meme.
- b. Il contenuto matematico.
- c. Altro (specificare): …………………………………..

Dall'analisi delle risposte a queste due domande si sono ricavate delle informazioni interessanti, riassunte nelle immagini in **Figura 6**. Alla domanda 1, il 71% ha risposto di essere partito «dalla base» (**Figura 6**, a sinistra) indicando come elementi attivatori del processo creativo i significati social e strutturale che identificano il piano della cultura digitale. Nella domanda 2, invece, la percentuale di coloro che hanno selezionato il meme per la discussione matematica scegliendo in relazione al significato social e strutturale della base scende al 32% (**Figura 6**, a destra).

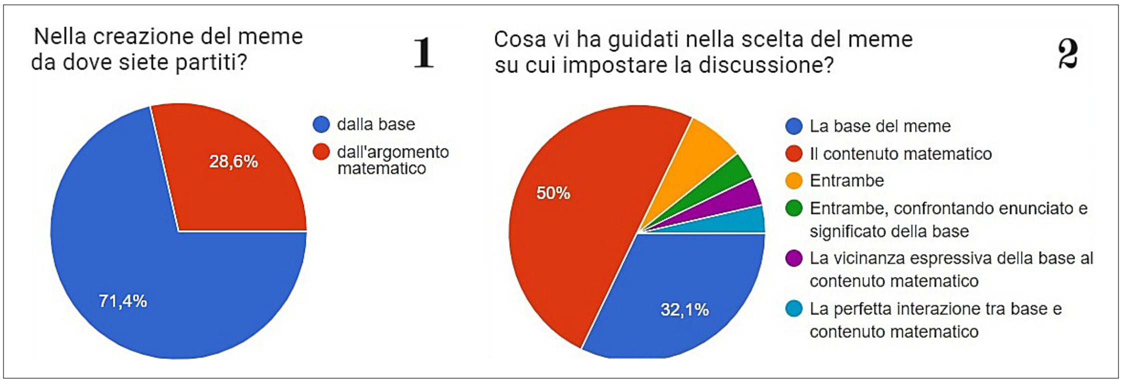
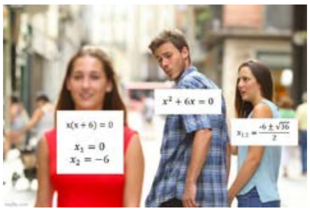
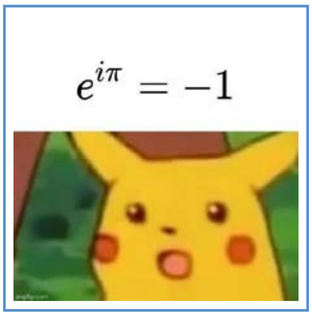
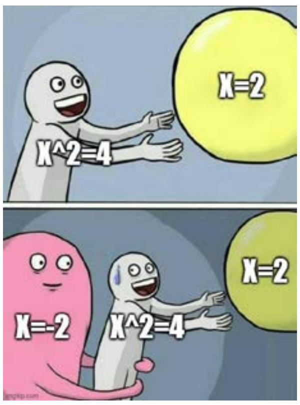


Figura 6. Ambiti culturali di partenza per la creazione (1) e la discussione del meme (2).

Il confronto tra queste percentuali rafforza l'idea che il meme matematico sia contemporaneamente un meme e un oggetto matematico (un enunciato, Bini et al., 2022). Le due nature convivono in uno stato che possiamo assimilare a una sorta di *sovrapposizione*, e – a seconda del contesto di interazione – prevale la natura memetica o la natura matematica. Nella fattispecie, quando il meme matematico viene creato, l'elemento che accende il processo creativo è, nella maggioranza dei casi, la base del meme con i suoi significati social e strutturale. In questa fase prevale quindi la natura memetica, stimolata dal desiderio di creare un meme originale e divertente per essere riconosciuto come *insider* nella memesfera (Nissenbaum & Shifman, 2017). Quando invece si deve scegliere il meme adatto per una discussione matematica a prevalere è la natura matematica, cioè il significato specializzato, o al limite il buon accordo tra le due nature, ovvero tra i tre significati.
Possiamo approfondire ulteriormente la relazione tra il significato social e il significato specializzato del meme, osservando le risposte date a un'altra domanda del questionario: «Che cosa vi ha fatto associare la base all'argomento matematico?». Una selezione delle risposte è presentata nella **Tabella 3**, affiancata ai meme a cui la risposta fa riferimento e ai rispettivi tre significati parziali.

<table>
<tr><th>Meme prodotto</th><th>Significati</th><th>Che cosa vi ha fatto associare la base all’argomento matematico?</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

Base: Distracted boyfriend</td><td>Social: mostrare interesse per qualcosa di nuovo e più attraente</td><td rowspan="3">«Nel meme prodotto con Bianca,[6] lo sguardo del ragazzo nel meme è uguale al mio quando capisco che un problema matematico lo posso affrontare con un’osservazione che lo semplifica e diventa perciò più semplice».</td></tr>
<tr><td>Strutturale: object labelling</td></tr>
<tr><td>Specializzato: algebra, equazioni quadratiche
$x^2 + 6x = 0 \Longleftrightarrow$
$x\,(x + 6) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

Base: Surprised Pikachu</td><td>Social: mostrare stupore, meraviglia</td><td rowspan="3">«Abbiamo riflettuto sul significato della base che avevamo scelto e abbiamo pensato ad un argomento matematico che ci suscitasse la stessa emozione».</td></tr>
<tr><td>Strutturale: reaction image</td></tr>
<tr><td>Specializzato: numeri complessi, identità di Eulero</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

Base: Running Away Balloon</td><td>Social: essere vicino a qualcosa che desideri, che ti scivola tra le dita</td><td rowspan="3">«La presenza di un personaggio contento di raggiungere un risultato e la presenza di un altro personaggio che mette in discussione questo risultato e fa preoccupare il primo (risposta non corretta completamente, aggiunta correttiva)».</td></tr>
<tr><td>Strutturale: object labelling</td></tr>
<tr><td>Specializzato: algebra, equazioni quadratiche
$x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$</td></tr>
</table>

Tabella 3. Esempi di meme con la motivazione dell’associazione tra significati.

6. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i nomi sono stati cambiati.

Osserviamo dapprima che tutti gli esempi riportati nella Tabella 3 sono propriamente meme matematici. Anche se le basi utilizzate esprimono emozioni (come spesso accade per le basi memetiche, che diventano tali proprio per la loro *relatability* già citata in precedenza), queste emozioni sono collegate ai significati specializzati matematici veicolati dagli elementi aggiunti dagli studenti nella creazione dei meme stessi. Dunque, le emozioni connesse alle basi memetiche sono comprensibili e condivisibili solo da un lettore che abbia gli strumenti per comprendere il contenuto matematico del meme, a differenza di quanto avviene nel meme emozionale sulla base *Serious Einstein* (Figura 4, a sinistra) in cui l'emozione connessa alla base non è legata a una conoscenza disciplinare specifica, ma alla generica esperienza del fare matematica a scuola.
Successivamente, esaminando le risposte presenti nella terza colonna della Tabella 3, notiamo che emerge un elemento significativo che permette di evidenziare una differenza tra il processo di creazione del meme matematico e il suo successivo utilizzo. Questa differenza si manifesta nella natura dell'associazione tra la base del meme e l'argomento matematico scelto come significato specializzato, evidenziando due approcci distinti.
Nel primo approccio, la creazione di un meme si sviluppa più come un processo di intuizione e *trouvaille*. Gli autori dei meme si immedesimano nell'elemento figurale dei meme e nei loro significati social. Questo coinvolgimento personale è evidenziato dalle affermazioni come «lo sguardo del ragazzo nel meme è uguale al mio», «un argomento matematico che ci suscitasse la stessa emozione», «un personaggio contento di raggiungere un risultato». Queste risposte indicano che la creazione di meme in questo contesto è guidata dall'empatia e dall'identificazione con l'elemento visuale e il significato social, piuttosto che da un'intenzione matematica specifica.
D'altra parte, il secondo approccio evidenzia un uso più diretto e intenzionale dei meme, in cui gli autori dei meme cercano di collegare in modo deliberato un concetto matematico specifico alla base del meme. Questo approccio può essere visto come una sorta di "intenzione matematica", in cui il meme è utilizzato come strumento per comunicare un concetto o una idea matematica in modo chiaro e diretto.
Questi due approcci distinti dimostrano la versatilità dei meme matematici. Essi possono essere sia veicoli di empatia e condivisione di emozioni personali, come nel primo approccio, sia strumenti di comunicazione matematica intenzionale, come nel secondo. In ogni caso, i meme matematici rappresentano una forma di espressione culturale ibrida, in cui la matematica e i meme si fondono in una sinergia potente. In sostanza, i meme matematici rappresentano una fusione di culture, simboleggiando una fusione di concetti matematici e cultura memetica. In particolare, è la base del meme e il suo significato social che risuona con le emozioni personali dell'autore. Queste emozioni, strettamente connesse al significato specializzato incorporato nel meme, diventano il ponte che l'autore cerca di stabilire con il pubblico. I meme matematici diventano quindi veicoli attraverso i quali gli autori non solo trasmettono concetti matematici ma condividono anche le proprie esperienze emotive, creando una profonda connessione con i loro lettori. Le risposte degli studenti, dunque, avvalorano l'ipotesi formulata da Bini et al. che «i meme matematici sono enunciati matematici, ma allo stesso tempo sono qualcosa di più» (2023, p. 171, traduzione dell'autrice).
Questo processo di scambio e commistione tra matematica e meme contribuisce alla creazione di un linguaggio visivo unico e dinamico che può essere utilizzato per promuovere una comprensione più profonda e diffusa della matematica. In sostanza, i meme matematici non sono solo enunciati matematici, ma rappresentano una forma di comunicazione che va oltre il mero aspetto tecnico, trasmettendo emozioni, identità e connessioni personali.

5 Il costrutto della Tripla S come strumento didattico

In questo paragrafo vedremo come la familiarità con i tre significati parziali e la conoscenza dei significati social delle basi memetiche possano supportare gli insegnanti nella progettazione e nella valutazione di attività educative che coinvolgono i meme matematici.
Gli esempi sono stati raccolti nel corso di un'attività di creazione di meme da parte di studenti della scuola secondaria di secondo grado.[7] L'attività è stata svolta nel mese di dicembre 2019 e ha coinvolto tre classi seconde di liceo scientifico e i rispettivi insegnanti di matematica. Gli insegnanti avevano partecipato a un incontro di formazione sui meme matematici tenuto dall'autrice del presente articolo all'interno del programma di sviluppo professionale docenti SSPM (Scuole secondarie potenziate in matematica)[8] del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino nell'aprile dello stesso anno. Durante l'incontro, agli insegnanti è stato presentato il costrutto della Tripla S e mostrato come utilizzarlo per interpretare e creare meme matematici.
L'attività qui analizzata è stata ideata e proposta alle classi autonomamente dagli insegnanti: l'autrice non ha contribuito alla progettazione dei compiti e non era presente durante lo svolgimento dell'attività; ha successivamente raccolto i prodotti degli studenti e i feedback degli insegnanti ad attività conclusa.
L'attività proposta si è articolata in due compiti distinti, con un duplice obiettivo didattico: da un lato, incoraggiare la metacognizione e la riflessione sugli errori tipici, dall'altro favorire il consolidamento di argomenti curriculari già affrontati in classe. Per perseguire questi due obiettivi didattici, gli insegnanti hanno sfruttato il costrutto della Tripla S e la conoscenza dei significati social delle basi memetiche.
Il costrutto della Tripla S è stato utilizzato dagli insegnanti per impostare i due compiti di creazione di meme: nel compito A gli insegnanti hanno scelto le basi da utilizzare per i meme, fissando i significati social e strutturale, mentre gli studenti hanno creato i meme aggiungendo i loro significati specializzati; nel compito B gli insegnanti hanno scelto il significato specializzato, lasciando gli studenti liberi di esprimerlo attraverso il significato social e strutturale che preferivano. La conoscenza dei significati social delle basi memetiche ha invece guidato la scelta delle immagini per il compito A, che si è concentrata su basi che favorissero la riflessione sugli errori, come si vedrà nel seguito.
Utilizzando la visualizzazione dei tre significati parziali come dimensioni nello spazio della memesfera matematica in 3D proposta in **Figura 5**, possiamo interpretare questi due compiti come degli opportuni sottospazi. Nel compito A, fissando la base memetica si fissano i significati social e strutturale: i meme matematici creati dagli studenti saranno quindi punti su una retta individuata dall'intersezione dei due piani identificati dai significati social e strutturale. Le diverse altezze dei punti identificano i diversi argomenti matematici toccati dal significato specializzato del meme (**Figura 7**, a sinistra). Nel compito B, i meme matematici creati dagli studenti sono invece punti vincolati a stare nel piano identificato dal significato specializzato fissato dagli insegnanti (**Figura 7**, a destra).

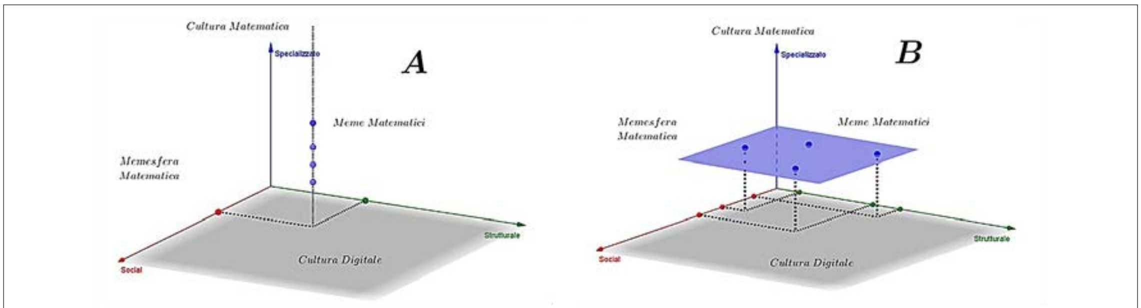


Figura 7. I due compiti proposti come sottospazi della memesfera matematica.

7. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.
8. https://frida.unito.it/wn_pages/tmContenuto.php/456_matematica-teorie-e-applicazioni/45/

I due compiti si sono svolti in lezioni successive, per ciascuno di essi gli studenti nelle tre classi hanno lavorato in classe, a coppie, con la presenza degli insegnanti e hanno avuto un'ora di tempo per la creazione dei meme. I meme prodotti sono quindi stati condivisi in bacheche Padlet create dagli insegnanti e sono stati oggetto di discussioni matematiche nelle rispettive classi, volte ad approfondire i significati specializzati toccati dai meme e a chiarire possibili misconcezioni.

5.1 Il primo compito: fissiamo i significati social e strutturale

L'obiettivo didattico del compito A (**Figura 7**, a sinistra) era stimolare negli studenti una riflessione metacognitiva sui propri errori tipici. Gli insegnanti hanno quindi scelto una gamma di quattro basi memetiche che rappresentano situazioni in cui si sbaglia o si omette qualcosa. Per motivi di spazio qui ne viene descritta nel dettaglio una sola (**Tabella 4**) che è risultata particolarmente popolare nelle scelte degli studenti, di cui poi verranno mostrate alcune mutazioni in **Tabella 5**.

Base memetica scelta	Significati parziali
 Base: *Drowning Kid in a Pool*	Social: rappresentare situazioni in cui si fornisce una risposta corretta ma incompleta Strutturale: object labelling Text 1: situazione problematica Text 2: risposta corretta ma incompleta Text 3: elemento mancante

Tabella 4. Compito A: una delle basi memetiche scelte dagli insegnanti.

La **Tabella 5** presenta tre esempi delle mutazioni create dagli studenti: vediamo come la scelta della base fatta dagli insegnanti abbia stimolato negli studenti gli auspicati processi metacognitivi, portandoli a riflettere sulle situazioni in cui si commettono errori a causa di dimenticanze. L'elemento dimenticato spazia dal doppio prodotto nel quadrato del binomio (a sinistra), al controllo della compatibilità delle soluzioni di un'equazione con le condizioni di esistenza della stessa (al centro), fino all'uso del metodo di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare (a destra). In un'ora di lavoro, questa attività ha permesso all'insegnante di delineare una sorta di "mappa delle dimenticanze" della classe, non altrettanto facile da ottenere con altri strumenti.

Meme creati dagli studenti		
		
Significato specializzato: sviluppo del quadrato del binomio	Significato specializzato: condizioni di esistenza per un'equazione	Significato specializzato: metodi risolutivi dei sistemi lineari

Tabella 5. Compito A: esempi di meme matematici prodotti dagli studenti.

In tutti e tre i casi, i meme matematici prodotti dagli studenti sono esempi di un processo di sintesi visiva che ha permesso loro di esprimere concetti matematici anche complessi in modo originale e conciso: questo offre agli studenti l'occasione di ricordare i concetti rappresentati più facilmente e per l'insegnante costituisce uno spunto per una discussione matematica.

5.2 Il secondo compito: fissiamo il significato specializzato

Nel compito B (**Figura 7**, a destra) gli insegnanti hanno fissato il significato specializzato, scegliendo l'algebra come tema dei meme matematici da creare. In questo caso è interessante analizzare la base memetica scelta dagli studenti, e in particolare il significato social che fornisce una visione delle diverse percezioni e relazioni emotive che gli studenti hanno riguardo all'argomento su cui hanno creato il loro meme. Per evidenziare queste diverse percezioni, osserviamo tre meme matematici creati da studenti diversi, tutti basati sullo stesso argomento algebrico: la risoluzione dell'equazione $2x = 0$ (**Tabella 6**).

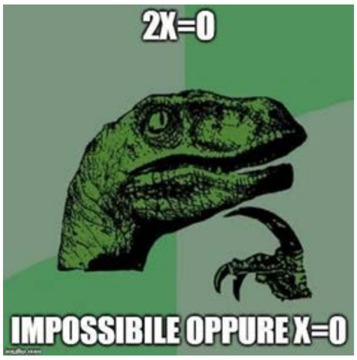
<table>
<tr><th colspan="3">Meme creati dagli studenti</th></tr>
<tr>
<td>
Base: *Philosoraptor*</td>
<td>
Base: *Pun Dog*</td>
<td>
Base: *Me and the boys*</td>
</tr>
<tr>
<td>Social: descrivere dubbi o situazioni paradossali</td>
<td>Social: raccontare una storia con un colpo di scena finale</td>
<td>Social: descrivere ricordi condivisi tra compagni di scuola</td>
</tr>
<tr>
<td>Strutturale: reaction image</td>
<td>Strutturale: reaction image</td>
<td>Strutturale: object labelling</td>
</tr>
</table>

Tabella 6. Compito B: esempi di meme matematici prodotti dagli studenti.

La scelta della base memetica in questo caso ci racconta la relazione emotiva dello studente con la misconcezione diffusa che porta a confondere i casi in cui la soluzione è $x = 0$ con l'assenza di soluzioni (equazione impossibile). Analizzando il significato social dei tre esempi in Tabella 6, vediamo come il *Philosoraptor* (a sinistra), una base usata per descrivere dubbi o situazioni paradossali, ci indica che lo studente autore del meme è ancora incerto se la soluzione corretta dell'equazione «$2x = 0$» sia «impossibile oppure $x = 0$». Il *Pun Dog* (al centro), invece, è una base costituita da una sequenza di tre immagini che viene utilizzata per raccontare una storia con un colpo di scena finale: in questo caso la storia è raccontata nelle didascalie dell'immagine in alto «$2x = 0$» e al centro «il risultato è impossibile», che apparentemente delineano la risoluzione errata dell'equazione in questione, mentre la didascalia dell'immagine in basso «qualcuno dia un meno a quest'uomo» ci rivela che l'autore del meme è consapevole che questa risposta è sbagliata e sta deliberatamente stuzzicando il lettore. L'ultimo esempio è *Me and the boys* (a destra): questa base viene utilizzata per descrivere ricordi condivisi tra compagni di scuola; in questo caso il ricordo condiviso che fa da elemento unificatore tra «io e i boys» è «che risolviamo correttamente $2x = 0$», e la soluzione corretta – lo «0» che è sovrapposto ai quattro *boys* – viene mostrata con orgoglio come un segno di legame tra i compagni.
Questi esempi offrono quindi all'insegnante la possibilità di articolare una discussione matematica sull'argomento che va oltre alla semplice dicotomia giusto/sbagliato e aggiunge delle sfumature che accolgono le interpretazioni e i sentimenti degli studenti.

6 Riflessioni conclusive

Il costrutto della Tripla S descritto in questo lavoro è pensato per essere uno strumento a disposizione dei ricercatori e degli insegnanti per comprendere, creare, studiare e utilizzare in classe questi oggetti digitali che possono rendere la matematica meno austera e più vicina agli studenti.
Sebbene la matematica sia comunemente considerata arida e priva di ogni possibile sentimento, gli insegnanti di matematica sanno che le emozioni giocano un ruolo importante nell'impegno profuso dagli studenti e nell'apprendimento matematico che ne può conseguire (Di Martino & Zan, 2011; Goldin, 2014), e che il modo con cui le nozioni vengono presentate e costruite «gioca un ruolo essenziale nella l'espressione e nell'accettazione di tutta la conoscenza matematica» (Ernest, 1999, p. 9, traduzione dell'autrice).
Il presente studio ha delle ovvie limitazioni, considerando che gli esempi presentati si basano solo su due esperimenti che coinvolgono un numero relativamente piccolo di studenti, ma conferma risultati che la letteratura accademica sui meme in generale e i meme matematici in particolare sta raccogliendo nel mondo, dagli Stati Uniti (Robinson & Robinson, 2021) all'Indonesia (Febliza et al., 2023).
I meme matematici coinvolgono autore e lettore in un processo di cooperazione interpretativa (Eco, 1979) e raccontano idee matematiche caricandole di elementi emotivi che possono favorire l'attribuzione di un significato personale alle azioni nel processo di apprendimento (Skovsmose, 2005), introducendo «una cornice che possa sostenere le ragioni dell'apprendimento» (p. 94, traduzione dell'autrice). Inoltre chiamano in causa l'alfabetizzazione visiva, ovvero la capacità di interpretare, negoziare e dare significato alle informazioni presentate sotto forma di immagine, che è una delle competenze chiave del XXI secolo. Pertanto, questi oggetti digitali si configurano come potenti strumenti didattici a disposizione degli insegnanti, a condizione che siano disposti ad ampliare il concetto tradizionale di alfabetizzazione (numerica e letteraria) e di cultura scolastica, dando spazio anche all'alfabetizzazione visiva e alla cultura digitale.
Attraverso i loro significati social, strutturale e specializzato che abbracciano la cultura matematica e

la cultura digitale, i meme matematici delineano un ritratto della matematica e dei matematici diverso dallo stereotipo noioso e privo di emozioni, contribuendo a colmare il divario tra la matematica curriculare e la lingua e il patrimonio culturale degli studenti.
In effetti, questo stereotipo trae senza dubbio origine da un tipo di cultura matematica che dovrebbe essere messa in discussione proprio attraverso i valori impartiti dalle pratiche educative. I meme matematici offrono una prospettiva interessante per esplorare i valori sociali, ideologici e personali che possono essere comunicati attraverso questo mezzo innovativo e immediato. Analizzando come questi costrutti visivi e testuali si intersecano con i metodi pedagogici consolidati, possiamo scoprire i messaggi impliciti e le credenze che evidenziano, facendo così luce sul loro potenziale sia di rivelare gli stereotipi esistenti sia di rimodellare le percezioni che circondano la matematica. Questa linea di ricerca potrebbe rappresentare un primo piccolo passo verso un'istruzione matematica più inclusiva ed equa, aprendo la strada a una comprensione più profonda della relazione simbiotica tra il discorso matematico e il panorama culturale più ampio.

Ringraziamenti
Si ringraziano gli insegnanti e gli studenti che hanno partecipato alle sperimentazioni con entusiasmo e creatività.

Bibliografia

Abrams, S. S. (2021). Reimagining numeracies: empowered, game-informed meaning making in and beyond the pandemic era. *Language and Literacy*, *23*(2), 16–31. https://doi.org/10.20360/langandlit29551

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays by M. M. Bakhtin* (tradotto da M. Holquist, C. Emerson & M. Holquist). University of Texas Press.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* CDE Modena. https://www.comune.modena.it/memo/prodotti-editoriali/saperi-e-discipline/allegati/interazione_sociale_e_conoscenza_a_scuola.pdf

Bini, G., & Robutti, O. (2019). Meanings in mathematics: Using Internet memes and augmented reality to promote mathematical discourse. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2788–2795). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02422152

Bini, G., Bikner-Ahsbahs, A., & Robutti, O. (2023). "How to meme it": Reverse engineering the creative process of mathematical Internet memes. *Educational Studies in Mathematics*, *112*(1), 141–174. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10173-1

Bini, G., Robutti, O., & Bikner-Ahsbahs, A. (2022). Maths in the time of social media: conceptualizing the Internet phenomenon of mathematical memes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(6), 1257–1296. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1807069

Bini, G., Robutti, O., & Montagnani, M. (2021). When they tell you that $i^{56} = 1$: Affordances of memes and GeoGebra in mathematics. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *28*(3), 143–151. https://cloud.3dissue.com/170388/199108/233436/IJTME-Vol28-3-2021/index.html

Bollini, L. (2017). Visual story telling. The Queneau's "Exercices de style" as a visual language learning tool. In A. Luigini et al. (Eds.), *Proceedings of the International and Interdisciplinary Conference IMMAGINI? Image and Imagination between Representation, Communication, Education and Psychology* (Vol. 1(9), 931). MDPI AG. https://doi.org/10.3390/proceedings1090931

Brown, J. D. (2020). What do you meme, professor? An experiment using "memes" in pharmacy education. *Pharmacy*, *8*(4), 202. http://dx.doi.org/10.3390/pharmacy8040202

Davison, P. (2012). The language of Internet Memes. In M. Mandiberg (Ed.), *The social media reader.* New York University Press. https://nyupress.org/9780814764060/the-social-media-reader/

Dawkins, R. (2016). *The selfish gene* (40th-anniversary ed.). Oxford University Press.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 471–482. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6

Eco, U. (1979). *Lector in Fabula. La cooperazione interpretativa nei testi narrativi.* Bompiani.

Ernest, P. (1999). Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: Philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 67–83. https://doi.org/10.1023/A:1003577024357

Eyal, N. (2014). *Hooked: How to Build Habit-Forming Products.* Portfolio.

Febliza, A., Afdal, Z., & Copriady, J. (2023). Improving students' critical thinking skills: is interactive video and interactive web module beneficial?. *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, *17*(03), 70–86. https://doi.org/10.3991/ijim.v17i03.34699

Goldin, G. A. (2014). Perspectives on emotion in mathematical engagement, learning, and problem-solving. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International Handbook of Emotions in Education* (pp. 391–414). Taylor and Francis. https://doi.org/10.4324/9780203148211

Howson, G. (2005). "Meaning" and school mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*. Mathematics Education Library (Vol. 37, pp. 17–38). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_3

Jenkins, H., Ford, S., & Green, J. (2013). *Spreadable media: creating value and meaning in a networked culture.* New York University Press. https://www.jstor.org/stable/j.ctt9qfk6w

Kath, L. M., Schmidt, G. B., Islam, S., Jimenez, W. P., & Hartnett, J. L. (2022). Getting psyched about memes in the psychology classroom. *Teaching of Psychology*, *0*(0). https://doi.org/10.1177/00986283221085908

Kilpatrick, J., Hoyles, C., & Skovsmose, O. (2005). Meanings of "Meaning of Mathematics". In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education. Mathematics Education Library* (Vol. 37, pp. 9–16). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_2

Knobel, M., & Lankshear, C. (2019). Memes online, afinidades e produção cultural (2007–2018). In V. Chagas (Ed.), *Estudos sobre Memes: história, política e novas experiências de letramento.* https://doi.org/10.13140/rg.2.2.34717.77280

Laineste, L., & Voolaid, P. (2016). Laughing across borders: Intertextuality of internet memes. *The European Journal of Humour Research*, *4*(4), 26–49. http://dx.doi.org/10.7592/EJHR2016.4.4.laineste

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali.* https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Nissenbaum, A., & Shifman, L. (2017). Internet memes as contested cultural capital: The case of 4chan's /b/ board. *New Media & Society*, *19*(4), 483–501. https://doi.org/10.1177/1461444815609313

Robinson, Z. Z., & Robinson, P. A. (2021). Using social media tools for promoting critical literacy skills in the classroom. In American Association for Adult and Continuing Education (Eds.), *Proceedings of the AAACE 2020 Conference* (pp. 183–188). https://eric.ed.gov/?id=ED611606

Romero, E. D., & Bobkina, J. (2021). Exploring critical and visual literacy needs in digital learning environments: The use of memes in the EFL/ESL University classroom. *Thinking Skills and Creativity*, *40*, 100783. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2020.100783

Shifman, L. (2013). *Memes in digital culture.* MIT Press.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM Mathematics Education*, *33*, 123–132. https://doi.org/10.1007/BF02652747

Skovsmose, O. (2005). Meaning in mathematics education. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education. Mathematics Education Library* (Vol. 1, pp. 83–100). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_6

Stryker, C. (2011). *Epic win for anonymous: How 4chan's army conquered the Web.* The Overlook Press.

Videla, R., Rossel, S., Muñoz, C., & Aguayo, C. (2022). Online mathematics education during the COVID-19 pandemic: Didactic strategies, educational resources, and educational contexts. *Education Sciences*, *12*(7), 492. MDPI AG. http://dx.doi.org/10.3390/educsci12070492

Wiggins, B. E. (2019). *The discursive power of memes in digital culture ideology, semiotics, and intertextuality.* Routledge.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 30 - 58, DOI: 10.33683/ddm.23.14.2 OPEN ACCESS

Circonferenze e spirali in un percorso di educazione matematica informale tra scuola e museo

Circumferences and spirals in an informal mathematics education path between school and museum

Raffaele Casi•, Cristina Sabena°, Massimo Borsero•• e Chiara Pizzarelli°°
•Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino – Italia
°Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino – Italia
••Istituto Comprensivo "Parri – Vian", Torino – Italia
°°Istituto Comprensivo "Alberti – Salgari", Torino – Italia

raffaele.casi@unito.it, cristina.sabena@unito.it, massimo.borsero@unito.it, chiara.pizzarelli@unito.it

Sunto / Questo lavoro si ispira alla prospettiva dell'educazione matematica informale, nella quale l'attività matematica è libera dai vincoli imposti dalle tradizioni curricolari, dai libri di testo e dalle prove di valutazione. In tale prospettiva, è stato progettato un percorso didattico che integra delle attività di insegnamento-apprendimento della matematica in aula e una visita-laboratorio al museo di Palazzo Madama a Torino. Il percorso è centrato sul tema delle circonferenze e spirali. Nell'articolo vengono discusse le scelte progettuali alla luce del quadro teorico delineato e vengono presentati i risultati di una sperimentazione svolta attraverso la metodologia del *teaching experiment* in due classi prime di scuola secondaria di primo grado, con particolare attenzione al ruolo dell'insegnante, all'integrazione tra le attività di visita-laboratorio al museo e il curriculum della classe e alla valutazione attuata nel percorso.

Parole chiave: educazione matematica informale; musei; circonferenze; spirali; valutazione formativa.

Abstract / The work presented in this article is inspired by the perspective of informal mathematics education, in which mathematical activity is free from the constraints imposed by curricular traditions, textbooks and assessment tests. From this perspective, a learning path has been designed integrating classroom mathematics teaching-learning activities and a visit-workshop to the museum of Palazzo Madama in Turin. The path focuses on the theme of circumferences and spirals. The article discusses the design choices in the light of the theoretical framework and presents the results of an experimentation carried out through the methodology of the teaching experiment in two 6th grade classes of lower secondary school, with particular attention to the teacher's role, the integration between the museum activities and the class curriculum and the formative assessment methodology implemented.

Keywords: informal mathematics education; museums; circumferences; spirals; formative assessment.

«Curricula around the world have unfortunately become so technical and precarious in the manner in which mathematics is presented that it is difficult for teachers and mathematics educators to come up with meaningful perspectives to teaching and learning. We have to reinvent contexts that may make meaningful the experience of learning mathematics».
(Radford, 2021, p. 150)[1]

1 Introduzione

Negli ultimi anni assistiamo a una crescita delle iniziative di divulgazione matematica, ad esempio nei festival della scienza o nelle "Notti della ricerca", nelle quali l'incontro con la matematica avviene al di fuori delle tradizionali istituzioni educative e tipicamente attraverso attività ludico-ricreative. Tali proposte hanno spesso un alto gradimento e un'elevata partecipazione di pubblico, anche non specialista, che ci fa interrogare sul potenziale educativo dei contesti informali. Come sottolineano Bakker et al. (2021) alla luce di una indagine internazionale riguardo ai temi sui quali dovrebbe concentrarsi la ricerca in educazione matematica nel prossimo decennio,

> «[...] sebbene sia impegnativo dal punto di vista metodologico e teorico, è di grande importanza studiare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica nei vari contesti. Dopo tutto, gli studenti non imparano solo a scuola, ma anche in contesti informali».
> (Bakker et al., 2021, p. 16, traduzione degli autori)

Nella nostra ricerca siamo impegnati a studiare il potenziale didattico per gli studenti e per la formazione dei docenti di matematica di spazi di apprendimento informale quali i musei, in particolare i musei di tipo storico e artistico, molto diffusi nel nostro Paese. L'idea è nata dal coinvolgimento di alcuni degli autori in due progetti di prevenzione della dispersione scolastica in zone svantaggiate delle città di Napoli e di Torino: il progetto *Proud of You*[2] (2018-19) e il progetto *Next-Land*[3] (2020-22). In questi progetti, musei e territorio cittadino sono diventati protagonisti di progettazioni didattiche finalizzate a obiettivi di educazione alla cittadinanza attiva e di sviluppo di atteggiamenti positivi verso la matematica, e più in generale verso la scuola (Carotenuto et al., 2020).
Tra le criticità emerse dall'osservazione delle attività implementate (nella scuola primaria e secondaria di primo grado),[4] ci ha particolarmente colpiti ciò che denominiamo *effetto parentesi*: l'attività al museo, pur essendo stata valutata positivamente da studenti e insegnanti, non ha poi avuto seguito nel percorso didattico della classe, risultando separata dalla vita scolastica di studenti e studentesse. Per affrontare tale criticità e studiarne possibili soluzioni, abbiamo progettato e sperimentato un per-

1. «I curricula in tutto il mondo sono purtroppo diventati così tecnici e precari nel modo in cui la matematica viene presentata che è difficile per gli insegnanti e i ricercatori in didattica della matematica proporre prospettive significative per l'insegnamento e l'apprendimento. Dobbiamo reinventare contesti che possano rendere significativa l'esperienza dell'apprendimento la matematica» (Radford, 2021, p. 150, traduzione degli autori).
2. Il progetto *Proud of You* è nato ed è stato gestito all'interno dell'associazione *Next-Level*, che opera nel campo della promozione sociale e culturale dei giovani, ed è stato finanziato dal Fondo di beneficenza della banca italiana Intesa San Paolo e dalla società di Gestione dei Servizi Aeroportuali Campani (GESAC). Il gruppo di lavoro sulla matematica comprendeva per la sede di Torino Cristina Sabena (coord.), Valentina Leo e Daniele Manzone. Per la sede di Napoli, Maria Mellone, Gemma Carotenuto, Paola Lattaro e Rosalia Lo Sapio.
3. Il progetto *Next-Land* (2020-22), sempre con la direzione di *Next-Level*, è stato finanziato da Fondazione Vodafone Italia, Fondazione Compagnia di San Paolo, Fondazione CRT, Camera di Commercio di Torino. Il gruppo di lavoro sulla matematica era composto da Cristina Sabena (coord.), Raffaele Casi, Valentina Leo e Chiara Pizzarelli.
4. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

corso di educazione matematica che integra l'esperienza al museo con quella d'aula. Il museo scelto è Palazzo Madama a Torino, nel quale è possibile per le classi di scuola secondaria di primo grado partecipare a una visita-laboratorio centrato sul tema delle spirali (si veda Casi et al., 2023). La didattica d'aula cui facciamo riferimento, ma anche alcune scelte fondamentali della progettazione della visita-laboratorio al museo, sono fondati sulle metodologie innovative elaborate negli ultimi decenni dalla ricerca in didattica della matematica in Italia: il laboratorio di matematica e la produzione di congetture e argomentazioni da parte degli allievi (Anichini et al., 2004), anche in collegamento con il "metodo della ricerca variata" (Arzarello, 2019; Swidan et al., 2023); la multimodalità dell'apprendimento, che avvalora il ruolo del corpo, dei gesti e degli artefatti per l'insegnamento-apprendimento della matematica (Arzarello, 2006); l'utilizzo di macchine matematiche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006) e della discussione matematica (Bartolini Bussi et al., 1995); la valutazione formativa (Cusi et al., 2017). Per ovvie ragioni di spazio, questi elementi teorici, che pur costituiscono un sostrato imprescindibile del lavoro, non saranno approfonditi nell'articolo. Nel prossimo paragrafo verrà dato spazio invece all'innovativa prospettiva dell'educazione matematica informale (in inglese, *informal mathematics education*) e successivamente presenteremo e discuteremo alla luce di tale prospettiva le principali scelte progettuali che abbiamo operato. Queste scelte, e la loro ricaduta didattica, saranno quindi illustrate attraverso le evidenze emerse dalla sperimentazione svolta in due classi prime di scuola secondaria di primo grado secondo la metodologia del *teaching experiment*.

2 L'educazione matematica informale

Studiare l'apprendimento matematico che avviene al di fuori del contesto d'aula non è una novità nel panorama della didattica della matematica. A partire dagli anni Settanta, alcuni ricercatori sono stati affascinati dalla matematica generata e usata al di fuori delle istituzioni deputate all'insegnamento. Il filone di ricerca della cosiddetta *street* o *everyday mathematics* (matematica della strada o nel quotidiano) ha evidenziato come bambini che imparano a risolvere i problemi "sul campo", spesso lo facciano in modo diverso da chi impara a scuola. Una conoscenza "pratica" della matematica – cioè la matematica della strada – viene contrapposta quindi alla matematica appresa a scuola. Gli studi di Nunes et al. (1993), che hanno indagato le conoscenze matematiche di alcuni giovani venditori e venditrici di strada nei mercati di Recife (Brasile), oltre ad avere implicazioni sul tema più ampio della giustizia sociale, hanno messo in evidenza il carattere situato dell'apprendimento matematico, mostrando come i giovani fossero in grado di svolgere con rapidità e sicurezza operazioni aritmetiche – ad esempio, moltiplicazioni – se situate nel contesto di compravendita in strada, mentre operavano con molta più difficoltà nel contesto scolastico. Questi risultati hanno contribuito a porre l'attenzione critica dei ricercatori sul tema dei "problemi autentici" per l'insegnamento-apprendimento della matematica. Più recentemente, il tema della relazione tra formale e informale nell'educazione matematica vede emergere l'interesse verso altri tipi di contesti rispetto alla matematica della strada. Nemirovsky et al. (2017) nella sezione dedicata alle *"Futuristic Issues"* del *Compendium for Research in Mathematics Education*, propongono il filone emergente dell'educazione matematica informale, nel quale «i confini del lavoro matematico non sono necessariamente individuati dalle tradizioni curricolari, dai libri di testo e dalle prove di valutazione, essendo così più aperti a ciò che i partecipanti ricordano, inventano, associano, o sentono» (Nemirovsky et al., 2017, p. 970, traduzione degli autori). Pur mantenendo questa finalità, l'educazione matematica informale (a differenza della matematica della strada) è un approccio educativo e di ricerca caratterizzato da attività che si svolgono in ambienti intenzionalmente progettati per favorire l'apprendimento matematico, con la presenza di educatori specializzati e l'utilizzo di tecnologie, artefatti o esposizioni progettate per stimolare il pubblico a

confrontarsi con la matematica (Nemirovsky et al., 2017). Le attività di educazione matematica informale differiscono dalle attività didattiche che si svolgono usualmente in aula per tre caratteristiche: la partecipazione avviene su base volontaria; i confini tra le discipline coinvolte sono fluidi, consentendo di spaziare ad esempio dalla matematica alla letteratura, all'arte e così via; le attività proposte non sono accompagnate da tradizionali forme di valutazione. Si noti come la distinzione tra le tipologie di attività non sia strettamente legata all'ambiente: è infatti possibile che in ambienti come un museo o un doposcuola, tipicamente caratterizzati come ambienti informali, si svolgano attività di educazione matematica formale, e viceversa, è possibile attuare attività di educazione matematica informale all'interno delle aule scolastiche.
Tipicamente, studenti e insegnanti incontrano esperienze di educazione informale nelle uscite didattiche. Affinché le uscite didattiche possano essere esperienze significative per gli studenti, la letteratura concorda sul fatto che devono essere pianificate in modo da essere connesse con l'attività didattica in aula, includendo in particolare attività dedicate prima e dopo l'esperienza: si vedano a tal proposito le revisioni della letteratura sul tema delle visite scolastiche realizzate da Behrendt e Franklin (2014) e da DeWitt e Storksdieck (2008). Dal lavoro di Kelton (2021), volto ad analizzare se e come le uscite didattiche nei musei possano essere correlate produttivamente agli apprendimenti matematici in classe, emerge inoltre come il lavoro collaborativo tra studenti sia significativo al fine di dare senso all'esperienza e collegare ambienti di apprendimento diversi. Per raggiungere questi obiettivi, è necessaria una riflessione (e probabilmente un cambiamento) da parte degli insegnanti. In uno studio di Griffin e Symington (1997), condotto in Australia con un campione di 29 insegnanti e oltre 700 studenti frequentanti classi dal grado 5 al grado 10, i ricercatori hanno rilevato che la maggior parte degli insegnanti coinvolti ha attuato, anche nell'ambiente informale del museo, un tipo di didattica centrata sul compito (ad esempio, completare schede) anziché privilegiare approcci orientati all'apprendimento (ad esempio, cercare informazioni, condividerle, discuterle), con scarsi collegamenti tra l'esperienza museale e gli argomenti studiati in aula. Questo risultato conferma anche la nostra esperienza personale e in questa direzione due co-autori[5] sono impegnati in un percorso di formazione insegnanti sul tema dell'educazione matematica informale (si veda www.informalmath.unito.it; Casi & Sabena, in stampa).

3 Le scelte progettuali

Alla luce del quadro presentato, abbiamo individuato tre variabili da tenere in considerazione nella progettazione di un percorso di educazione matematica informale che si sviluppa tra scuola e museo. In primo luogo, al fine di evitare l'effetto parentesi dell'esperienza al museo, abbiamo deciso di progettare le attività didattiche d'aula con gli insegnanti delle classi coinvolte, co-autori di questo contributo.[6] Come secondo passo, abbiamo analizzato le connessioni tra gli argomenti matematici presenti nella visita-laboratorio museale e gli obiettivi del curriculum presenti nelle Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012). Infine, richiamando i principi dell'educazione matematica informale definiti da Nemirovsky et al. (2017), con particolare riferimento all'assenza di forme tradizionali di valutazione, abbiamo ritenuto importante tenere in considerazione altre modalità di valutazione dell'esperienza, proponendo come strumento il *quaderno di documentazione*, una sorta di diario di bordo delle attività svolte che consente di registrare, oltre alla narrazione delle attività, anche i pensieri, i

5. Raffaele Casi e Cristina Sabena.
6. Massimo Borsero e Chiara Pizzarelli.

ricordi e le idee degli studenti e delle studentesse durante le fasi di lavoro (Katz & Chard, 1996). L'utilizzo di tale strumento e la sua condivisione all'interno e all'esterno della classe permettono di dare valore al lavoro e agli apprendimenti degli alunni, sia nei confronti di sé stessi, sia nei confronti degli altri, sia, infine, nei confronti di una più ampia comunità di apprendimento (Krechevsky et al., 2009). Il percorso progettato pone al centro la visita-laboratorio "Vortici di idee" al museo di Palazzo Madama a Torino, di cui diamo di seguito una breve descrizione. "Vortici di idee" si articola attorno al tema delle spirali, che sono studiate nella visita-laboratorio sia come oggetto artistico, sia come oggetto matematico. Dal punto di vista artistico, le spirali sono presenti nei numerosi decori barocchi del palazzo (si vedano per esempio i decori del mancorrente dello spettacolare scalone juvarriano e i decori a conchiglia disseminati in varie parti dello scalone, **Figura 1a**), ma anche come elemento architettonico nelle scale del palazzo, risalenti a varie epoche (**Figure 1b** e **1c**).

Figura 1. Vari tipi di spirali osservabili a Palazzo Madama: **a)** Decori a spirale nello scalone juvarriano; **b)** Viretto medievale; **c)** Scala della torre panoramica.

Dal punto di vista matematico, le spirali vengono affrontate come oggetti cinetici, ossia come curve generate dalla rotazione di un punto intorno a un centro e da un movimento di avvicinamento e/o allontanamento dal centro. La visita-laboratorio prevede tre attività che permettono di sperimentare in modo percettivo-motorio la spirale e di avvicinarsi alla sua definizione intesa nei seguenti modi.

- Curva che congiunge punti ottenuti camminando lungo un percorso dapprima circolare, riducendo poi gradualmente la distanza dal centro. La curva è esperita in prima persona attraverso una coreografia (**Figura 2**).

Figura 2. Esperienza percettivo-motoria della spirale sul loggiato dello scalone juvarriano.

- Curva continua del piano generata da uno spiralografo (**Figura 3**). Si tratta di una macchina matematica composta da un piano rotante su cui è posizionato un foglio circolare bianco e su cui è fissato un binario rettilineo che percorre un diametro, su cui è possibile far scorrere un pennarello; vi è poi una manovella laterale che consente di regolare la velocità e il senso di rotazione del piano.

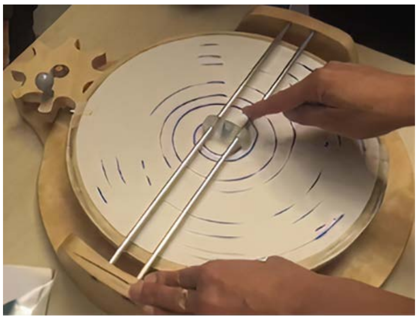


Figura 3. Spiralografo archimedeo.

- Curva continua dello spazio, dunque un'elica, generata da un elicografo (**Figura 4**). Questa macchina matematica è costruita in modo da sfruttare due movimenti analoghi a quelli dello spiralografo, ma in questo caso il foglio su cui tracciare la curva è arrotolato intorno a un cilindro che ruota grazie a una manovella e il binario rettilineo lungo cui far scorrere il pennarello è parallelo all'asse del cilindro.

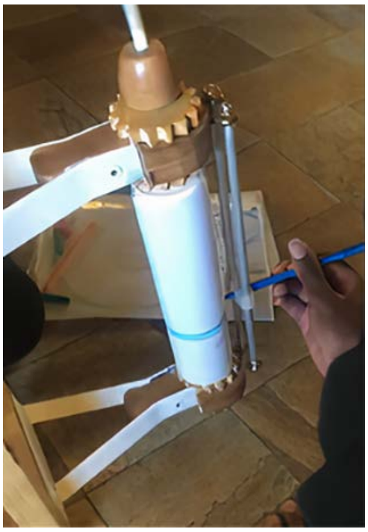


Figura 4. Elicografo.

"Vortici di idee" è stato progettato da un team di esperti in didattica della matematica e di insegnanti,[7] all'interno della prima edizione del progetto *Next-Land* (si veda www.next-level.it/progetti/next-land-2; Casi et al., 2022) e tra settembre 2020 e ottobre 2021 ha visto la partecipazione di più di 300 studentesse e studenti delle scuole secondarie di primo grado di quartieri di Torino svantaggiati dal punto di vista socio-economico. Dall'osservazione sul campo di alcuni incontri di questa prima esperienza, e dal monitoraggio realizzato in collaborazione con il personale del museo e con gli insegnanti coinvolti, sono emersi punti di forza e aree di miglioramento del progetto. Tra le criticità riscontrate, in particolare due hanno attirato l'attenzione del team di progetto. La prima fa riferimento al ruolo degli insegnanti partecipanti alla visita: alcuni di essi hanno vissuto passivamente l'attività laboratoriale, limitandosi a sorvegliare gli studenti o tentando di attuare modalità di interazione tipiche della didattica formale, in linea con quanto emerge in letteratura, ad esempio nel citato studio di Griffin

7. La progettazione del laboratorio è stata realizzata da Raffaele Casi, Valentina Leo e Chiara Pizzarelli, con la supervisione di Cristina Sabena.

e Symington (1997). La seconda criticità riguarda invece il seguito dell'esperienza al museo: l'attività di visita-laboratorio museale, pur essendo stata valutata positivamente da studenti e insegnanti, non ha poi avuto seguito nel percorso didattico della classe, generando proprio l'effetto parentesi che desideriamo evitare.

Tutto ciò considerato, abbiamo strutturato un percorso didattico di educazione matematica informale integrato tra scuola e museo, nel quale la visita-laboratorio a Palazzo Madama si colloca come punto centrale. La parte restante del percorso è stata strutturata in due tipologie di attività:

– *Attività propedeutiche* alla visita-laboratorio, tali da esplorare alcuni prerequisiti al concetto di spirale, quali la distanza di un oggetto da un punto; distanza variabile o costante; moti uniformi o accelerati.
– *Attività di consolidamento*, successive alla visita-laboratorio, tali da istituzionalizzare la conoscenza acquisita attraverso diverse modalità esperienziali motorie e manipolative, con l'obiettivo di applicare il concetto di variazione della distanza da un punto al concetto di spirale.

Il percorso da svolgere in classe è stato progettato attraverso un lavoro congiunto di insegnanti e ricercatori.[8] La progettazione si è basata su quello che possiamo chiamare un *"principio di doppia continuità didattica"* tra scuola e museo, ovvero sulle metodologie e sui contenuti matematici oggetto delle attività. Per quanto riguarda le metodologie, la scelta è ricaduta in modo naturale sul laboratorio di matematica, ben noto nella tradizione didattica italiana (Anichini et al., 2004; Giacardi, 2016), che ispira la visita museale ed è in linea con le Indicazioni nazionali per il curricolo e la didattica utilizzata quotidianamente dagli insegnanti coinvolti. Abbiamo quindi pensato di introdurre nelle attività d'aula, che precedevano e seguivano l'esperienza al museo, un'altra macchina matematica. La scelta è ricaduta su un piano rotante, che sfrutta lo stesso meccanismo dello spiralografo presente a Palazzo Madama attraverso il moto combinato della rotazione intorno a un centro e della traslazione (avvicinamento o allontanamento) verso o dal centro. La mancanza del supporto meccanico dato dalla guida e dalla manovella è compensata dalla facilità di costruzione della macchina, costituita essenzialmente da un comune vassoio rotante, facilmente reperibile in commercio (rimandiamo al par. 4.2 per una più dettagliata illustrazione della macchina).

Per quanto riguarda i contenuti, abbiamo mirato a un obiettivo didattico che da una parte fosse coerente con il curricolo e dall'altra integrasse un approccio alle spirali come oggetto cinetico, tema della visita-laboratorio presso il museo. L'attenzione è ricaduta sul nodo concettuale della distanza tra punti, in quanto la programmazione didattica prevista dai due insegnanti per il primo quadrimestre si concentrava sugli enti geometrici e le posizioni reciproche tra essi.[9] Gli obiettivi del percorso di educazione matematica informale possono pertanto essere posti in relazione con alcuni aspetti formali dell'insegnamento-apprendimento, nello specifico gli obiettivi didattici presenti individuati dagli insegnanti come parte del curricolo delle classi: in primis il riconoscimento di forme nel piano e nello spazio, le loro rappresentazioni e relazioni tra elementi; in seconda istanza il concetto di trasformazione geometrica, in particolare di traslazione e rotazione, altro importante traguardo di apprendimento previsto dalle Indicazioni nazionali del grado scolare considerato (MIUR, 2012).

La Tabella 1 riassume il percorso didattico complessivo, indicando più nello specifico gli obiettivi, le risorse e i tempi utilizzati.

8. Nel testo ci riferiamo a Chiara Pizzarelli e Massimo Borsero come "insegnanti", poiché la loro partecipazione alla sperimentazione li ha visti in tale veste nella propria classe. Più precisamente, potremmo riferirci a loro come insegnanti-ricercatori, poiché hanno contribuito in tutte le fasi dello studio.
9. Ricordiamo che la visita-laboratorio al museo si è svolta nei mesi di novembre e dicembre 2022.

Attività	Obiettivi	Risorse	Durata
1. La circonferenza con strumenti canonici e non.	Fare esperienza della costruzione di una circonferenza in modo percettivo-motorio con una corda e su carta tramite una squadretta e altri oggetti di forme diverse. Confrontare gli strumenti e riconoscerne gli elementi che li rendono strumenti atti a costruire circonferenze. Collegare il concetto di distanza fissa a strumenti in cui non è visibile il raggio.	Luogo: cortile della scuola e aula. Materiali: corda, squadretta, stampini per biscotti, elastici, oggetti circolari.	2 ore
2. La circonferenza con il piano rotante.	Esplorare le potenzialità di un piano rotante per costruire circonferenze concentriche e non. Approfondire il concetto di distanza di un punto, in circonferenze in cui non è visibile né il raggio, né il centro.	Luogo: aula. Materiali: piani rotanti, slide con circonferenze da replicare.	2 ore
3. Visita-laboratorio a Palazzo Madama: "Vortici di idee".	Riconoscere negli elementi architettonici di Palazzo Madama la figura della spirale. Rappresentare la spirale tramite attività percettivo-motorie e attraverso due differenti macchine matematiche che tracciano la spirale sul piano e nello spazio.	Luogo: Palazzo Madama. Materiali: spiralografo, elicografo.	2 ore
4. Le spirali con lo spiralografo.	Esplorare e indagare le potenzialità dello spiralografo, riprendendo e ampliando le scoperte fatte durante la visita-laboratorio, attraverso successive congetture e verifiche con la macchina matematica.	Luogo: aula. Materiali: piani rotanti, spiralografo.	2 ore

Tabella 1. Descrizione delle attività progettate nel percorso integrato di educazione matematica informale.

Infine, nella fase di progettazione si è scelto di porre particolare attenzione alla modalità di valutazione degli apprendimenti da parte degli studenti. Rimanendo aderenti al quadro teorico dell'educazione matematica informale ed evitando tradizionali forme di valutazione, abbiamo elaborato un quaderno di documentazione,[10] nel quale al termine di ogni incontro ogni studente è chiamato a descrivere l'esperienza vissuta sia attraverso un testo scritto, sia attraverso un disegno e la scelta di parole chiave, aggiungendo osservazioni e riflessioni proprie e/o del gruppo classe. Lo strumento da un lato fornisce una sorta di guida per lo studente, che lo accompagna durante i diversi incontri; dall'altro permette all'insegnante – e in seconda istanza al ricercatore – di osservare quali conoscenze sono state recepite, quali sono state considerate rilevanti, e in che modalità sono state comprese ed acquisite.

10. Nella nostra esperienza abbiamo incontrato spesso il quaderno di documentazione nella scuola dell'infanzia e meno frequentemente o quasi mai dalla scuola primaria in poi.

Si noti come quest'ultima decisione si leghi armoniosamente alla recente legislazione italiana sulla valutazione degli apprendimenti, che all'art. 1 del d.lgs. 62/2017 afferma che

> «La valutazione ha per oggetto il processo formativo e i risultati di apprendimento delle alunne e degli alunni, delle studentesse e degli studenti delle istituzioni scolastiche del sistema nazionale di istruzione e formazione, ha finalità formativa ed educativa e concorre al miglioramento degli apprendimenti e al successo formativo degli stessi, documenta lo sviluppo dell'identità personale e promuove la autovalutazione di ciascuno in relazione alle acquisizioni di conoscenze, abilità e competenze».[11]

In particolare, dalla lettura del dettato normativo emerge che

- la valutazione è un *processo*, non semplicemente un momento finale di un'attività. Il quaderno di documentazione allora consente di raccogliere in un unico documento tutti i vari momenti del percorso integrato: in classe, a casa nei momenti di riflessione, durante la visita-laboratorio a Palazzo Madama;
- la valutazione è uno *strumento* per gli studenti e le studentesse che ha lo scopo di migliorare i loro apprendimenti, non solamente una certificazione statica di livelli di apprendimento. Il quaderno di documentazione accompagna gli allievi fin dall'inizio dell'attività di educazione matematica informale, raccoglie i loro protocolli e riflessioni ed è continuamente aggiornato a mano a mano che l'attività procede;
- la valutazione ha lo scopo di *documentare lo sviluppo dell'identità personale e promuovere l'autovalutazione*. Il quaderno di documentazione, oltre a raccogliere gli elementi indicati in precedenza, può anche essere personalizzato da studenti e studentesse (ovviamente nei limiti degli obiettivi educativi e didattici delle attività). Queste personalizzazioni (ad esempio, la scelta dell'immagine di copertina), unite agli elementi legati alle specifiche fasi dell'attività (ad esempio, indicare tre "parole chiave" per attività) restituiscono un quadro molto più ricco di elementi per ciascuno studente rispetto a una verifica sommativa finale, che necessariamente fotografa solo la fine del percorso ed è sostanzialmente la stessa per tutti.

4 La sperimentazione

Il percorso è stato sperimentato nei mesi di novembre e dicembre 2022 in due classi prime di due scuole secondarie di primo grado di Torino, nelle quali Massimo Borsero e Chiara Pizzarelli erano gli insegnanti titolari e Raffaele Casi era presente come osservatore-partecipante secondo la metodologia del *teaching experiment* (Steffe & Thompson, 2000). Riportiamo in questo paragrafo gli elementi salienti di ciascuna attività, documentando con estratti di dialoghi e di protocolli degli allievi le tracce dell'evoluzione dalle prime intuizioni alla scoperta dei concetti matematici.

4.1 La circonferenza con strumenti canonici e non

Il primo incontro (**Tabella 1**, Attività 1) ha avuto come obiettivo quello di stimolare gli studenti con attività percettivo-motorie che facessero esperire il concetto di distanza fissa.

11. Come si può leggere nel testo del Decreto legislativo n. 62, pubblicato sulla Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, disponibile al link: https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2017/05/16/17G00070/sg (consultato il 06.11.2023).

4.1.1 La circonferenza con la corda

Nel cortile della scuola, a ogni gruppo – composto in modo eterogeneo e mantenuto tale per tutto il percorso – è stata assegnata una corda. La richiesta era di descrivere cosa accade quando, a turno, un membro del gruppo tiene un'estremità della corda e rimane fermo in un punto, mentre un altro membro del gruppo tiene l'altra estremità e gli ruota intorno. Durante l'attività l'insegnante ha avuto cura di guidare le osservazioni, ponendo domande ai gruppi relative a quali sensazioni sentissero durante l'attività e a come queste sensazioni cambiassero in funzione della posizione assunta (il centro o un punto della circonferenza). L'attenzione alle riflessioni degli studenti su cosa rimane fisso e cosa cambia ha preso l'avvio già da queste fasi iniziali ed è stata un *fil rouge* per tutto il percorso.
Si noti dal seguente dialogo come gli studenti abbiano fatto riferimento al compasso per aiutarsi nell'argomentare le loro scoperte e avanzato le prime ipotesi sulla differenza tra circonferenza e spirale, in base alla variazione o meno della distanza dal centro.

> Prof: «Cosa avete scoperto?»
> A.: «Ehm… questo è un compasso [indica le compagne con la corda in mano]. Se l'ago del compasso è libero facciamo un cerchio di 360°, se siamo precisi».
> B.: «Però se A. tiene così [indica A., la ragazza che rappresenta il centro, e fa riferimento alla sua mano posizionata sul busto (**Figura 5**)] non diventa un cer… una circonferenza, diventa una spirale!»
> Prof.: «Perché diventa una spirale?»
> B.: «Perché se diventa così si arrotola e fa tanti cerchi».

Figura 5. B. indica la maniera in cui la compagna (A.) tiene la corda.

Su richiesta del docente, B. ha mostrato come ottenere la spirale e, durante l'esecuzione, il dialogo è proseguito così.

> B.: «Diventa sempre sempre più piccolo!»
> Prof.: «Che cosa diventa sempre più piccolo?»
> B.: «La linea… la linea del compasso».
> Prof.: «Cosa intendi per la linea del compasso?»
> B.: «La punta!»
> A.: «L'apertura!»
> Prof.: «Però voi non avete un vero compasso. In questo caso che cos'è che diventa sempre più piccolo?»
> B.: «La corda!»

Prof.: «E invece nella circonferenza cosa succedeva?»
B.: «A. deve tenere questa parte della corda così [fa alzare il braccio alla ragazza posta al centro, si veda la **Figura 6**]».
Prof.: «E tu cosa devi assicurarti di fare?»
A.: «Tenere la corda ben tirata!»
Prof.: «Perché?»
A.: «Così viene più preciso».

Figura 6. B. fa alzare il braccio alla compagna, per tendere la corda.

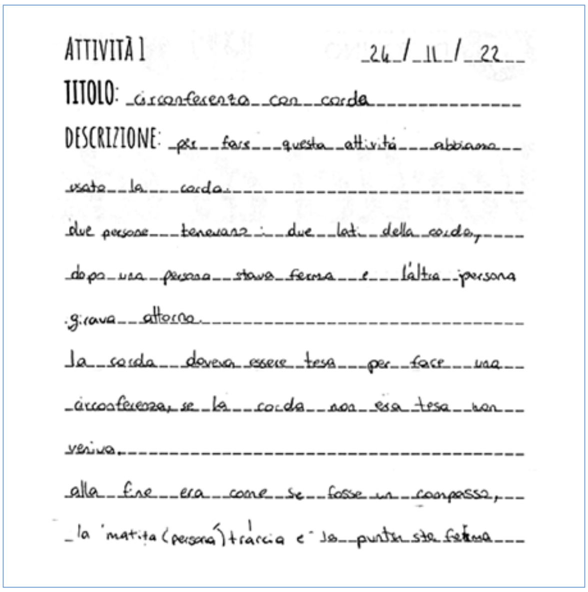
In un altro gruppo, si è osservato come le riflessioni fossero indirizzate sul concetto di tensione della corda, che avvicina gli studenti a osservazioni inerenti alla distanza fissa tra centro e punto della circonferenza. Alla domanda dell'insegnante sulle scoperte fatte, un componente del gruppo ha fornito la seguente descrizione:

L.: «Intorno alla nostra compagna la tensione della corda e la lunghezza rimangono uguali, visto che entrambi tengono salda la corda. Se non la tenessero salda, verrebbe una circonferenza storta, cioè fatta male. Se si avvicinasse un po' di più alla compagna… ehm… non è più… non ha più la tensione di prima e rischia di passare intorno alla compagna e quindi di arrotolare la corda. Invece, se la teniamo al petto, girando si arrotola e quindi riduce anche la lunghezza e non c'è tensione».

La questione della tensione con cui tenere la corda è emersa in diversi gruppi, con osservazioni sull'importanza che essa sia prodotta da entrambi gli attori del movimento, come si evince nel seguente dialogo.

S.: «Quella al centro deve tenerla tesa, secondo me».
Prof.: «Interessante. Provate!»
S.: «[Mentre si preparano per provare con la corda]. Beh, aspetta se ci pensi anche quello fuori… cioè deve essere un lavoro di coppia!»

Dopo una breve discussione in aula, si è richiesto agli studenti di riflettere nel piccolo gruppo sull'attività svolta in cortile e poi descriverla individualmente nel quaderno di documentazione, aggiungendo le proprie osservazioni personali. Diversi protocolli relativi a questa attività presentano riferimenti al compasso e all'analogia con l'esperienza del cordino in cortile (a titolo di esempio ne riportiamo uno in **Figura 7**).



ATTIVITÀ 1 24 / 11 / 22

TITOLO: circonferenza con corda

DESCRIZIONE: per fare questa attività abbiamo usato la corda.

due persone tenevano i due lati della corda, dopo una persona stava ferma e l'altra persona girava attorno.

la corda doveva essere tesa per fare una circonferenza, se la corda non era tesa non veniva.

alla fine era come se fosse un compasso, la matita (persona) traccia e la punta sta ferma

Figura 7. Estratto dal quaderno di documentazione di un allievo.

Un gruppo ha usato come titolo dell'attività nel quaderno di documentazione l'espressione "compasso umano". Alla richiesta di spiegazioni del docente un componente del gruppo ha spiegato così l'analogia:

> M. «Non c'era veramente un compasso, noi lo creavamo».
> Prof.: «Nel compasso che elementi ci sono?»
> D. «La punta…»
> Prof.: «E chi era nel vostro esperimento la punta?»
> D. «Chi stava fermo. E abbiamo fatto a turni. E poi chi si muoveva era la mina».
> Prof.: «E dov'è la corda?»
> L. «È il raggio!»
> Prof.: «Ok, cosa succede nel compasso e cosa con la corda?»
> D. «Nel compasso è duro perché rimane sempre fisso, invece se la corda la tenevamo non fissa, ma tirata, uno poteva andare avanti e indietro e creare una circonferenza. Se invece la teniamo tesa e rimani appoggiato con forza riesci a fare sempre lo stesso giro».

4.1.2 La circonferenza con la squadretta

La seconda parte dell'incontro si è svolta in aula. Si è distribuita una squadretta ad ogni gruppo e si è domandato se fosse possibile disegnare una circonferenza con una squadretta e due matite e, in caso affermativo, in che modo. Si è proceduto con la discussione in classe alla ricerca del metodo che il docente auspicava venisse scoperto per disegnare una circonferenza: posizionare una matita (o un dito della mano che faccia da perno) in un vertice del triangolo interno e la penna in un altro vertice, tenere ferma la matita (o il dito) e muovere la squadretta utilizzando la penna. La richiesta successiva era di provare a ripetere il metodo e descrivere che cosa succede; si è chiesto poi di ipotizzare e provare a scoprire cosa accade se si sceglie di muovere la matita (o il dito), lasciando fissa la penna. È seguita la discussione di classe e la compilazione del quaderno di documentazione.
Nella sperimentazione, diversi gruppi hanno provato a disegnare la circonferenza sfruttando la squadretta per limitare gli errori di approssimazione del disegno a mano. Alcuni hanno notato che l'angolo retto del triangolo interno della squadretta utilizzata era in realtà arrotondato, e hanno scelto di sfruttare questa caratteristica per tracciare la circonferenza, muovendo opportunamente la squadretta per utilizzarla come circoligrafo, tracciando un quarto di circonferenza per volta (**Figura 8**); altri hanno ten-

tato la costruzione tracciando diversi segmenti della stessa lunghezza con il punto medio in comune, congiungendo poi opportunamente a mano libera gli estremi.

Figura 8. Utilizzo dell'angolo retto interno di una squadretta per disegnare la circonferenza.

In un gruppo, ad esempio, gli studenti hanno costruito due diametri perpendicolari tra loro e con lunghezza misurata con la scala graduata della squadretta, per poi aggiungere archi di circonferenza a mano libera (**Figura 9**).

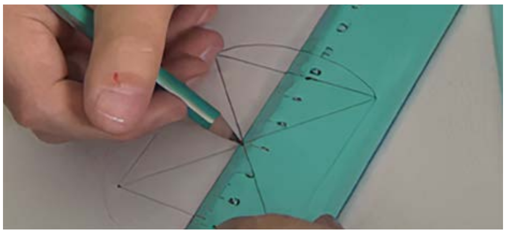


Figura 9. Disegno (errato) di una circonferenza con due diametri perpendicolari e archi a mano libera.

Tali costruzioni sono state occasione per i docenti di avvicinare gli studenti alla proprietà di *equidistanza* dal centro, che riguarda tutti i punti della circonferenza e non solamente alcuni di essi.
I gruppi che hanno trovato un metodo efficace per la costruzione della circonferenza hanno sfruttato la distanza fissa dei lati del triangolo interno alla squadretta. In **Figura 10** si vede una studentessa che costruisce la circonferenza con due matite poste agli estremi di un lato del triangolo interno alla squadretta (**Figura 10a**) e poi prova a verificare se la costruzione ha portato a una circonferenza, misurandone alcuni raggi (**Figura 10b**). Alcune domande guida dei docenti sono state mirate a puntare l'attenzione sul raggio, che è la chiave della costruzione, ma non è "visibile", perché non disegnato con un segmento come nelle classiche rappresentazioni della circonferenza («Come fate ad essere sicuri che questa sia una circonferenza?», «Il diametro è di 6 cm, da dove viene questa misura?», «Posso costruire con questa squadretta una circonferenza con diametro 4 cm?»).

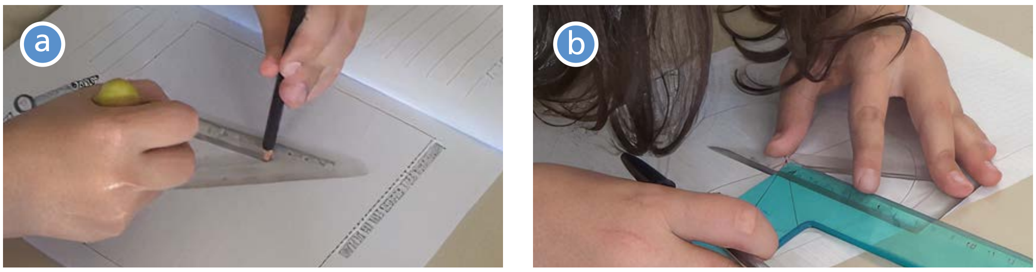


Figura 10a, b. Costruzione della circonferenza con due matite poste agli estremi di un lato del triangolo interno alla squadretta e successiva verifica con la misurazione di alcuni raggi.

Nella discussione di classe tali punti sono stati ripresi. Si noti come nelle argomentazioni si faccia riferimento alle esperienze pregresse, come l'uso del compasso e della corda:

> Prof: «Perché ha funzionato questo metodo?»
> S.: «Perché avevamo appunto questa forma che è una squadretta che aveva dei lati tesi».
> Prof.: «Perché la corda, il compasso e la squadretta fanno costruire la stessa figura?»
> S.: «Perché hai una distanza tra il punto e un altro».
> D.: «Secondo me la squadretta funzionava un po' come con la corda, che fissavi in un punto, in questo caso una matita, ma nell'altro caso con la corda una persona, a una distanza di vertici interni posizioni la matita, che dovrebbe essere la persona che gira, oppure nel compasso la mina, ehm… intanto lo tieni fisso in modo che giri, e anche qua lo tieni teso».

Tali esperienze ritornano non solo nella narrazione degli episodi, ma anche nella terminologia utilizzata da S. per l'argomentazione: i «lati tesi» della squadretta sembrano un chiaro riferimento alla tensione della corda.
La discussione è continuata affrontando la questione della possibilità o meno di costruire una circonferenza qualsiasi con la stessa squadretta.

> Prof.: «Con questa squadretta potete disegnare una circonferenza di raggio 2 cm?»
> D.: «No, solo la distanza dal vertice interno che stai puntando al vertice dove… [prende il pennarello e disegna (**Figura 11**)] ad esempio questo [indica due vertici del triangolo interno] punti una matita, ad esempio qua [indica uno dei due], sta ferma e se lo tieni rigido e nel frattempo disegni [disegna la circonferenza con centro il primo vertice indicato]».
> Prof.: «E quante circonferenze diverse posso costruire con una squadretta così?»
> D.: «Se questo qui riuscisse, potresti puntare una matita qua e costruire una circonferenza».
> Prof.: «E sarà identica a quella di prima?»
> D.: «Dipende. Perché con questa squadretta, ad esempio, non è un triangolo equilatero, altrimenti verrebbero uguali».
> G.: «Io… Non ci sono solo due modi, ma tre [si alza per disegnare (**Figura 12**)]! Puoi usare una matita che punta qua e un'altra che punta qua e fa un cerchio più piccolo. Invece se ne punti una qua e fai un cerchio con questi due [indica i vertici agli estremi dell'ipotenusa], ne riesci a fare una più grande. Invece se punti questo con questo [indica i vertici agli estremi del cateto maggiore] ne fai uno… diciamo medio».

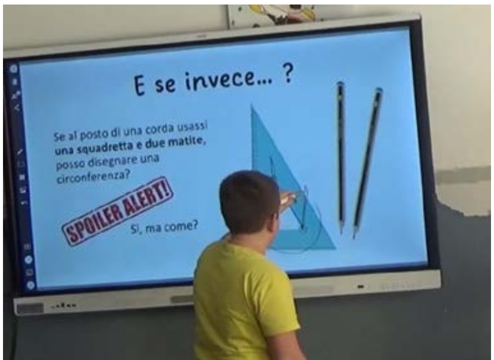


Figura 11. D. spiega come disegnare una circonferenza con una squadretta.

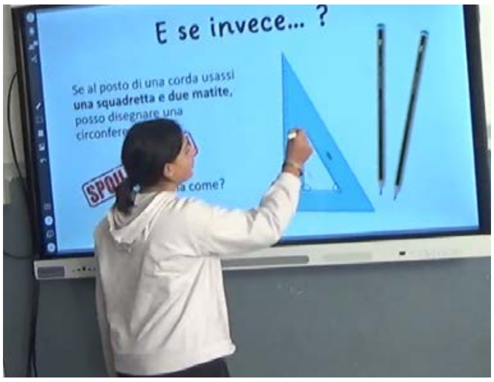


Figura 12. Gesti deittici utilizzati da G. nella spiegazione.

4.1.3 La circonferenza con altri artefatti

Nell'ultima parte del primo incontro si è consegnato ai gruppi una serie di oggetti di varie forme e dimensioni: formine taglia-biscotti a forma di campanella, albero di Natale, chiocciola, fiore, cuore; un coppapasta circolare; una cornice; un elastico; lo strumento musicale triangolo. La richiesta era analoga alla precedente: «Sapreste disegnare una circonferenza con ognuno di questi oggetti e due matite? È sempre possibile? Se sì, perché?». Sono seguite riflessioni mirate a indagare il motivo per cui si disegna sempre la stessa figura, ovvero una circonferenza, con oggetti anche molto diversi tra loro. L'obiettivo era dunque la ricerca dell'*invariante*: la distanza fissa di un punto della circonferenza dal suo centro; distanza che è sempre presente anche quando il raggio non è "visibile", come succede invece nel caso del cordino.

Per i gruppi che nell'attività precedente erano riusciti a utilizzare i lati del triangolo interno alla squadretta, la costruzione di circonferenze con altri oggetti è risultata immediata (Figura 13b); gli altri gruppi sono giunti rapidamente alla soluzione osservando e riproducendo quanto realizzato dai compagni. Ciò ha permesso di analizzare differenze e analogie con la squadretta, in particolare per quanto riguarda l'individuazione del raggio:

> Prof.: «Prima, nella squadretta, il raggio dov'era?»
> L.: «Il raggio era o questo [indica il cateto maggiore del triangolo] o questo [indica il cateto minore (Figura 13a)]».
> Prof.: «E qua [indica lo stampino a forma di campanella] invece dov'è il raggio?»
> A.: «Qua [indica un'estremità della campanella (Figura 13c)] e qua [indica un'altra estremità]».
> Prof.: «Ah, quindi c'è ma non si vede!»
> L.: «Non si vede, però si può intuire, diciamo».

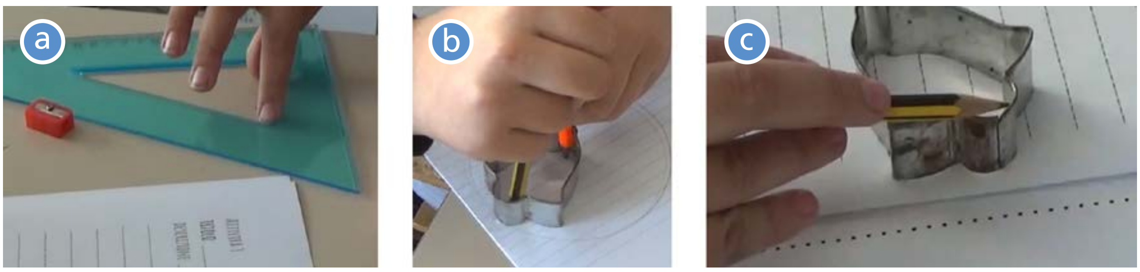


Figura 13. a) L. indica il raggio; b) e c) Circonferenza con la campanella.

Il secondo incontro ha preso l'avvio da una discussione di classe su quanto fatto nell'attività precedente. In questa occasione i docenti hanno cercato di orchestrare la discussione al fine di riprendere i concetti base affrontati e arrivare a una prima definizione di circonferenza. Dall'analisi delle discussioni emergono inizialmente definizioni che fanno riferimento a preconoscenze sulle curve acquisite nella scuola primaria, per poi avvicinarsi alle esperienze fatte nelle attività e arrivare a fare così riferimento al concetto di *distanza*.

> D.: «È una linea chiusa, che non ha né un inizio né una fine, e non ha angoli».
> Prof.: «[Disegna una forma non circolare che rispetta questa definizione, visibile sulla destra nella Figura 14a]. Quindi questa è una circonferenza!» [Seguono tentativi di risposta inconcludenti]. «Pensate alle attività che abbiamo fatto la volta scorsa».
> M.: «Ma il cerchio è formato da due archi, invece quello che ha fatto lei non è formato da due archi. Perciò deve avere due archi… ehm…»
> D.: «Che il perimetro ha sempre la stessa distanza dal centro… perché nella figura che ha fatto lei…»
> Prof.: «E qui [indica il disegno alla lavagna] non ha la stessa distanza dal centro?»
> D.: «No, perché… non so come spiegarlo a voce… ad esempio nell'onda lì non è lo stesso di quello dietro, non è la stessa distanza di quello dietro… [si avvicina alla lavagna e prende il pennarello (Figura 14a)] qua [cerchia un segmento da un punto interno a un punto sul contorno] non è la stessa distanza di questo [disegna un segmento dallo stesso punto interno a un altro punto sul contorno]. Invece nella circonferenza c'è sempre la stessa distanza [disegna tre raggi (Figura 14b)]».

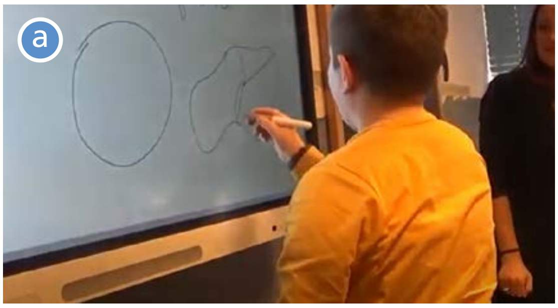



Figura 14a, b. Figure disegnate alla LIM.

4.2 La circonferenza con il piano rotante

L'attività alla base del secondo incontro (Tabella 1, Attività 2) ha previsto l'esplorazione del piano rotante. Si tratta di una macchina matematica molto semplice, costituita da due dischi di legno incernierati al loro centro, in modo tale che il disco superiore (più grande) possa ruotare di 360° nei due versi (Figura 16). Con questa macchina si scoprono altre possibilità di generare una circonferenza attraverso il movimento, con un cambio di prospettiva per gli allievi. Se nell'attività precedente a generare la figura era la persona che correva o la penna che percorreva una traiettoria a distanza fissa dal centro, ora è il piano d'appoggio a ruotare e la riflessione si sposta su come posizionare opportunamente le matite da tenere fisse per generare circonferenze. Consegnato a ogni gruppo un piano rotante, si è chiesto agli studenti di osservare, congetturare e infine testare le proprie conclusioni. Gli stimoli per avviare e condurre questa attività sono riportati di seguito.

a. Prime domande: «Che cosa accade se tengo la penna ferma e faccio ruotare il piano? È sempre una circonferenza? Siete sicuri che, ovunque mettiate la matita, venga sempre una circonferenza?».

b. Dopo aver mostrato tramite la lavagna LIM immagini di coppie di circonferenze di varie dimensioni e in posizioni reciproche diverse (due circonferenze concentriche di raggio diverso; una circonferenza e un punto; due circonferenze concentriche e una che interseca una di esse; una circonferenza che passa per il centro di un'altra circonferenza di raggio maggiore; alcuni esempi sono riportati in **Figura 15**), chiedere agli studenti di provare a ricreare con il piano rotante le stesse circonferenze, dapprima ipotizzando la posizione iniziale in cui tenere le matite, poi eseguendo il disegno sul piano rotante.

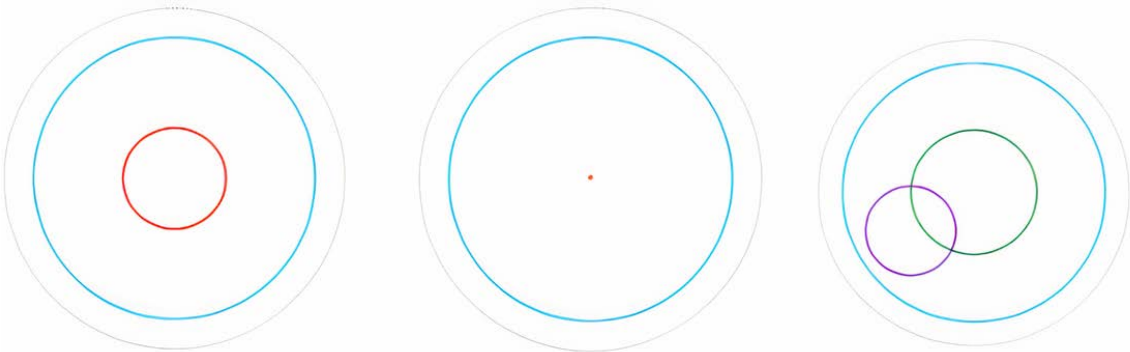


Figura 15. Posizioni diverse di circonferenze, da riprodurre con il piano rotante.

c. Fornire agli studenti una spugnetta intinta di tempera chiedendo ai gruppi di ricreare alcune immagini che mostrano cerchi e circonferenze in posizioni reciproche diverse (una circonferenza e una corona circolare concentrica ad essa; un cerchio con circonferenza che passa per il centro di un'altra circonferenza di raggio maggiore).[12]

Dopo la discussione di classe si è lasciato il tempo agli studenti per compilare il quaderno di documentazione, in cui si è fatta esplicita richiesta di riprodurre con un disegno il piano rotante su cui indicare la posizione delle matite colorate e della spugnetta, e le circonferenze ottenute dopo aver fatto ruotare il piano.
Nelle esplorazioni relative al punto (a) la maggior parte dei gruppi ha rapidamente compreso cosa si ottiene dal movimento del piano rotante e ha notato, in seguito a domande stimolo dei docenti, che esiste il caso degenere della circonferenza come punto, ottenuto quando si posiziona la penna in corrispondenza del centro del piano rotante. Tali osservazioni durante la manipolazione iniziale hanno aiutato ad affrontare il punto (b). La richiesta di creare circonferenze concentriche non ha dato grosse difficoltà ed è stata occasione per discutere ad esempio sulla possibilità di creare o meno sempre due circonferenze distinte con due matite (**Figura 16**):

Prof.: «Quante circonferenze vengono fuori con due matite?»
L.: «Ad ogni giro due circonferenze».
Prof.: «Ma sono sempre diverse queste due circonferenze?»
L.: «No!»
A.: «Se le mettiamo in punti diversi sì, se le mettiamo attaccate no».
L.: «Se le mettiamo in parallelo… no».

12. Per mancanza di tempo quest'ultima attività non è stata sperimentata.

Figura 16. Attività sul piano rotante.

Il richiamo all'idea di parallelismo per intendere una stessa distanza delle matite dal centro è stato oggetto di discussione con il gruppo classe al termine dell'attività, quando il docente ha ripreso l'espressione proprio per volgere ancora l'attenzione degli studenti sul concetto di distanza.
Per il punto (b) la maggior parte delle difficoltà si sono concentrate sul disegno di circonferenze non concentriche, come si evince anche da diversi disegni riprodotti sul quaderno di documentazione (si vedano un esempio rappresentativo dell'errore in Figura 17a e un protocollo corretto in Figura 17b).

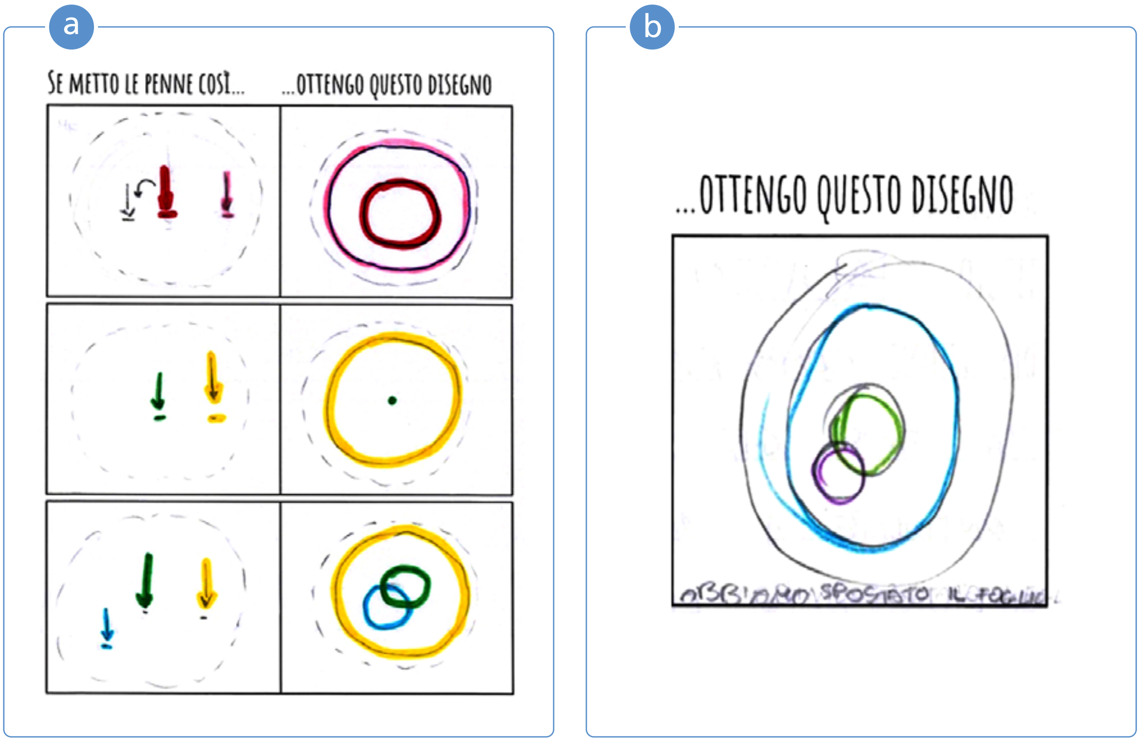


Figura 17a, b. Estratti dai quaderni di documentazione di due allievi.

Uno dei pochi gruppi che è riuscito a trovare correttamente la rappresentazione di una circonferenza non concentrica alle altre è stato guidato dal docente con alcune domande stimolo volte a riflettere sulle proprietà del piano rotante, come si può leggere nel seguente dialogo.

M.: «Se si gira fa sempre un cerchio, invece [la circonferenza non concentrica] è più in basso. Oddio, aspetta… Perché…»
Prof.: «Qual è la proprietà di questo tavolo rotante?»
D.: «Ruota e fa disegnare queste circonferenze».
Prof.: «Giusto, e come sono tutte queste circonferenze tra loro?»
M.: «Arrivano sempre al centro».
Prof.: «Hanno tutte lo stesso centro. Ma quella circonferenza che dovete disegnare ha un centro diverso».
M.: «Ah sì, perciò il giro dovrebbe essere diverso! Perché se ha un punto diverso…»
D.: «Anche perché il tavolo là sotto [capovolge il piano rotante (**Figura 18a**)] ha un suo centro».
Prof.: «Quindi che cosa fa lui?»
D.: «Ruota attorno al suo centro e fa ruotare tutte le linee attorno al suo centro».
Prof.: «Ok, quindi diciamo che se tu vuoi disegnare una circonferenza…»
D.: «… fuori dal centro, devi avere il centro che coincide con il centro del tavolo!»
Prof.: «E quindi come devi fare?» [Lungo silenzio in cui gli studenti girano il piano, poi prendono un nuovo foglio bianco e ridisegnano precisamente le due circonferenze concentriche]. «Benissimo, e adesso? Il viola [colore della circonferenza non concentrica riprodotta nelle immagini della LIM] come deve essere messo?»
D.: «Il suo centro è qua [indica un punto sulla circonferenza concentrica di raggio minore (**Figura 18b**)]».
Prof.: «Bisogna spostare qualcosa, allora! [D. in silenzio stacca il foglio dal piano]».
M.: «Ah! Se lo metti a lato…»
Prof.: «Prova!»
M.: «Quindi basta spostare il foglio (**Figura 18c**)!»

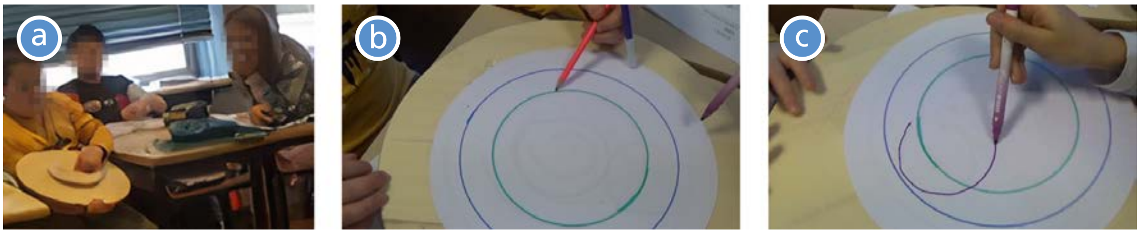


Figura 18a, b, c. Il piano rotante e i disegni di circonferenze.

4.3 Dalla circonferenza alla spirale: la visita-laboratorio a Palazzo Madama

Il passaggio alla spirale, in cui la distanza di un punto dal centro non è fissa, ma variabile, è stata proposta agli studenti tramite la visita-laboratorio "Vortici di idee".
Nella visita-laboratorio al museo (**Tabella 1**, Attività 3) gli studenti sono stati invitati a osservare, disegnare su carta e ricreare con il proprio corpo e con macchine matematiche le spirali (come descritto nel **par. 3**). In un primo momento sono stati coinvolti in una camminata in fila indiana (**Figura 19**): seguendo la guida, si sono mossi a formare una spirale, partendo dal centro di una circonferenza disegnata sulla pavimentazione in marmo presente nel loggiato superiore dello scalone e allontanandosi lentamente da esso. L'obiettivo era quello di dare una prima idea intuitiva di spirale e far percepire con il corpo i movimenti che la creano; interessante a tal proposito una descrizione di una studentessa nel suo quaderno di documentazione: «La nostra guida ci ha fatto sentire proprio come una spirale, mettendoci l'uno dall'altro molto vicini e facendoci allargare piano piano». Quando la visita si è spostata nella corte medievale, al gruppo classe è stata presentata la macchina matematica *spiralografo di Archimede*, che gli studenti sono stati invitati a esplorare.

Figura 19. Coreografia a spirale a Palazzo Madama.

A coppie, gli studenti hanno disegnato con lo strumento alcune spirali richieste (più o meno "fitte", con spire a distanza costante o meno ecc.), come si può vedere nelle Figure 20a e 20b.

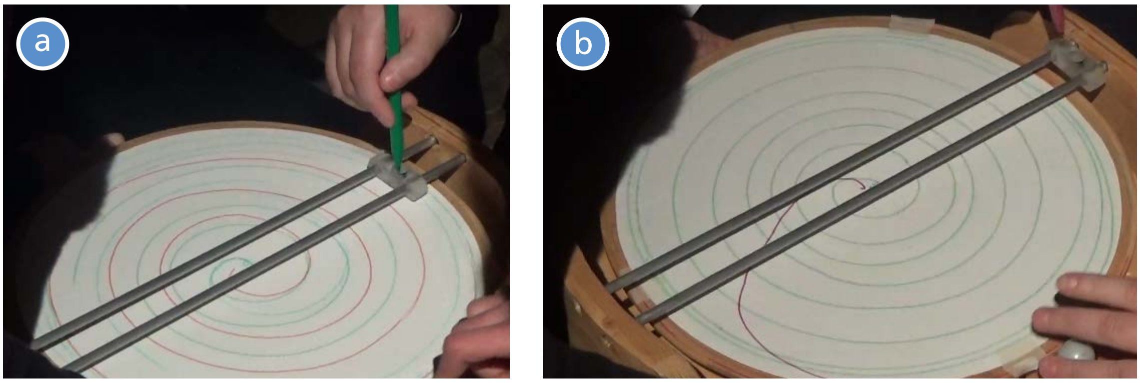


Figura 20a, b. Spirali disegnate con lo spiralografo di Archimede.

Riportiamo un estratto delle istruzioni fornite dalla guida prima che gli studenti potessero provare la macchina:

> «Tu [rivolgendosi al ragazzo che muove il pennarello nella guida rettilinea] inserirai il pennarello in questo foro e lo muoverai in una sola direzione, verso di te o verso di me. Scegli la direzione, poi sarà la stessa per tutti quelli che lo faranno dopo di te. Quando arrivi al limite esterno ti fermi, non tornare indietro, mi raccomando. Inizi a muoverti solo quando lui avrà iniziato a girare. Quindi dal centro verso l'esterno e poi ti fermi. La velocità di movimento la scegli tu, puoi andare molto piano o molto veloce, e vediamo cosa viene. Tu [rivolgendosi al ragazzo che muove la manovella] giri sempre in senso orario. Partiamo!».

Si noti come in alcuni protocolli del quaderno di documentazione sia chiara la descrizione di tali istruzioni, con l'indicazione dei movimenti segnalata da opportune frecce (Figura 21a). Emergono invece alcune difficoltà nell'accuratezza nella riproduzione della spirale che si ottiene da tali movimenti (Figura 21b).

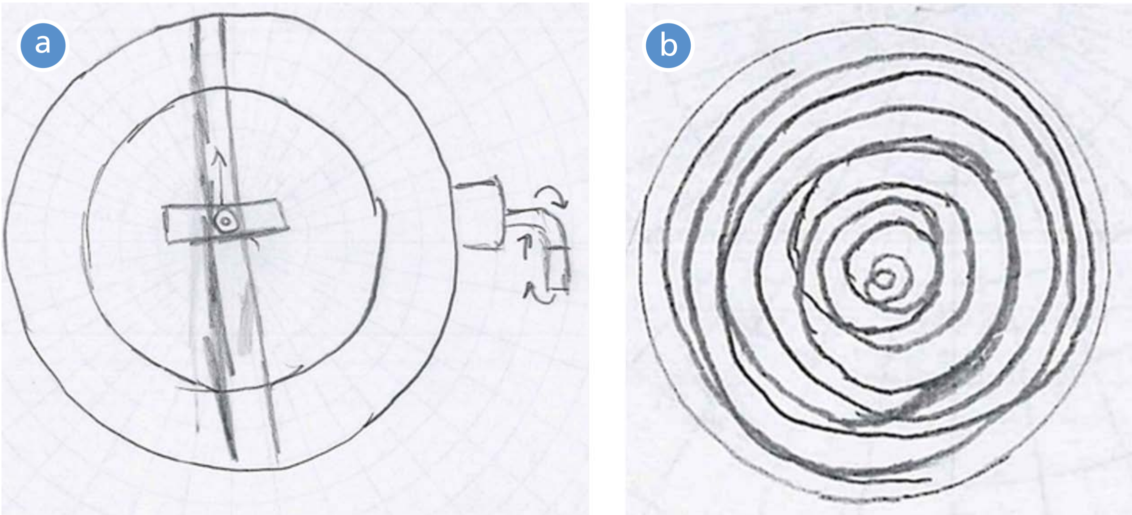


Figura 21a, b. Disegni di allievi.

Al termine delle esplorazioni la guida ha chiesto di fare più giri andando piano o velocemente, accontentandosi di risposte rapide e non argomentate. Tale rigidità nelle istruzioni da seguire per far funzionare la macchina è stata da un lato limitante per la piena comprensione dei concetti matematici sottesi, dall'altro è stato sfruttato dai docenti per l'attività successiva in classe, come vedremo nel **par. 4.4.** Interessante notare che una studentessa, dopo aver disegnato una spirale logaritmica[13] accelerando la traslazione (**Figura 20b**), ha affermato: «Non so se la chiamerei una spirale!». Tale risposta è rimasta inascoltata e non approfondita opportunamente. Anche in questo caso, i docenti hanno potuto riprendere l'argomento in classe.
La visita-laboratorio si è poi spostata lungo le sale e le torri di Palazzo Madama, percorrendo scale a chiocciola di varie epoche. Si è passati in questo modo dalla spirale in due dimensioni all'elica, vista come spirale in tre dimensioni, riprodotta ed esaminata con l'*elicografo* nella parte finale della visita-laboratorio. Gli studenti sono stati invitati a manipolare lo strumento e scoprire come tracciare eliche cilindriche di vario tipo, variando opportunamente le velocità dei moti in funzione delle richieste della guida. Considerando che tale attività non sarebbe stata replicata negli interventi in classe successivi, in questo caso i docenti accompagnatori hanno scelto di intervenire attivamente nel guidare la discussione, con domande di riflessione volte a congetturare, per poi esplorare la congettura con la macchina (**Figura 22a**) e infine riflettere su quanto accaduto (**Figura 22b**). Riportiamo di seguito la domanda stimolo del docente in cui si chiede una spiegazione del motivo per cui le linee parallele, ottenute sul foglio srotolato dal cilindro dell'elicografo, siano più vicine in alcuni punti e più separate in altri. Segue la risposta di uno studente, incentrata sul legame tra velocità dei movimenti e il tempo impiegato:

> Prof.: «A. è andata pianissimo con il cursore e ha disegnato queste linee che sono tutte vicine l'una all'altra. Invece dopo abbiamo di nuovo girato [la manovella] con la stessa velocità però lei è andata velocissima con il cursore e ha disegnato solo queste due linee che sono sempre parallele, ma molto lontane tra loro. La domanda è perché andando piano ne vengono tante e andando veloce ne vengono poche?»
> M.: «Se vai piano fai molte righe perché hai più tempo, invece quando vai veloce fai poche righe».

13. Nella spirale archimedea la traslazione avviene con un moto a velocità costante, mentre nella spirale logaritmica occorre traslare con un moto accelerato.

Figura 22a, b. Utilizzo dell'elicografo.

4.4 L'analisi dello spiralografo in classe

L'attività proposta nell'ultimo incontro, tenutosi in aula (Tabella 1, Attività 4), si è avviata con una discussione riguardo la visita-laboratorio a Palazzo Madama, durante la quale sono stati rievocati i momenti salienti. L'insegnante ha chiesto quindi di descrivere e riassumere le istruzioni fornite dalla guida per l'utilizzo dello spiralografo. In particolare, si sottolineano tre indicazioni: «muovi il pennarello in una sola direzione», «parti dal centro e poi ti fermi quando arrivi al limite esterno», e «ti muovi solo quando il piano inizia a girare». Si è discusso così in classe sulle motivazioni per cui sono state fornite queste precise istruzioni e gli studenti sono stati invitati a congetturare cosa potrebbe accadere se queste non fossero rispettate. Ad esempio, si è proposto di indagare cosa accadrebbe se si girasse in un verso differente, se si partisse dal bordo del piano rotante e si arrivasse fino al centro, e – ancora – cosa accadrebbe se si percorresse tutto il diametro, infine cosa accadrebbe se si muovesse il pennarello prima che la manovella faccia ruotare il piano. La scelta delle domande del tipo «che cosa accadrebbe se…?» si ispira al "metodo della ricerca variata" (Arzarello, 2019; Swidan et al., 2023), utilizzato dagli insegnanti come prassi didattica nelle regolari lezioni di matematica.
Le difficoltà principali in questa attività sono state due:

a. capire che cosa cambia se si sposta il pennarello, non dal centro all'estremità (come da istruzioni della guida di Palazzo Madama), bensì dall'estremità verso il centro;
b. capire che cosa accade se, una volta arrivati al centro, si prosegue percorrendo l'intero diametro.

Per il punto (a), dopo qualche tentativo con un disegno che modellizzava la macchina matematica, la maggior parte dei gruppi sono riusciti a comprendere correttamente che si forma ugualmente una spirale. Si è riscontrata qualche difficoltà relativamente al senso di avvolgimento della spirale in funzione del verso di rotazione del piano rotante. Considerate le difficoltà e i diversi obiettivi, si è scelto di non approfondire tale argomento.
Sul punto (b) è interessante seguire il discorso di un gruppo che, guidato dal docente, è arrivato a correggere la congettura iniziale.

> Prof.: «Se partiamo di qua [indica un'estremità], se giriamo da lì fino al centro cosa viene fuori?»
> A.: «Una spirale normale!»
> Prof.: «Che differenza c'è tra una spirale che inizia dal centro e una che inizia dal bordo?»
> A.: «Ehm… e mi aiutate? [Rivolgendosi ai compagni di gruppo, che però non forniscono input utili]».
> Prof.: «[Prendendo la matita] Perché questa quando disegni parti da fuori e diventa?»
> A.: «Sempre più stretta [percorrendo con la matita la spirale verso il centro]».
> Prof.: «E se parti dal centro?»
> A.: «La fai sempre più larga!»

Prof.: «E se poi arrivi qui [indica il centro] e prosegui, cosa viene fuori?» [Seguono tentativi delle due studentesse coinvolte in cui ripetono il percorso (Figura 23a)].
A.: «Però cosa succede se arriviamo fino a qua… facciamo una doppia spirale! Tecnicamente facciamo… così… [intanto disegna una spirale che cambia verso rispetto alla precedente (Figura 23b)]».
Prof.: «Sei sicura? Tu continua a girare… ok, lui cambia verso quando gira? No, tu giri sempre nello stesso verso e allora anche la matita continua nello stesso verso!»
A.: «Ah! Quindi…» [e disegna la spirale continuando dal tracciato della spirale precedentemente disegnata, mantenendo lo stesso verso (Figura 23c)].

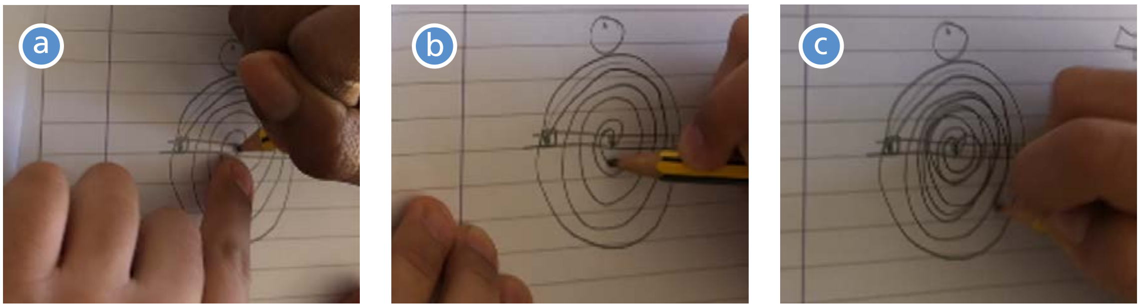
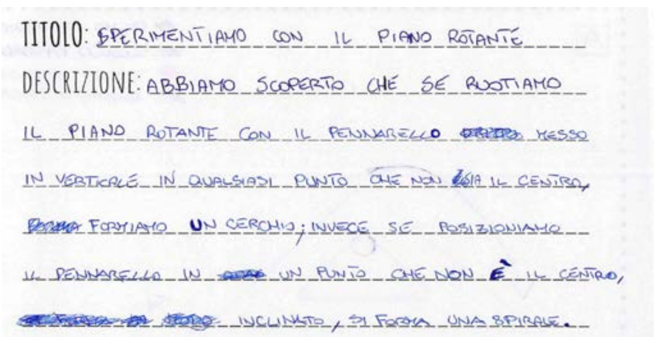


Figura 23a, b, c. Disegni degli allievi: spirali sul piano rotante.

Come produzione finale si è chiesto agli studenti di redigere all'interno del gruppo un testo, il più chiaro e completo possibile, che racchiuda tutte le istruzioni per utilizzare lo spiralografo.

5 Il quaderno di documentazione

Il quaderno di documentazione, come già descritto nel par. 3, ha accompagnato studenti e studentesse lungo tutto il percorso di apprendimento e ha costituito un efficace strumento di valutazione formativa. La struttura del quaderno era sostanzialmente simile nelle varie attività: si è chiesto di dare un titolo a ciascuna attività, descriverla con un testo, rappresentarla graficamente e infine individuare tre parole chiave.
Si osservi ad esempio il seguente protocollo (Figure 24 e 25), relativo a un momento dell'attività con il piano rotante in cui gli studenti hanno sperimentato diverse posizioni della penna (si veda il par. 4.2).



TITOLO: SPERIMENTIAMO CON IL PIANO ROTANTE
DESCRIZIONE: ABBIAMO SCOPERTO CHE SE RUOTIAMO IL PIANO ROTANTE CON IL PENNARELLO MESSO IN VERTICALE IN QUALSIASI PUNTO CHE NON SIA IL CENTRO, FORMIAMO UN CERCHIO; INVECE SE POSIZIONIAMO IL PENNARELLO IN UN PUNTO CHE NON È IL CENTRO, INCLINATO, SI FORMA UNA SPIRALE.

Figura 24. Quaderno di documentazione di un allievo – prima parte.

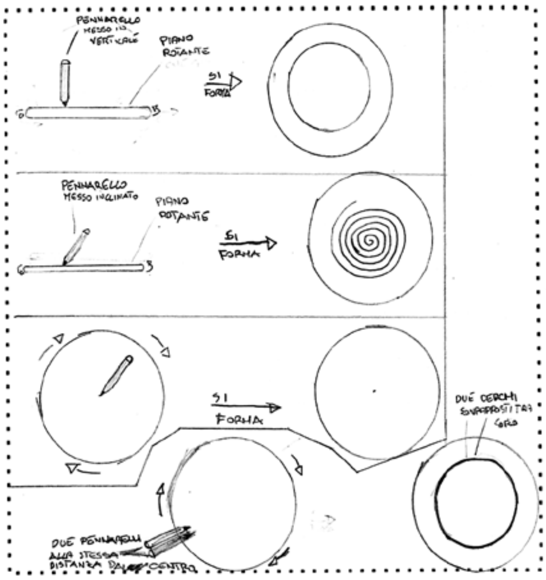


Figura 25. Quaderno di documentazione di un allievo – seconda parte.

Nel titolo lo studente evidenzia il carattere esplorativo dell'attività svolta e la dimensione della scoperta è presente nella descrizione dell'esperienza (**Figura 24**). Nel disegno (**Figura 25**), lo studente rappresenta le varie fasi dell'attività, escludendo esplicitamente il centro dalle casistiche in quanto punto fermo. Interessante il fatto che affermi (e disegni con cura) che quando il pennarello è inclinato si formi una spirale.[14]

Tutti questi elementi hanno consentito agli insegnanti di fornire dei feedback formativi molto estesi e puntuali. Ad esempio, riportiamo in **Figura 26** il feedback formativo che l'insegnante ha fornito a uno studente per mezzo del registro elettronico.

COMMENTO PERSONALE

Nella 3 ti ringrazio per il testo e i disegni molto molto ben fatti. Ti sei però limitato a descrivere ciò che è accaduto senza cercare di motivarlo. Ad esempio perché se inclini la penna si forma una spirale? Come si spiega?

Figura 26. Esempio di feedback formativo dato dall'insegnante.

Come si può vedere in **Figura 26**, al posto di un voto numerico gli studenti e le studentesse hanno ricevuto un testo in cui venivano evidenziati punti di forza e debolezza per ciascuna attività e un commento complessivo su tutto il percorso, in linea con un approccio alla valutazione in ottica formativa.

Un altro esempio dello stretto legame tra attività, quaderno e feedback formativo è relativo a una studentessa che solitamente affronta le attività di matematica in modo molto passivo e con un impegno minimo. In questo caso, però, ha decorato il quaderno da cima a fondo, dimostrando una grande cura

14. La spiegazione di questo fenomeno è che, inclinando il pennarello, gli studenti lo muovevano e non si rendevano conto di spostarlo.

del dettaglio: in **Figura 27** si può notare la personalizzazione della copertina del quaderno e in **Figura 28** le colorazioni attente e funzionali degli elementi principali degli strumenti e delle diverse curve.

Figura 27. Copertina del quaderno di documentazione di un'allieva.

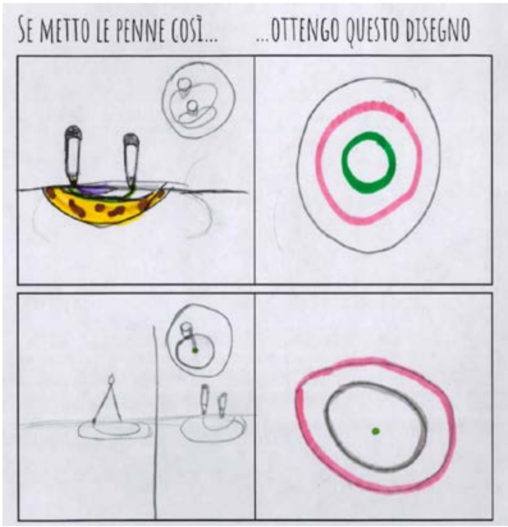


Figura 28. Disegni di un'allieva nel quaderno di documentazione.

Al contrario, i testi sono, come di consueto per questa studentessa, molto sintetici e poco chiari, come emerge dal seguente protocollo (**Figura 29**).

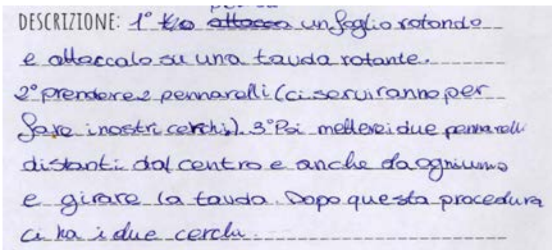
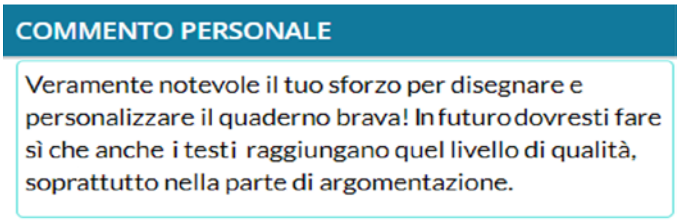


Figura 29. Testo di un'allieva nel quaderno di documentazione.

Nella valutazione tradizionale, questi diversi aspetti si sarebbero persi. Invece, si è potuto fornire il feedback in **Figura 30**, che evidenzia in maniera positiva il contributo grafico e segnala un obiettivo ancora da raggiungere sul piano argomentativo.


COMMENTO PERSONALE

Veramente notevole il tuo sforzo per disegnare e personalizzare il quaderno brava! In futuro dovresti fare sì che anche i testi raggiungano quel livello di qualità, soprattutto nella parte di argomentazione.

Figura 30. Feedback formativo dell'insegnante.

Tutti questi elementi legati alla personalizzazione del quaderno e al suo uso per raccogliere osservazioni varie e non strutturate degli studenti si legano armoniosamente con il quadro teorico dell'educazione matematica informale su cui è basato l'intero percorso.
Naturalmente, il quaderno fornisce molti dati utili a valutare le competenze acquisite da studenti e studentesse, ma non può replicare integralmente tutti gli elementi emersi dalle discussioni matematiche seguite ad ogni attività. Ad esempio, nei quaderni è assente la descrizione del fatto che sia la variazione del raggio durante la rotazione del piano a consentire di passare dal disegno di una circonferenza a quello di una spirale. Questo elemento, invece, è emerso molto chiaramente dalle discussioni con studenti e studentesse. Limitando le considerazioni sull'attività svolta alla sola analisi del quaderno, si potrebbe interpretare tale assenza affermando che gli studenti non ritenessero il fatto rilevante, mentre dalle discussioni emerge proprio l'opposto, come ad esempio nel seguente estratto al termine dell'attività con i piani rotanti.

> Prof.: «E quindi qua cosa abbiamo ottenuto?»
> N.: «Una spirale».
> Prof.: «E come mai una spirale e prima tutte delle circonferenze?»
> M.: «Io lo so… cambiava… la penna».
> A.: «Si spostava il pennarello».
> Prof.: «Si spostava da dove?»
> A.: «Dal centro del coso che gira».
> Prof.: «Ok si spostava dal centro della circonferenza. E cosa cambiava quindi nella circonferenza?»
> N.: «Il raggio».

Questa assenza è stata notata solo a posteriori: il quaderno è rimasto per tutto il tempo in mano agli studenti, che l'hanno consegnato agli insegnanti solo al termine dell'intero percorso. Pertanto, risulta opportuna un'analisi complessiva che combini e integri le varie fonti documentali e osservative.

6 Riflessioni conclusive

A conclusione del lavoro presentiamo alcune riflessioni in relazione al tema emergente dell'educazione matematica informale, anche se siamo consapevoli che gli apprendimenti acquisiti hanno beneficiato notevolmente di metodologie didattiche molto studiate e apprezzate dalla ricerca italiana in didattica della matematica degli ultimi decenni, come il laboratorio con le macchine matematiche, la discussione matematica e il metodo della ricerca variata, ma anche di approcci più recenti, come quelli che prevedono il coinvolgimento di tutto il corpo e le attività matematiche al di fuori della scuola tipiche della educazione matematica informale.

Nelle pagine precedenti abbiamo mostrato come sia possibile coniugare gli stimoli derivanti dall'esplorazione di un luogo di grande valore storico e artistico con una seria riflessione matematica, grazie a una progettazione attenta e a una gestione esperta da parte dei docenti. Il percorso sulle spirali, pensato e sperimentato varcando i confini dell'aula scolastica nell'una e nell'altra direzione, realizza appieno due delle caratteristiche dell'educazione matematica informale: considera in maniera fluida i confini disciplinari (nel nostro caso, matematica, storia e arte) e propone una forma non tradizionale di valutazione (il quaderno di documentazione). La terza caratteristica, la libera scelta di partecipazione da parte degli allievi, non è soddisfatta, in quanto in aperta contraddizione con la volontà degli insegnanti di svolgere il percorso nelle ore curricolari e di coinvolgere quindi le classi per intero in orario scolastico. Avremmo potuto rimanere "fedeli alla linea" e optare per un percorso pomeridiano, opzionale per gli allievi; invece, la nostra scelta è stata dettata dalle nostre convinzioni sul ruolo della scuola nell'educare alla cittadinanza consapevole, a partire dalla conoscenza della propria storia e del proprio territorio, che si riflette in una visione dell'educazione matematica nel quadro di una più ampia formazione culturale del cittadino.

Inoltre, inserire il percorso nelle regolari lezioni ci ha spinto a interrogarci sui possibili collegamenti con il curriculum delle classi, a partire dalla finalità pratica di non stravolgere le programmazioni degli insegnanti e di dare continuità alle modalità di lavoro degli allievi, per evitare l'effetto parentesi di cui parlavamo sopra. Realizzare un percorso integrato tra scuola e museo richiede l'incontro con attori diversi della scena educativa, gli insegnanti e gli esperti del museo, che hanno tempi e modalità diverse di lavoro. Se nel caso della pratica di insegnamento il docente ha a disposizione tempi lunghi, incontri ripetuti e opportunità di tornare a mettersi in dialogo con gli studenti su un certo aspetto anche più volte a distanza di tempo, questo non avviene per l'esperto museale, che può sfruttare solamente il breve tempo della visita-laboratorio per raggiungere gli obiettivi fissati. D'altro canto, a differenza di quanto accade nella maggior parte delle aule scolastiche, il museo offre un ambiente in cui gli studenti si immergono in un contesto ricco di stimoli, vivendo così un'esperienza estetica intensa. Si è generata quindi una tensione tra la forza centrifuga dello «spaesamento estetico» (Farnè et al., 2018, p. 16) che abbiamo sentito come motore per l'esplorazione matematica e quella centripeta della componente formale della didattica, data dallo svolgere le attività a scuola e incarnata, per quanto riguarda i contenuti, dal curriculum. Abbiamo quindi identificato nel lavorare con le curve a partire dai moti e dalla loro combinazione, una via praticabile per rispettare il principio di doppia continuità didattica, intesa come una continuità tra attività a scuola e attività al museo sia sui contenuti matematici sia sulle metodologie didattiche.[15] La **Tabella 1** esprime in una certa misura l'equilibrio raggiunto.

Alla luce della nostra esperienza, possiamo affermare che porsi nella prospettiva dell'educazione matematica informale contribuisce a «reinventare contesti che possano rendere significativa l'esperienza dell'apprendimento della matematica» (Radford, 2021, p. 150), come abbiamo voluto sottolineare nella citazione iniziale. La ricerca didattica italiana ha lavorato molto in questa direzione, con tantissimi progetti a partire dagli anni '90 del secolo scorso, ma pensiamo che la nostra scuola abbia ancora bisogno di riflettere e innovarsi sotto questo aspetto.

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). *Matematica 2003: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (ciclo secondario).* Matteoni stampatore.

15. Ovviamente questo principio può funzionare solo se l'insegnante adotta nelle regolari lezioni una metodologia laboratoriale: in caso contrario potrebbe generarsi una sorta di "effetto parentesi lungo" che include l'intero percorso integrato di educazione matematica informale.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(Extraordinario 1), 267–299.

Arzarello, F. (2019). Variare le sensate esperienze per costruire le necessarie dimostrazioni. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *42A-B*(5), 542–554.

Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica.* Centro documentazione educativa.

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: Dalla storia alla scuola.* Springer.

Behrendt, M., & Franklin, T. (2014). A review of research on school field trips and their value in education. *International Journal of Environmental and Science Education*, *9*(3), 235–245.

Carotenuto, G., Mellone, M., Sabena, C., & Lattaro, P. (2020). Un progetto di educazione matematica informale per prevenire la dispersione scolastica. *Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *5*(2), 157–172.

Casi, R., Leo, V., Pizzarelli, C., & Sabena, C. (2022). La matematica nei musei con il progetto Next-Land. In E. Luciano, M. Oggero & C. Sabena (Eds.), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2020-2022* (pp. 105–116). L'Artistica Editrice.

Casi, R., Pizzarelli, C., & Sabena, C. (2023). Spirali tra arte e matematica. In A. Buonocore, G. Gerla, L. Restuccia & C. Toffalori (Eds.), *Matematica 2022. Matematica, Arte e Società* (pp. 77–92). Palermo University Press & New Digital Frontiers.

Casi, R., & Sabena, C. (in stampa). Informal Mathematics in teacher's education. The teachers' voice. In *Proceedings of the Thirteenth Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME13). ERME.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promuovere strategie di valutazione formativa in Matematica con le nuove tecnologie: l'esperienza del progetto FaSMEd. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente – Strategie e metodologie didattiche in Matematica e nelle Scienze*, *9*(14), 91–107.

DeWitt, J., & Storksdieck, M. (2008). A short review of school field trips: Key findings from the past and implications for the future. *Visitor Studies*, *11*(2), 181–197. https://doi.org/10.1080/10645570802355562

Farnè, R., Bortolotti, A., & Terrusi, M. (Eds.) (2018). *Outdoor Education: Prospettive teoriche e buone pratiche.* Carocci editore.

Giacardi, L. M. (2016). "Lavorare con le mani e con la mente". Il laboratorio di matematica fra Ottocento e Novecento. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *39*, 517–549.

Griffin, J., & Symington, D. (1997). Moving from task-oriented to learning-oriented strategies on school excursions to museums. *Science Education*, *81*(6), 763–779. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-237X(199711)81:6<763::AID-SCE11>3.0.CO;2-O

Katz, L. G., & Chard, S. C. (1996). *The contribution of documentation to the quality of early childhood education*. ERIC Digest.

Kelton, M. L. (2021). Mathematics learning pathways on a school fieldtrip: Interactional practices linking school and museum activity. *Visitor Studies*, *24*(2), 220–242. https://doi.org/10.1080/10645578.2021.1939984

Krechevsky, M., Rivard, M., & Burton, F. (2009). Accountability in three realms: Making learning visible inside and outside the classroom. *Theory Into Practice*, *49*(1), 64–71. https://doi.org/10.1080/00405840903436087

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale.* Le Monnier.

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Civil, M. (2017). Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 90–101). National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, T., Schliemann, A., & Carraher, D. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge University Press.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning.* Brill Sense.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Erlbaum.

Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O., & Arzarello, F. (2023). The Method of Varying Inquiry for stimulating learning. *For The Learning of Mathematics*, *43*(1), 14–18.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 59 - 84, DOI: 10.33683/ddm.23.14.3
OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

La comprensione delle figure geometriche da parte degli insegnanti di scuola secondaria: la loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e di prevedere le difficoltà degli studenti

Secondary teachers' geometrical figure apprehension: their ability to construct geometrical proof and to predict students' difficulties

Athanasios Gagatsis•, Zoi Geitona°, Rita Panaoura•• e Iliada Elia•
•Dipartimento dell'educazione, Università di Cipro – Cipro
°Dipartimento dell'educazione, Università nazionale e capodistriana di Atene – Grecia
••Dipartimento dell'educazione, Università Frederick di Cipro – Cipro

gagatsis@ucy.ac.cy, zgeitona@primedu.uoa.gr, r.panaoura@frederick.ac.cy, elia.iliada@ucy.ac.cy

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA ORIGINALE

Sunto / Questo studio analizza la comprensione delle figure geometriche da parte dei docenti di scuola secondaria in servizio, in relazione alla loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e di prevedere didatticamente difficoltà ed errori dei loro studenti. Il quadro teorico di analisi è basato sulla teoria della comprensione delle figure geometriche elaborata da Duval, presentata ai docenti nell'ambito di un corso di formazione continua in didattica della matematica. Come parte della valutazione finale del corso, è stato costruito e somministrato un test scritto con varie attività geometriche. Sono state analizzate le risposte dei partecipanti in termini di risoluzione e di interpretazione delle difficoltà. I risultati indicano che le teorie e i concetti di didattica della geometria possono far luce su vari aspetti dell'insegnamento-apprendimento della geometria. Un docente che propone una soluzione corretta non necessariamente identifica/comprende le possibili difficoltà degli studenti. La discussione si concentra sulle implicazioni didattiche relative alla geometria e alla dimostrazione geometrica.

Parole chiave: geometria; comprensione delle figure geometriche; dimostrazione geometrica; difficoltà; formazione degli insegnanti di scuola secondaria.

Abstract / The present study investigates in-service secondary teachers' geometrical figure apprehension in relation to their ability to construct geometrical proofs and to predict didactically their students' difficulties and mistakes. The theoretical framework of analysis is based on Duval's geometrical figure apprehension which was taught to the teachers as part of an in-service training course in didactics of mathematics, offered by one of the researchers. As part of the course final assessment, a written test consisting of various geometrical tasks was constructed and administered to the sample. Participants' answers in both solving and interpreting difficulties related to the tasks were analyzed. The results of the study indicate that theories and concepts of didactics of geometry can shed light to various facets of teaching and learning of geometry. A teacher who presents a correct solution at a task does not necessarily identify or understand the possible difficulties faced by students. Discussion concentrates on teaching implications about geometry and geometrical proof.

Keywords: geometry; geometrical figure apprehension; geometrical proof; difficulties; secondary school teacher training.

1 Introduzione

La geometria, che si occupa di forme e oggetti, ricopre un posto essenziale nella vita umana: nella scienza, nell'arte, nell'architettura, nell'ingegneria (Yavuz et al., 2016). Allo stesso tempo, l'insegnamento e l'apprendimento della geometria costituiscono un campo di ricerca privilegiato per i ricercatori in didattica della matematica e in psicologia: «L'insegnamento della geometria è un argomento importante, ma spesso trascurato nella ricerca in didattica e nella pratica educativa attuale» (Bergstrom & Zhang, 2016, p. 134, traduzione degli autori). Vi è inoltre un crescente consenso sul fatto che la geometria sia un ambito che causa difficoltà agli studenti, indipendentemente dalla loro età e dal loro contesto culturale.
Fin dall'inizio degli anni '70, numerosi studi condotti in diversi Paesi avevano esaminato le conoscenze matematiche degli insegnanti basandosi sulla convinzione comune che tanto maggiore è la conoscenza della disciplina, quanto migliore è l'insegnamento. Nel caso della geometria, la conoscenza disciplinare della matematica tra gli insegnanti appare disomogenea, con molte lacune, soprattutto tra gli insegnanti della scuola primaria (Leikin & Levav-Waynberg, 2007); inoltre, il legame tra le limitazioni della conoscenza disciplinare e la qualità dell'insegnamento è chiaro. Esistono diversi quadri concettuali che descrivono le conoscenze matematiche necessarie per l'insegnamento (Manizade & Mantinovic, 2018): i ricercatori generalmente concordano sul fatto che la conoscenza pedagogica, così come è stata introdotta da Shulman, collega la conoscenza disciplinare della matematica con la pedagogia. Shulman (1986) discute la necessità di esaminare le conoscenze degli insegnanti e la loro capacità di insegnare in relazione alla conoscenza dei contenuti, conoscenza che contribuisce in modo significativo al rendimento degli studenti (Chinnappan et al., 2018). La conoscenza che un insegnante apporta al contesto di insegnamento-apprendimento è infatti fondamentale per la qualità dell'apprendimento degli studenti; secondo Ball et al. (2008), più la conoscenza dei contenuti di un docente è ampia e approfondita, maggiore sarà la sua capacità di estenderla in modo flessibile alle proprie conoscenze pedagogiche o matematiche per insegnare.
Le prestazioni degli studenti in geometria sono state correlate, da un punto di vista scientifico e didattico, alla loro capacità di comprendere e costruire dimostrazioni geometriche. Cirillo (2018) sostiene che, sebbene ci siano stati continui inviti a migliorare la trattazione scolastica del ragionamento e delle dimostrazioni in matematica, il successo nell'insegnamento delle dimostrazioni è rimasto sfuggente. I risultati della ricerca internazionale confermano quanto l'insegnamento delle dimostrazioni geometriche nella scuola secondaria non sia un compito facile (Fujita & Jones, 2014). Come sostengono Fujita et al. (2010) una sfida importante nella didattica della matematica per quanto riguarda la geometria e le dimostrazioni geometriche è quella di ideare modi per consentire agli studenti di muoversi con successo tra i domini pratici e teorici della matematica. Il successo dell'insegnamento della geometria dipende dalla conoscenza che i docenti possiedono della geometria stessa e dei modi per insegnarla efficacemente (Jones, 2000).
Il presente studio intende contribuire, nel panorama internazionale della ricerca, agli sforzi volti a migliorare l'insegnamento della dimostrazione in geometria, e lo fa attraverso la lente della comprensione che gli insegnanti hanno delle figure geometriche, più precisamente utilizzando il modello di Duval, nonché analizzando la loro capacità di insegnare in modo efficace. La componente del processo di insegnamento esaminata nel presente studio riguarda la capacità degli insegnanti di prevedere, interpretare e identificare con successo le difficoltà degli studenti. Lo scopo principale di questo lavoro è stato quello di esaminare la comprensione delle figure geometriche da parte degli insegnanti di matematica in relazione alla loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e di prevedere le difficoltà degli studenti durante l'insegnamento di argomenti specifici. Ci siamo quindi concentrati sulla possibilità che gli insegnanti applichino la teoria di Duval della comprensione delle figure geometriche mentre dimostrano quesiti geometrici specifici e anche sulla loro capacità di prevedere e interpretare potenziali difficoltà ed errori degli studenti in relazione a tali quesiti.

2 Quadro teorico

2.1 L'insegnamento della geometria e della dimostrazione geometrica nella scuola secondaria

L'interazione con i contenuti geometrici promuove le abilità cognitive di base e contribuisce alla comprensione del mondo in cui viviamo (Kuzle, 2022). Il dominio dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria è sempre di notevole interesse internazionale, con molte domande che rimangono irrisolte per quanto riguarda i metodi di insegnamento e i rispettivi risultati di apprendimento. A questo proposito, nel 2018 è stata realizzata una monografia ICME[1] sulle prospettive internazionali dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria nelle scuole secondarie.
Molti studi hanno esaminato le connessioni tra pensiero geometrico e abilità spaziali (Jones & Tzekaki, 2016). Secondo Battista et al. (2018) un'abilità spaziale si compone di visualizzazione spaziale e ragionamento analitico basato sulle proprietà. La visualizzazione spaziale comporta la creazione mentale di immagini di oggetti, mentre il ragionamento analitico basato sulle proprietà comporta la scomposizione di oggetti in parti utilizzando proprietà geometriche per specificare come queste parti sono correlate. In generale, diversi studi suggeriscono che le abilità spaziali degli studenti sono correlate alle loro prestazioni in geometria (Tso & Liang, 2002). Panaoura et al. (2007) hanno mostrato che le prestazioni degli studenti di scuola primaria e secondaria[2] nei test relativi alle abilità spaziali potrebbero fungere da indicatore di rendimento nei quesiti geometrici. Inoltre, alcuni ricercatori hanno cercato di mettere in relazione le abilità spaziali con la comprensione delle figure geometriche e la creatività in geometria (Gagatsis & Geitona, 2021; Gagatsis et al., 2022).
La geometria è in gran parte legata alla comprensione e all'uso delle figure geometriche, intese come entità mentali che esistono solo sulla base delle definizioni e dele proprietà che le caratterizzano (Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2014). Tuttavia, quando insegnano la geometria, gli insegnanti potrebbero non riuscire a dare la giusta attenzione alla struttura di una figura, a causa del poco tempo a disposizione o delle loro difficoltà nel disegnare una figura alla lavagna con precisione. Questo fallimento potrebbe essere dovuto alla scarsa capacità degli insegnanti di proporre una serie di esempi con caratteristiche generiche sufficienti su cui costruire tutte le proprietà della figura.
Comprendere e costruire una dimostrazione matematica è fondamentale nell'insegnamento della geometria. Dimostrare è una parte fondamentale dell'apprendimento matematico in quanto comporta il congetturare, il generalizzare e il giustificare e richiede agli studenti di pensare alle idee matematiche in modo flessibile (Lesseig, 2016).

> «Una dimostrazione assiomatica è un'argomentazione matematica che consiste in una sequenza di affermazioni tra loro collegate a sostegno di un enunciato matematico, essendo ciascuna affermazione logicamente dedotta da affermazioni precedenti e giustificata attraverso una combinazione di affermazioni date, assiomi e teoremi precedentemente dimostrati».
>
> (Winer & Battista, 2022, p. 3, traduzione degli autori)

Hunte (2018) sostiene che quando gli studenti si cimentano in ragionamenti e dimostrazioni hanno l'opportunità di sviluppare una comprensione concettuale più profonda del contenuto matematico e di apprezzare lo scopo del ragionamento e della dimostrazione in matematica. Durante le attività di ragionamento, gli studenti attribuiscono un senso a pattern o congetture utili a sviluppare contro-argomentazioni o dimostrazioni a sostegno della costruzione di significati matematici. La

1. *International Congress on Mathematical Education.*
2. Il sistema educativo a Cipro è suddiviso in 6 anni di istruzione primaria, 3 anni di istruzione secondaria inferiore (*Gymnasio*), 3 anni di istruzione secondaria superiore (*Lykeio*), e la successiva istruzione universitaria.

dimostrazione geometrica è correlata con il ragionamento basato su proprietà geometriche. Il ragionamento geometrico è collegato al ragionamento spaziale, già menzionato in precedenza, ed è necessario esaminare fino a che punto il ragionamento spaziale degli studenti dipenda dall'uso delle proprietà (Battista et al., 2018).

Le difficoltà nell'insegnamento e nell'apprendimento delle dimostrazioni sono ben riconosciute a livello internazionale (Miyazaki et al., 2016). Anche gli studenti universitari di matematica hanno difficoltà a comprendere e costruire dimostrazioni matematiche (Zazkis & Zazkis, 2013). Winer e Battista (2022) hanno mostrato che la maggior parte degli studenti utilizzano un ragionamento solido nelle proprie spiegazioni orali, ma faticano a esplicitare lo stesso ragionamento nelle dimostrazioni scritte. Per sostenere il ragionamento relativo a dimostrazioni geometriche, Cheng e Lin (2008) hanno sviluppato una strategia di ragionamento passo-a-passo e hanno mostrato che questa strategia di insegnamento migliora il processo di dimostrazione degli studenti.

Nel report di Mwadzaangati e Kazima (2019), riguardante i sistemi educativi africani, si evidenzia la mancanza di conoscenze nell'insegnamento delle dimostrazioni geometriche da parte degli insegnanti come la causa principale della debolezza degli studenti nello sviluppo delle dimostrazioni geometriche. La ricerca sul lavoro degli studenti con le dimostrazioni si è concentrata sulle difficoltà degli studenti rispetto al ragionamento logico (Stylianides, 2018). Tradizionalmente, nel curriculum scolastico la dimostrazione viene insegnata in maniera più estesa nel contesto della Geometria Euclidea e viene presentata come conferma formale di affermazioni ritenute vere. Una componente importante della validità delle dimostrazioni geometriche degli studenti è la sequenza delle deduzioni logiche che essi producono. Tuttavia, la costruzione di una dimostrazione basata sulle proprietà geometriche presuppone la comprensione di tali proprietà e la capacità di correlarle a una struttura di ragionamento geometrico. Duval (2007) sostiene che la parte più importante della costruzione di una dimostrazione logica è la comprensione dello stato o della funzione di ciascuna proposizione attraverso una singola deduzione.

Per quanto riguarda l'insegnamento della geometria, il focus di una grande quantità di ricerche verte sulla conoscenza dei contenuti e sulle rispettive conoscenze didattiche degli insegnanti. Come sottolineato da Ball et al. (2001), pochissimi studi si sono concentrati su questo tema e quelli esistenti hanno talvolta fornito risultati paradossali, come nel saggio di Begle (1979, citato da Ball et al., 2001) in cui l'autore concludeva che una maggiore conoscenza delle materie matematiche poteva essere associata a un effetto negativo sul rendimento degli studenti. Shulman (1986) introdusse il concetto di conoscenza del contenuto pedagogico (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK) per integrare la conoscenza del contenuto disciplinare e, sulla base di questa idea, sono stati apportati diversi perfezionamenti per descrivere le conoscenze realmente necessarie per insegnare la matematica. Hill et al. (2008) hanno introdotto il concetto di conoscenza dei contenuti e degli studenti (*Knowledge of Contents and Students* – KCS) e di conoscenza dei contenuti e dell'insegnamento (*Knowledge of Contents and Teaching* – KCT) per organizzare la conoscenza matematica per l'insegnamento (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT). Dal punto di vista della ricerca in didattica, è stata introdotta in modo simile anche la correlata nozione di conoscenza dei contenuti didattici (Houdement & Kuzniak, 1996, 2001) allo scopo di indagare la conoscenza della didattica della matematica di cui gli insegnanti hanno bisogno in aula. Gli insegnanti sembrano guardare al rendimento degli studenti attraverso alcune nozioni preconcette di geometria e ciò li porta ad adottare atteggiamenti diversi nei confronti delle difficoltà che gli studenti incontrano. Nel caso della dimostrazione geometrica, Fuglestad e Goodchild (2009) hanno esaminato le conoscenze degli insegnanti sulla dimostrazione, concludendo che alcuni insegnanti non sembrano sicuri circa la natura e la necessità della dimostrazione. Cirillo (2011) ha indicato che anche un insegnante principiante con un forte background matematico può non essere ben preparato per insegnare le dimostrazioni.

2.2 La teoria della comprensione delle figure geometriche di Raymond Duval

Oltre alla teoria riguardante un approccio semiotico all'apprendimento della matematica, le cui nozioni chiave sono i registri delle rappresentazioni semiotiche, le trasformazioni tra le rappresentazioni e il funzionamento cognitivo del pensiero (Duval, 1993), Duval ha sviluppato un'importante teoria relativa all'insegnamento e all'apprendimento della geometria e, più specificatamente, alla comprensione delle figure geometriche (Duval, 1995, 1998, 2005).

Le figure geometriche sono rappresentazioni che possiedono un ruolo centrale nell'attività geometrica. Una figura unisce tre rappresentazioni semiotiche: la dimensione, la configurazione della forma e le parole che ne denominano le proprietà. Secondo Duval (2005), la questione cruciale nell'apprendimento della geometria è la separazione tra dimensione e visualizzazione, perché la messa in gioco della dimensione (2D o 3D) provoca illusioni visive e stime percettive errate riguardo le relazioni tra le unità figurali. Pertanto, le difficoltà che la maggior parte degli studenti devono affrontare sono dovute a un divario cognitivo tra due modi opposti di guardare le figure e riconoscere ciò che rappresentano: il modo percettivo usato spontaneamente per qualsiasi rappresentazione visiva di oggetti materiali o organizzazione spaziale (immagini, diagrammi, mappe ecc.) e il modo matematico legato al ragionare, definire, risolvere problemi o dimostrare. La stima percettiva è talvolta fuorviante per il riconoscimento delle proprietà geometriche e, di conseguenza, degli oggetti geometrici rappresentati. D'altra parte, la visualizzazione è indipendente da aspetti dimensionali e riguarda solo la discriminazione e la configurazione della forma (Duval, 1995): è la comprensione simultanea e immediata di una configurazione nel suo insieme.

Duval distingue quattro forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche: percettiva, sequenziale, discorsiva e operativa. Affinché un disegno funga da "figura geometrica", devono essere attivate la comprensione percettiva e almeno una delle altre tre forme di comprensione.

– La *comprensione percettiva* è la capacità di una persona di nominare figure e riconoscere diverse sotto-figure nel piano o nello spazio. La percezione rispetto a ciò che la figura mostra è determinata dalle leggi dell'organizzazione figurale e dai segni pittorici. Ad esempio, nella Figura 1 sottostante è possibile guardare la figura ABCEDF in due modi diversi (Gagatsis, 2015).

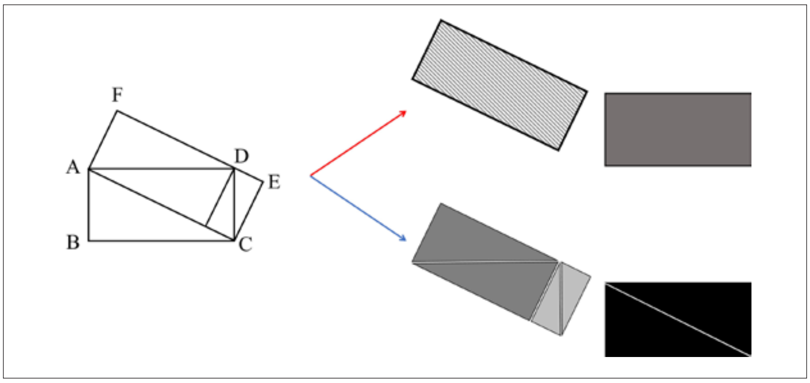


Figura 1. Esemplificazione di due diversi modi di comprendere percettivamente la figura data.

In particolare, la modalità percettiva del riconoscimento visivo si concentra esclusivamente sulla globalità della figura o sul contorno chiuso, secondo i principi enunciati dalla teoria della Gestalt, escludendo così il riconoscimento di altre possibili riconfigurazioni. La modalità percettiva si attiva e si rinforza quando le figure vengono utilizzate come oggetti osservabili empiricamente e può favorire o inibire il riconoscimento euristico.

– La *comprensione sequenziale* si riferisce alla capacità di una persona di costruire una figura o di descrivere la costruzione di una figura. L'organizzazione delle unità figurali elementari non dipende dalla comprensione percettiva, ma piuttosto da vincoli tecnici e proprietà matematiche.

– La *comprensione operativa* è una forma di trattamento visivo che permette un'analisi approfondita della soluzione di un problema osservando una figura e dipende dai vari modi in cui può essere modificata una data figura. Uno dei modi è quello mereologico che si riferisce alla divisione in parti dell'intera figura e alla combinazione di queste in un'altra figura o in sotto-figure (riconfigurazione). Il modo mereologico è una procedura comune utilizzata nelle attività geometriche riguardanti, ad esempio, l'area delle figure. All'interno della comprensione operativa la figura data diventa punto di partenza per esplorare altre configurazioni che hanno origine dall'applicazione di altre operazioni visive: la percezione visiva e la modifica dell'orientamento della figura. La percezione visiva è correlata al percepire la figura più larga o più stretta, o inclinata mentre la modifica dell'orientamento è correlata alla variazione della posizione o dell'orientamento di una data figura. Infine, l'uso di linee ausiliarie per dimostrare un problema geometrico risulta essere un modo importante per comprendere operativamente una figura geometrica. È importante notare che, in generale, la dimostrazione di un problema geometrico è più difficile quando le linee ausiliarie sono esterne alla figura iniziale (Levav-Waynberg & Leikin, 2009).
– La *comprensione discorsiva* riguarda l'efficace uso delle proprietà per scopi deduttivi. Una figura è vista in relazione a una denominazione o a un'ipotesi che rendono esplicite determinate proprietà. La comprensione percettiva non può determinare le proprietà matematiche rappresentate in un disegno (Duval, 1995), quindi alcune proprietà matematiche devono essere fornite attraverso il discorso (denominazione e ipotesi). L'assenza di denominazioni e di ipotesi in un disegno lo rende una rappresentazione ambigua e, quindi, le proprietà che si osservano possono non essere le stesse per tutti (Duval, 1995). La comprensione discorsiva avviene quando un individuo utilizza l'argomentazione o il discorso per dimostrare le proprietà matematiche della figura. Questo tipo di comprensione cognitiva è necessaria poiché un individuo non può determinare le proprietà matematiche solamente attraverso la comprensione percettiva.

In molti nostri studi precedenti, è stato dimostrato che le diverse forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche sono strettamente correlate (Gagatsis, 2015; Gagatsis at al., 2015). È stato infatti validato un modello strutturale per studenti di scuola secondaria (di 13-17 anni), che comprende tutte e quattro le forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, sequenziale, operativa e discorsiva). In altre parole, il termine "modello strutturale" viene utilizzato basandosi sull'analisi statistica nota come SEM (*Structural Equation Modelling*), secondo la quale un modello teorico viene validato attraverso l'utilizzo dell'analisi fattoriale confermativa. Vale la pena notare che questo modello ha la stessa struttura per due diverse popolazioni sperimentali, ovvero per studenti di scuola secondaria inferiore (di 13-15 anni) e per studenti di scuola secondaria superiore (di 16-17 anni). Un modello strutturale simile è stato validato per allievi di scuola primaria (di 10-12 anni), comprendendo tre forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, discorsiva e operativa) (Gagatsis et al., 2015). Questo risultato è importante perché nonostante le differenze nelle conoscenze e nelle abilità degli studenti rispetto alle tre diverse popolazioni e le differenze tra i problemi di geometria proposti alle tre popolazioni, i modelli strutturali risultanti dall'analisi statistica SEM sono risultati simili. In aggiunta, Torregrosa e Quesada (2009) hanno studiato forme di ragionamento in cui comprensione discorsiva e comprensione operativa si coordinano per generare una dimostrazione. Riteniamo che la loro affermazione possa essere riferita al nostro "modello strutturale" sperimentale e alla sua relazione con le dimostrazioni generate dagli studenti e/o dagli insegnanti.

3 Metodologia

3.1 Contenuto del corso

La ricerca qui descritta è stata svolta con 42 insegnanti di matematica di scuola secondaria (inferiore o superiore) che hanno partecipato a un corso intensivo di pedagogia. Tutti gli insegnanti avevano un Bachelor in Matematica conseguito in diverse università di Cipro, della Grecia, di altri Paesi europei o degli Stati Uniti. Più della metà dei partecipanti avevano anche un Master in Matematica pura e/o applicata e in Didattica della matematica. Inoltre, è importante notare che alcuni di loro avevano anche conseguito un dottorato di ricerca in diversi ambiti della matematica. Quasi tutti gli insegnanti avevano esperienza nell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie di Cipro; prima di frequentare questo specifico corso di formazione lavoravano come insegnanti di matematica presso scuole private o come docenti precari presso le scuole pubbliche e stavano frequentando il corso per ottenere una posizione permanente.

Il corso è stato offerto nell'ambito del programma post-laurea in Didattica della matematica dall'Istituto pedagogico di Cipro in cooperazione con il Dipartimento dell'educazione dell'Università di Cipro. Nello specifico, il contenuto del corso includeva una breve rassegna di alcuni concetti e metodi di ricerca in didattica della matematica, nonché la presentazione dei risultati di diversi articoli di ricerca pubblicati riguardanti l'interpretazione degli errori degli studenti nelle attività di algebra, analisi e geometria. Una parte del corso, in cui è stata presentata la teoria della comprensione delle figure di Duval, ha riguardato l'insegnamento della geometria. Particolare enfasi è stata posta sull'insegnamento e l'apprendimento della geometria con riferimenti dettagliati alla comprensione delle figure geometriche e ad altri concetti (la teoria dei registri semiotici di Duval, la teoria dei concetti figurali di Fischbein, la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau e il modello del ragionamento geometrico di Van Hiele).

In didattica della matematica sono stati sviluppati un insieme di concetti, metodi e teorie che ne delineano il campo di validità (Brousseau, 1997). Le teorie che riguardano i concetti e i metodi della didattica della matematica emergono da svariate ricerche che concernono diverse situazioni didattiche e vari concetti matematici. Il concetto di contratto didattico, ad esempio, è stato introdotto da Brousseau e si riferisce alle varie situazioni di insegnamento in cui esiste un accordo implicito tra un insegnante e un allievo riguardo ciò che viene gestito da ciascun "partner" e sulle loro reciproche responsabilità, impegni ecc. Il ruolo del contratto didattico è quello di regolare le interazioni tra docente e studente in termini di conoscenza. L'insegnante rispetta il contratto insegnando e valutando, e lo studente rispetta il contratto se completa la valutazione, fa i compiti e cerca di comprendere le aspettative dell'insegnante per soddisfarle. Brousseau (1989) ha studiato anche il contratto didattico che gli studenti devono rispettare mentre risolvono i problemi. Questi problemi sono solitamente problemi ordinari con una sola soluzione che si ottiene utilizzando tutti i dati forniti attraverso processi familiari; se questi problemi ordinari sono di tipo geometrico, la soluzione deve essere trovata o applicando un teorema o una proprietà oppure derivandola direttamente dalla figura. A causa del rispetto dei termini contrattuali, gli studenti lavorano in un modo tipico, formale e non realistico (Verschaffel et al., 2000). La **Figura 2** è un semplice esempio indicativo di un problema geometrico in cui il concetto di contratto didattico potrebbe interferire (Panaoura-Maki, 2007). La maggior parte degli studenti trovano la soluzione ovvia $\overline{AC} = 6$ cm come lato del quadrato. Molti di loro, tuttavia, non si accontentano della soluzione ovvia e per trovarla applicano il teorema di Pitagora perché, secondo il contratto didattico, una soluzione matematica è accettabile solo quando risulta dall'applicazione di un algoritmo, di un teorema o di una proprietà matematica. Tuttavia, il vero apprendimento non avviene attraverso una cieca obbedienza ai termini del contratto, ma al contrario avviene quando il contratto didattico viene violato (Brousseau, 1989).

Nel triangolo rettangolo ABC, $\overline{BC} = 10$ cm e $\overline{AB} = 8$ cm. ACDE è un quadrato ($\overline{CD} = 6$ cm). Trova la lunghezza del segmento AC.

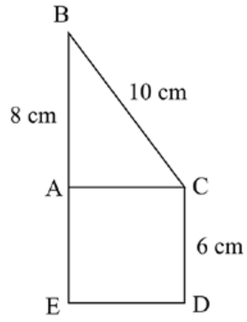


Figura 2. Un quesito geometrico in cui può interferire il contratto didattico.

3.2 La prova scritta

I partecipanti al corso hanno completato una prova scritta composta da due parti (si veda l'Allegato 1): la parte A comprende sei semplici quesiti geometrici per studenti di scuola secondaria inferiore (di 12-14 anni) e la parte B comprende tre domande che miravano a esaminare la capacità dei partecipanti di prevedere errori e difficoltà degli studenti. I quesiti inclusi nella seconda parte sono tre proposizioni geometriche riguardanti l'uguaglianza di due altezze o di due mediane o due bisettrici di un triangolo. In tutti e tre i casi il triangolo risulta essere isoscele. Questi tre quesiti hanno una formulazione quasi identica, ma la difficoltà di risoluzione differisce notevolmente. In altre parole, si potrebbe sostenere che vi sia una analogia nel modo in cui sono presentati i tre quesiti. Ci siamo concentrati sull'identificazione delle relazioni tra le soluzioni che gli insegnanti hanno dato ai quesiti in entrambe le parti del test e le loro interpretazioni riguardo alle possibili difficoltà degli studenti nel risolvere quei quesiti, riferendosi alle diverse forme di comprensione delle figure geometriche. I quesiti sono stati presentati agli insegnanti attraverso la seguente consegna: «Presenta la risposta corretta ad ogni quesito e spiega come lavorerebbero gli studenti e i loro possibili errori. Presenta e spiega quali concetti o teorie della didattica intervengono nella loro soluzione».

3.3 Analisi dei risultati

L'analisi dei risultati è stata divisa in tre fasi: a) un'analisi qualitativa del modo in cui gli insegnanti hanno analizzato a priori i concetti didattici coinvolti nella soluzione dei quesiti, b) un'analisi quantitativa delle soluzioni dei partecipanti e delle loro previsioni sulle possibili difficoltà ed errori degli studenti, c) un'analisi statistica implicativa per esaminare le interrelazioni tra le loro soluzioni e le rispettive aspettative didattiche. L'analisi statistica implicativa è stata concepita da Gras per la sua tesi di dottorato riguardante gli obiettivi della didattica della matematica (Gras et al., 2013; Gras et al., 2008). Il software che implementa il metodo si chiama CHIC e ne esistono diverse versioni (per questo studio è stata utilizzata la versione 6.1). I risultati sono prodotti in forma algebrica o diagrammatica. In questa ricerca vengono presentati due diagrammi, che sono i più importanti: il grafico implicativo e l'albero delle similarità. Nei grafici implicativi sono presenti frecce tra i diversi quesiti (variabili). Se esiste una freccia tra la variabile A e la variabile B, A → B, significa che il successo di A implica il successo di B. D'altra parte, nell'albero delle similarità, se due variabili sono collegate con due linee verticali, significa che i due quesiti vengono elaborati in modo simile.

Il metodo di Gras è particolarmente efficace per quanto riguarda l'uso delle rappresentazioni e in particolare il fenomeno della compartimentazione delle rappresentazioni nell'insegnamento della matematica. La compartimentazione è identificata come una difficoltà cognitiva quando un individuo tenta di interpretare e di spostarsi avanti e indietro tra diversi tipi di rappresentazioni matematiche (Duval, 2002). Vinner e Dreyfus (1989) hanno esteso il concetto sostenendo che la compartimentazione si verifica quando un individuo ha due schemi divergenti e potenzialmente contraddittori nella sua struttura cognitiva. Hanno inoltre affermato che un comportamento incoerente è indice di compartimentazione.

Il fenomeno della compartimentazione è stato mostrato attraverso l'analisi statistica implicativa in diversi concetti matematici. In questi studi gli studenti tendono a distinguere i problemi matematici in base alla loro rappresentazione iniziale. Alcuni studi si concentrano sull'uso del modello geometrico della retta numerica per quanto riguarda l'addizione e la sottrazione di numeri interi (Gagatsis & Shiakalli, 2004), mentre altri si concentrano sull'uso delle rappresentazioni nelle funzioni (Gagatsis et al., 2006). Il modo di pensare compartimentalizzato è risultato evidente sia negli studenti di scuola primaria che secondaria. In tutti i casi l'analisi statistica implicativa ha giocato un ruolo essenziale nel rivelare il fenomeno della compartimentazione che influenza negativamente l'apprendimento della matematica da parte degli studenti.
Per il punteggio della prova scritta abbiamo utilizzato il seguente schema di valutazione sia per le soluzioni che per le interpretazioni degli insegnanti: è stata assegnata una scala di punteggi a 5 punti compresa tra 0 e 1 (0; 0,25; 0,5; 0,75; 1) a seconda del livello della correttezza della soluzione data o del livello di pertinenza dell'interpretazione data. Due ricercatori hanno valutato i test in modo indipendente per verificare i risultati e dare affidabilità al punteggio.

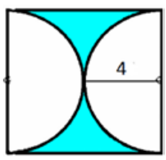
4 Risultati

4.1 Analisi qualitativa delle previsioni degli insegnanti sui quesiti

Prima di presentare l'analisi di ciascun quesito separatamente, è importante notare che la maggior parte degli insegnanti hanno identificato come fattori che intervengono nella soluzione corretta i seguenti concetti o teorie didattiche, vale a dire tutte le forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, sequenziale, operativa, discorsiva), abilità spaziali, visualizzazione spaziale e contratto didattico. Di seguito presentiamo e analizziamo ciascun quesito insieme al lavoro e ai commenti degli insegnanti.

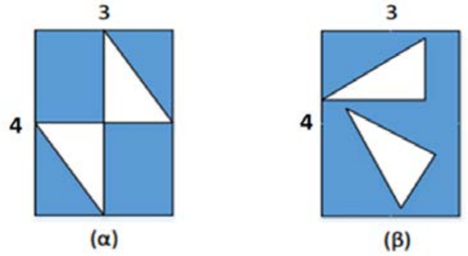
4.1.1 Parte A

T1. Nella figura qui sotto, i due semicerchi all'interno del quadrato hanno un raggio di 4 cm. Calcola l'area colorata. Mostra il modo in cui hai lavorato.



Per risolvere il quesito T1 sono necessarie la comprensione percettiva e quella operativa della figura, come anche la conoscenza dell'area del cerchio e delle proprietà del quadrato. La maggior parte degli insegnanti hanno ritenuto che la comprensione percettiva sia necessaria per identificare le sotto-figure della figura data, cioè per riconoscere il quadrato e i due semicerchi. Inoltre, i docenti hanno individuato la necessità di una comprensione operativa della figura geometrica; più specificamente, hanno affermato che gli studenti dovrebbero eseguire modifiche mereologiche o semplici trasformazioni della figura per rendersi conto che i due semicerchi formano un cerchio. Alcuni insegnanti hanno affermato che gli studenti potrebbero non essere in grado di ricordare la formula per l'area del quadrato e del cerchio. Alcuni hanno anche affermato che il concetto di contratto didattico potrebbe fungere da possibile barriera, spiegando che gli studenti potrebbero provare a trovare l'area di ciascun semicerchio separatamente invece di trovare direttamente l'area del cerchio.

T2. Due triangoli congruenti vengono posizionati su un rettangolo con i lati 3 e 4, come mostrato nelle figure seguenti.
(i) Calcolare l'area della superficie colorata nella figura (α).
(ii) Nella figura (β), i triangoli sono posizionati diversamente. Quale parte del rettangolo è ricoperta dai triangoli? Per favore, spiega il modo in cui hai lavorato.

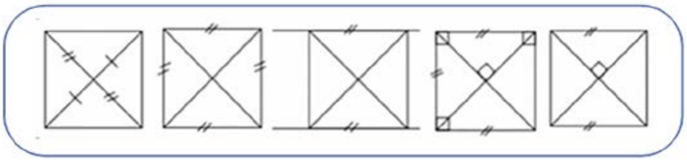


In entrambe le parti (i) e (ii) del quesito T2, sono necessarie la comprensione percettiva e quella operativa della figura. Per quanto riguarda la comprensione operativa, la modifica dell'orientamento della figura è necessaria affinché lo studente si renda conto che i due triangoli coprono ¼ dell'area del rettangolo in entrambe le parti (i) e (ii) del quesito. In questo quesito intervengono anche le abilità spaziali, soprattutto per la parte (ii) dove i due triangoli cambiano posizione.
Inizialmente tutti gli insegnanti hanno menzionato che la comprensione percettiva è necessaria affinché gli studenti si rendano conto delle lunghezze dei due lati dei triangoli. Inoltre, tutti gli insegnanti hanno riconosciuto che la comprensione operativa della figura geometrica, e più specificamente la modifica mereologica della figura, è necessaria affinché gli studenti realizzino che i due triangoli coprono ¼ dell'area del rettangolo. Per quanto riguarda la parte (ii) del quesito, gli insegnanti hanno notato che gli studenti potrebbero pensare che l'area colorata cambi e che anche questo abbia a che fare con la comprensione percettiva della figura geometrica data. La maggior parte degli insegnanti hanno anche affermato che intervengono pure le abilità spaziali, nel senso che gli studenti dovrebbero capire che nonostante i due triangoli cambino posizione dalla figura (α) alla figura (β), l'area non cambia.

T3. Quanti triangoli ci sono nella figura qui sotto?

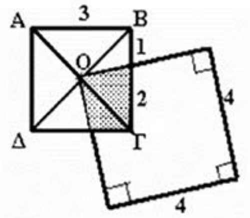
Per la risoluzione di questo quesito, sono necessarie la comprensione percettiva e quella operativa della figura. La modifica mereologica della figura darebbe allo studente l'opportunità di dividere e riunire le sotto-figure e quindi contare correttamente il numero totale di triangoli presenti. La maggior parte degli insegnanti hanno risposto che è attraverso la comprensione percettiva che gli studenti possono inizialmente identificare i triangoli più "evidenti" nella figura data. Quindi, la maggior parte degli insegnanti hanno concordato sul fatto che interviene la comprensione operativa della figura geometrica, poiché gli studenti devono eseguire modifiche mereologiche per identificare le sotto-figure e anche per dividerle e riunirle. Dovranno cioè spezzare i quadrati in triangoli e anche riunire le sotto-figure per crearne di nuove. Alcuni docenti hanno anche affermato che le abilità spaziali e la visualizzazione spaziale sono necessarie affinché gli studenti possano identificare anche i triangoli più grandi, cioè quelli che si possono identificare unendo 4 triangoli piccoli.

T4. Con riferimento all'immagine seguente, agli studenti vengono poste due domande:
a) Quali informazioni vengono fornite per ciascuna delle figure?
b) Indicare, dove possibile, l'esatta natura del quadrilatero.

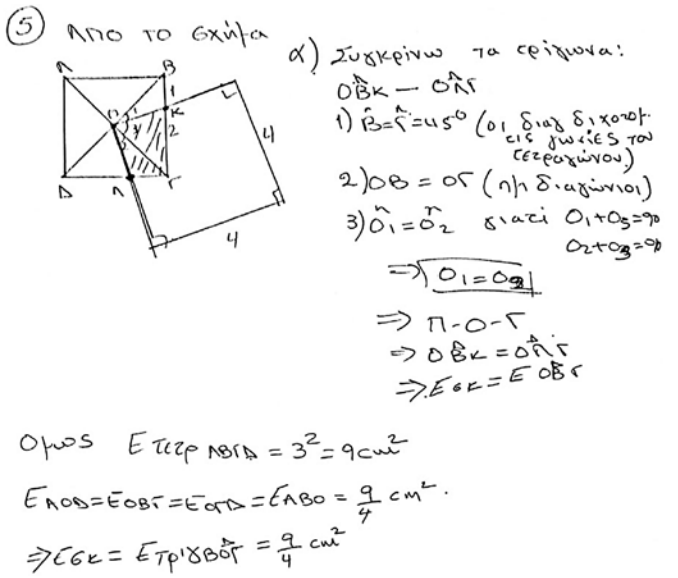


Sebbene per questo quesito sia necessaria la comprensione percettiva, è attraverso la comprensione discorsiva che lo studente può risolverlo correttamente. Questo perché gli studenti hanno bisogno di dimostrare la natura di ciascuna figura data utilizzando la loro conoscenza delle proprietà di un quadrilatero, invece di utilizzare solamente la loro comprensione percettiva.
Risolvendo il quesito T4, la maggior parte degli insegnanti hanno osservato che i concetti di comprensione percettiva e discorsiva intervengono nella sua soluzione. In altre parole, gli insegnanti hanno ritenuto che la difficoltà più probabile possa essere che gli studenti prendano in considerazione la rappresentazione della figura e non le proprietà presentate. Pertanto, gli studenti non dimostrerebbero la natura di ciascun quadrilatero utilizzando proprietà e teoremi matematici ma, invece, trarrebbero conclusioni utilizzando esclusivamente la loro comprensione percettiva. Ad esempio, un docente ha menzionato il fatto che, per il primo quadrilatero, gli studenti potrebbero capire dall'immagine che gli angoli delle figure sono retti mentre questo non dovrebbe essere dedotto dalla figura ma, invece, dovrebbe essere dimostrato. Nel complesso, la maggior parte degli insegnanti hanno osservato con successo che la comprensione discorsiva e quella percettiva della figura sono necessarie affinché gli studenti possano stabilire collegamenti tra ciascuna figura e le rispettive proprietà del rettangolo.

T5. Nella figura seguente, O è il punto di intersezione delle diagonali del quadrato $ΑΒΓΔ$.
Trova l'area della regione colorata.



T5 è stato un quesito con un basso tasso di successo sia nella soluzione sia nell'interpretazione. È risultato il quesito più difficile tra i cinque del primo gruppo e il terzo più difficile tra gli otto quesiti dell'intero questionario. T5 richiede la comprensione percettiva, quella operativa (in particolare la modifica dell'orientamento della figura) e quella discorsiva della figura geometrica. Innanzitutto, gli insegnanti hanno affermato che la comprensione percettiva potrebbe interferire portando gli studenti a non essere in grado di identificare quali triangoli occorre confrontare. Inoltre, gli insegnanti hanno affermato che per risolvere questo quesito è necessaria la comprensione operativa, e più specificamente la modifica mereologica. I docenti hanno identificato come possibile difficoltà il fatto che gli studenti non sarebbero in grado di riconoscere la congruenza tra i due triangoli più piccoli e quindi non riuscirebbero a proseguire con la soluzione. Ciò ha anche a che fare con la modifica dell'orientamento della figura; alcuni insegnanti l'hanno menzionata, ma invece di usare il termine «modifica dell'orientamento» l'hanno descritta come «cambiamento di posizione». Tuttavia, l'osservazione cruciale che dà immediatamente la soluzione al quesito è la congruenza dei due triangoli ΟΒΚ e ΟΛΓ, come mostrato dalla soluzione di un docente nella Figura 3. Questa congruenza dei due triangoli però risulta evidente da una rotazione mentale del triangolo ΟΒΚ in modo tale che coincida con il triangolo ΟΛΓ.



Traduzione:

Dalla figura, a) confronto i triangoli: ΟΒΚ – ΟΛΓ
1) angolo Β = angolo Γ = 45° (le diagonali bisecano gli angoli del quadrato)
2) ΟΒ = ΟΓ (diagonali)
3) angolo $Ο_1$ = angolo $Ο_2$ perché $Ο_1 + Ο_3 = 90°$ e $Ο_2 + Ο_3 = 90°$
→ angolo $Ο_1$ = angolo $Ο_2$
→ lati – angoli adiacenti congruenti
→ triangolo ΟΒΚ = triangolo ΟΛΓ
→ Area della regione colorata = Area di ΟΒΓ.

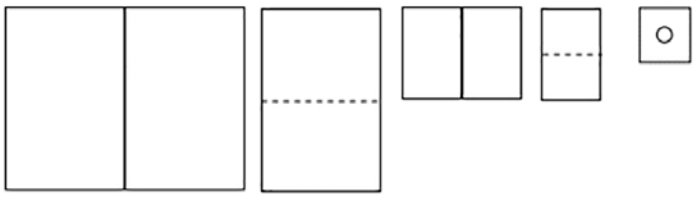
Tuttavia, l'area del quadrato ΑΒΓΔ = 3² = 9 cm².
Area di ΑΟΔ = Area di ΟΒΓ = Area di ΟΓΔ = Area di ΑΒΟ = $\frac{9}{4}$ cm².
→ Area of shaded region = Area of triangle ΒΟΓ = $\frac{9}{4}$ cm².

Figura 3. Un esempio di soluzione corretta elaborata da un docente.

Pertanto, sono necessarie anche le abilità spaziali, e più specificamente la visualizzazione spaziale e la flessibilità nel percepire complete figure parzialmente sovrapposte, affinché gli studenti possano immaginare rotazioni di oggetti (sotto-figure) e quindi identificare rispettivamente le sotto-figure necessarie alla soluzione. D'altra parte, il concetto di contratto didattico potrebbe anche intervenire in due modi diversi, ma pochi insegnanti li hanno individuati e spiegati correttamente. Innanzitutto,

molti insegnanti si sono occupati della dimostrazione geometrica della congruenza dei due triangoli basandosi sui dati riportati in figura. Ma un numero significativo di loro non si è accorto che questa congruenza è evidente da una rotazione della forma in modo che un triangolo possa sovrapporsi con l'altro. In secondo luogo, pochi insegnanti hanno affermato che la lunghezza del lato del quadrato più grande (4 cm) non è necessaria per la soluzione del problema, ma nessuno si è reso conto che tali dati metrici non sono compatibili con il resto dei dati forniti dal problema. Tuttavia, alcuni di loro hanno provato a risolvere il problema ignorando la lunghezza di 4 cm.
Alcuni insegnanti hanno anche fatto riferimento alle abilità spaziali come a un concetto che interviene nella soluzione spiegando che gli studenti dovrebbero modificare mentalmente la figura data per identificare che l'area colorata è ¼ dell'area totale. Alcuni insegnanti hanno menzionato anche il concetto di contratto didattico che interviene nella soluzione. Gli insegnanti lo hanno spiegato in due modi: a) gli studenti proverebbero a utilizzare tutti i dati forniti mentre non tutti i dati sono necessari per raggiungere una soluzione, b) gli studenti proverebbero a calcolare l'area colorata sottraendo l'area del quadrato piccolo dall'area del quadrato grande solo per l'interesse di eseguire un'operazione.

> T6. Maria piega un foglio di carta a metà e poi ripete lo stesso procedimento altre 3 volte. Quindi crea un foro sul pezzo di carta. Se distende nuovamente il pezzo di carta, quanti buchi avrà il foglio? Mostra il tuo procedimento e spiega come hai ottenuto la tua risposta.



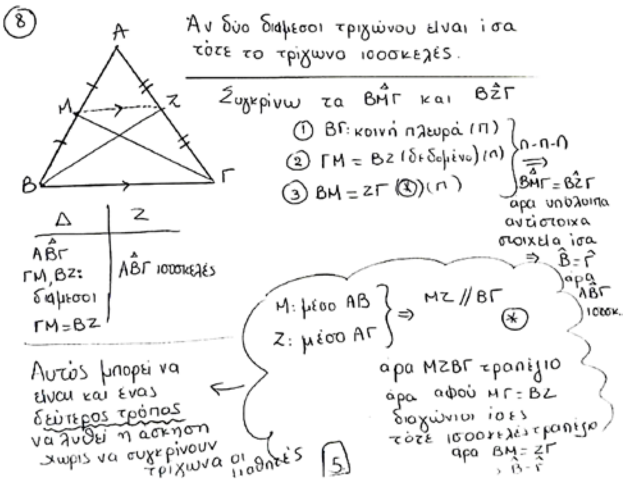
Nel quesito T6 sono necessarie la comprensione percettiva e quella sequenziale della figura insieme alle abilità spaziali e, più nello specifico, alla visualizzazione spaziale. La maggior parte degli insegnanti hanno affermato che gli studenti potrebbero incontrare difficoltà in due operazioni: riconoscere la simmetria e modificare mentalmente la figura. Alcuni hanno associato questa difficoltà ai concetti di abilità spaziali e visualizzazione spaziale, mentre altri l'hanno descritta come una difficoltà nella comprensione sequenziale e in quella discorsiva. Pochi docenti hanno previsto che gli studenti potrebbero risolvere il quesito attraverso un approccio algebrico, cioè utilizzando una successione geometrica.

4.1.2 Parte B

La parte B della prova scritta consisteva nelle seguenti tre domande:

> TR1. Possiamo sostenere che un triangolo è isoscele se due delle sue altezze sono uguali?
> TR2. Possiamo sostenere che un triangolo è isoscele se due delle sue mediane sono uguali?
> TR3. Possiamo sostenere che un triangolo è isoscele se due delle sue bisettrici sono uguali?
> Confronta le tre domande sulla base di quanto sia difficile per gli studenti dimostrare ognuna di esse e spiega le ragioni per cui, se presenti, ci sono delle differenze nelle possibili difficoltà. Quali concetti didattici intervengono?

Tutti e tre i quesiti della Parte B riguardavano processi di dimostrazione. Per TR2 e TR3, che sono risultati i quesiti con le percentuali di successo più basse sia nella soluzione sia nell'interpretazione, presentiamo prima un esempio di soluzione corretta da parte di un docente e poi analizziamo i quesiti. La **Figura 4** e le **Figure 5a-5b** presentano un esempio della soluzione corretta di un insegnante rispettivamente di TR2 e TR3.



Traduzione della soluzione del quesito TR2:

Confronto i triangoli ΒΜΓ e ΒΖΓ.
1) ΒΓ: lato comune
2) ΓΜ = ΒΖ (come dato)
3) ΒΜ = ΖΓ*
*: poiché Μ è il punto medio di ΑΒ e Ζ è il punto medio di ΑΓ, allora ΜΖ è parallelo a ΒΓ e allora ΜΖΒΓ è un trapezio. Quindi, poiché ΜΓ = ΒΖ, le diagonali sono uguali allora è un trapezio isoscele e quindi ΒΜ = ΖΓ e angolo Β = angolo Γ.

Poiché 1), 2), 3) sono veri, dalla congruenza dei tre lati si deduce che triangolo ΒΜΓ = triangolo ΒΖΓ e quindi angolo Β = angolo Γ, quindi il triangolo ΑΒΓ è isoscele.

Figura 4. Un esempio della soluzione corretta del quesito TR2 elaborata da un insegnante.

Poiché il quesito TR3 richiede una soluzione complessa e lunga, nelle **Figure 5a-5b** sottostanti mostriamo solo la figura costruita da un docente e presentiamo direttamente la traduzione della sua soluzione.

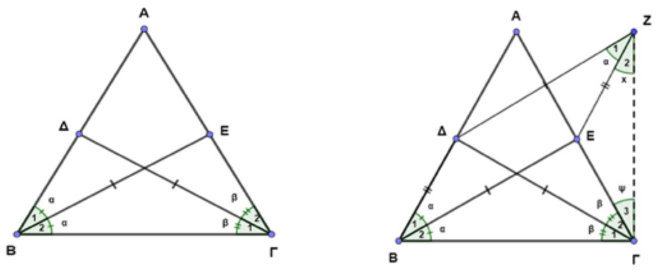
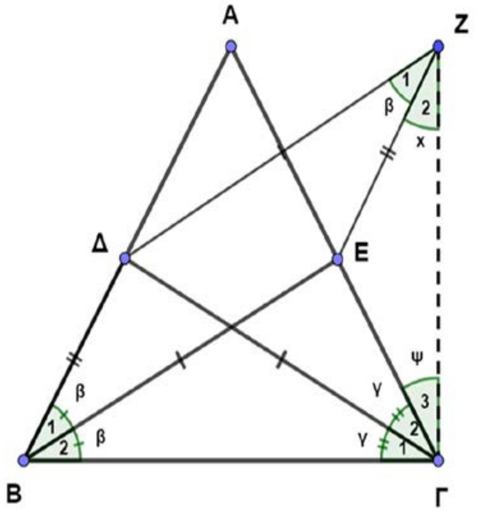


Figura iniziale costruita. Figura finale modificata.

Figura 5a. La trasformazione della figura iniziale del triangolo nel quesito TR3.



Nel triangolo $AB\Gamma$, considero le bisettrici BE e $\Gamma\Delta$ degli angoli B e Γ. Le bisettrici sono congruenti $BE = \Gamma\Delta$.
BE bisettrice, quindi $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \beta$.
$\Gamma\Delta$ bisettrice, quindi $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \gamma$.

Costruisco il punto Z in modo tale che ΔBEZ sia un parallelogramma.
Dalle proprietà del parallelogramma:
– I lati opposti sono congruenti $B\Delta = EZ$ e $\Delta Z = BE = \Gamma\Delta$.
– Gli angoli opposti sono congruenti, $\Delta\hat{B}E = \Delta\hat{Z}E = \alpha$.
Ipotizziamo che il triangolo $AB\Gamma$ non sia isoscele e che $B < \hat{\Gamma}$. Poi,
$\hat{B} = 2\beta < 2\gamma = \hat{\Gamma}$ e così $\beta < \gamma$.

Supponiamo che $\hat{Z}_2 = x$ e $\hat{\Gamma}_3 = \psi$.
Il triangolo $\Delta Z\Gamma$ è isoscele perché $\Delta Z = \Delta\Gamma$ e quindi gli angoli della sua base sono congruenti $\rightarrow \Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{Z}\Gamma \rightarrow \gamma + \psi = \beta + x$.

Siccome abbiamo ipotizzato che $\beta < \gamma$ allora dovrebbe essere vero che $x > \psi$ perché anche $\gamma + \psi = \beta + x$ sia vero. Ciò significherebbe che $E\Gamma > EZ$ e siccome da $EZ = B\Delta$ allora $E\Gamma > B\Delta$.

Se osserviamo i triangoli $\Delta B\Gamma$ e $EB\Gamma$ abbiamo:
– $B\Gamma$ lato comune
– $BE = \Gamma\Delta$ (dato)
– $E\Gamma > B\Delta$ (χ).
Da quanto sopra e poiché il lato $E\Gamma$ è maggiore di $B\Delta$, allora è vero che $\beta > \gamma \rightarrow 2\beta > 2\gamma \rightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}$, il che ci porta a una contraddizione poiché inizialmente avevamo ipotizzato $\hat{B} < \hat{\Gamma}$. Sono stato portato a una contraddizione a causa del presupposto falso che ho fatto secondo cui un triangolo con due bisettrici congruenti non può avere anche due angoli congruenti. Pertanto, il triangolo ha due angoli congruenti ed è quindi isoscele.

Figura 5b. Una soluzione del quesito TR3 (direttamente tradotta dagli autori).

Il quesito TR1 richiede la comprensione percettiva, quella sequenziale e quella discorsiva delle figure geometriche mentre i quesiti TR2 e TR3 richiedono tutte le forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, sequenziale, operativa e discorsiva), nonché un'ottima conoscenza delle proprietà e dei teoremi geometrici. La comprensione sequenziale è necessaria affinché gli studenti possano costruire una figura corretta. La comprensione percettiva li aiuterebbe a identificare quali figure possono utilizzare per trovare un percorso risolutivo, mentre la comprensione operativa consentirebbe loro di modificare la figura costruita e soprattutto di costruire linee ausiliarie. Naturalmente, senza la comprensione discorsiva e un'eccellente conoscenza delle proprietà geometriche e della teoria, gli studenti non riuscirebbero a stabilire le connessioni richieste e a costruire l'argomentazione necessaria per una procedura di dimostrazione riuscita.

I quesiti TR1, TR2 e TR3 differiscono per difficoltà sebbene la loro formulazione non lo riveli direttamente. Quasi tutti gli insegnanti hanno concordato sul fatto che la dimostrazione del quesito TR3 sia risultata la più difficile mentre la dimostrazione del quesito TR1 sia stata la meno difficile. TR1 può essere dimostrato direttamente combinando i dati forniti dal problema con la teoria geometrica in gioco (congruenza dei triangoli). TR2 può essere risolto direttamente attraverso la congruenza tra triangoli; tuttavia, è necessario utilizzare un teorema aggiuntivo che si riferisce alla congruenza delle tre mediane di un triangolo. TR2 può essere risolto anche utilizzando opportune linee ausiliarie. Tuttavia, per la soluzione di TR3 gli studenti devono costruire correttamente la figura, quindi modificarla disegnando linee ausiliarie appropriate e utilizzare il metodo della dimostrazione per assurdo. È vero che gli studenti hanno più familiarità con i processi di dimostrazione diretta rispetto alla dimostrazione per assurdo.

Secondo le risposte dei partecipanti, il concetto di rappresentazione della figura interviene in tutti e tre i quesiti. Gli insegnanti hanno convenuto che gli studenti potrebbero avere difficoltà a costruire correttamente la figura, sia mentalmente sia su carta (comprensione sequenziale). Inoltre, le loro risposte hanno mostrato la convinzione che la comprensione percettiva sarebbe necessaria affinché gli studenti identifichino quali sotto-figure confrontare. Anche la comprensione operativa è stata citata come potenziale difficoltà dello studente a causa della modifica mereologica necessaria per la costruzione della figura (soprattutto per il quesito TR3). Ciò è chiaramente mostrato qui sopra nella Figura 5a, che presenta la necessaria trasformazione della figura, a partire dalla sua costruzione iniziale per arrivare a quella che permette di risolvere il problema.

Dalle Figure 5a-5b, è evidente che gli studenti dovrebbero tradurre correttamente la formulazione del quesito TR3 in una figura ma dovrebbero anche rendersi conto che non potrebbero risolvere il compito se non modificassero la figura iniziale. Questa modifica è piuttosto complessa in quanto prevede il disegno di linee ausiliarie esterne alla figura costruita. Secondo Leikin ed Elgrabli (2015) due fattori determinano la difficoltà nelle costruzioni ausiliarie: la posizione delle linee ausiliarie (all'interno o all'esterno della figura) e il numero di linee necessarie per identificare una soluzione.

4.2 Analisi quantitativa delle soluzioni e delle previsioni

Per analizzare e confrontare le soluzioni e le interpretazioni degli insegnanti, abbiamo utilizzato due metriche e le rispettive percentuali. La prima metrica è la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nella risoluzione da loro proposta a un dato quesito. Quindi, per fare un esempio, nel quesito T1 tutti gli insegnanti (42 in totale) hanno dato una risposta pienamente corretta e quindi hanno ricevuto 1 punto intero sulla scala a 5 punti (0; 0,25; 0,5; 0,75; 1). Ciò ha dato un "punteggio cumulativo" di 42, che è stato poi convertito in una percentuale di successo (in questo esempio, 100%). Un altro esempio è quello del quesito T2 in cui i punteggi hanno raggiunto una somma cumulativa di 41,75 che dà una percentuale di successo del 99,4% (calcolata come $\frac{41,75}{42} \times 100$). L'altra metrica utilizzata è stata la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nell'interpretazione dei quesiti; questa metrica è stata nuovamente convertita in una percentuale di successo. Nei prossimi paragrafi utilizzeremo quindi i termini "somma cumulativa – soluzione", "somma cumulativa – interpretazione", "tasso di successo – soluzione" e "tasso di successo – interpreta-

zione" per aiutare il lettore a seguire l'analisi.
L'analisi quantitativa delle soluzioni degli insegnanti ha mostrato che, in media, il tasso di successo, come sopra definito, nella risoluzione dei quesiti è stato dell'86,6%. Se consideriamo separatamente le due parti della prova scritta, ovvero la parte A composta da sei quesiti (codificati come T1, T2, T3, T4, T5 e T6) e la parte B composta da tre quesiti (codificati come TR1, TR2 e TR3), osserviamo che gli insegnanti hanno risposto meglio nei primi sei quesiti (parte A) rispetto agli ultimi tre quesiti (parte B), con rispettivamente il 95% e il 69,6% di successo. Vale la pena notare che le domande nella parte B riguardavano processi di dimostrazione. La **Figura 6** presenta il "tasso di successo – soluzione" per quesito. È importante notare che nella maggior parte dei quesiti gli insegnanti hanno ricevuto un punteggio pari a 0 o 1 sulla scala a 5 punti.

Figura 6. Tasso di successo – soluzione, ovvero la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nel risolvere ciascun quesito, convertita in percentuale.

La **Figura 7** presenta il "tasso di successo – interpretazione" derivato dalla somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nell'interpretazione di ciascun quesito. In altre parole, questa metrica mostra come gli insegnanti hanno previsto correttamente le difficoltà che gli studenti avrebbero potuto affrontare, nonché i concetti e le teorie didattiche coinvolte nella risoluzione di ciascun problema.

Figura 7. Tasso di successo – interpretazione, ovvero la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nell'interpretazione di ciascun quesito, convertita in percentuale.

La **Figura 7** mostra che in tutti i quesiti, ad eccezione di TR3, la maggior parte degli insegnanti hanno previsto con successo le difficoltà che gli studenti avrebbero incontrato nel risolverli o nel dimostrarli, nonché le teorie e i concetti didattici che sarebbero intervenuti. Nel caso del quesito T5 circa la metà degli insegnanti ha dato un'interpretazione corretta. I quesiti con il minor successo dal punto di vista dell'interpretazione sono stati TR3, T5 e TR2. Se guardiamo separatamente i risultati delle due parti della prova scritta, allora deduciamo che gli insegnanti hanno avuto più successo nell'interpretare i quesiti della prima parte rispetto alla seconda.
Confrontando le percentuali di successo sia nella risoluzione che nell'interpretazione per ciascun quesito, osserviamo risultati simili. La **Figura 8** mostra questo confronto.

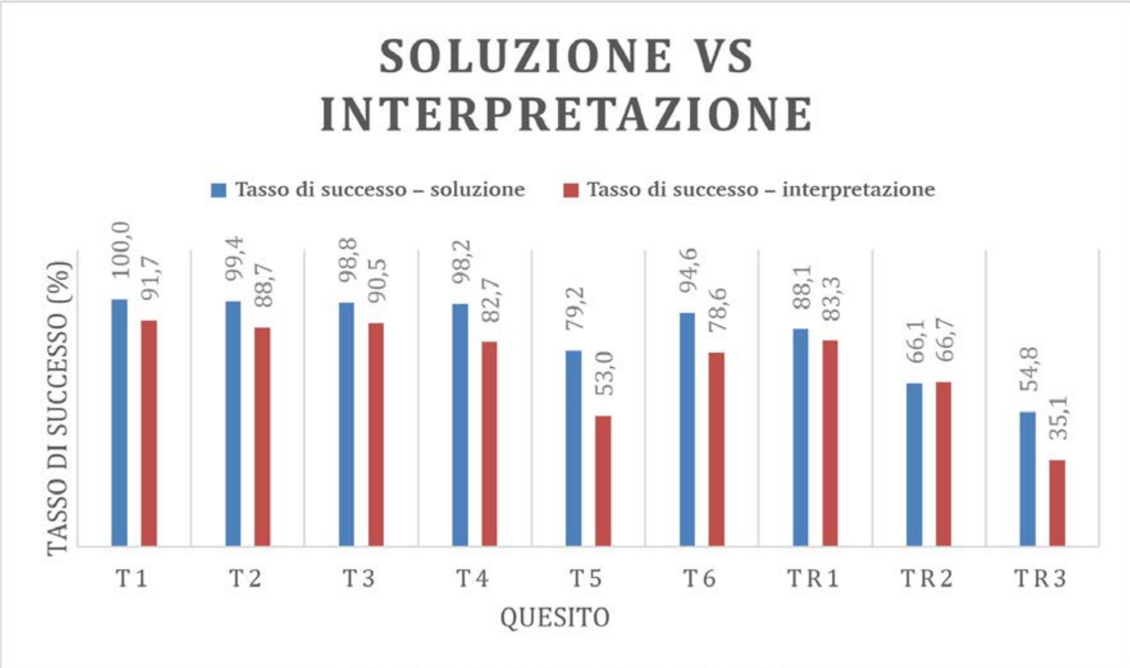


Figura 8. Tasso di successo relativo alle soluzioni per quesito rispetto al tasso di successo relativo all'interpretazione per quesito.

La **Figura 8** riassume la nostra analisi quantitativa mostrando che, ad eccezione del quesito TR2 dove i tassi di successo erano quasi uguali (66,1% e 66,7%), gli insegnanti hanno avuto più successo nel risolvere i quesiti che nell'interpretarli e nel riuscire effettivamente a prevedere le difficoltà degli studenti. TR3 è risultato essere il quesito più difficile sia da risolvere che da interpretare.
Le maggiori discrepanze tra la risoluzione e l'interpretazione dei quesiti sono state riscontrate in T5, TR3, T6 e T4. È sorprendente vedere i quesiti T6 e T4 in questa categoria perché, come risulta evidente dalla **Figura 6**, non erano problemi difficili da risolvere per gli insegnanti. Le percentuali di successo relative alle soluzioni dei quesiti T6 e T4 sono state rispettivamente del 94,6% e del 98,2%. Tuttavia, le percentuali di successo relative all'interpretazione degli stessi quesiti sono risultate del 78,6% e del 82,7%.

4.3 Analisi statistica implicativa

Per riassumere le relazioni di similarità osservate tra i quesiti, sia in termini di soluzioni che di interpretazioni fornite dagli insegnanti, osserviamo il fenomeno della compartimentazione tra i quesiti proposti agli studenti del corso. In particolare, l'albero di similarità (**Figura 9**) mostra cinque diversi gruppi di quesiti, che non sono correlati tra loro. Ciò è evidente anche nella **Tabella 1** seguente, che presenta in dettaglio la similarità tra le variabili. I primi 10 indici di similarità sembrano essere relativamente alti. Non è stata osservata alcuna tendenza generale, poiché vengono creati cinque gruppi distinti di variabili. Il primo gruppo (Gruppo 1) riguarda il successo nella risoluzione dei primi due quesiti T1 e

T2. Il Gruppo 2 mette in relazione le interpretazioni degli insegnanti in Tint1, Tint2, Tint6 con il loro successo nel risolvere il quesito T6. Il Gruppo 3 riguarda T3, T4, T5 e Tint5. Il quarto gruppo riguarda Tint3, Tint4, TR1 e TR1int. Infine, il Gruppo 5 è quello che merita maggiore attenzione per quanto riguarda la similarità delle variabili; esso mette in relazione le soluzioni dei quesiti TR2 e TR3 degli insegnanti con l'interpretazione da loro fornita per gli stessi quesiti.

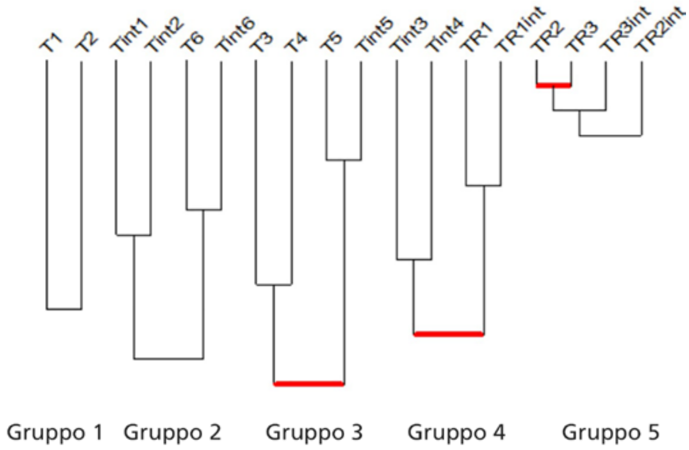


Figura 9. Albero di similarità.

Livello di classificazione	Quesiti o Variabili	Similarità
1	(TR2 TR3)	0,969504
2	((TR2 TR3) TR3int)	0,90235
3	(((TR2 TR3) TR3int) TR2int)	0,821246
4	(T5 Tint5)	0,790061
5	(TR1 TR1int)	0,745479
6	(T6 Tint6)	0,59841
7	(Tint1 Tint2)	0,549653
8	(Tint3 Tint4)	0,539743
9	(T3 T4)	0,515061
10	(T1 T2)	0,5
11	((Tint3 Tint4) (TR1 TR1int))	0,128707
12	((Tint1 Tint2) (T6 Tint6))	0,107071
13	((T3 T4) (T5 Tint5))	0,0749481
14	((T1 T2) (((TR2 TR3) TR3int) TR2int))	0,00451588
15	(((T1 T2) (((TR2 TR3) TR3int) TR2int)) ((Tint3 Tint4) (TR1 TR1int)))	0,000212095
16	(((Tint1 Tint2) (T6 Tint6)) ((T3 T4) (T5 Tint5)))	3,81905e-05

Tabella 1. Livelli di similarità (l'intervallo di valori dell'indice di similarità è compreso tra 0 e 1).

Infatti, i quesiti TR2 e TR3 presentano le maggiori difficoltà rispetto a tutti gli altri quesiti perché la loro soluzione richiede una trasformazione della figura originale utilizzando linee ausiliarie. Inoltre, a seconda della soluzione seguita dai docenti (e/o quella immaginata per gli studenti), è richiesta la conoscenza dei criteri di congruenza dei triangoli o conoscenze anche più specifiche, come la proprietà dell'intersezione delle mediane del triangolo (TR2) o il metodo della dimostrazione per assurdo (TR3). Il secondo gruppo di quesiti più importante è il Gruppo 4 ((Tint3 Tint4) (TR1 TR1int)), che mette in relazione la soluzione che gli insegnanti danno al TR1 con le interpretazioni che danno ai quesiti TR1, T3 e T4. Infine, secondo le risposte dei docenti, la soluzione dei quesiti non è direttamente correlata alle variabili di interpretazione; basta osservare le coppie di variabili (T6, Tint6), (T5, Tint5), (TR1, TR1int) e il Gruppo 5 di variabili (((TR2 TR3) TR3int) TR2int).
Un fenomeno simile di compartimentazione è osservato nel grafico implicativo, presentato nella Figura 10.

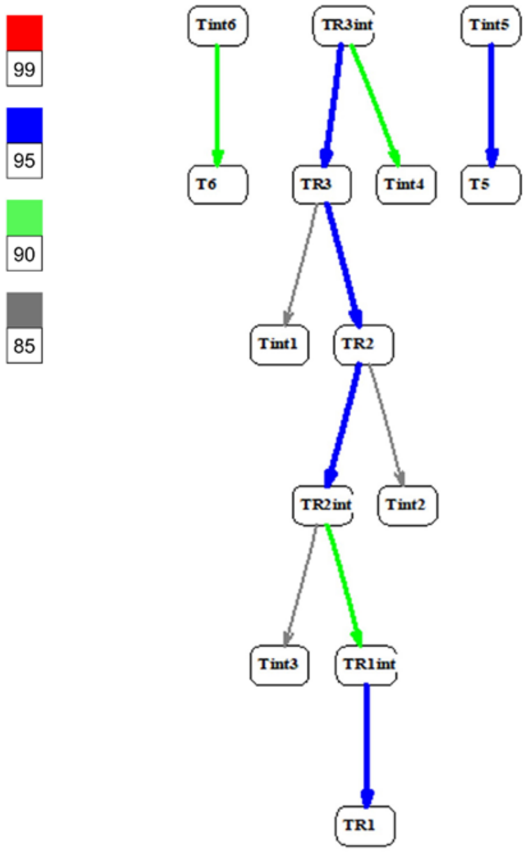


Figura 10. Grafico implicativo (i numeri a lato indicano la significatività delle frecce).

Ci sono tre catene di implicazioni; le prime due sono analoghe ai gruppi di similarità presentati in precedenza Tint6 → T6, Tint5 → T5. Il loro significato è che gli insegnanti che danno una buona interpretazione delle potenziali difficoltà degli studenti in questi quesiti, daranno una soluzione corretta agli stessi. È possibile che gli insegnanti che danno una spiegazione ragionevole delle potenziali difficoltà degli studenti legate a un quesito forniscano una soluzione corretta a tale quesito. Questa tendenza riguarda soprattutto i quesiti legati ai triangoli, cioè i quesiti della seconda parte del test piuttosto che i sei quesiti della prima parte. La terza catena del grafico implicativo presenta il gruppo più importante delle relazioni implicative, ossia il gruppo che inizia con l'interpretazione del quesito T3 (TR3int) all'estremità superiore del grafico. Questa catena è molto importante perché comprende 10 variabili: 6 variabili sono relative ai quesiti del triangolo isoscele, TR1, TR2, TR3, TR1int, TR2int, TR3int; è altrettanto importante che siano incluse altre quattro variabili legate alle interpretazioni degli insegnanti, Tint1, Tint2, Tint3 e Tint4. Per spiegare in modo semplice la **Figura 10**, se un insegnante interpreta correttamente il quesito T3, ciò implica che lo stesso insegnante fornisca una soluzione e un'interpretazione corretta di vari altri quesiti. Un ulteriore risultato che emerge dal grafico sopra è che all'estremità superiore di tutte e tre le catene implicative troviamo variabili relative alle interpretazioni e non alle soluzioni dei quesiti.

5 Discussione

Attraverso il presente studio abbiamo indagato se un gruppo specifico di insegnanti di matematica, partecipando a un corso pedagogico intensivo, riuscisse a implementare vari concetti o teorie didattiche nell'interpretazione dei problemi geometrici scolastici, in particolare riguardanti dimostrazioni geometriche. Il nostro obiettivo è stato quello di esaminare il loro successo nel risolvere i quesiti in relazione alla loro capacità di prevedere e interpretare le rispettive difficoltà degli studenti. Ritenevamo che le loro conoscenze e abilità sull'apprendimento delle figure geometriche dovessero essere esaminate in relazione alla loro capacità di prevedere e interpretare possibili errori e incomprensioni degli studenti. Una particolarità della nostra ricerca è di aver proposto i quesiti TR1, TR2, TR3 che hanno una formulazione analoga. Sebbene non sia immediatamente evidente dalla formulazione dei quesiti, TR1, TR2 e TR3 differiscono per difficoltà. Quasi tutti gli insegnanti hanno concordato sul fatto che TR3 fosse il quesito più difficile da dimostrare, mentre TR1 fosse il meno difficile da dimostrare. Per tutti e tre i quesiti gli insegnanti hanno convenuto che interviene il concetto di comprensione delle figure geometriche. Per essere più precisi, gli insegnanti hanno previsto che gli studenti avrebbero difficoltà a costruire mentalmente la figura e quindi nel riuscire a costruirla correttamente su carta (comprensione sequenziale). Perciò, tutti gli insegnanti hanno convenuto che la comprensione percettiva sarebbe necessaria affinché gli studenti identifichino quali sotto-figure confrontare. È stata inoltre messa in evidenza la comprensione operativa come una possibile difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare nel dover modificare mereologicamente la figura costruita. Più specificatamente, la comprensione operativa, cioè la modifica della figura, è più difficile per il quesito TR3. In altre parole, sembra che gli insegnanti si siano resi conto dell'importanza della teoria della comprensione delle figure geometriche.

Come risulta evidente dall'analisi quantitativa delle soluzioni e delle previsioni degli insegnanti presentata nel **par. 4.2**, sebbene gli insegnanti possano risolvere un quesito, potrebbero non essere in grado di prevedere correttamente la difficoltà che uno studente potrebbe incontrare nel risolverlo o le teorie e i concetti didattici che intervengono nel suo processo di risoluzione.

Inoltre, dall'analisi statistica implicativa delle soluzioni e delle previsioni degli insegnanti presentate nel **par. 4.3**, possiamo dedurre che se un insegnante interpretasse correttamente il quesito T3, il più difficile, cioè se prevedesse correttamente le possibili difficoltà degli studenti nonché le teorie e i concetti della didattica che intervengono nella risoluzione di questo quesito, ciò implica che lo stesso insegnante darebbe una soluzione corretta e una buona interpretazione di vari altri quesiti. In altre parole, la capacità degli insegnanti di fornire dimostrazioni nei tre problemi classici TR1, TR2, TR3 della geometria euclidea è fortemente correlata alle loro interpretazioni non solo di questi tre quesiti, ma anche nelle interpretazioni di altri quattro quesiti. Inoltre, come già accennato nella sezione dei risultati (si veda il **par. 4**), all'estremità superiore di tutte e tre le catene implicative troviamo variabili legate alle interpretazioni e non alle soluzioni dei quesiti. Ciò potrebbe significare che un insegnante in grado di interpretare correttamente un quesito potrebbe anche fornire soluzioni corrette. Infatti, il successo delle sei variabili legate a TR1, TR2 e TR3 è fortemente correlato al successo di altre quattro variabili legate alle interpretazioni degli insegnanti.

I risultati hanno indicato che i docenti si rendono conto dell'importanza della teoria della comprensione delle figure geometriche e la applicano per analizzare i quesiti geometrici assegnati sia rispetto alle possibili difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare, sia rispetto ai concetti e alle teorie didattiche che intervengono nella soluzione di ciascun quesito. Tuttavia, l'analisi qualitativa delle risposte degli insegnanti ha mostrato che non tutti gli insegnanti danno le stesse risposte. In alcuni quesiti, alcuni docenti vedono difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare che non sono in accordo né con gli studi correlati né con il punto di vista della maggior parte degli insegnanti che hanno partecipato a questo studio. In entrambe le analisi si può osservare il fenomeno della compartimentazione nelle risposte dei partecipanti, poiché si formano vari gruppi di similarità e varie catene implicative. Ciò può essere in parte spiegato dalla differenza di difficoltà tra il primo gruppo di quesiti (da T1 a T6) e il secondo gruppo di quesiti (TR1, TR2 e TR3). Infatti, nel processo di soluzione dei primi sei quesiti, era richiesta la comprensione percettiva in tutti i quesiti, la comprensione operativa in quasi tutti i quesiti e la comprensione discorsiva di base solamente in alcuni quesiti. Tuttavia, in tutti i quesiti del secondo gruppo era richiesta una comprensione discorsiva più approfondita. I tre quesiti della Parte B della prova scritta comprendono tre affermazioni geometriche relative a due altezze congruenti di un triangolo (TR1), o due mediane congruenti (TR2) o due bisettrici congruenti (TR3), che richiedono una dimostrazione geometrica. Inoltre, sebbene i tre quesiti sembrino quasi identici nella loro formulazione (congruenza semantica), la loro difficoltà aumenta man mano che si passa dal primo, al secondo e al terzo quesito. Il successo nei quesiti TR1, TR2 e TR3, che hanno a che fare con il triangolo isoscele, implica il successo in quattro variabili di interpretazione (cioè nella previsione corretta delle difficoltà dello studente così come dei concetti e delle teorie della didattica che intervengono nella soluzione). La nostra attenzione al modo in cui gli insegnanti comprendono e mettono in pratica teorie e concetti della didattica della matematica nell'analisi delle attività degli studenti ha evidenziato due punti rilevanti: da un lato, tale attenzione può far luce su vari aspetti dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria, dall'altro mostra l'importante ruolo della formazione sull'insegnamento della matematica e sullo sviluppo del pensiero cognitivo e matematico. Se ne potrebbe dedurre che gli insegnanti che prevedono correttamente le potenziali difficoltà degli studenti possono organizzare il proprio insegnamento in modo più efficiente scegliendo, ad esempio, attività più appropriate. Inoltre, un importante risultato del nostro studio ha dimostrato che un insegnante che dà una soluzione corretta a un problema geometrico non ha necessariamente una profonda comprensione e conoscenza delle teorie e dei concetti didattici sottostanti. Questo risultato potrebbe essere preso in considerazione nella preparazione dei futuri insegnanti di matematica. Consideriamo il nostro studio come un primo passo importante verso l'investigazione della comprensione da parte degli insegnanti delle teorie e dei concetti della didattica della matematica e di come ciò potrebbe influenzare l'insegnamento della geometria e l'apprendimento degli studenti e principalmente l'insegnamento e l'apprendimento delle dimostrazioni geometriche. Occorre analizzare in profondità come gli approcci didattici potrebbero essere migliorati in modo che gli studenti possano sviluppare una comprensione più sicura delle dimostrazioni e del processo dimostrativo. Un ulteriore studio che includa più quesiti geometrici, risolti e interpretati da un campione più ampio di futuri insegnanti di matematica, si rivelerebbe una preziosa aggiunta non solo alla letteratura esistente sull'insegnamento della matematica, ma anche all'insegnamento e all'apprendimento della geometria.

Bibliografia

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433–456). Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Battista, M. T., Frazee, L. M., & Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. In K. Mix & M. Battista (Eds.), *Visualizing Mathematics. Research in Mathematics Education* (pp. 195–228). Springer.

Bergstrom, C., & Zhang, D. (2016). Geometry interventions for K-12 students with and without disabilities: A research synthesis. *International Journal of Educational Research*, *80*, 134–154.

Brousseau, G. (1989). Obstacles epistemologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. In N. Bednarz & C. Carnier (Eds.), *Construction des savoirs* (pp. 277–285). Agence d'Arc.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situation in Mathematics: Didactique des Mathématiques 1970-1990*. Kluwer Academic Publisher.

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2008). A study on the left behind students for enhancing their competence of geometry argumentation. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 305–312). PME.

Chinnappan, M., White, B., & Trenholm, S. (2018). Symbiosis between subject matter and pedagogical knowledge in Geometry. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 145–161). Springer.

Cirillo, M. (2011). I'm the Sherpa guide: On the learning to teach proof in school mathematics. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 241–248). PME.

Cirillo, M. (2018). Engaging students with non-routine geometry proof tasks. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 283–300). Springer.

Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, *5*, 37–65. (Tradotto in spagnolo per fini educativi da F. Hitt e A. M. Ojeda, Departamento de Matemáticas Educativa CINVESTAV-IPN, México).

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142–157). Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37–51). Kluwer Academic.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1–16.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in School* (pp. 135–161). Brill.

Fuglestad, A. B., & Goodchild, S. (2009). I thought it was a proof. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 379). PME.

Fujita, T., & Jones, K. (2014). Reasoning and proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, *64*, 81–91.

Fujita, T., Jones, K., & Kunimune, S. (2010). Students' geometrical construction and proving activities: A case of cognitive unity?. In M. F. Pinton & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 9–16). PME.

Gagatsis, A. (2015). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la Matemática – Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 231–248). Universidad de la Sabana.

Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z. Deliyianni, E., & Gridos, P. (2022). How could the Presentation of a Geometrical Task Influence Student Creativity?. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, *5*(1), 93–116. https://doi.org/10.31756/jrsmte.514

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem-solving processes on functions compartmentalized in students' thinking?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue 2006*, 197–224.

Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021). A multidimensional approach to students' creativity in geometry: spatial ability, geometrical figure apprehension and multiple solutions in geometrical problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 5–16.

Gagatsis, A., Michael-Chrysanthou, P., Deliyianni, E., Panaoura, A., & Papagiannis, C. (2015). An insight to students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought. *Communication & Cognition*, *48*(3–4), 89–128.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.

Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C., & Guillet, F. (Eds.) (2013). *L'analyse statistique implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités.* Cépaduès Editions.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical Implicative Analysis. Theory and Applications.* Springer Berlin.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques [About strategies used to train primary school teachers in mathematics]. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 289–322.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2001). Pretty (good) didactical provocation as a tool for teachers' training in Geometry. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of CERME2* (pp. 292–304). Praha Charles University.

Hunte, A. (2018). Opportunities for reasoning and proving in Geometry in secondary school textbooks from Trinidad and Tobago. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 39–58). Springer.

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in Geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *20*(3), 109–114.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutierrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 109–149). Sense.

Kuzle, A. (2022). The teaching of geometry in primary education: Is geometry still neglected in school mathematics?. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 734–741). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Leikin, R., & Elgrabli, H. (2015). Creativity and expertise: The chicken or the egg? Discovering properties of geometry figures in DGE. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1024–1031). ERME.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 349–371.

Lesseig, K. (2016). Conjecturing, generalizing and justifying: building theory around teacher knowledge and proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *17*(3), 1–31.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions to a problem: A tool for assessment of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)* (pp. 776–785). *Institut national de recherche pédagogique*.

Manizade, A., & Martinovic, D. (2018). Creating profiles of geometry teachers' PCK. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 127–144). Springer.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4/1), 165–180.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2016). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*, 223–239.

Mwadzaangati, L., & Kazima, M. (2019). An exploration of teaching for understanding the problem for geometric proof development: the case of two secondary school mathematics teachers. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *23*(3), 298–308.

Panaoura, G., Gagatsis, A., & Lemonides, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 7, Geometrical Thinking* (pp. 1062–1072). ERME.

Panaoura-Maki, G. (2007). *Students' geometric knowledge and skills at the end of the primary education: a comparison of the geometric thinking at the age of primary and secondary education.* Unpublished PhD thesis. University of Cyprus.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4–14.

Stylianides, G. (2018). Secondary students' proof constructions in mathematics: the role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education*, *7*(1), 158–182.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2009). Factors limiting configural reasoning in geometric proof. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 477). PME.

Tso, T., & Liang, Y. N. (2002). The study of interrelationship between spatial abilities and Van Hiele levels of thinking in geometry of eight-grade students. *Journal of Taiwan Normal University*, *46*(2), 1–20.

Verschaffel, L., Greer, B., & DeCorte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356–366.

Winer, M. L., & Battista, M. T. (2022). Investigating students' proof reasoning: Analyzing students' oral proof explanations and their written proofs in high school geometry. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *17*(2), 1–21.

Yavuz, A., Aydin, B., & Avci, M. (2016). The effect of the success in teaching geometry of basic level education mathematics. *European Journal of Education Studies*, *2*(8), 60–71.

Zazkis, D., & Zazkis, R. (2013). Prospective teachers' conceptions of proof comprehension: Revisiting a proof of the Pythagorean theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 777–803.

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 86 - 97, DOI: 10.33683/ddm.23.14.4
OPEN ACCESS

Pizza matematica

Mathematical pizza

Michela Bettoni•° e Marco Bettoni••°
•Scuola elementare di Brè, Istituto di Lugano – Svizzera
••Scuola elementare di Ruvigliana, Istituto di Lugano – Svizzera
°Gruppo Matematicando, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica – SUPSI, Locarno – Svizzera

michela.bettoni@edu.ti.ch, marco.bettoni@edu.ti.ch

Sunto / In questo testo viene presentato un estratto di un percorso didattico svolto durante un intero anno scolastico in due biclassi del primo ciclo dell'Istituto di Lugano. Nelle classi erano presenti bambini con bisogni educativi specifici ed era quindi necessaria una forte differenziazione. All'interno del progetto è stato utilizzato un materiale progettato e realizzato appositamente, che rappresenta anche la base di uno sfondo motivazionale, con lo scopo di trattare diversi argomenti matematici e sviluppare alcune delle principali competenze previste dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022) per il primo ciclo.

Parole chiave: pizza; differenziazione; materiale concreto; scuola elementare; materiali didattici.

Abstract / This article presents a didactic path carried out during an entire school year in two biclasses of the first cycle of the Lugano Institute. In the classes there were children with specific educational needs and therefore a strong differentiation was necessary. Within the project it has been used a specifically designed and created material, which also represents the basis of a motivational background, with the aim of teaching various mathematical topics and developing some of the main skills required by the *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022) for the first two years of primary school.

Keywords: pizza; differentiation; concrete material; primary school; didactic materials.

1 Introduzione

I docenti sono spesso confrontati con vincoli e difficoltà dati dal contesto, sia interno, sia esterno alla classe, in cui operano. Spetta a loro pensare come poter sfruttare tale contesto a loro favore, convertendo gli ostacoli in opportunità per progettare percorsi nuovi, diversi e adatti agli allievi della propria classe. La volontà di creare il percorso descritto in questo articolo è sorta proprio per rispondere a diversi aspetti e bisogni di due biclassi[1] di prima e seconda elementare: la presenza di tre bambini con difficoltà varie e importanti, le restrizioni legate alla pandemia di Covid-19 e la necessità di creare un materiale fruibile che fosse utilizzabile per più attività rimanendo però motivante per i bambini.
In particolare, il contesto classe ha portato a riflettere in maniera approfondita sui materiali concreti da utilizzare in classe durante l'anno, così da rendere più efficaci e accessibili i contenuti matematici per tutti gli allievi. Il desiderio era quello di ideare e utilizzare un materiale che, oltre a servire per sviluppare le competenze matematiche, potesse servire anche come fonte di integrazione per tutti i bambini. L'esigenza era quindi quella di cercare di assecondare i bisogni di tutti gli allievi, differenziando le richieste legate al materiale, mantenendo però lo stesso tipo di supporto.
Era infatti necessario trovare una modalità di lavoro che permettesse di sostenere quei bambini che incontrano difficoltà nel concentrarsi sulle tematiche proposte, in questo caso matematiche, se si continuano a cambiare le situazioni e i contesti proposti. Si voleva, allo stesso tempo, consentire un aggancio concreto e legato all'esperienza. È quindi nata l'esigenza di trovare o costruire un supporto che permettesse a questi allievi di avere una certa stabilità e familiarità nel lavoro e d'altro canto che fosse abbastanza flessibile da consentire al docente di trattare la maggior parte dei temi matematici previsti nel programma annuale, o perlomeno di lanciarne l'introduzione. La creazione di un materiale unico non è naturalmente andata a beneficio esclusivo degli allievi con difficoltà: anche tutti gli altri allievi si sono avvalsi dell'utilizzo dello stesso materiale e hanno potuto approfittarne per un accesso diretto, concreto e significativo ai temi matematici.
Si è, infine, voluto riflettere su un aspetto molto pratico: spesso come docenti ci si scontra con la mancanza di tempo. Tante volte si vorrebbero realizzare delle attività che presentino dei materiali non solo didatticamente validi ma anche belli ed elaborati. Purtroppo, il tempo richiesto per la loro realizzazione è troppo elevato in confronto al tempo effettivo di utilizzo da parte degli allievi in aula. Impiegare mezza giornata nella realizzazione di un materiale che viene utilizzato per una sola unità didattica è un lusso che ci si può concedere poche volte durante l'anno scolastico. Da qui la scelta di creare un supporto che potesse essere utilizzato a tutto tondo nel corso di un intero anno scolastico. In questo modo l'investimento di tempo iniziale viene "distribuito" su un grande numero di unità didattiche ed è quindi giustificato.

2 Quadro teorico

Nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese la differenziazione:

> «[…] costituisce un presupposto dell'azione didattica, oltre che una visione dell'insegnamento e della cultura educativa, che abbraccia e interpreta la diversità, nel contesto della classe. […] Differenziare, infatti, significa adattare le modalità di accesso ai saperi e alle abilità tenendo in considerazione l'eterogeneità di una classe - e soprattutto delle allieve e degli allievi - in termini di esigenze formative, preconoscenze, interessi, motivazioni, preferenze nell'apprendimento, percezione di sé e del contesto».
>
> (DECS, 2022, p. 30)

1. Classi composte da allievi di prima e seconda elementare.

La differenziazione può avvenire su più fronti; in questo articolo la si considera soprattutto in termini di individualizzazione. Baldacci (2006) definisce il concetto di individualizzazione su due livelli, chiarendo due aspetti chiave: da una parte gli aspetti pedagogici, che tengono conto delle caratteristiche individuali degli allievi, e dall'altra quelli didattici, che consistono nella scelta di modalità di insegnamento che si adattino alle diverse caratteristiche degli allievi allo scopo ultimo di assicurare a tutti il raggiungimento delle competenze fondamentali previste dal Piano di studio.
Differenziare vuol dire anche caratterizzare le attività «in modo tale che tutte le allieve e tutti gli allievi siano guidati nei rispettivi percorsi di apprendimento e accompagnati nell'acquisizione dell'autonomia» (DECS, 2022, p. 30). Viste l'eterogeneità di un gruppo classe, una strategia possibile per la differenziazione consiste anche nel lasciare agli allievi la scelta dei concetti su cui lavorare o allenarsi. Questo implica altresì lavorare sulla consapevolezza degli allievi rispetto alle loro necessità formative e dare agli allievi supporti didattici adeguati (Gentile, 2008).
Per una individualizzazione efficace è inoltre importante trovare delle tematiche vicine alla realtà degli allievi, infatti:

> «le persone si mostrano più impegnate se lavorano su compiti autentici e rilevanti. Tali compiti possono risultare più motivanti rispetto ad attività centrate sull'esecuzione di esercizi, sulla lettura dei libri di testo e sul completamento di schede. Un individuo, indipendentemente dall'età, è più motivato se vede l'utilità di ciò che sta imparando».
>
> (National Research Council [NRC], 1999, citato da Gentile, 2008, p. 2)

Dal punto di vista metodologico è auspicabile variare i metodi di lavoro in classe, mantenendo però un filo conduttore, che può essere rappresentato da uno sfondo motivazionale o da un supporto, che contribuisce ad aumentare la familiarità degli allievi con le situazioni e i materiali proposti e a ridurre le variabili non disciplinari tra un'attività e l'altra, in modo che l'attenzione degli allievi rimanga focalizzata il più possibile sugli aspetti disciplinari in gioco senza distrazioni dovute ad altre nuove componenti. In quest'ottica, risulta fondamentale l'uso didattico degli artefatti scelti e proposti dal docente per permettere agli allievi di costruire competenze matematiche. Come sottolineano Mariotti e Maffia (2018):

> «Il ruolo principale di un insegnante di matematica è rendere il sapere matematico accessibile ai suoi studenti. Questa missione educativa può essere raggiunta utilizzando vari mezzi e l'uso di strumenti manipolativi costituisce un esempio comune nelle classi elementari».
>
> (Mariotti & Maffia, 2018, p. 50)

L'uso degli artefatti a scopo didattico è al cuore delle ricerche di Bartolini Bussi e Mariotti (2008). Quando a un artefatto, scelto dal docente per il suo potenziale di produrre segni matematici, gli allievi associano degli schemi d'uso legati al concetto matematico che l'artefatto vuole veicolare, esso diventa per loro uno strumento che li supporta effettivamente nella costruzione del sapere matematico in gioco. A tal proposito, Mariotti e Maffia (2018) ricordano che, quando gli studenti lavorano con un artefatto, svolgono due importanti attività: la prima è quella di portare a termine il compito proposto dal docente; la seconda è costruire delle conoscenze matematiche che sono tra gli obiettivi specifici posti dal docente. Questo perché, se è vero che l'apprendimento è un fenomeno complesso che coinvolge il corpo e la mente, «più in generale il passaggio dalla sfera pratica a quella intellettuale e viceversa può essere considerato uno dei motori dell'evoluzione e del progresso» (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 2, traduzione degli autori).

3 Il progetto

3.1 Contesto

Il progetto si è svolto in due biclassi di prima e seconda elementare dell'Istituto di Lugano nell'anno scolastico 2021-2022. All'interno delle classi erano presenti un bambino con difficoltà legate allo spettro autistico e due bambini con difficoltà cognitive e comportamentali. Le attività dovevano dunque tenere conto sia delle diverse età dei bambini (prima e seconda elementare) sia dei bisogni educativi diversi e speciali di alcuni allievi nello specifico.

Il contesto in cui ci si è trovati, come scuola e come docenti, durante la pandemia Covid-19, ha imposto molte restrizioni e nuove sfide. Tra queste c'era l'impossibilità di proporre in aula dei percorsi legati al cibo. Era infatti vietato condividere alimenti, ma anche cucinarli in classe, per evidenti motivi legati alla diffusione del virus. Questa restrizione ha inciso sulle scelte didattiche e sulle situazioni-problema che si era soliti proporre, perché l'ambiente della cucina e le tematiche legate all'educazione alimentare costituiscono un contesto che ha una naturale capacità di catturare molto l'attenzione degli allievi e di aumentare la loro curiosità e attivazione al lavoro. Di conseguenza si sono cercate delle alternative che potessero essere realizzate rispettando le misure anti-covid e nel contempo portare agli allievi quegli aspetti motivanti, importantissimi soprattutto per i più piccoli.

Le restrizioni per la pandemia Covid-19 imponevano anche di evitare, per quanto possibile, i lavori a gruppi dove vi era un alto contatto tra bambini. In un contesto come quello appena presentato, con la necessità di integrare tutti i bambini nelle attività scolastiche della classe, in particolare un nuovo gruppo di prima elementare e allievi con bisogni educativi specifici, evitare i lavori a gruppi, di coppia e i contatti era una sfida molto difficile. La creazione di supporti e materiali che permettessero anche lo scambio, la condivisione, la collaborazione e l'identificazione del gruppo era quindi necessario.

3.2 Gli "ingredienti" del percorso

L'idea del percorso annuale qui descritto è nata dalla volontà di proporre delle attività per la prima elementare in cui gli allievi dovessero contare delle collezioni di oggetti e rappresentarne la quantità per esercitare il conteggio e la scrittura dei numeri. Si è quindi andati alla ricerca di contesti reali in cui fosse possibile e sensato per gli allievi mettere in pratica questo tipo di esercizio. Mantenendo l'idea di lavorare nel contesto della cucina e con la combinazione di diversi ingredienti, si sono cercate situazioni in cui fosse sensato contarli piuttosto che pesarli. La scelta è ricaduta sulla pizza in quanto è un alimento familiare a quasi tutti i bambini, è personalizzabile e può essere condita con un numero definito di ingredienti, ha una forma (o delle forme) matematicamente interessanti ed è divisibile in più parti uguali (permettendo dunque il legame con il concetto di frazione).

Di seguito è riportato a grandi linee quello che è stato il percorso proposto agli allievi. Alcune di queste attività, scritte in corsivo, saranno analizzate più in dettaglio successivamente. La progressione temporale delle attività è indicativa in quanto alcune di esse sono state proposte più volte durante l'anno scolastico.

- *Esplorazioni libere per conoscere il materiale.*
- Attività di enumerazione.
- *Creazione di corrispondenze biunivoche tra ingredienti.*
- Attività di conteggio degli ingredienti.
- Condimento della pizza con il numero esatto di ingredienti.
- Creazione di sequenze di ingredienti.
- *Scrittura di una ricetta.*
- *Creazione di pizze simmetriche.*
- *Attività sul confronto di quantità: maggiore e minore.*
- Attività di stima del numero di ingredienti.

- Attività di raggruppamenti degli ingredienti (la decina).
- Creazione delle carte d'identità degli ingredienti.
- Costruzione delle scatole degli ingredienti (sviluppo del parallelepipedo).
- Attività sui concetti di numero pari e numero dispari.
- Costruzione del grafico a barre dell'ingrediente più utilizzato.
- Attività legate alla probabilità.

3.3 Materiale

Nella realizzazione del materiale concreto sono stati coinvolti attivamente gli allievi. A livello metodologico, questa è un'altra scelta didattica che si è rivelata efficace per creare un legame affettivo e una certa dimestichezza con i materiali, soprattutto all'interno di un percorso in cui il materiale creato avrebbe dovuto accompagnare gli allievi nel corso dell'intero anno scolastico. Inizialmente è stata creata con gli allievi, tramite il disegno, una prima bozza dei materiali in modo da sperimentare le prime attività. In seguito all'entusiasmo degli allievi, si è deciso di disegnare dei materiali più duraturi e riproducibili per poter ampliare il lavoro con le classi.
Il materiale è composto dalla base della pizza e dai fogli ingredienti (Allegato 1), e dalle carte ricetta (Allegato 2). È inoltre a disposizione un "ricettario" di attività (Allegato 3) che raccoglie alcune delle attività proposte e sperimentate con il supporto del materiale.
La base della pizza è stata tagliata a metà ed è quindi necessario unire le due metà per avere la base intera. Questa soluzione è stata pensata per poter stampare tutto il materiale con una normale stampante in formato A4. Essa è disponibile in due versioni (**Figura 1**): con o senza la suddivisione in ottavi (fette).

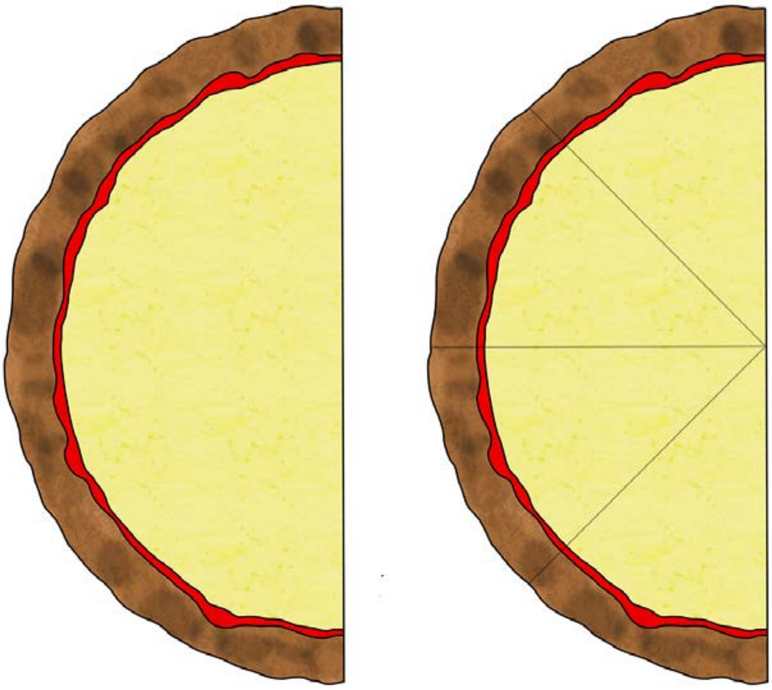


Figura 1. Base per la pizza (Allegato 1).

I fogli degli ingredienti, ognuno dei quali è presente in 77 copie, sono di 8 tipi differenti (olive, cipolle, pomodori, gamberetti, basilico, salame, peperoni, funghi). Un foglio ha un numero sufficiente di ingredienti per una classe di 20 bambini (**Figura 2**).

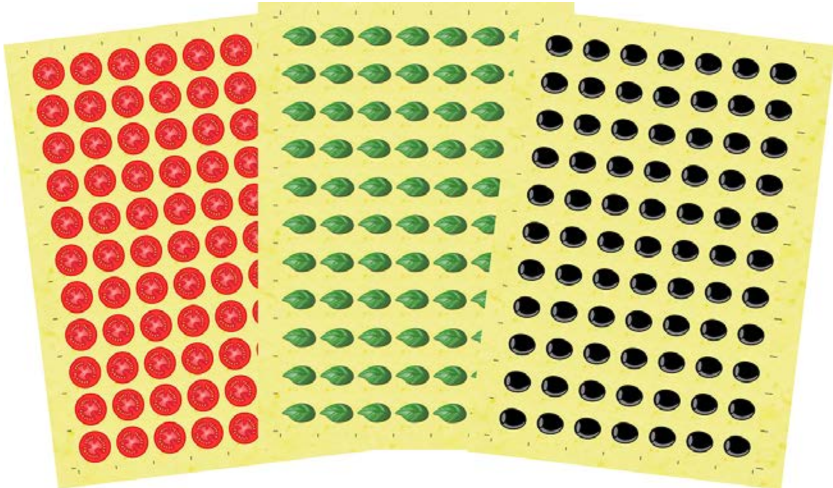


Figura 2. Alcuni fogli ingredienti (Allegato 1).

Le carte ricetta sono delle carte che presentano una ricetta sul fronte e una soluzione sul retro, corretta dal punto di vista del tipo e del numero di ingredienti, ma non univoca a livello di disposizione degli ingredienti (**Figura 3**).

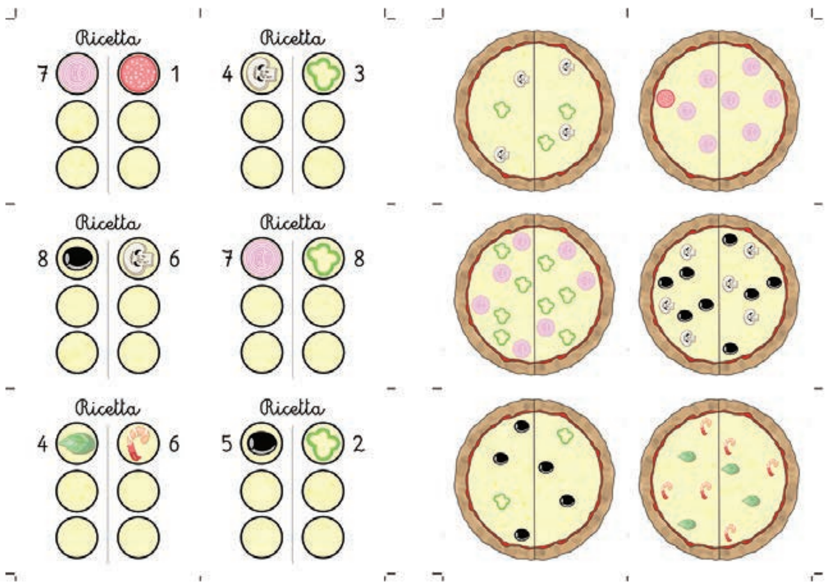


Figura 3. Esempio di una carta ricetta, fronte e retro (Allegato 2).

4 Descrizione di alcune attività

Di seguito sono riportate alcune tappe significative del percorso annuale durante il quale, a più riprese, sono state proposte agli allievi attività con il materiale della pizza. Si tratta di momenti che hanno permesso di compiere interessanti osservazioni sia sulle conoscenze dei bambini, sia sulla funzionalità del materiale.

4.1 Prime attività: esplorazioni libere

Le primissime attività proposte agli allievi con il nuovo materiale erano improntate alla familiarizzazione e alla conoscenza del materiale stesso. Per questo motivo si è proposto agli allievi di creare le loro pizze preferite o quelle che avrebbero voluto mangiare, cominciando a introdurre alcune regole che sarebbero state importanti per le attività successive: gli ingredienti possono essere posizionati solo all'interno della pizza (non possono toccare o uscire dal bordo) e devono essere completamente visibili (non possono essere sovrapposti).
È stato interessante vedere come alcuni allievi hanno condito le loro pizze con tanti ingredienti dello stesso tipo (tanti funghi o tanti pomodori), mentre alcuni l'hanno condita utilizzando un ingrediente di ogni tipo. Alcuni esempi di esplorazione del materiale sono forniti in **Figura 4**.

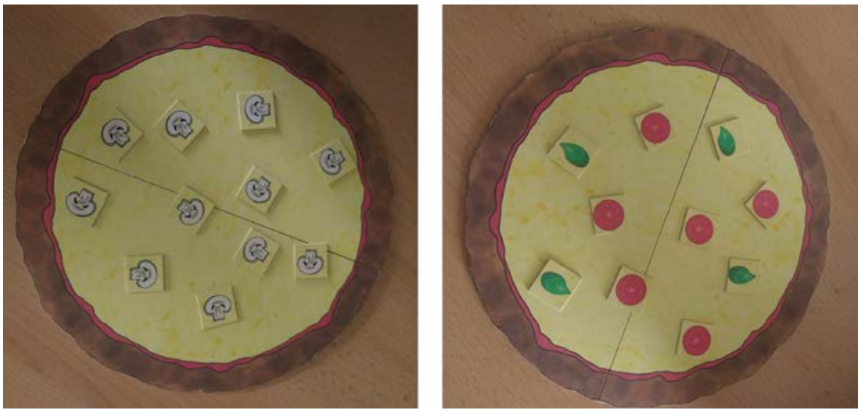


Figura 4. Esempi di esplorazione del materiale.

Grazie alla presenza di proposte di tipo diverso, si è potuto discutere con i bambini, in fase di condivisione, sul perché delle loro scelte. Di seguito si riporta un breve estratto di discussione.

1. N.: «Io ho scelto la pizza che mangio al ristorante, la mia preferita».
2. J.: «Io ho messo solo due ingredienti[2] perché sulla pizza ci sono pochi ingredienti».
3. E.: «Io non ho messo i gamberetti perché non mi piacciono».
4. V.: «Io ho messo uno di ogni ingrediente, quindi 7».
5. P.: «Io ho messo solo le olive perché non c'era il tonno».
6. M.: «Io ho messo tutti gli ingredienti che ci stavano, ma non so quanti sono».

Dagli interventi dei bambini emerge il forte legame di questa attività con la realtà. Molti bambini, come si evince dagli interventi, hanno riportato nell'attività delle esperienze reali, che fanno parte del loro vissuto. Alcuni di loro hanno svolto l'attività tenendo conto delle loro preferenze (interventi 1 e 3). Altri hanno cercato di rispettare delle tipologie di pizza che esistono al ristorante (interventi 2 e 5). Altri allievi hanno invece sfruttato il materiale per creare delle pizze slegate dalla realtà (interventi 4 e 6).
Le prime attività hanno inoltre permesso di poter osservare come i bambini interagivano con il materiale e come lo usavano, quali conoscenze mettevano in gioco e quali preconoscenze matematiche avevano. È stato, infatti, possibile osservare in parte la padronanza che i bambini avevano nella gestione di quantità di oggetti, sia in prima sia in seconda elementare, i metodi e la sicurezza che avevano nello scegliere quali e quanti ingredienti porre sulla base della pizza e come decidevano di

2. Tipi di ingredienti.

posizionarli: secondo uno schema ordinato, casualmente o in maniera "artistica" per raggiungere una sorta di disegno finale (**Figura 5**). È stato interessante osservare come, in questa fase, ci fosse una certa omogeneità nelle scelte operate dai bambini di prima e di seconda elementare.

Figura 5. Scelte di disposizione degli ingredienti da parte di alcuni alunni.

4.2 Dalla corrispondenza biunivoca alla simmetria

Dopo alcune settimane, la pizza è stata utilizzata per proporre ai bambini alcune attività sulla corrispondenza biunivoca. Per questo si è sfruttato il fatto che la base della pizza è composta da due metà accostate e che si crea quindi automaticamente una linea che divide la pizza in due parti uguali. Durante l'attività veniva condita una metà della pizza, dal docente prima e da un compagno poi, e ogni allievo doveva completare l'altra metà con lo stesso numero di ingredienti (**Figura 6**).

Figura 6. Esempio di un'attività di corrispondenza biunivoca.

Osservando quanto svolto dagli allievi, ci si è accorti che quattro allievi di seconda avevano completato l'esercizio in modo corretto utilizzando uno stratagemma interessante: avevano creato la seconda metà della pizza in maniera simmetrica per poter avere un maggiore controllo sul loro operato.
Questa strategia ha dato lo stimolo per lavorare, nei mesi successivi, sulla simmetria. Come nell'attività precedente, sono quindi stati posizionati alcuni ingredienti in una metà della pizza e richiesto ai bambini di completare l'altra metà con lo stesso numero e tipo di ingredienti. L'ulteriore richiesta era però quella di posizionare questi ingredienti in maniera simmetrica sfruttando l'asse di simmetria creato dalla linea di congiunzione che divideva a metà la pizza (**Figura 7**). Per aiutarli a capire questo tipo di lavoro sono stati messi a disposizione e utilizzati alcuni piccoli specchi da posizionare lungo l'asse di simmetria. Una volta compreso il funzionamento dell'attività i bambini hanno potuto creare

autonomamente delle pizze simmetriche, gestendo in base alle proprie capacità il numero di ingredienti e avendo sempre a disposizione l'aiuto degli specchi.

Figura 7. Esempio di pizza simmetrica costruita dagli allievi.

4.3 Invenzione e rappresentazione di una ricetta

Una delle attività che ha riscosso maggior successo tra gli allievi è sicuramente quella in cui è stato loro chiesto loro di "trasformarsi" in chef, di creare una pizza e di scriverne la ricetta. Durante questa attività i bambini avevano il compito di condire la loro pizza con un numero a scelta di ingredienti, decidendo anche il tipo di ingredienti che volevano utilizzare. In seguito, ogni bambino doveva trovare il modo di rappresentare la ricetta della propria pizza in modo da rendere la stessa pizza realizzabile anche da altri bambini. È importante sottolineare come nella richiesta non vi fossero vincoli rispetto alla rappresentazione da utilizzare né vincoli legati alla posizione degli ingredienti. Questa attività è molto interessante in quanto permette di differenziare su più livelli. Innanzitutto, i bambini possono scegliere il numero di ingredienti che si sentono capaci di gestire, sia nella quantità effettiva degli ingredienti, sia nello scegliere quanti tipi e quali tipi di ingredienti utilizzare. Inoltre, ogni bambino è libero di utilizzare la rappresentazione della ricetta che meglio si addice alle proprie abilità, alle proprie competenze e alla propria idea di rappresentazione efficace.
I risultati sono stati molto interessanti in quanto sono emerse molte rappresentazioni diverse (Figura 8), tutte efficaci nell'assolvere le richieste fatte. Alcuni bambini, soprattutto tra quelli di prima elementare, che ancora non erano entrati nel codice linguistico, hanno deciso di rappresentare attraverso dei disegni la ricetta, raffigurando tutti gli ingredienti utilizzati. Altri invece hanno disegnato solo un ingrediente per tipo con scritto accanto il numero di volte che era stato utilizzato (Figura 8, immagine a sinistra). I bambini di seconda elementare hanno invece optato per l'utilizzo delle parole scritte per definire la ricetta della loro pizza: alcuni sono stati molto descrittivi, mentre altri hanno scritto il nome dell'ingrediente accompagnato da un numero che rappresentava quante volte era stato utilizzato (Figura 8, immagine a desta).

Figura 8. Diverse rappresentazioni degli ingredienti nelle ricette.

Una volta completata la fase di scrittura, è stato molto interessante anche osservare se e come i bambini riuscivano a interpretare le ricette scritte dai compagni. Naturalmente quelle che rappresentavano gli ingredienti sottoforma di disegno erano molto accessibili da parte di tutti i bambini, mentre i bambini di prima elementare si sono inizialmente trovati in difficoltà con le ricette scritte. Alcuni hanno esplorato delle strategie per tentare di interpretarle, come guardare le lettere che conoscevano e cercando di indovinate l'ingrediente, altri invece hanno cominciato a chiedere aiuto ai compagni che sapevano leggere. Quest'attività è stata dunque interessante anche per i suoi risvolti interdisciplinari con la lingua italiana e la scrittura e lettura di testi.

4.4 Maggiore e minore

Dopo aver lavorato, per i primi mesi di scuola, sulle quantità di ingredienti presenti sulla pizza, è stato possibile cominciare a confrontare più pizze. Inizialmente è stato chiesto ai bambini di confrontare il numero di ingredienti presenti su due pizze per stabilire quale avesse il numero maggiore, rispettivamente il numero minore, di ingredienti.

Successivamente sono state proposte diverse attività in cui i bambini potevano confrontare la quantità di ingredienti su un numero sempre maggiore di pizze, con la richiesta di metterle in ordine dalla pizza con meno ingredienti a quella con più ingredienti e viceversa (Figura 9). Le pizze potevano essere proposte dai docenti o anche preparate dai bambini stessi.

Figura 9. Ordinamento delle pizze in base al numero di ingredienti con cui sono condite.

L'aver lavorato tanto sul conteggio degli ingredienti, come anche sulla stima degli ingredienti presenti sulla pizza, ha aiutato molto gli allievi ad avere una certa sicurezza nell'individuare, in fase di confronto, la pizza con il numero maggiore di ingredienti.
Sicuramente l'avere a disposizione la quantità concreta di oggetti da poter contare ha aiutato gli allievi, soprattutto quelli con difficoltà, a riuscire nel compito. Inoltre, la strategia del conteggio veniva utilizzata anche dagli allievi più competenti, soprattutto laddove le quantità erano molto vicine fra loro (ad esempio, se una pizza era condita con 7 ingredienti e l'altra con 8 ingredienti).
Nelle attività più complesse, dove venivano usate tre, quattro o cinque pizze, i bambini sono riusciti a trasferire quanto fatto con due pizze e, applicando strategie di confronto, conteggio e stima, a riordinare correttamente le pizze.

4.5 Attività libere

Durante l'anno il materiale, ormai familiare e denominato dai bambini "La pizza matematica", è stato lasciato a disposizione degli allievi all'interno di uno scaffale, contenente il materiale per i giochi matematici. I bambini erano liberi di utilizzarlo durante i momenti laboratoriali, normalmente proposti alle classi. Potevano quindi usarlo per riprodurre le attività viste durante i momenti di sperimentazione, sentendosi più liberi di lavorare in base alle proprie capacità e di scegliere su quali aspetti lavorare (con le modalità del *learning menu*[3] o della didattica aperta).

5 Sviluppi

Nonostante il percorso sia stato sperimentato principalmente con classi del primo ciclo, ci si è resi conto che il materiale è molto versatile. Questo significa che le attività possono essere adattate anche a classi del secondo ciclo o alla scuola dell'infanzia. Inoltre, è possibile sfruttare il materiale e lo sfondo motivazionale anche per creare nuove attività che possono essere presentate ad allievi non del primo ciclo, come le varianti proposte nell'Allegato 3.
È infatti possibile lavorare già alla scuola dell'infanzia sul conteggio, cercando di capire quanti ingredienti sono presenti su una pizza o sull'enumerazione, toccando una sola volta tutti gli ingredienti presenti sulla pizza, oppure condire la pizza con un numero di ingredienti corrispondente al numero di bambini presenti in sezione quel giorno. È inoltre possibile realizzare delle semplici sequenze di ingredienti che i bambini devono completare. Si vedano a questo proposito le attività di gioco proposte alla scuola dell'infanzia da Pamela Martinetti (nello stesso numero di questa rivista).
Con gli allievi più grandi del secondo ciclo si può invece proporre un lavoro sulle rappresentazioni grafiche e statistiche, facendo condire delle pizze ai ragazzi e analizzando poi quali sono gli ingredienti maggiormente utilizzati (per esempio attraverso un grafico a barre). Oppure si può lavorare sulla probabilità e sulle parole ad essa legate (evento certo, probabile, impossibile), mettendo in un contenitore alcuni ingredienti e analizzando poi le probabilità di pescarne uno di un certo tipo. Infine, il contesto della pizza e la base della stessa ben si prestano per parlare con gli allievi di frazioni.

3. Con *learning menu* si intende la possibilità data ai bambini di scegliere le modalità di apprendimento di una determinata tematica, in un momento stabilito della griglia oraria.

6 Conclusioni

Dopo una prima fase iniziale, durante la quale gli allievi hanno avuto la possibilità di sperimentare, manipolare, studiare e conoscere il nuovo materiale, si è velocemente costruita una tale confidenza con il supporto da permettere ai bambini di sentirsi sicuri nell'utilizzo e nella sua manipolazione e dar quindi loro lo spazio di sperimentare e concentrarsi sugli aspetti più matematici dell'attività. Le regole di utilizzo erano già stabilite, l'utilizzo era chiaro agli allievi e gli aspetti organizzativi erano noti. I bambini, in maniera autonoma, erano in grado di preparare il necessario per le attività.
Anche le parti più manipolative, sensoriali, percettive e tattili sono sempre rimaste una costante, elemento questo da non sottovalutare, vista la presenza, in una delle due classi, di un allievo con disturbi dello spettro autistico e con un forte bisogno legato proprio alla percezione tattile.

Durante i momenti in aula è stato naturalmente fondamentale poter differenziare le attività tenendo conto dei bisogni dei vari allievi. In questo senso il materiale si è rivelato molto funzionale e flessibile. Era infatti possibile svolgere la stessa tipologia di attività con tutti gli allievi, utilizzare gli stessi materiali e le stesse tempistiche, riuscendo però a differenziare il lavoro e il carico cognitivo richiesto, variando il numero di ingredienti o le diverse tipologie di ingredienti da utilizzare.
Il percorso sembra aver portato benefici anche ai bambini con bisogni educativi speciali che hanno potuto partecipare con entusiasmo alle attività proposte, riuscendo ad acquisire e consolidare alcune competenze matematiche fondamentali. Inoltre, anche quando svolgevano delle attività leggermente diverse, semplificate o con degli aiuti supplementari, stavano comunque lavorando sullo stesso materiale dei compagni, con un forte contributo per la loro autostima e motivazione e con un maggior coinvolgimento nel lavoro.
Un'ultima osservazione consiste nel fatto che l'ideazione e l'uso didattico del materiale della "pizza matematica" per svolgere giochi e attività hanno permesso di lavorare anche indirettamente sulla costituzione di un buon gruppo classe, coeso da relazioni fondate sul supporto reciproco, contribuendo in modo significativo allo sviluppo personale e delle competenze trasversali di questi bambini.

Bibliografia

Baldacci, M. (2006). Personalizzazione e Individualizzazione. *Innovazione Educativa*, *5-6*, 11–15. IRRE E. R. Istituto Regionale di Ricerca Educativa per l'Emilia Romagna. https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/658149

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education – 2nd edition* (pp. 746–783). Routledge / Taylor & Francis Group.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. DECS. https://pianodistudio.edu.ti.ch

Gentile, M. (2008). Differenziare l'apprendimento nel contesto della classe. *L'Educatore*, *55*(11), 44–47.

Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *4*, 50–64. https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 98 - 115, DOI: 10.33683/ddm.23.14.5

OPEN ACCESS

I numerali nell'antica Cina: un laboratorio alla scoperta dei sistemi di numerazione

Numerals in the ancient China: a laboratory to discover number systems

Anna Maria Brunero
Scuola primaria "Federico Sclopis" dell'Istituto Comprensivo "Pacchiotti – Via Revel", Torino – Italia

brunero.annamaria@gmail.com

Sunto / Stimolare l'esplorazione dei contenuti matematici è un'attività quanto mai affascinante e allo stesso modo complessa per i docenti della scuola primaria. Questa sperimentazione svolta in una classe quarta concerne un possibile percorso in continuità verticale, trattandosi del riadattamento di una attività sperimentata nella scuola secondaria di primo grado, focalizzando l'attenzione sul laboratorio di matematica come base per l'esplorazione dei contenuti da parte degli alunni. Attraverso strategie di valutazione formativa e per mezzo della discussione matematica, gli allievi si sono confrontati con il sistema di numerazione cinese, mettendo in gioco non solo competenze in ambito matematico, ma in un'ottica di interdisciplinarità, anche in ambito storico. Partendo, infatti, dall'esplorazione del triangolo di Tartaglia-Pascal, contenuto in un antico libro di testo di matematica cinese, gli allievi hanno potuto sviluppare competenze matematiche nel campo dei numeri in linea con un'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole.

Parole chiave: didattica laboratoriale; sistemi di numerazione; educazione multiculturale; discussione matematica; argomentazione.

Abstract / Stimulating the exploration of mathematical contents is a very fascinating and complex activity for primary school teachers. This teaching experiment carried out in a fourth-grade class relates to a possible path in vertical continuity, since it is the adaptation of an activity experienced in the lower secondary school, with a focus on the mathematics laboratory, as a basis for students' exploration of contents. Through formative assessment strategies and mathematical discussion, the pupils were confronted with the Chinese numeral system, putting into play their skills in mathematics as well as in the history field, in an interdisciplinary perspective. Starting, in fact, from the exploration of the Tartaglia-Pascal triangle, contained in an ancient Chinese mathematics textbook, the students were able to develop mathematical skills in the field of numbers in line with an active and conscious citizenship education.

Keywords: laboratory teaching; number systems; multicultural education; mathematical discussion; argumentation.

1 Introduzione

Nella società dell'immediatezza che ci circonda è fondamentale per gli insegnanti non dimenticare che la costruzione del pensiero, soprattutto matematico, è un processo che richiede tempi lunghi, e che tale sviluppo, sia delle capacità che delle abilità di ogni singolo alunno, è graduale e quasi mai lineare.
È indispensabile essere consapevoli della forte influenza della società che ci circonda, perché l'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole e lo sviluppo della nostra società è strettamente collegato con l'insegnamento della matematica e la sua didattica, come è possibile leggere all'interno del documento relativo a Indicazioni nazionali e nuovi scenari (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2018) e come evidenziato dall'idea della "matematica per il cittadino" (MIUR et al., 2003).
L'esigenza, inoltre, di ottenere risultati nell'immediato, non ci permette spesso di ricordare quanto espresso dalle Indicazioni nazionali, ovvero che «La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese» (MIUR, 2012, p. 49).
È proprio per far fronte a questa esigenza che, nell'esperienza didattica qui presentata, si è deciso di proporre agli allievi un percorso a più riprese all'interno dell'ambito numeri. Per poterlo fare in modo significativo è stato strettamente necessario progettare un ambiente di apprendimento che potesse favorire l'esplorazione autonoma degli alunni e la scoperta, anche nell'ottica di definire una proposta didattica in linea con una progettazione curricolare d'istituto di continuità verticale, come sottolineato all'interno del documento relativo a Indicazioni nazionali e nuovi scenari (MIUR, 2018).
Proprio per queste ragioni, nel progetto sperimentato con la classe, la scoperta e l'esplorazione dei contenuti matematici sono avvenuti in modo significativo autonomamente dai singoli alunni, all'interno di un laboratorio di matematica inteso come

> «[...] momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

A partire da queste premesse nasce l'idea di progettare delle attività che possano ripercorrere concetti matematici già affrontati con gli alunni in precedenza, in un'ottica di scoperta e libera esplorazione, per permettere la progressiva appropriazione dei contenuti.
In particolar modo grazie alla partecipazione al progetto di formazione "Scuola primaria con potenziamento in matematica" promosso dal Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione dell'Università degli Studi di Torino, si è colta l'opportunità di scoprire e approfondire una sperimentazione effettuata in una classe prima di scuola secondaria di primo grado[1] di Torino, che è stata scelta ed adattata, anche in un'ottica di continuità verticale, per alunni del secondo ciclo della scuola primaria,[2] nello specifico per la classe quarta.
Il percorso da cui si è presa ispirazione è descritto nell'articolo intitolato "Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo Fangcheng: un percorso di trasposizione culturale nella scuola secondaria di primo grado" di Casi e Pizzarelli (2020). Proprio perché ideato per un ordine scolastico differente, tale percorso prevede un'articolazione più approfondita del campo dei numeri, in particolar modo sugli algoritmi di addizione e sottrazione e l'avvio all'utilizzo di metodi pre-algebrici fondati sul concetto di uguaglianza e sui principi di equivalenza.
In un'ottica di ricorsività dell'apprendimento di contenuti matematici, si è scelto di adattare la parte iniziale

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

della sperimentazione, focalizzando l'attenzione sulla scoperta di un differente sistema di numerazione.
Il progetto qui proposto consiste così nella scoperta da parte degli alunni di quarta primaria di alcuni simboli numerici usati nell'antica Cina, attraverso l'esplorazione di un'immagine rappresentante il cosiddetto "triangolo di Tartaglia-Pascal", contenuta in un antico libro di testo di matematica cinese.

2 Quadro teorico

L'introduzione della storia all'interno della didattica della matematica possiede una lunga letteratura relativa alle sue diverse potenzialità (Furinghetti & Radford, 2002; Radford, 2003; Radford et al., 2000) e ripercorre tematiche anche legate alla linguistica e all'educazione multiculturale (Barton, 2020). Persegue anche quanto prescritto nelle Indicazioni nazionali dove, all'interno della sezione Storia, è possibile leggere nel paragrafo riguardante gli intrecci disciplinari: «la storia si apre all'utilizzo di metodi, conoscenze, visioni, concettualizzazioni di altre discipline» (MIUR, 2012, p. 42).
In particolar modo l'utilizzo della storia per costruire oggetti matematici è riconosciuto come molto efficace nei diversi ordini scolastici (Furinghetti, 1997). Questa efficacia si fonda sull'idea di spaesamento (*depaysement*) discussa in Barbin (1994), che si ritrova molto bene all'interno del progetto presentato alla classe. L'idea di mettere in discussione le proprie conoscenze dovendosi confrontare con qualcosa di diverso e nuovo, appartenente a un passato anche molto remoto, suscita necessariamente l'idea di spaesamento e permette l'interazione con contenuti matematici.
Per favorire ulteriormente questo senso di spaesamento è opportuno l'utilizzo di fonti originali, riconosciuto anche come molto efficace per la costruzione di oggetti matematici per mezzo della storia (Fauvel & Van Maaren, 2000).
L'esplorazione delle proprie conoscenze e delle proprie abilità di fronte a contenuti matematici già acquisiti, ma presentati in forma differente, in un'ottica storica e interculturale, permette di utilizzare lo strumento della discussione matematica (Bartolini Bussi & Boni, 1995) in modo ancor più efficace. A questo riguardo, risulta molto significativa la metafora proposta dal gruppo di ricerca di Bartolini Bussi e Boni (1995) che descrive la discussione matematica come una «polifonia di voci articolate su un oggetto matematico che costituisce uno dei motivi dell'attività di insegnamento-apprendimento» (p. 227), da cui emerge la scelta del termine *voci* per indicare le diverse forme di discorso o pensiero di un soggetto, ovvero i diversi punti di vista. L'esplorazione dei diversi punti di vista diventa una risorsa primaria di costruzione di saperi non solo per l'insegnante rispetto alla classe, ma anche da parte degli alunni stessi.
Non è però possibile analizzare questa strategia metodologica senza farne emergere due aspetti cruciali: il primo relativo al *contratto didattico* (Brousseau, 1990) presente all'interno del gruppo classe, che delinea in modo significativo l'andamento di una discussione matematica, per quanto riguarda le norme sociali e socio-matematiche di cui parlano Yackel e Cobb (1996); il secondo relativo al ruolo che ricopre la figura dell'insegnante. Per quanto riguarda, infatti, questo secondo aspetto, centrale è l'orchestrazione di una discussione matematica condotta dall'insegnante, che rappresenta la «voce del sapere matematico» (Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 228).
Come descritto da Furinghetti (2003), la conoscenza del metodo storico permette agli insegnanti di percepire aspetti epistemologici e ontologici dei concetti matematici e suggerisce un metodo didattico orientato all'esplorazione e alla discussione in classe. In questo modo la costruzione di significati avviene in modo particolarmente attento alla dimensione sociale del processo di apprendimento e insegnamento.
Questa prospettiva legata alla costruzione collettiva di significati è propria anche del laboratorio di matematica e si struttura da una parte con l'uso di strumenti nelle varie attività, dall'altra con le interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività, attraverso lo strumento meto-

dologico della discussione matematica (MIUR et al., 2003), opportunamente gestito dall'insegnante.
La dimensione sociale, inoltre, riguarda anche gli aspetti legati all'ambito dell'argomentazione, competenza che assume un ruolo centrale nelle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012). In particolar modo, all'interno del progetto qui presentato, la scoperta e l'esplorazione dei contenuti matematici attraverso alcuni artefatti, come il testo antico o le bacchette, viene favorita per mezzo delle argomentazioni prodotte dagli alunni, all'interno del contesto classe.
A questo riguardo Krummheuer (1995) propone uno studio dell'etnografia dell'argomentazione e utilizzando lo schema di Toulmin (1975), che definisce un'argomentazione come un discorso che a partire da dati porta a delle conclusioni, amplia i significati di conclusione, dati e garanzia definendoli come elementi interattivamente costituiti dai partecipanti. In questo modo l'argomentazione, intesa come una serie di proposizioni connesse fra di loro in uno specifico modo, ha significato solamente all'interno dell'interazione da cui si crea; per questa ragione le diverse proposizioni non possono essere predeterminate da un soggetto, come l'insegnante, ma sono negoziate da tutti i partecipanti grazie alle diverse interazioni.
In letteratura (si veda, ad esempio, Levenson & Barkai, 2013) sono state identificate diverse tipologie di funzioni legate alla spiegazione, in relazione al processo di apprendimento e insegnamento della matematica. Quella che viene privilegiata all'interno di questo progetto, alla luce della quale è necessario analizzare gli interventi degli alunni e degli insegnanti durante le attività, è la funzione *descrittiva* del processo di pensiero messo in atto o delle modalità con cui è stato perseguito l'obiettivo comune di rispondere a una consegna data e risponde alla domanda «Come sei riuscito a risolvere il problema?».
Come sostengono Yackel (2001) e Krummheuer (2000), questa tipologia di spiegazioni con funzione *descrittiva* possono avere un format narrativo dal momento che sono strettamente connesse con il processo comunicativo di spiegare che cosa è stato svolto, passaggio per passaggio, per poter risolvere il problema.
Si evince a questo punto quanto le competenze argomentative siano connesse con la competenza di problem solving dal momento che, come analizza Di Martino (2017), per poter fronteggiare una consegna e valutare la risoluzione di un problema occorrono delle informazioni riguardanti i processi attivati, per mezzo della spiegazione su come si è risolto, e delle giustificazioni delle scelte fatte, per poterlo risolvere in quel determinato modo.
Allo stesso modo anche Pedemonte (2007) afferma che durante il processo di problem solving si sviluppa solitamente un'attività argomentativa per produrre una congettura o giungere alla soluzione. Proprio perché l'argomentazione implica assumersi delle responsabilità facendo delle scelte, l'attenzione sarà focalizzata sui processi di pensiero attivati e non solamente sui prodotti finali.
Risulta così che le competenze argomentative e di problem solving sono competenze fortemente intrecciate fra loro, complesse e anche trasversali, che coinvolgono diverse discipline e l'individuo nella sua formazione globale.

3 Metodologia e obiettivi dell'esperienza didattica

Per poter favorire l'esplorazione e la scoperta autonoma degli alunni è necessario mettere gli studenti nella situazione favorevole per sviluppare le loro idee e anche la loro creatività matematica. Per questa ragione il progetto è stato delineato come un laboratorio di matematica in cui le attività, proprio perché strutturate con laboratori e con lavori individuali e a gruppi, sono divenute ad alto contenuto argomentativo, viste le reali necessità di convincere l'altro gruppo sostenendo le proprie argomentazioni.
Si è scelta come cardine la metodologia del "*learning together and alone*", definita dagli autori Johnson

e Johnson (2002). Il fondamento di questa metodologia risulta essere la convinzione che l'essenza di un gruppo risieda nell'interdipendenza dinamica tra i suoi membri, che viene creata da obiettivi comuni e viene continuamente modificata, e che essa rappresenti una via efficace per l'apprendimento significativo.
Nello specifico, nella prima fase del progetto, è stato definito come obiettivo comune di ogni gruppo della classe quello di svolgere il ruolo dello storico e rintracciare all'interno del materiale dato tutto ciò che fosse possibile individuare come *matematico*.
Per rendere efficace la costruzione dei significati matematici, è stato molto importante garantire particolare attenzione ad alcuni aspetti riguardanti la gestione dei gruppi e dei ruoli che si possono creare al loro interno e l'apprendimento di norme generali di comunicazione (Webb, 2009).
All'interno del progetto è stata, inoltre, ampiamente utilizzata la discussione matematica, strumento didattico molto valido per la costruzione di significati, particolarmente attenta alla dimensione sociale del processo di apprendimento e insegnamento. Essa si basa su processi a lungo termine, come gli atteggiamenti di uno studente nei confronti di una disciplina, aspetti estremamente importanti per gli insegnanti, perché permettono di mettere in luce eventuali criticità nascoste, riguardanti contenuti magari già affrontati in precedenza che spesso si possono considerare come prerequisiti.
All'interno del progetto qui presentato, lo scopo didattico è stato quello di incoraggiare e favorire ogni allievo ad esprimere il proprio senso personale attribuito all'attività matematica proposta, attraverso il processo definito *dialettica cognitiva* (Bartolini Bussi & Boni, 1995), che permette di lavorare su quella che Vygotskij chiama *zona di sviluppo prossimale*, dal momento che l'attività collettiva, orchestrata dall'insegnante, produce, in quasi tutti gli allievi, una prestazione che non può essere considerata autonoma (Bartolini Bussi & Boni, 1995).
All'interno del progetto didattico sono state, inoltre, utilizzate strategie di valutazione formativa, riguardanti quelle attività di classe durante le quali le evidenze dell'apprendimento degli studenti vengono raccolte e usate, dagli insegnanti e dagli allievi stessi, per adattare i processi di insegnamento-apprendimento al fine di rispondere ai bisogni formativi degli studenti, giorno dopo giorno, istante per istante (Wiliam & Thompson, 2007).
Come previsto anche la normativa in materia di valutazione e dalle relative linee guida (si veda l'ordinanza ministeriale 172/2020, MIUR, 2020), valutare in modo formativo le competenze che un allievo sta acquisendo significa raccogliere dati per stabilire a che punto è nel suo percorso di apprendimento, interpretarli in vista degli obiettivi che l'allievo deve raggiungere, al fine di utilizzarli per mettere in atto strategie efficaci ad accompagnarlo dal punto in cui si trova verso gli obiettivi da raggiungere (Wiliam & Thompson, 2007).
Protagonisti del processo di valutazione formativa sono quindi state le due docenti (quella di sostegno e la scrivente), gli allievi come singoli e gli allievi tra pari, coinvolti in un'interazione che produce feedback reciproci, che sono stati interpretati e utilizzati dalle insegnanti per migliorare l'insegnamento e dagli studenti per progredire nel loro apprendimento.
Dal punto di vista delle competenze disciplinari in gioco, il progetto ha perseguito i seguenti traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria (MIUR, 2012):

> «L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali […].
> Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
> Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

Più nello specifico, il progetto ha perseguito gli obiettivi di apprendimento previsti al termine della classe quinta della scuola primaria riportati qui di seguito.

> «*Numeri* […]
> – Eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale o scritto. […]
> – Conoscere sistemi di notazione dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra.
> […]
> *Relazioni, dati e previsioni*
> – Rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni. […]
> – Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure».
> (MIUR, 2012, pp. 50-51)

4 Descrizione del progetto

Come anticipato, l'esperienza didattica nasce come adattamento per alunni del secondo ciclo della scuola primaria di una sperimentazione effettuata in una scuola secondaria di primo grado di Torino. Nello specifico la proposta didattica è stata realizzata con una classe quarta primaria, composta da 21 alunni di cui uno con sostegno, dell'Istituto Francesco Faà di Bruno, sito nel quartiere San Donato di Torino.
La scelta è stata quella di adattare la prima parte della sperimentazione effettuata nella scuola secondaria di primo grado (Casi & Pizzarelli, 2020), riguardante il campo dei numeri e i sistemi di numerazione dell'antica Cina.
In particolare, è stato ripreso un argomento già precedentemente trattato in classe seconda e terza, ovvero quello dell'analisi del nostro sistema di numerazione posizionale e decimale, in un'ottica di ricorsività degli apprendimenti e costruzione del pensiero matematico, attraverso la storia della matematica e il confronto con un'altra cultura.
Il riferimento alla cultura cinese ha differenti ragioni: in primis riguarda aspetti di tipo matematico, dato che la scrittura dei numerali cinesi è estremamente intuitiva, poiché il simbolo fornisce un'immagine concreta del numero che rappresenta, e poiché si tratta di un sistema di numerazione di tipo decimale e posizionale, facilmente confrontabile con il nostro. Un'altra ragione è di tipo materiale, dal momento che prevede l'utilizzo di semplici bacchette, facilmente reperibili e utilizzabili in aula. Infine, per ragioni di interculturalità, vista la presenza nel gruppo classe di un alunno di origine cinese, la cui cultura è stata spesso oggetto di curiosità da parte dei compagni nel corso degli anni.
La proposta è stata suddivisa in due fasi principali, stabilite senza limiti di tempo, durante il primo quadrimestre dell'anno scolastico 2021/2022. Gli spazi utilizzati sono stati quelli dell'aula, con l'uso come supporto sia della LIM sia di materiali concreti, come bacchette di legno e schede per documentare l'attività.

4.1 Fase 1: «Come gli storici: un antico manufatto da decifrare»

Come precedentemente descritto all'interno del par. 3, dopo aver diviso la classe in gruppi eterogenei di 3/4 partecipanti, la prima fase si è concentrata sulla creazione dell'interdipendenza dinamica tra i diversi gruppi con la delineazione di un obiettivo comune, significativo e stimolante.
È stata così consegnata a ogni membro del gruppo la scheda presente in Figura 1 (si veda la metà superiore della scheda in Allegato 1), dove viene espressa come consegna quella di scoprire tutti gli elementi riconducibili all'ambito matematico presenti nell'immagine contenuta in un antico libro di testo di matematica cinese, il "Prezioso specchio dei quattro elementi" (1303), ritrovato dagli storici.

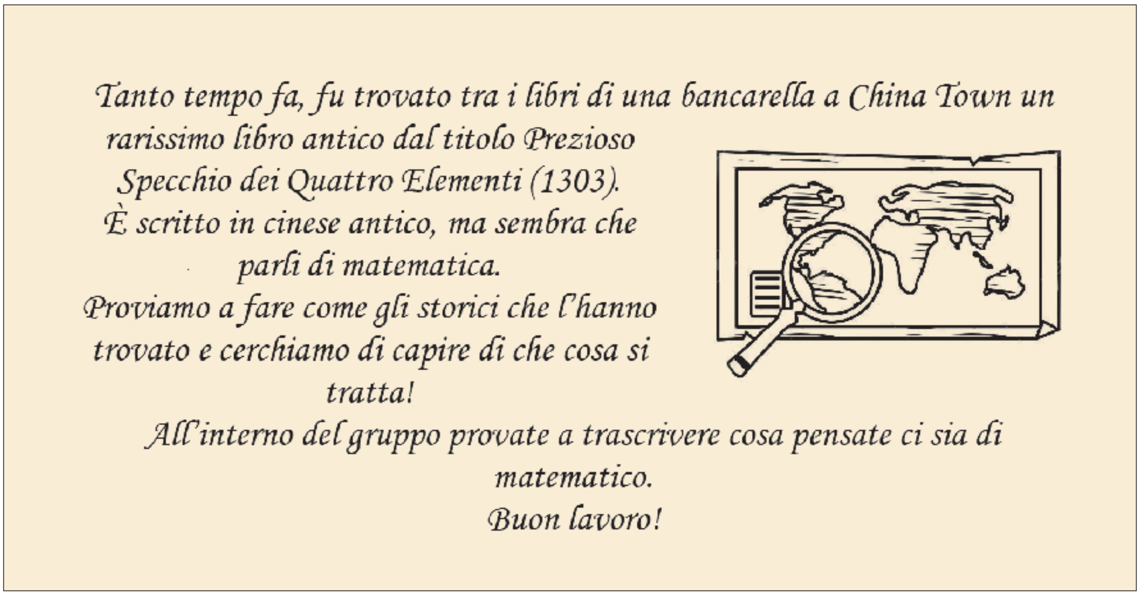

Tanto tempo fa, fu trovato tra i libri di una bancarella a China Town un rarissimo libro antico dal titolo Prezioso Specchio dei Quattro Elementi (1303).
È scritto in cinese antico, ma sembra che parli di matematica.
Proviamo a fare come gli storici che l'hanno trovato e cerchiamo di capire di che cosa si tratta!
All'interno del gruppo provate a trascrivere cosa pensate ci sia di matematico.
Buon lavoro!

Figura 1. Scheda consegna Fase 1 (Allegato 1).

Già durante l'anno precedente e soprattutto durante il primo periodo di attività dell'anno 2021-2022, erano state proposte alla classe attività simili, in cui era necessario provare a immedesimarsi nei panni di uno storico, ma solamente con obiettivi legati alla disciplina storica, mai in ambito matematico.
La classe quarta rappresenta un momento particolarmente produttivo per poter affrontare questa tipologia di attività, perché prevede in ambito storico lo studio e l'analisi dei principali quadri di civiltà, con relazioni e confronti con il presente. Lo studio di una civiltà prevede proprio l'analisi dei costumi e dei modi di vivere di culture anche molto differenti, come in questo caso quella cinese.
L'immagine consegnata agli alunni (Figura 2, Allegato 2) raffigura il triangolo dei coefficienti binomiali presentato all'interno dell'importante trattato cinese "Prezioso specchio dei quattro elementi" di Zhu Shijie, risalente al 1303.

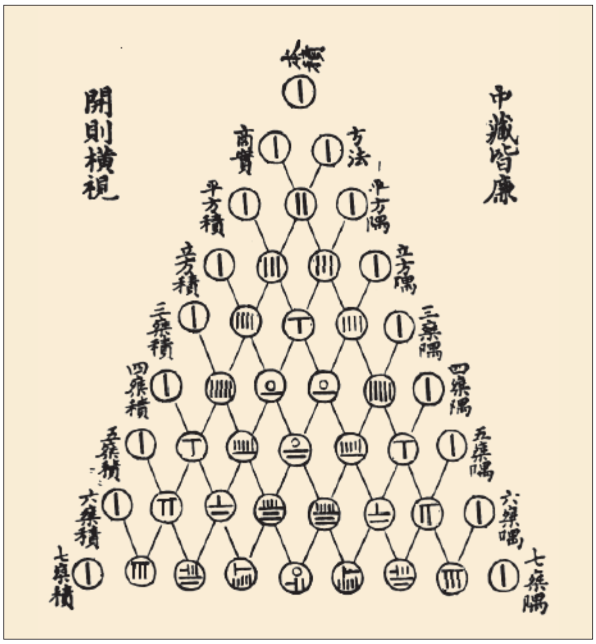


Figura 2. Scheda raffigurante il triangolo dei coefficienti binomiali adattato per l'attività (Allegato 2).

Rispetto all'immagine originale, come predisposto nella sperimentazione di Casi e Pizzarelli (2020), i segni all'interno dei cerchi sono stati ruotati per permettere la coerenza con lo schema del triangolo di Tartaglia-Pascal, nel quale i numeri presenti nella riga n-esima sono dati dalla somma dei due numeri ad esso adiacenti nella riga (n-1)-esima, con n = 0, …, 8.
Mantenere questa regolarità è estremamente importante per questa tipologia di attività perché è proprio ciò che si richiede agli alunni di identificare e definire, anche se in parte si sacrifica l'autenticità della raffigurazione iniziale.
Una volta compresa la consegna, anche attraverso la guida dell'insegnante, si è dato quindi il via ai lavori nei diversi gruppi, consegnando ad ogni allievo anche l'immagine del triangolo senza i segni all'interno dei cerchi (**Figura 3**, Allegato 3).

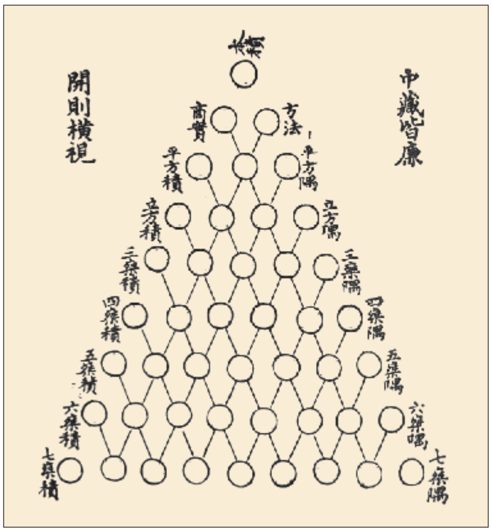


Figura 3. Scheda raffigurante il triangolo dei coefficienti binomiali senza segni (Allegato 3).

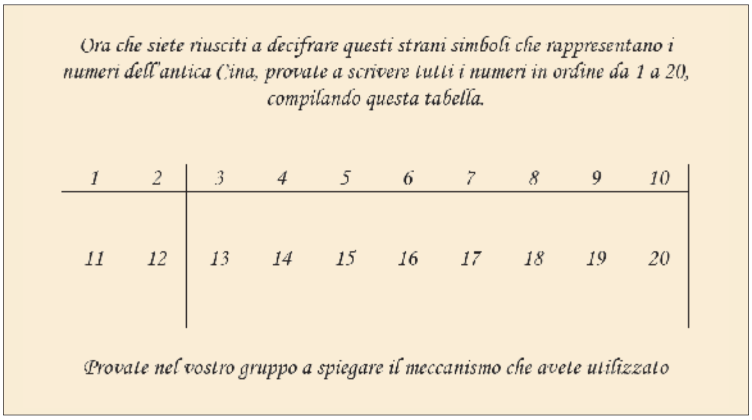
Dal confronto fra le due schede, in particolar modo osservando il triangolo senza segni nei cerchi, ci si aspettava che emergesse in modo chiaro che l'obiettivo fosse quello di identificare e decifrare che cosa potessero rappresentare quei simboli e per quale ragione fossero disposti in questo modo.
Durante questa fase, le insegnanti hanno osservato e supportato il lavoro nei gruppi intervenendo con domande-stimolo che potessero affiancare gli alunni nella identificazione dei diversi segni e della relazione additiva fra le diverse righe del triangolo.
Al termine del lavoro a gruppi, è stato richiesto a ogni portavoce di leggere e descrivere quanto svolto nel proprio gruppo, segnando alla lavagna, attraverso la tecnica del brainstorming, le parole e le idee emerse. A questo punto è stata orchestrata una discussione matematica circa le diverse ipotesi avanzate dagli alunni, completando insieme alla classe il triangolo.
Durante questa prima fase dell'attività, l'obiettivo è stato quello di garantire la partecipazione di tutti gli alunni in classe, favorendo l'esplorazione e la scoperta di regolarità dell'artefatto e soprattutto motivando gli alunni più in difficoltà, cercando di ricordare loro l'importanza del ruolo dello storico con un obiettivo comune da raggiungere.
Le possibili difficoltà, infatti, che possono emergere in questa fase riguardano principalmente due ambiti: quello motivazionale e quello matematico. I gruppi dove le regolarità sono state identificate con più difficoltà, e magari hanno richiesto più tempo rispetto ad altri, sembrano aver risentito di difficoltà di tipo motivazionale; le difficoltà matematiche, invece, hanno coinvolto l'identificazione del sistema di numerazione come di tipo posizionale, per cui il valore delle stanghette cambia in base alla posizione, aspetto che si discosta dalla rappresentazione concreta.

4.2 Fase 2: «Quali erano i numeri nell’antica Cina?»

La seconda fase del progetto si apre con la ripresa dell’attività precedente attraverso delle apposite slide alla LIM, dove viene presentata l’immagine del triangolo dei coefficienti binomiali completo, senza segni (**Figura 4**).

Figura 4. Triangolo dei coefficienti binomiali completo.

Rientrati nel mondo dell’antica Cina e ripresa l’ambientazione storica, a ogni gruppo sempre formato da 3/4 membri è stata consegnata la scheda di **Figura 5** (si veda la metà inferiore della scheda nell’Allegato 1), in cui si richiede di identificare i numerali dell’antica Cina da 1 a 20.



Ora che siete riusciti a decifrare questi strani simboli che rappresentano i numeri dell’antica Cina, provate a scrivere tutti i numeri in ordine da 1 a 20, compilando questa tabella.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Provate nel vostro gruppo a spiegare il meccanismo che avete utilizzato

Figura 5. Scheda consegna Fase 2 (Allegato 1).

Per compilare parte della tabella è sufficiente trascrivere alcuni numeri già presenti nel triangolo dei coefficienti binomiali precedentemente presentato, ovvero i numeri da 1 a 8, il 15 e il 20.
Entro il 10, quindi, l’unico numero non presente è il 9, che può essere ricavato per analogia, osservando la costruzione dei numeri da 6 a 8, rappresentati con un’asta in orizzontale a indicare cinque unità e sotto di essa tante aste verticali quante occorre aggiungerne per completare i numeri.
I successivi numeri da dedurre erano quelli da 11 a 19 (escluso il 15 già presente nel triangolo) attra-

verso l'osservazione della costruzione proprio del numero 15, composto da una bacchetta in orizzontale in basso su cui sono presenti 5 aste in verticale. Questa rappresentazione è legata alla comprensione che il sistema di numerazione proposto è operatorio, nel senso che presuppone che la forma di rappresentazione del numero conservi l'effettiva somma dei simboli che lo compongono. Questo rappresenta il nodo cruciale dell'attività, un aspetto che può generare difficoltà poiché prevede la messa in atto di processi di generalizzazione, che richiedono una solida competenza matematica.
L'obiettivo, quindi, di questa fase è quello di confrontare sistemi di numerazione differenti nell'ottica di sviluppare negli alunni sia processi di generalizzazione sia processi metacognitivi, legati all'osservazione e alla riflessione sulla tipologia di sistemi.
Anche durante questa fase, il ruolo dell'insegnante è stato quello di osservare e accompagnare il lavoro nei gruppi, intervenendo con domande-stimolo che potessero guidare le osservazioni degli alunni. È stato anche introdotto del materiale concreto, ovvero le bacchette di legno, per favorire la manipolazione delle diverse rappresentazioni.
Al termine è stata avviata una discussione collettiva di presentazione delle osservazioni dei diversi gruppi, anche di coloro i quali non fossero riusciti per diverse ragioni a completare la tabella con alcuni numeri, motivando le proprie ragioni e le strategie utilizzate.
Per concludere questa fase, ogni alunno ha svolto singolarmente un lavoro individuale di autoanalisi dell'esperienza, con la richiesta di spiegare a parole il meccanismo che sta alla base della rappresentazione proprio dei numeri da 16 a 20.
Questo momento finale ha permesso nei giorni successivi di spostare l'attenzione sulle strategie di scomposizione dei numeri all'interno del nostro sistema di numerazione per favorire e potenziare il calcolo mentale, obiettivo fondamentale del curricolo di matematica nella scuola primaria.

5 Analisi delle attività

5.1 Fase 1: «Che strane stanghette: saranno gli antichi numeri cinesi?»

Come previsto a priori rispetto la consegna iniziale assegnata agli alunni, consegnato il secondo triangolo senza segni nei cerchi (Allegato 3) è risultato chiaro quasi immediatamente ad ogni gruppo, che di matematico ci fossero proprio quelle "stanghette" (termine usato da un gruppo) (Figura 6).

Figura 6. Piccoli storici al lavoro durante la Fase 1.

Si riporta a questo proposito una trascrizione di discussione avvenuta all'interno di un gruppo.

Ins.: «Avete capito quindi in questo gruppo che cosa c'è di matematico in questa strana immagine?»
L.: «Non è così strana! È una piramide».
O.: «Non è una piramide, è un triangolo! Comunque le stanghette sono qualcosa di matematico, perché vedi qui non ci sono e qui sì».
L.: «Alcune sui lati si ripetono pure uguali hai visto? Tipo qui sia a destra che a sinistra, tipo diagonali».
Ins.: «Storici della IV B, in questo gruppo hanno scoperto che alcune stanghette si ripetono in modo uguale, l'avete notato anche voi?»
M.: «Le stanghette si possono contare».
V.: «Ma allora sono come i numeri!»
O.: «Saranno i numeri cinesi!»

Da questa trascrizione è possibile notare che la scoperta dei numeri intesi come segni o "stanghette" è avvenuta in modo quasi istintivo nel confronto fra le due immagini.
A questo punto è stata molto interessante la discussione affrontata nel gruppo dove era presente l'alunno di origine cinese (D.) che, proprio a inizio dell'anno scolastico in corso, aveva iniziato a seguire nei fine settimana la scuola cinese.

Ins.: «D., ma sono davvero i numeri cinesi? Noi non li conosciamo!»
L.: «D. tu hai iniziato la scuola cinese, non hai imparato i numeri?»
D.: «Ma a me non sembrano proprio i numeri cinesi, però qui (indicando l'ideogramma in alto) mi sembra ci sia scritto uno in cinese… Sì sì, c'è proprio scritto uno!»
L.: «Visto che è un libro antico, magari sono i numeri antichi cinesi, tipo i nostri numeri romani».

La scoperta di una cultura così differente e il confronto che è nato spontaneamente in questo gruppo fra sistemi antichi di numerazione in culture differenti è stato lo spunto per la discussione con la classe.
Una volta che tutti i gruppi hanno iniziato a lavorare sull'identificazione delle cifre e dei numeri che compongono il triangolo, si è chiesto loro di spiegare per iscritto il procedimento adottato per identificare e dedurre i vari simboli.
Sicuramente in questa parte del lavoro è emerso il fatto che la classe avesse già analizzato il nostro sistema di numerazione, lavoro che fin dalla classe prima si era focalizzato sulla differenza fra numero e cifra. Questo aspetto di ricorsività dei contenuti è stato particolarmente efficace per gli alunni con più difficoltà, poiché attraverso l'esplorazione spontanea di questi simboli hanno potuto osservare e scoprire direttamente la differenza tra cifra e numero.
La richiesta di spiegare per iscritto i procedimenti attivati non è un aspetto nuovo per il gruppo classe, abituato a lavorare in gruppo e ad argomentare in matematica fin dalla classe prima, in forma orale prima e in forma scritta successivamente.
Le difficoltà emerse hanno riguardato, in alcuni gruppi, come previsto a priori, l'identificazione del valore della stanghetta posizionata in orizzontale, per cui la discussione ha richiesto maggior tempo. I segni in verticale sono effettivamente risultati più intuitivi, proprio perché la scrittura dei numerali, ossia i segni che rappresentano quantità, risalenti al I millennio a.C., faceva probabilmente riferimento alle dita della mano. I numeri 1, 2, 3, 4 e 5 si rappresentavano, infatti, affiancando rispettivamente 1, 2, 3, 4 e 5 bacchette verticali. Essendo inoltre un sistema di tipo immanente, il simbolo fornisce un'immagine concreta del numero che rappresenta.

Identificati dunque questi segni, anche come visto in confronto ai numeri romani, di cui alcuni alunni avevano esperienza anche se non ancora affrontati in classe, è emerso il rapporto additivo fra righe del triangolo.
Si riporta a questo proposito la seguente trascrizione di una discussione all'interno di un gruppo.

G.: «Se vedi questo, se è una stanghetta con quest'altra, fanno due stanghette. Vedi le linee. Poi guarda 2 + 1 fanno 3 stanghette. Poi 3 + 1 fanno 4».
V.: «Eh ma qui? Vedi 3 + 3 fanno questo [indica il simbolo ⊤ nella riga 4]».
G.: «4 + 1 fa 5. 5 + 1 viene questo [indica il simbolo ⊤ nella riga 6]».
V.: «È lo stesso di sopra!»
G.: «Ma allora diventano più grandi quando scendi».
Ins.: «Cosa diventano più grandi G.?»
G.: «I numeri aumentano, perché sono somme».
Ins.: «Se sono tutte somme come state dicendo, allora nella quarta riga 3 + 3 dà come somma questo simbolo, che è lo stesso della sesta riga? [indica il simbolo ⊤ nella riga 4 e nella riga 6]».
V.: «Guarda nella sesta è formato da 5 + 1, ma allora questo simbolo è 6!»
G.: «Scriviamolo!»

Come descritto, quindi, l'osservazione da parte degli alunni delle varie relazioni e la proprietà additiva fra righe è stata effettuata in modo autonomo, solo accompagnata se necessario da domande-stimolo dell'insegnante come guida nel percorso di apprendimento. Ritrovare relazioni e sequenze che "funzionavano", in questo modo, ha rappresentato per gli alunni un momento di estrema gioia, perché li motivava a continuare in quell'ottica il proprio lavoro.
Alcuni gruppi, in modo inatteso e non previsto a priori, prima di ragionare sui legami fra righe, si sono cimentati nella scoperta e nell'osservazione di ogni singola riga.
In particolar modo si sono fermati sull'osservazione di possibili numeri palindromi su ciascuna riga, composti da stesse cifre leggibili sia da destra verso sinistra sia viceversa. Questo aspetto è legato a una attività ludica, proposta durante la settimana precedente, in cui si richiedeva per poter completare un gioco, proprio l'osservazione di queste tipologie di numeri. È stato significativo il fatto che a ritrovare questa analogia fossero proprio i due alunni con competenze di livello più basso nell'ambito matematico, che hanno particolarmente apprezzato questo tipo di attività.
L'identificazione del simbolo 0 è avvenuta, inoltre, proprio da un'alunna (M.) che riscontra diverse difficoltà nel campo dei numeri, un'associazione che ha effettuato in modo davvero intuitivo, di cui si riporta la trascrizione.

Ins.: «Come mai M. sta osservando solo una riga dello schema e C. solo un'altra, e tu un'altra ancora?»
V.: «Abbiamo deciso di dividerci le righe maestra, così capiamo meglio».
M.: «Io infatti ho capito che questo pallino è lo 0 [indica il pallino in uno dei due simboli centrali della quinta riga]».
Ins.: «Come hai fatto a capirlo M.?»
M.: «Beh si vede maestra! È come il nostro. Se tu giri viene una stanghetta e uno 0, come 1 e 0 che formano 10».
Ins.: «Interessante M.! Ma guarda c'è un pallino anche nella riga successiva!»
V.: «Ha ragione M.! Vedi nella riga dopo, se giri come ha fatto lei, sono due stanghette e il pallino, quindi 2 e 0 che fanno 20».

Terminato il lavoro dei gruppi sulla scoperta dei numeri indicati all'interno dell'immagine, durante la discussione collettiva, l'insegnante ha segnato attraverso il metodo del brainstorming alcune parole chiave emerse dalle diverse descrizioni presentate dai gruppi (Figura 7).

Figura 7. Brainstorming durante la discussione collettiva.

Questo momento è stato efficace perché ha permesso di identificare analogie e differenze fra le strategie adottate dai diversi gruppi e ha favorito l'utilizzo dell'argomentazione a livello orale per motivare le scelte fatte nell'identificazione dei diversi simboli all'interno del triangolo, che passo dopo passo, simbolo dopo simbolo, è stato completato insieme.

5.2 Fase 2: «I numeri nell'antica Cina sono strani come i nostri!»

Questa seconda fase si è aperta con la compilazione della tabella (si veda la metà inferiore dell'Allegato 1) che è stata per alcuni numeri, come previsto, immediata e corretta. In particolare tutti i gruppi hanno rappresentato correttamente con i segni in verticale i numeri 1, 2, 3, 4 e 5 in modo intuitivo, perché legati al conteggio.
Molti alunni, anche nella fase precedente, per poter indicare e ragionare sulla posizione differente delle bacchette hanno utilizzato il proprio corpo, indicando attraverso le braccia la direzione delle "stanghette". Per aiutare in questa fase anche gli studenti con più difficoltà sono stati così introdotti i materiali concreti, ovvero delle bacchette di legno, per poter far manipolare i segni e più facilmente riuscire nell'attività.
I numeri da 6 a 9 si rappresentavano con un'asta in orizzontale a indicare cinque unità e sotto di essa tante aste verticali quante occorre aggiungere per completare il numero. Anche per questi numeri le rappresentazioni dei diversi gruppi sono state tutte corrette.
I numeri da 1 a 8 erano inoltre presenti nel triangolo iniziale quindi per analogia è stato facilmente indicato anche il numero 9 (Figura 8).

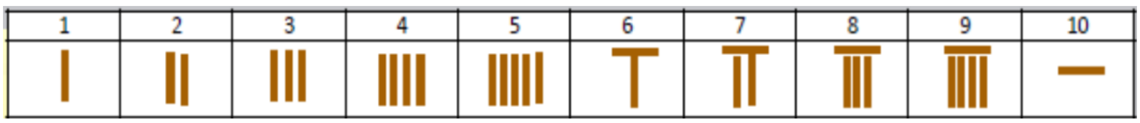


Figura 8. Numerali dell'antica Cina da 1 a 10.

La costruzione invece dei numeri da 11 a 19 era da dedurre, visto che all'interno del triangolo è presente solamente il numero 15, composto da una bacchetta in orizzontale in basso su cui sono presenti 5 aste in verticale.
Da come è stato quindi formato il 15 sono nate le diverse discussioni all'interno dei gruppi, come è possibile leggere in questa trascrizione.

T.: «Ma se 15 è fatto con una bassa e 5 verticali sopra, allora 14 ne avrà 4 in verticale, 13 ne avrà 3, 12-2 e così anche l'11 con una verticale e sotto una in là».
M.: «Quindi se la stanghetta è orizzontale sopra vuol dire 5, se invece è sotto 10. Mmm… Ci si può confondere un sacco se li scrivi male».
T.: «Beh è come i nostri numeri, se cambi posto alle cifre cambia tutto il numero!»

Il concetto di sistema di notazione dei numeri posizionale attraverso questa attività emerge in modo molto efficace e visivo, anche se rispetto la trascrizione dello schema, la stanghetta della decina nei numerali è posizionata accanto e non sotto le aste verticali, come è possibile osservare in **Figura 9**.

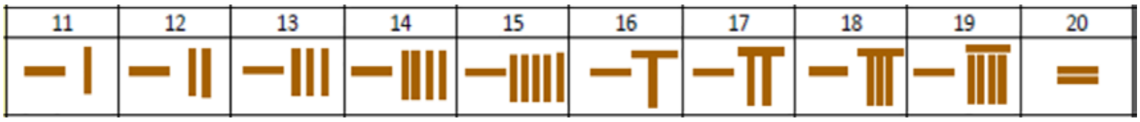


Figura 9. Numerali dell'antica Cina da 11 a 20.

Ciò che, invece, ha confuso molti gruppi è stato il concetto di sistema numerico operatorio: solamente 2 gruppi su 6 hanno completato in modo corretto la sequenza da 16 a 19. La maggior parte, infatti, ha continuato con l'aggiunta di stanghette in verticale dopo il 15, senza considerare la rappresentazione dei numeri 6, 7, 8, 9 e senza capire che la rappresentazione del numero conserva la somma dei simboli che lo compongono, quindi 10 + 6, 10 + 7 ecc.
Come previsto, questo aspetto ha rappresentato l'ostacolo principale di questa fase, poiché prevede la messa in atto di processi di generalizzazione, fondamentali per l'apprendimento della matematica, su cui si è quindi scelto di focalizzare l'attenzione.
Attraverso la discussione in plenaria, è stata stimolata l'autovalutazione di ogni gruppo e la discussione sulle diverse proposte, in particolar modo sulle disuguaglianze emerse nella rappresentazione dei simboli dei numeri 16, 17, 18 e 19. In sostanza, si può affermare che il lavoro in questa fase si è concentrato sulla metacognizione e sulla riflessione circa i ragionamenti svolti dagli alunni.
Terminato questo momento, è emersa l'esigenza di avere la certezza che ogni alunno avesse compreso questo meccanismo operatorio nella costruzione del numero, anche perché presente nel nostro sistema di notazione numerica. Per questo motivo è stato chiesto agli allievi un lavoro individuale di autoanalisi dell'esperienza, con la richiesta di spiegare a parole il meccanismo che sta alla base della rappresentazione proprio dei numeri da 16 a 20.
Riflettere in modo individuale sull'attività svolta in gruppo rappresenta un momento cruciale nel processo di apprendimento non solo per lo studente, ma anche per il docente. La classe, abituata ad argomentare per iscritto e al lavoro di autovalutazione, come già descritto precedentemente, si è organizzata in modo efficace durante il lavoro a gruppi, permettendo a tutti gli alunni, anche quelli con più difficoltà in matematica, di partecipare attivamente e quindi essere in grado al termine di lavorare individualmente, senza l'aiuto del compagno.
Gli alunni in questa fase hanno concentrato l'attenzione sulla composizione e scomposizione dei numeri nei sistemi di calcolo e hanno confrontato questo sistema di numerali cinesi con quello da loro utilizzato. Alcuni alunni, in particolare all'interno di un gruppo che ha completato in modo cor-

retto la sequenza da 16 a 19 senza difficoltà o esitazioni, hanno iniziato a interrogarsi sul sistema dei numeri romani, concetto emerso all'interno del brainstorming (Figura 7), proponendo alle insegnanti confronti sia sull'uso di simboli molto simili alle "stanghette" cinesi, sia sull'importanza della posizione dei diversi simboli «come I davanti a V che a volte può confondere».[3] Altri alunni, invece, cercando di verbalizzare il procedimento di costruzione dei numeri da 16 a 19, si sono soffermati sul nostro sistema di numerazione e in particolar modo sulla composizione e scomposizione dei numeri, iniziando a effettuare calcoli utilizzando strategie più efficaci. Osservare questo aspetto è stato estremamente rilevante per le docenti, poiché si sono potuti accompagnare gli alunni su argomenti e tematiche già affrontati con il gruppo classe negli anni precedenti, permettendo di sviluppare a più riprese la costruzione del pensiero matematico nell'ambito numerico.
Il lavoro individuale è stato così davvero un momento importante perché ha permesso di considerare l'errore come risorsa e momento da cui partire per poter focalizzare l'attenzione sulle strategie di scomposizione dei numeri per favorire e potenziare il calcolo mentale con tutta la classe.

6 Bilancio dell'esperienza

In primo luogo, occorre dire che questo tipo di attività ha permesso all'insegnante di essere più flessibile all'interno del processo di costruzione della conoscenza. Proprio il concetto di spaesamento precedentemente descritto (Furinghetti, 2003) ha permesso di rendere l'attività estremamente inclusiva per tutto il gruppo classe, insegnanti comprese.
L'analisi di un sistema di notazione numerica differente è diventato un mezzo per analizzare le difficoltà degli studenti in una nuova prospettiva. Ha infatti messo in luce alcune difficoltà di costruzione del sistema numerico come operatorio, difficoltà che era stata riscontrata negli alunni meno competenti nel calcolo mentale e che si era già tentato di supportare ma mai con una tale efficacia. A partire proprio da questa attività, infatti, si è continuato a lavorare sul calcolo mentale durante il secondo quadrimestre, facendo spesso riferimenti al sistema dei numerali dell'antica Cina.
Come è sempre importante quando si attua una progettazione didattica, la rimodulazione in itinere è stata necessaria ed efficace. La prospettiva, prima di intraprendere il percorso, infatti, era quella di continuare il progetto con una terza fase, nella quale continuare a ragionare sul sistema dei numerali dell'antica Cina oltre il numero 20 raggiungendo sia le centinaia che le migliaia. Viste però le difficoltà, si è scelto di soffermarsi di più sul concetto di sistema operatorio e sul confronto con il nostro sistema numerico, aspetto che è risultato efficace e propedeutico per accompagnare la classe nel calcolo mentale.
Inoltre, in una società multietnica come la nostra, può risultare davvero arricchente per gli insegnanti promuovere lo sviluppo dell'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole attraverso la costruzione del pensiero matematico, intrecciando saperi e discipline, come quelle storica e matematica, in un'ottica di sviluppo di una società inclusiva.
Proprio in un'ottica inclusiva è importante anche sottolineare che l'alunna presente in classe con diagnosi di ritardo mentale medio-grave, affiancata dalla docente di sostegno, è riuscita a partecipare attivamente nella prima fase della sperimentazione, proprio perché concentrata su aspetti di osservazione di immagini ed esplorazione autonoma, guidata sia dai compagni che dai docenti. La scoperta e l'analisi del sistema di notazione, passando da quello non conosciuto a quello conosciuto,

3. Si tratta di un'osservazione interessante sui numeri romani, in linea con quanto accade per i numeri antichi cinesi, dove la stanghetta orizzontale assume valori diversi a seconda che sia sopra (= 5) o sotto (= 10) le stanghette verticali. In termini di caratteristiche, invece, si osserva che il sistema romano non è posizionale ma additivo.

ha permesso di affrontare sia aspetti della didattica della matematica, come lo sviluppo di processi di generalizzazione, sia aspetti di tipo metacognitivo, in un'ottica inclusiva. È stato altresì possibile osservare quanto sia stato stimolante focalizzare l'attenzione sul legame di interdipendenza dinamica dell'intero gruppo classe per far fronte ad obiettivi comuni, grazie all'utilizzo di artefatti veri e realmente utilizzati nell'antichità, che hanno incuriosito tutti gli alunni.
L'attenzione, inoltre, agli errori in un'ottica formativa è stato ulteriore punto di forza della progettazione didattica. L'errore è divenuto punto di partenza e non di arrivo, inteso non come qualcosa da evitare assolutamente o da nascondere. A questo proposito è importante sottolineare che il clima della classe durante i lavori di gruppo è risultato positivo, perché sono allievi abituati al confronto e al dialogo costruttivo a partire dalla classe prima. Si tratta quindi di allievi che rispettano il turno di parola nel gruppo e riescono a organizzare i ruoli, come quello di portavoce, senza quasi mai bisogno dell'intervento dell'adulto.
Da questa esperienza, come spunto per il futuro, si trae sicuramente quello di ampliare il progetto qui descritto all'interno del curricolo d'istituto, in un'ottica di continuità verticale. Seguendo questo intento, infatti, tale progettazione è stata ripresa con la classe negli anni nel primo quadrimestre della classe quinta, per ritornare in modo elicoidale sul concetto di sistema di notazione numerica e poter proseguire con i numerali dell'antica Cina fino alle migliaia. Sarebbe inoltre proficuo organizzare e progettare attività ponte con la scuola secondaria di primo grado, attraverso l'attivazione di laboratori matematici, sempre su questi contenuti, ad esempio facendo confrontare gli alunni sugli algoritmi dell'addizione e della sottrazione, attraverso l'uso delle bacchette e delle tavole da calcolo.
Per concludere, si riporta una citazione di Bill Barton su quanto la questione interculturale sia legata al nostro modo di apprendere e quindi di insegnare, come quesito aperto a possibili altre sperimentazioni in questo campo.

> «Un problema educativo più immediato riguardante i mondi matematici è la questione psicologica di quanto un individuo sia legato a una sola visione del mondo e se (o come) questo influenzi la sua comprensione di un'altra visione del mondo. [...] Il mio punto di vista è che gli allievi sono influenzati dalla propria visione del mondo più di quanto sia comunemente riconosciuto».
>
> (Barton, 2020, p. 143)

Riconoscimento
Per il progetto didattico qui presentato, l'UMI-CIIM ha insignito l'autrice del "Premio Lucia Ciarrapico per la scuola primaria" nell'edizione 2022.

Bibliografia

Barbin, É. (1994). Préface. In Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » (Ed.), *Quatrième université d'été d'histoire des mathématiques* (pp. ii–iii). IREM de Lille.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: Un approccio vygotskiano. *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *18*(3), 221–256.

Barton, B. (2020). *I linguaggi della matematica. Storie di etnomatematica ed educazione multiculturale.* UTET Università.

Brousseau, G., (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(9.3), 309–336.

Casi, R., & Pizzarelli, C. (2020). Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo Fangcheng: un percorso di trasposizione culturale nella scuola secondaria di primo grado. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *7*, 97–122.

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *1*, 23–37.

Fauvel, J., & Van Maaren, J. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Kluwer.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 55–61.

Furinghetti, F. (2003). Storia della matematica per insegnanti e studenti. In E. Castro Martinez (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 87–96). Universidad de Granada.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631–654). Erlbaum.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2002). Learning together and alone: Overview and metaanalysis. *Asia Pacific Journal of Education*, *22*(1), 95–105.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 22–32.

Levenson, E., & Barkai, R. (2013). Exploring the functions of explanations in mathematical activities for children ages 3-8 year old: The case of the Israeli curriculum. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2158–2167). Middle East Technical University & ERME.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* [D.M. 254/2012]. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf/1f967360-0ca6-48fb-95e9-c15d49f18831?version=1.0&t=1480418494262

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2018). *Indicazioni nazionali e nuovi scenari.* http://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/3234ab16-1f1d-4f34-99a3-319d892a40f2

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2020). *Valutazione periodica e finale degli apprendimenti delle alunne e degli alunni delle classi della scuola primaria* [O. M. 172/2020]. https://www.istruzione.it/valutazione-scuola-primaria/allegati/ordinanza-172_4-12-2020.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Unione Matematica Italiana, & Società Italiana di Statistica. (2003). *Matematica 2003: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. La Matematica per il cittadino.* http://www.matematica.it/tomasi/lab-did/pdf/matem-2003-curricolo.pdf

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41.

Radford, L. (2003). On culture and mind. A post-vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger & V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49–79). Legas.

Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp. 162–167). Kluwer.

Toulmin, S. (1975). *Gli usi dell'argomentazione*. (Traduzione italiana di G. Bertoldi). Rosenberg & Sellier.

Webb, N. (2009). The teacher's role in promoting collaborative dialogue in the classroom. *British Journal of Educational Psychology*, *79*(1), 1–28.

Wiliam, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will make it work?. In C. A. Dwyer (Ed.), *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning* (pp. 53–82). Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25* (Vol. 1, pp. 1–9). Utrecht University.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 390–408.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 116 - 136, DOI: 10.33683/ddm.23.14.6

OPEN ACCESS

«Fare il maestro è un lavoro impegnativo!»

«Being a teacher is a demanding job!»

Sara Cataldi Spinola
Scuola media di Minusio – Svizzera
Gruppo Matematicando, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica – SUPSI, Locarno – Svizzera

✉ sara.cataldi@edu.ti.ch

Sunto / Il progetto di natura interdisciplinare qui presentato è incentrato su un'esperienza di comunicazione fra classi di ordini diversi della scuola dell'obbligo e di apprendimento collaborativo in matematica. Gli allievi di due classi prime della scuola media di Minusio hanno assunto il ruolo di docenti: hanno preparato un itinerario sui triangoli, costituito da alcuni video didattici di introduzione all'attività e dalle rispettive schede di accompagnamento, da sottoporre ai bambini di due classi terze elementari del locarnese; hanno gestito le videochiamate e i lavori di gruppo con i bambini; hanno risposto alle loro curiosità, e infine hanno corretto i loro elaborati. Ad attività conclusa, i ragazzi di scuola media hanno ideato una serie di giochi atti a consolidare gli apprendimenti dei bambini e hanno preparato dei rapporti di sintesi, insieme ai rispettivi docenti di italiano, nei quali hanno esposto, in modalità diverse, il loro vissuto personale e quanto hanno appreso sulla comunicazione e sulla professione docente.

Parole chiave: comunicazione; apprendimento collaborativo; insegnamento tra pari; interdisciplinarità; continuità scolastica.

Abstract / The interdisciplinary project presented here focuses on an experience related to communication between classes of different compulsory school orders and to collaborative learning in mathematics. The pupils of two eight-grade classes at the lower secondary school in Minusio took on the role of teachers: they prepared an itinerary on triangles, consisting of some didactic videos introducing the activity and the respective accompanying sheets, to be submitted to the children of two third-grade classes in the Locarno area; they managed the video calls and group work with the children; they answered their curiosities, and finally corrected their productions. When the activity was over, the lower secondary school students devised a series of games to consolidate the children's learning and prepared summary reports, together with their Italian language teachers. Through such reports they presented, in different ways, their personal experiences and what they had learned about communication and about the teaching profession.

Keywords: communication; collaborative learning; peer teaching; interdisciplinarity; school continuity.

1 Introduzione

«Vi piacerebbe calarvi nei panni del docente e preparare un itinerario didattico da proporre a bambini di terza elementare?». Ecco la proposta fatta agli allievi di due classi di prima media di Minusio particolarmente eterogenee, sia nelle competenze matematiche, sia in quelle trasversali.

Dall'osservazione, in entrata nella scuola media, del variegato quadro di competenze raggiunte a diversi livelli da parte degli allievi e delle fragilità legate alla competenza comunicativa, è nata, di concerto con alcuni docenti del gruppo *Matematicando*,[1] l'idea di potenziare le abilità di comunicazione nell'ambito di un progetto di insegnamento tra pari.

Sapere comunicare in modo efficace è fondamentale, poiché consente nella quotidianità di veicolare il proprio pensiero in modo comprensibile agli altri, di presentare, di giustificare e argomentare le scelte personali, di essere in generale aperti alla socialità. Ciò è essenziale per interagire in modo funzionale con altre persone e per conquistare uno spazio personale di espressione.

Se consideriamo in particolare il mondo dell'educazione, «la comunicazione e la relazione sono momenti imprescindibili della vita scolastica» (Locatello & Meloni, 2003, p. 23): l'educazione non può esistere senza la comunicazione e la comunicazione non esiste senza la relazione.

2 Spunti teorici del percorso didattico

Il progetto qui presentato è legato all'ambito *Geometria* e all'aspetto di competenza *Comunicare e argomentare* previsto dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022).

La capacità di comunicare e argomentare è ormai concordemente riconosciuta a livello nazionale ed europeo come un'abilità trasversale fondamentale applicabile a diversi ambiti cognitivi e professionali e pertanto da sviluppare lungo tutto il percorso scolastico e formativo. Si tratta di una competenza chiave non solo per l'apprendimento in generale, ma anche più specificamente nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica, essendo l'apprendimento della matematica e le competenze linguistico-comunicative in stretta correlazione (si veda, ad esempio, Demartini & Sbaragli, 2022).

Anche rilevazioni standardizzate effettuate a livello sia nazionale sia internazionale hanno evidenziato che le difficoltà incontrate dagli studenti in alcuni item sono riconducibili non tanto all'ambito disciplinare specifico, quanto piuttosto a richieste comunicative, come descrivere, spiegare, argomentare, definire ecc. (Sbaragli & Franchini, 2022).

Sapersi esprimere efficacemente significa anche saper utilizzare in forma orale e scritta un registro linguistico adatto alle situazioni e a chi ascolta e, per quanto concerne l'ambito specifico della matematica, acquisire gradualmente il linguaggio specifico di una disciplina. Anche trovare strategie per suscitare e mantenere l'attenzione di chi ascolta è parte di una comunicazione efficace.

Inoltre, per comunicare e interagire con gli altri non basta solo sapersi esprimere, perché è necessario anche saper ascoltare: ascoltare senza distrarsi, per imparare qualcosa, per essere in grado di fare/eseguire operazioni dopo avere letto/ascoltato le indicazioni di lavoro, ascoltare per capire che cosa pensa o propone una persona o di che cosa ha bisogno, lasciando anche agli altri lo spazio per esprimersi.

1. *Matematicando* è un gruppo di docenti affiliato al Centro di competenze didattica della matematica (DDM). Durante l'anno si incontra regolarmente per approfondire tematiche relative alla didattica della matematica, e per progettare e sperimentare esperienze didattiche significative. Per approfondimenti si veda: https://www.matematicando.supsi.ch/.

All'interno del progetto proposto, i ragazzi si sono immersi in un ricco contesto comunicativo-relazionale fatto di mansioni significative: preparare video didattici, le relative schede di accompagnamento, gestire le videochiamate interclasse e le attività di gruppo. Tutto ciò li ha naturalmente spinti a comunicare, sia oralmente, sia per iscritto, per essere compresi da chi li ascoltava (compagni e bambini della scuola elementare). Assumendo il ruolo di insegnanti, i ragazzi hanno potuto lavorare anche sulla capacità di mediazione, facilitazione e relazione; aspetti, questi, che rientrano tra le sfaccettature della professione docente.
Inoltre, la necessità, segnalata dall'insegnante, di fornire diverse rappresentazioni per veicolare informazioni e concetti e per adeguarsi alle necessità e alle caratteristiche di allievi diversi, ha indirizzato i ragazzi a un uso di principi dell'*Universal Design for Learning* (Savia, 2016). Senza entrare nel dettaglio, è sufficiente ricordare che tale approccio promuove un modello flessibile di progettazione didattica, capace di rispettare le differenze individuali e i punti di forza di tutti gli allievi; si prefigge di stabilire, già dall'inizio della progettazione, alcuni adattamenti ai curricoli in modo da renderli più rispondenti alle necessità degli allievi che manifestano esigenze particolari e, allo stesso tempo, che possano costituire delle opportunità per tutti (Cottini, 2019). Per raggiungere questi obiettivi, l'*Universal Design for Learning* sostiene l'importanza di una differenziazione a priori che tiene conto di tre livelli di diversificazione, fornendo molteplici mezzi di coinvolgimento, di rappresentazione, e di azione ed espressione.
La produzione di video didattici ben si presta ad attività di esercizio della competenza trasversale *tecnologia e media* (DECS, 2022). Gli alunni possono apprendere le prime regole di base nella produzione di documenti creati in ambienti multimediali, iniziando così un percorso che riguarda l'uso consapevole delle tecnologie e la messa in campo di aspetti di competenza significativi. Per progettare e produrre un video, infatti, è necessario ricercare, condividere e organizzare informazioni in forma di testi e di immagini, adeguare il registro linguistico al destinatario per veicolare in modo efficace il proprio messaggio comunicativo, conoscere le leggi vigenti inerenti al diritto d'autore.
Infine, il progetto vuole contribuire alla creazione di una continuità di lavoro fra scuola elementare e scuola media, molto auspicata dall'implementazione del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2022). A tale continuità, ben si prestano i contenuti del percorso sperimentato: infatti, la classificazione dei triangoli in base alle lunghezze dei lati si inizia in terza elementare e si riprende e approfondisce in prima media.

3 Il percorso

3.1 Il gruppo di lavoro

Nel progetto sono state coinvolte quattro classi: due di prima media (classi I C e I D) di Minusio e due di terza elementare (III E di Solduno e III A di Locarno), ognuna formata da circa 18-19 allievi. Le classi erano particolarmente eterogenee, dal punto di vista sia delle competenze matematiche, sia di quelle trasversali. In una delle due classi di scuola elementare vi era un bambino con bisogni educativi speciali, seguito da un'operatrice pedagogica per l'integrazione, e un'allieva alloglotta, non ancora capace di comprendere e di esprimersi bene nella lingua italiana; nell'altra classe di scuola elementare vi erano tre allievi con bisogni educativi speciali, seguiti da un'operatrice pedagogica per l'integrazione, e un bambino con deficit dell'attenzione.
Oltre alla docente di matematica delle due classi di prima media (autrice dell'articolo), hanno partecipato al progetto i due docenti titolari delle classi di scuola elementare III E di Solduno (Anna Zaninelli) e III A di Locarno (Matteo Morandi) e, in fase di sintesi dell'esperienza, i docenti di italiano delle due classi di prima media (Lidia Cadamuro e Ivan Lebic).

3.2 Quadro organizzativo

La definizione del percorso, sia in termini di traguardi di competenza sia in termini di attività, è avvenuta all'interno della cornice del gruppo *Matematicando*. I tre docenti implicati per tutta la durata della sperimentazione fanno tutti parte del gruppo e hanno sfruttato le numerose occasioni di incontro come momenti di progettazione e aggiornamento sulle difficoltà incontrate e sulle possibili regolazioni, nonché come occasioni di verifica e confronto sul graduale sviluppo dell'esperienza in itinere e per effettuare un bilancio finale dell'esperienza vissuta. Tutto ciò ha costituito una positiva esperienza di lavoro interdisciplinare.
Le attività in classe con i ragazzi di scuola media sono iniziate a gennaio 2022 e si sono protratte fino alla fine del semestre, articolandosi in numerose lezioni di laboratorio di matematica, a cadenza di una/due ore settimanali, oltre alle ore di lavoro di gruppo con i bambini della scuola elementare.
I vari momenti di lavoro dei ragazzi delle medie si sono svolti nell'aula di matematica (creazione dei materiali per l'itinerario didattico, videochiamate) e in aula Magna (visione dei video e attività di gruppo con le classi di scuola elementare).
I bambini delle elementari hanno effettuato le attività proposte in parte nelle loro aule con i rispettivi insegnanti, in parte nell'aula Magna della scuola media di Minusio (visione dei video, attività di gruppo con i ragazzi delle medie, attività alle postazioni di gioco).

3.3 Programmazione e avvio delle attività

In fase di progettazione, si è scelto di lavorare sulla classificazione dei triangoli in base ai lati e sulla scoperta delle condizioni di esistenza per questi poligoni. Una volta deciso il tema disciplinare da trattare, gli incontri della docente di matematica di scuola media con i due docenti di scuola elementare sono stati dedicati alle seguenti azioni:

- Scambio reciproco di informazioni sui traguardi di apprendimento e sulle competenze matematiche da promuovere e sviluppare in prima media e in terza elementare.
- Individuazione delle caratteristiche del percorso in relazione alle coordinate didattico-pedagogiche esplicitate nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese, in particolare:
  - la competenza trasversale da promuovere e potenziare nelle quattro classi (*comunicare*);
  - l'ambito e il processo cognitivo idonei per una trattazione in continuità tra scuola media e scuola elementare (*geometria, comunicare e argomentare*);
  - i traguardi specifici di apprendimento di matematica per gli allievi di terza elementare e per quelli di prima media (Allegato 1).
- Definizione puntuale del percorso con il quale far assumere agli allievi delle medie il ruolo di docenti nei confronti dei bambini della scuola elementare, comprese le modalità comunicative verso cui orientare le scelte dei ragazzi di prima media (realizzazione di due video didattici per ogni classe e relative schede di accompagnamento alle attività).

Una volta delineati gli aspetti sopra esposti, il progetto è stato proposto agli allievi di prima media attraverso la domanda con cui è iniziato questo articolo: «Vi piacerebbe calarvi nei panni del docente e preparare un itinerario didattico da proporre a dei bambini di terza elementare?».
Sono stati quindi spiegati in termini semplici i contenuti e gli apprendimenti matematici da proporre ai bambini delle elementari:
- riconoscere e classificare i triangoli in base alle misure di lunghezza dei lati;
- conoscere le condizioni di esistenza di questi poligoni.

Gli allievi hanno avuto a disposizione i laptop della sede e una telecamera esterna mobile per l'ideazione e la registrazione dei video, insieme a diverso materiale di cartoleria per la preparazione delle schede e dei giochi didattici da proporre.
I kit magnetici usati come supporto all'itinerario didattico per le scuole elementari (cinque kit, ognuno

formato da trentuno legnetti cilindrici tagliati a lunghezze apposite e da sessantadue sfere magnetiche) sono stati costruiti dalla docente di matematica, dopo discussione comune con gli allievi e con i docenti coinvolti nel progetto. La **Figura 1** mostra alcuni triangoli assemblati con il kit. Si noti come si è voluto utilizzate uno stesso colore per legnetti della stessa lunghezza per rendere immediatamente visibile questa proprietà per i lati dei triangoli da costruire o costruiti.

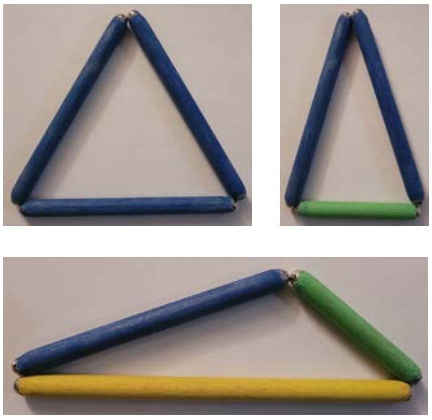


Figura 1. Tre triangoli assemblati con il kit.

A ciascuna delle due classi di terza elementare è stata abbinata una classe di prima media in funzione della disponibilità oraria dei docenti di scuola elementare e dell'orario settimanale dei rispettivi allievi.

3.4 Descrizione delle attività

Per entrambe le classi di scuola media il percorso si è svolto secondo le sei fasi descritte di seguito.

3.4.1 Prima fase: preparazione di disegni e di fotografie nelle quali individuare triangoli nascosti

Inizialmente i ragazzi delle medie hanno discusso tra loro sul modo migliore per impostare le prime lezioni e coinvolgere i bambini delle elementari; dopo un confronto, hanno deciso di proporre loro alcune attività semplici e concrete: ricercare e riconoscere i triangoli in oggetti della quotidianità e in disegni appositamente realizzati. Gli allievi si sono poi suddivisi in diversi gruppi e hanno realizzato alcuni semplici materiali di lavoro per i bambini: fotografie (**Figura 2**) e disegni (**Figura 3**) contenenti rappresentazioni di diverse forme geometriche, tra le quali individuare i triangoli nascosti.

Figura 2. Ricerca dei triangoli: consegna (a sinistra) ed esempio di fotografie (a destra).

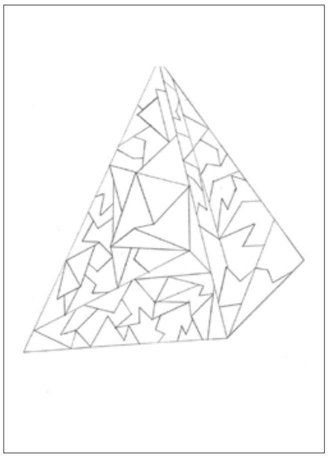


Figura 3. Ricerca dei triangoli: consegna (a sinistra) ed esempio di disegno (a destra).

Successivamente, tra tutti i materiali prodotti, hanno selezionato quelli ritenuti più significativi e adatti da proporre ai bambini durante i primi approcci (Allegato 2 dalla classe I C, Allegato 3 dalla classe I D).

3.4.2 Seconda fase: videochiamata conoscitiva e spiegazione del percorso comune

Data l'impossibilità di trovarsi in presenza per via delle restrizioni dovute al Covid19, successivamente sono state effettuate due videochiamate usando Microsoft Teams, una per ogni classe, per fare conoscere tra loro i ragazzi coinvolti nel progetto e per spiegare ai bambini di scuola elementare che cosa avrebbero fatto insieme.

Anche gli studenti delle elementari si sono preparati per l'incontro, e hanno proposto ai compagni più grandi degli indovinelli per presentarsi e far conoscere i propri nomi. La III E ha messo alla prova i ragazzi della I C proponendo anche un problema geometrico, dal titolo "Puzzle di triangoli (I)", tratto dalla Prova 1 del *28° Rally matematico transalpino.*[2] La consegna del problema era di cercare un accostamento di triangoli in modo da ottenere il perimetro maggiore possibile. La Figura 4 mostra la soluzione proposta dagli allievi della I C.

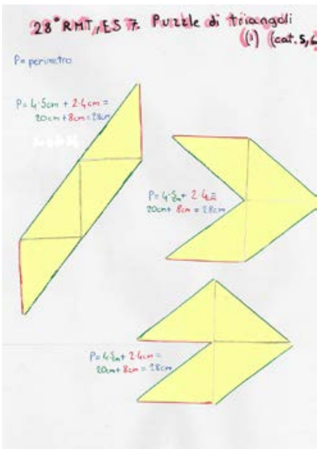


Figura 4. Soluzione del problema "Puzzle di triangoli (I)" tratto dal 28° Rally matematico transalpino.

2. L'Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT) è «un'associazione culturale il cui obiettivo è promuovere la risoluzione di problemi per migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica tramite un confronto fra classi e contribuire alla formazione degli insegnanti e alla ricerca in didattica della matematica tramite le sue analisi e i suoi dati raccolti nel campo della risoluzione di problemi». Per approfondimenti si veda: https://armtint.eu/.

I ragazzi delle medie hanno poi spiegato i ruoli che avrebbero assunto e dato indicazioni su come utilizzare i primi materiali di lavoro, consegnati in precedenza ai docenti di scuola elementare e distribuiti ai bambini per l'occasione.
Le schede con immagini e disegni di triangoli da individuare sono state completate dai bambini e corrette successivamente dai ragazzi delle medie.
La **Figura 5** mostra due schede, una di fotografie e una con un disegno, completate da bambini delle elementari e corrette da allievi delle medie.

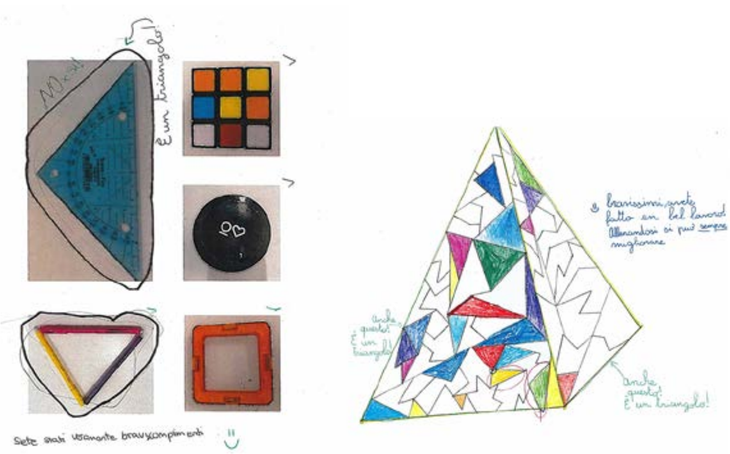


Figura 5. Due esempi di schede corrette dagli allievi delle medie.

Dopo la prima videochiamata, gli insegnanti hanno raccolto le prime impressioni espresse per iscritto dai rispettivi allievi.

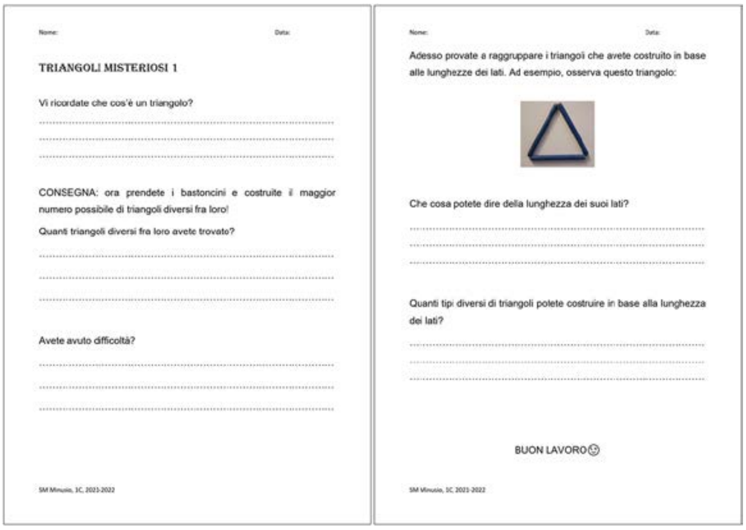
3.4.3 Terza fase: registrazione di due video e preparazione delle schede di accompagnamento

Questa fase rappresenta il cuore del percorso e consiste nella elaborazione dei video e delle schede di accompagnamento da parte degli allievi di scuola media con la supervisione dell'insegnante di matematica. L'ideazione e la realizzazione dei video, delle schede e delle rispettive soluzioni sono state particolarmente impegnative: i ragazzi hanno dovuto stabilire la sequenza logica delle attività da proporre, adattare il registro linguistico-comunicativo in modo da renderlo comprensibile ai bambini di terza elementare, e rendere accattivanti e stimolanti i messaggi e le sfide proposte nei video introduttivi alle attività pratiche.
I ragazzi delle medie si sono suddivisi in quattro gruppi di interesse per ogni classe: due gruppi per l'ideazione e registrazione dei due video (uno per la classificazione dei triangoli e uno per la condizione di esistenza di questi poligoni) e due gruppi per la preparazione delle rispettive schede di accompagnamento (dispense per i bambini e rispettive soluzioni).
A livello di contenuti trattati, i video delle due classi sono sostanzialmente equivalenti: il primo video mostra il kit magnetico e invita i bambini a usarlo per scoprire quanti triangoli diversi fra loro riescono a costruire, il secondo chiede di scoprire se è possibile costruire un triangolo con qualsiasi lunghezza dei lati. La **Figura 6** e la **Figura 7** mostrano alcune immagini tratte dai video di entrambe le classi.

Figura 6. Due immagini estratte dal primo video (kit magnetico e prima sfida).

Figura 7. Due immagini estratte dal secondo video (classificazione dei triangoli e seconda sfida).

I video sono visionabili negli Allegati 4a-4b (dalla classe I C) e negli Allegati 5a-5b (dalla classe I D). Anche il contenuto delle schede delle due classi è simile: le schede abbinate al primo video contengono domande che portano alla scoperta della classificazione dei triangoli in base alla lunghezza dei lati; le schede del secondo video permettono di scoprire le condizioni di esistenza di questi poligoni. La **Figura 8** e la **Figura 9** mostrano alcune delle schede del percorso preparato dalla I C per gli allievi della III E.



Nome: Data:

TRIANGOLI MISTERIOSI 1

Vi ricordate che cos'è un triangolo?

CONSEGNA: ora prendete i bastoncini e costruite il maggior numero possibile di triangoli diversi fra loro!

Quanti triangoli diversi fra loro avete trovato?

Avete avuto difficoltà?

SM Minusio, 1C, 2021-2022

Nome: Data:

Adesso provate a raggruppare i triangoli che avete costruito in base alle lunghezze dei lati. Ad esempio, osserva questo triangolo:

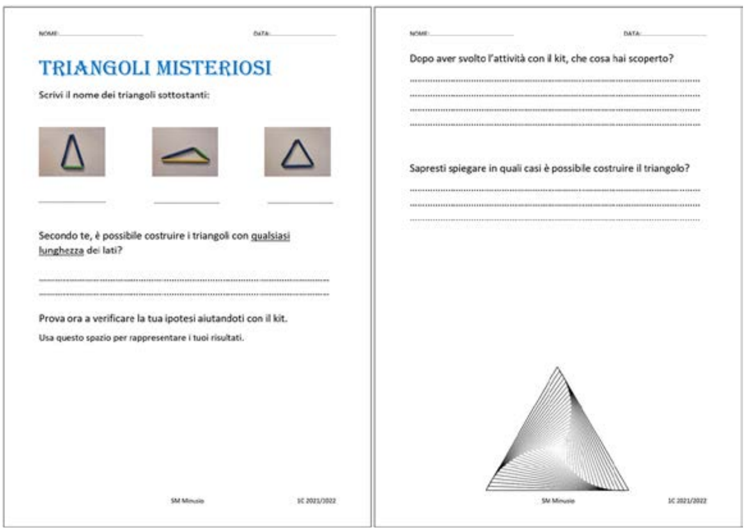
Che cosa potete dire della lunghezza dei suoi lati?

Quanti tipi diversi di triangoli potete costruire in base alla lunghezza dei lati?

BUON LAVORO☺

SM Minusio, 1C, 2021-2022

Figura 8. Due schede abbinate al primo video (classe I C).



NOME: DATA:

TRIANGOLI MISTERIOSI

Scrivi il nome dei triangoli sottostanti:

Secondo te, è possibile costruire i triangoli con qualsiasi lunghezza dei lati?

Prova ora a verificare la tua ipotesi aiutandoti con il kit.

Usa questo spazio per rappresentare i tuoi risultati.

SM Minusio 1C 2021/2022

NOME: DATA:

Dopo aver svolto l'attività con il kit, che cosa hai scoperto?

Sapresti spiegare in quali casi è possibile costruire il triangolo?

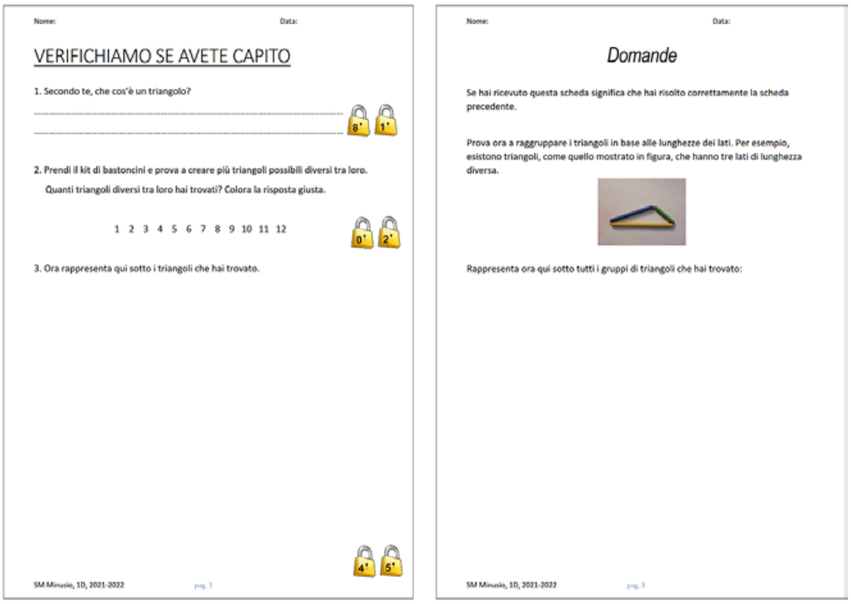
SM Minusio 1C 2021/2022

Figura 9. Due schede abbinate al secondo video (classe I C).

I ragazzi della I D hanno scelto di inserire le attività all'interno di una cornice motivazionale ispirata all'*escape room*;[3] questo ha reso il percorso preparato dalla I D più oneroso, in termini di complessità di progettazione e di preparazione dei materiali, rispetto a quello dell'altra classe. Alla classe elementare abbinata (III A) è stato mostrato l'arrivo di un forziere contenente una pergamena, con la richiesta di aiuto per liberare *Triangolino*, il protagonista della storia, rapito da *Cerchiulus*. La **Figura 10** mostra i personaggi principali della storia.

Figura 10. Disegni che raffigurano i personaggi di *Triangolino* (a sinistra), di *Cerchiulus* (a destra) e il forziere con la pergamena (al centro).

I bambini della III A dovevano rispondere quindi a una serie di domande in successione; le risposte esatte avrebbero consentito l'accesso a step successivi, fino alla liberazione di *Triangolino*. La **Figura 11** e la **Figura 12** mostrano alcune schede preparate dalla I D.



Nome: Data:

VERIFICHIAMO SE AVETE CAPITO

1. Secondo te, che cos'è un triangolo?

8° 1°

2. Prendi il kit di bastoncini e prova a creare più triangoli possibili diversi tra loro.
Quanti triangoli diversi tra loro hai trovati? Colora la risposta giusta.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

0° 2°

3. Ora rappresenta qui sotto i triangoli che hai trovato.

4° 5°

SM Minusio, 1D, 2021-2022 pag. 1

Nome: Data:

Domande

Se hai ricevuto questa scheda significa che hai risolto correttamente la scheda precedente.

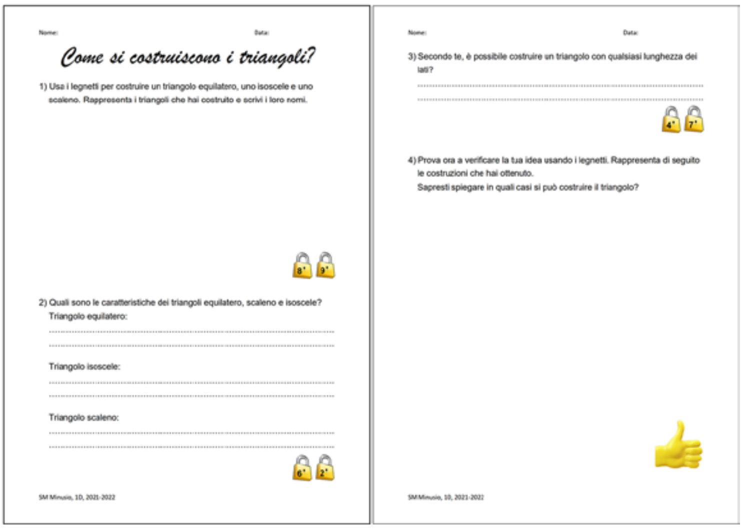
Prova ora a raggruppare i triangoli in base alle lunghezze dei lati. Per esempio, esistono triangoli, come quello mostrato in figura, che hanno tre lati di lunghezza diversa.

Rappresenta ora qui sotto tutti i gruppi di triangoli che hai trovato:

SM Minusio, 1D, 2021-2022 pag. 3

Figura 11. Due schede abbinate al primo video (classe I D).

3. L'escape room è un gioco di logica in cui i partecipanti, rinchiusi in una stanza, devono trovare una via di uscita risolvendo una serie di enigmi in successione e per fare questo devono collaborare fra loro.



Nome: Data:

Come si costruiscono i triangoli?

1) Usa i legnetti per costruire un triangolo equilatero, uno isoscele e uno scaleno. Rappresenta i triangoli che hai costruito e scrivi i loro nomi.

8' 9'

2) Quali sono le caratteristiche dei triangoli equilatero, scaleno e isoscele?
Triangolo equilatero:
Triangolo isoscele:
Triangolo scaleno:

6' 2'

SM Minusio, 1D, 2021-2022

Nome: Data:

3) Secondo te, è possibile costruire un triangolo con qualsiasi lunghezza dei lati?

4' 7'

4) Prova ora a verificare la tua idea usando i legnetti. Rappresenta di seguito le costruzioni che hai ottenuto.
Sapresti spiegare in quali casi si può costruire il triangolo?

SM Minusio, 1D, 2021-2022

Figura 12. Due schede abbinate al secondo video (classe I D).

Le schede sono visionabili nell'Allegato 6 (classe I C) e nell'Allegato 7 (classe I D).
Una volta pronti i video e le schede, i ragazzi di scuola media hanno preparato una serie di scatole a forma di prisma quadrangolare (un esempio è mostrato in Figura 13) per conservare i bastoncini del kit magnetico preparati dalla docente di matematica. È stata dunque l'occasione per introdurre i poliedri, in particolare i prismi e il loro sviluppo in un contesto reale.

Figura 13. Esempi di scatole a forma di prisma.

3.4.4 Quarta fase: primo incontro in presenza (visione video e attività con kit magnetico e schede)

Ogni classe di prima media ha avuto un incontro in presenza presso la scuola media di Minusio con i bambini delle elementari ad essa abbinati (la Figura 14 e la Figura 15 mostrano alcuni momenti di lavoro).

Figura 14. Primo incontro in presenza: un momento di lavoro.

Figura 15. Primo incontro in presenza: un momento di lavoro.

Nel corso dell'incontro, i bambini hanno visionato il primo video, poi sono stati suddivisi in gruppi di lavoro. A ogni gruppo sono stati assegnati diversi allievi di prima media quali docenti responsabili. Ai ragazzi delle medie è stato chiesto di assumere il ruolo di docenti, di supportare i bambini nelle attività, in particolare i più fragili, di rispondere alle loro domande, ponendo a loro volta domande di rilancio, evitando però di dire «Si fa così» o di fornire loro direttamente le risposte corrette alle domande delle schede. I ragazzi hanno dovuto anche gestire i bambini nel comportamento, mantenendo l'ordine nei vari gruppi di lavoro. I due docenti di scuola elementare e la docente di matematica hanno assunto il ruolo di supervisori e di osservatori esterni.
I bambini della classe III E hanno avuto il tempo di visionare entrambi i video a loro destinati e di portare quasi a termine entrambe le attività proposte. I bambini della classe III A hanno potuto visionare un solo video nel corso della mattinata, poiché l'itinerario proposto, ispirato all'escape room, era un po' più articolato e richiedeva più tempo per verificare la correttezza delle risposte. In questo caso, il secondo video è stato visionato in separata sede, con il supporto del docente.

3.4.5 Quinta fase: resoconto scritto delle attività in diverse modalità

A questo punto del percorso, i ragazzi delle medie si sono intervistati fra loro (con domande predisposte in precedenza) nelle ore di laboratorio di italiano e hanno preparato un resoconto di quanto fatto per questo progetto e del loro vissuto personale. La classe I C ha steso una sintesi in forma di articolo di giornale (Allegato 8, estratto in Figura 16); la classe I D ha trascritto parte del contenuto delle interviste per evidenziare le difficoltà riscontrate nel lavoro (Allegato 9, estratto in Figura 17), ha scritto due lettere alla docente di matematica per dare dei suggerimenti di miglioramento prima di riproporre ad altre classi queste attività (Allegato 10, estratto in Figura 18) e ha creato dei fumetti per illustrare i punti di forza del progetto (Allegato 11, estratto in Figura 18).

NUMERO 6 SCUOLA MEDIA MINUSIO GIUGNO 2022

Il corriere di Minusio

Redazione: classe I C *Docente d'italiano: Ivan Lebic* *Docente di matematica: Sara Cataldi*

MATEMATICANDO

Edizione straordinaria

Si è svolta anche quest'anno una nuova edizione di *Matematicando*, l'attività in cui i nostri allievi di prima media apprendono insegnando la matematica ai loro compagni più giovani. Ecco l'esclusiva intervista realizzata dai nostri corrispondenti nella classe I C che ha partecipato attivamente all'evento e che si è gentilmente concessa ai nostri microfoni.

Figura 16. Estratto della sintesi della classe I C in forma di articolo di giornale.

<u>IL PROGETTO MATEMATICANDO 2021-2022</u>

La classe 1D ha creato un resoconto creativo dell'esperienza che ha vissuto durante questo progetto. Gli allievi hanno lavorato in gruppi per esprimere, tramite diverse tipologie testuali, i loro apprezzamenti, le loro difficoltà e alcuni suggerimenti per poter migliorare questo progetto in vista di un prossimo anno!

1. LE DUE INTERVISTE CHE MOSTRANO LE DIFFICOLTÀ INCONTRATE DURANTE IL PROGETTO

<u>PRIMO GRUPPO</u>

1. Ci sono state molte difficoltà nella registrazione?
Sì, per prima cosa c'erano molti rumori sia esterni che interni.
Inoltre, tante volte si sbagliava a leggere, e si doveva ricominciare più volte. Oppure il computer non registrava bene e si doveva ricominciare la registrazione.

Figura 17. Estratto di una delle interviste fra pari (classe I D).

Allievi della 1D
Via Vignascia 1
6648 Minusio

Signora Maestra Cataldi
Via Vignascia 1
6648 Minusio

Minusio, 12 maggio 2022

Gentile Signora maestra Cataldi,

Le scriviamo questa lettera per darle dei consigli per dei miglioramenti per una sua futura classe che farà il progetto MATEMATICANDO.

Le consigliamo innanzitutto, per il prossimo progetto, di eseguire la presentazione ai bambini con più giochi in modo da farli divertire, interessare e memorizzare gli argomenti legati al tema dei triangoli, per esempio, dei REBUS o dei CRUCIVERBA o dei GIOCHI DI RUOLO, rendendo la matematica più ludica e divertente si può imparare più facilmente.

Come secondo consiglio, vorremmo proporle più incontri con le classi di SE, per conoscersi meglio e costruire un rapporto di fiducia, per poter lavorare meglio in seguito.

Da ultimo, le proponiamo di estendere i tempi della fase di preparazione, per avere più tempo per controllare meglio, renderlo più interessante ecc.
Speriamo che in futuro i nostri consigli potranno esserle d'aiuto, per rendere il progetto ancora più intrigante.

Cordiali Saluti.
Gli allievi della 1D

Figura 18. Una lettera scritta alla docente di matematica (a sinistra) e uno dei fumetti (a destra) della classe I D.

3.4.6 Sesta fase: secondo incontro in presenza (mattinata di giochi di consolidamento sui triangoli)

Per consolidare quanto appreso dai bambini di scuola elementare, i ragazzi delle medie hanno ideato e costruito dei giochi in previsione dell'incontro finale. Gli allievi si sono suddivisi in gruppi di interesse e hanno creato dieci giochi diversi: Paint, Domino, Sudoku dei triangoli, Parole nascoste, Linotipie, Memory, Dobble dei triangoli, Tombola, Gioco dell'oca, Disegno dettato, Cerchiulus e Tangram. La Figura 19 e la Figura 20 mostrano due giochi: Domino e Disegno dettato.

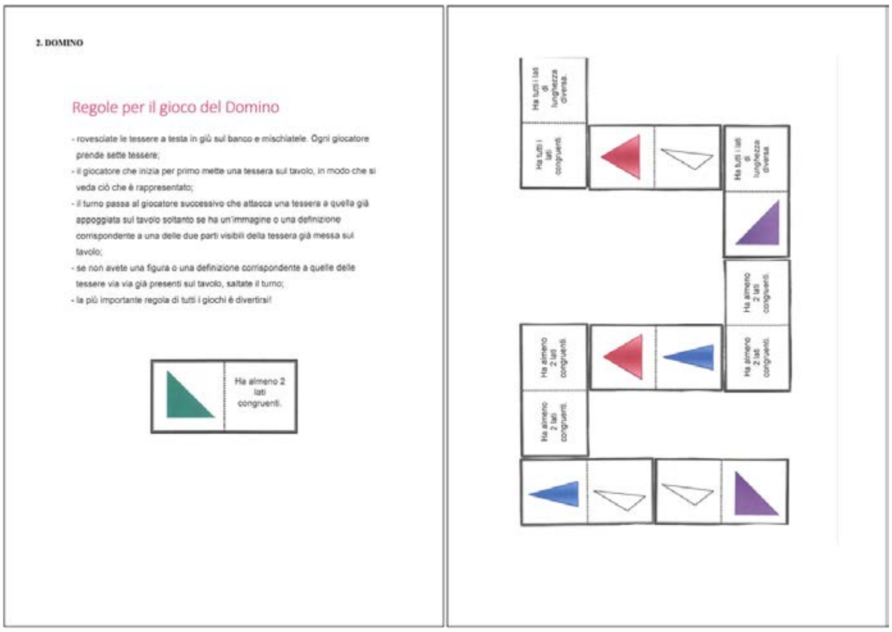


Figura 19. Gioco del Domino: regole (a sinistra) e alcune tessere (a destra).

Figura 20. Gioco del Disegno dettato: disegno (a sinistra) e dettato per il disegno (a destra).

Alcuni esempi dei materiali relativi ai dieci giochi sono visionabili nell'Allegato 12.[4]

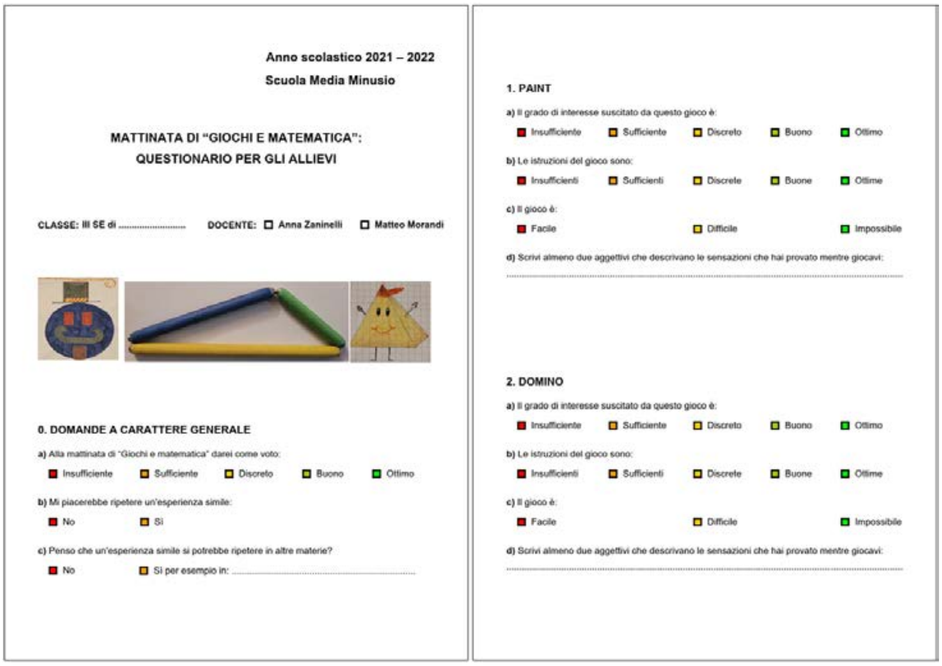
A inizio giugno, alla presenza di altri docenti di scuola media ed elementare e di esperti esterni di matematica, si è tenuto nell'aula Magna della sede di Minusio l'ultimo incontro con le quattro classi coinvolte nel progetto. I bambini di terza elementare sono stati suddivisi in piccoli gruppi e, a rotazione, hanno esplorato i giochi sotto la supervisione dei compagni di scuola media che li avevano creati (Figura 21 e Figura 22).

4. Per richiedere il materiale completo, contattare via email l'autrice dell'articolo.

Figura 21. Vista d'insieme delle attività in aula Magna (a sinistra) e dettagli di due postazioni di gioco (a destra, Memory e Dobble dei triangoli).

Figura 22. Dettagli di una postazione di gioco (a sinistra, Paint) e vista d'insieme delle attività in aula Magna (a destra).

Ad ogni postazione di gioco i bambini delle elementari sono stati invitati a compilare un semplice questionario (Allegato 13, estratto in Figura 23), preparato in precedenza dalla docente di matematica, autrice del presente articolo, per esprimere il loro gradimento e il grado di interesse man mano che giocavano, per valutarne la facilità/difficoltà e la chiarezza delle istruzioni. Infine, veniva chiesto loro di commentare con due aggettivi le sensazioni provate alle diverse postazioni di gioco e lasciare un messaggio per chi le aveva organizzate.



Anno scolastico 2021 – 2022
Scuola Media Minusio

MATTINATA DI "GIOCHI E MATEMATICA":
QUESTIONARIO PER GLI ALLIEVI

CLASSE: III SE di .... DOCENTE: ☐ Anna Zaninelli ☐ Matteo Morandi

0. DOMANDE A CARATTERE GENERALE

a) Alla mattinata di "Giochi e matematica" darei come voto:
☐ Insufficiente ☐ Sufficiente ☐ Discreto ☐ Buono ☐ Ottimo

b) Mi piacerebbe ripetere un'esperienza simile:
☐ No ☐ Sì

c) Penso che un'esperienza simile si potrebbe ripetere in altre materie?
☐ No ☐ Sì per esempio in: ....

1. PAINT

a) Il grado di interesse suscitato da questo gioco è:
☐ Insufficiente ☐ Sufficiente ☐ Discreto ☐ Buono ☐ Ottimo

b) Le istruzioni del gioco sono:
☐ Insufficienti ☐ Sufficienti ☐ Discrete ☐ Buone ☐ Ottime

c) Il gioco è:
☐ Facile ☐ Difficile ☐ Impossibile

d) Scrivi almeno due aggettivi che descrivano le sensazioni che hai provato mentre giocavi:
....

2. DOMINO

a) Il grado di interesse suscitato da questo gioco è:
☐ Insufficiente ☐ Sufficiente ☐ Discreto ☐ Buono ☐ Ottimo

b) Le istruzioni del gioco sono:
☐ Insufficienti ☐ Sufficienti ☐ Discrete ☐ Buone ☐ Ottime

c) Il gioco è:
☐ Facile ☐ Difficile ☐ Impossibile

d) Scrivi almeno due aggettivi che descrivano le sensazioni che hai provato mentre giocavi:
....

Figura 23. Estratto di due pagine del questionario.

La mattinata si è conclusa con una piacevole merenda per tutti, seguita da un importante momento di condivisione orale delle impressioni generali sul lavoro svolto. Ad attività conclusa, ai ragazzi di scuola media è stato chiesto di scrivere un bilancio personale sul progetto esprimendo le loro riflessioni, le emozioni, il vissuto personale.

3.5 Risultati e riscontri della sperimentazione

I paragrafi che seguono intendono proporre alcune considerazioni rispetto a tre temi: gli aspetti comunicativi attivati nel percorso, il ruolo del docente vissuto dai ragazzi delle medie, il vissuto emotivo degli alunni delle elementari e delle medie. Queste considerazioni si avvalgono di osservazioni e percezioni da parte dei docenti, commenti degli alunni estrapolati dalle attività in classe, elaborati scritti derivati dalle attività della fase 5 e della fase 6.

3.5.1 Gli aspetti comunicativi attivati nel percorso

Durante tutto il percorso, i ragazzi delle medie sono stati stimolati nella riflessione critica riguardo al proprio modo di comunicare. Ad esempio, durante la prima fase di videochiamata, i ragazzi si sono chiesti inizialmente: Come ci presentiamo? Come spieghiamo ai bambini il nostro progetto e che cosa vorremmo fare con loro, in modo da farci capire più facilmente possibile? Come indicare gli errori sui disegni senza demotivare i bambini? Quali commenti scrivere? Queste domande hanno fatto sì che i ragazzi si immergessero in un contesto vivamente comunicativo, in cui imparare a discutere e confrontarsi tra loro, ad ascoltare le proposte dei compagni e a formulare e argomentare in modo chiaro le proprie.
In alcuni casi la discussione si è rivelata di difficile chiusura, tanto da condurre gli allievi ad optare per votazioni interne al gruppo; ad esempio, alla domanda se ci fossero state difficoltà nella scelta della cornice motivazionale in cui inserire il percorso, la classe I D ha dichiarato:

> «Sì, è stato un po' difficile eravamo in tanti e avevamo molte idee. Quindi non era facile mettersi d'accordo. Infine, tramite una votazione siamo riusciti a scegliere il tema dell'escape room».

Inoltre, durante la fase di creazione dei video sui triangoli, a intervalli di tempo regolari, gli allievi di ogni gruppo avevano il compito di comunicare e mostrare ai compagni della propria classe quanto elaborato. Questi momenti sono stati preziosi per ricevere un riscontro sul lavoro svolto e possibili suggerimenti di modifica e hanno permesso a tutti di allenarsi, a livello comunicativo, sulla pratica del feedback. Nei singoli gruppi, infatti, vi sono stati scambi vivaci che hanno portato a diverse revisioni dei materiali prodotti, sempre nell'ottica di facilitare l'accesso ai contenuti.

Anche le attività in presenza con i bambini delle elementari hanno offerto l'occasione per riflessioni personali riguardanti aspetti comunicativi. Alcuni ragazzi, ad esempio, hanno assunto maggiore consapevolezza dei propri mezzi espressivi, come emerge da questa riflessione di un'allieva di I D:

> «Quando certi bambini mi facevano delle domande io però non sempre capivo perché quando mi spiegavano lasciavano via dei particolari di cui erano convinti che io li conoscevo. Questo mi ha fatto capire che anche io quando parlo a volte non specifico l'argomento e quindi chi mi ascolta non capisce».

Durante la fase di rielaborazione (fase 5) dell'esperienza, infine, il lavoro interdisciplinare con i docenti di italiano ha introdotto gli studenti all'uso di altre e diversificate tipologie testuali, consentendo loro di raccontare l'esperienza fatta e di esprimere le emozioni e il vissuto personale, utilizzando ciascuno la forma espressiva più congeniale.
Ciò ha consentito di consolidare e diversificare il percorso di arricchimento e potenziamento delle abilità comunicative.

3.5.2 Il ruolo di docente vissuto dai ragazzi
L'aspetto che ha maggiormente caratterizzato il percorso è consistito nell'occasione data ai ragazzi delle medie di vivere il ruolo di docenti. Questo ha obbligato gli alunni a porsi questioni legate alla progettazione didattica, oltre che ad affrontare questioni di carattere tecnico e di gestione del gruppo classe.
Per quanto riguarda le prime questioni, durante la fase di definizione dei contenuti da trattare e della sequenza logica con cui presentarli, i ragazzi si sono posti molte domande tipiche dell'insegnante: Che cosa vogliamo comunicare e come? Quali parole usare per rendere le domande comprensibili ai bambini, senza però imboccare le risposte? Potrebbe essere utile inserire delle immagini, e se sì, quali e dove? Come si possono rendere i messaggi e le sfide proposte nei video accattivanti, stimolanti e contemporaneamente comprensibili per i bambini delle elementari? Di fatto, i ragazzi hanno usato in modo inconsapevole diverse rappresentazioni per il concetto da veicolare e alcuni principi dell'*Universal Design for Learning* per facilitare l'accesso ai contenuti attraverso molteplici mezzi di rappresentazione. Entrambe le classi si sono adoperate per fornire molteplici mezzi di rappresentazione, sia nei video, sia nelle schede, prestando particolare attenzione al lessico usato e alla struttura e sintassi delle frasi, affinché fossero sempre di facile comprensione e accesso per tutti i bambini.
Inoltre, il fatto che la classe I D abbia inserito i contenuti matematici da veicolare nella cornice motivazionale ispirata all'escape room mostra come i ragazzi abbiano cercato il coinvolgimento e la motivazione dei bambini delle elementari, atteggiamento, questo, tipico dell'insegnante interessato a rendere le attività accattivanti per gli allievi.
Riguardo alle questioni di carattere tecnico, i ragazzi si sono principalmente confrontati con le competenze che l'insegnante mobilita nella preparazione di video per la classe e di schede di accompagnamento.
Grazie alla produzione dei video, infatti, gli allievi hanno potuto apprendere le prime regole di base nella produzione di documenti creati in ambienti multimediali (ad esempio, quali autorizzazioni devo chiedere ai partecipanti di un video prima di realizzarlo, a che cosa devo prestare attenzione quando

cerco delle immagini in rete, in quali siti cercarle ecc.), attivando così la competenza trasversale *tecnologia e media*.
I ragazzi hanno imparato che non si può fotografare qualsiasi cosa o chiunque e inserire queste foto in documenti di lavoro o in prodotti multimediali come i video, senza preoccuparsi di avere le dovute autorizzazioni. Lo stesso discorso vale se si scaricano delle immagini dalla rete: è importante verificare e rispettare le condizioni di utilizzo. Per evitare di incorrere in violazioni del *copyright* o in problemi di licenza, gli allievi hanno imparato che esistono dei siti dai quali è possibile scaricare delle immagini *free*, poiché soggette a particolari licenze (ad esempio, *Licenza Creative Commons*), o con indicazioni di utilizzo esplicitate.
In generale, la parte più complicata ha riguardato le difficoltà tecniche legate alla produzione dei video, come emerge da questi estratti dei resoconti realizzati durante la quinta fase:

> «Nel creare il PowerPoint per il video è stato difficile prendere decisioni in gruppo come la scelta degli sfondi e cosa scrivere, in che formato ecc. Inoltre, anche l'integrazione dei video nel PowerPoint ci ha creato alcune difficoltà tecniche».
>
> «Registrare un video è stato più complesso, soprattutto per le voci perché c'erano molti rumori che rendevano meno comprensibile l'audio: erano necessari il silenzio assoluto, una voce chiara e una buona dizione».

Anche preparare e ottimizzare l'impaginazione delle schede di attività non è stato banale. Con l'aiuto della docente, i ragazzi hanno scoperto che per facilitare la lettura e la comprensione di un testo, anche da parte di bambini con alcuni disturbi specifici dell'apprendimento, è opportuno seguire alcuni criteri che riguardano la lunghezza delle frasi (predicati brevi) e la scelta del layout del documento (font, dimensione e interlinea). E inoltre hanno imparato che è importante usare in modo funzionale i colori e gli spazi a disposizione. La stesura delle schede al computer, così come la preparazione di alcuni dei giochi finali di consolidamento, hanno permesso ai ragazzi di imparare alcune funzionalità di base di diversi applicativi.
Inoltre, calandosi nel ruolo di docenti, i ragazzi delle medie hanno potuto cimentarsi con le difficoltà di gestione del lavoro di gruppo e l'ordine durante le attività, come emerge da questo commento:

> «In un primo momento, è stato difficile mantenere l'ordine in classe perché tutti i bambini si sono alzati e sono corsi in tutte le direzioni. Altre volte, succedeva che un bambino non riusciva a fare un esercizio e noi l'abbiamo aiutato mentre gli altri non smettevano di fare casino».

Interessante, infine, mettere in evidenza come vi sia stata una riflessione da parte dei ragazzi riguardo al ruolo e alla professione dell'insegnante. Diversi alunni ne sottolineano gli aspetti faticosi:

> «Oggi mi sono divertito molto però penso che non farò mai il maestro. È stato un po' complicato farsi ascoltare o rispettare».
>
> «Secondo me fare il maestro è impossibile perché devi avere una pazienza infinita, è come avere tanti figli e non è per niente facile gestirli dato che ogni volta che non gli presti attenzione si mettono a parlare e non ascoltano (poi devi ripetere fino a quando non sei sicuro che abbiano capito)».
>
> «È stato difficile stare calmi visto che i bambini faticavano a capire. Alla fine, però, abbiamo fatto un lungo respiro per calmarci e abbiamo rispiegato per l'ennesima volta con grande tranquillità».

Altri allievi invece ne sottolineano le parti piacevoli legate all'interazione, o gli aspetti gratificanti:

> «Da grande voglio fare la maestra delle elementari e infatti mi è piaciuto molto insegnare (ho fatto anche amicizia con una bambina); comunque mi è piaciuto interagire con i bambini».
>
> «Una parte positiva c'è: quello che gli insegni, nella vita gli servirà. Quindi se avranno difficoltà riusciranno a superarle. Secondo me è molto faticoso ma se uno ha le capacità ne vale la pena».

3.5.3 Il vissuto emotivo degli alunni coinvolti

Tutto il percorso è stato vissuto, sia dagli alunni di scuola elementare, sia da quelli di scuola media, come un'esperienza fortemente ricca di emozioni. Ad esempio, nel momento della prima videochiamata i bambini delle elementari erano molto emozionati, ma anche attenti e desiderosi di lavorare, tanto che durante la prima attività di colorazione dei triangoli si sono impegnati molto, come testimoniano questi commenti raccolti sul campo:

> «Dobbiamo fare tutto bene, se no pensano che siamo dei piccoli imbranati. Dobbiamo stare attenti».
>
> «È bello che mi abbiano fatto i complimenti perché sono stata chiara a spiegare il rally: mi sono sentita orgogliosa!»
>
> «Hanno fatto dei disegni bellissimi, e si vede che si sono impegnati. Adesso dobbiamo impegnarci anche noi».
>
> «All'inizio avevo paura e mi tremava la voce, poi ho capito che sono dei ragazzi come noi. Parlano chiaro e si capisce quello che dicono. Sono contento di fare questa esperienza».

Anche il momento di lavoro insieme in aula magna è stato significativo. Per alcuni ragazzi delle medie è stata un'opportunità per rafforzare l'autostima:

> «All'incontro con i bambini di III A elementare mi sono sentita orgogliosa perché i bambini ci guardavano interessati e in più continuavano a fare domande sui triangoli o principalmente sul lavoro».
>
> «Nel lavoro abbiamo provato orgoglio, sia per come lavoravano i ragazzi, sia per come abbiamo loro insegnato le cose».

Altri evidenziano invece il coinvolgimento emotivo di tutti i partecipanti, grazie ai ricordi personali suscitati dai legami affettivi creati tra gli alunni di diversi ordini scolastici, come emerge da questo commento:

> «Anche io andavo a scuola a Locarno in I A, ed era bellissimo vedervi (siete così carini). È stato come tornare a essere una bambina delle elementari, con la classe decorata e mettere ancora le pantofole. Spero di rivedervi presto».

Altri, infine, sottolineano come l'esperienza di "fare il maestro" per un giorno sia stata divertente e bella:

> «Io mi sono divertito molto con i ragazzi, quando spiegavo mi sentivo a mio agio perché erano molto attenti e questa esperienza da "maestro" mi ha emozionato».
>
> «Oggi è stata una giornata bellissima. Un'esperienza indimenticabile. Fare i docenti è stato difficile ma allo stesso tempo facile».

Questo paragrafo si conclude con qualche protocollo dei bambini di terza elementare che scrivono un messaggio ai compagni di scuola media e a chi ha organizzato la mattinata di giochi in aula Magna (Figura 24).

Figura 24. Estratti della parte finale dei questionari di tre allievi delle elementari.

4 Conclusioni

Al termine delle attività, e ancora a distanza di mesi, i docenti hanno avuto riscontri positivi da parte delle allieve e degli allievi sul lavoro svolto insieme e sul raggiungimento degli obiettivi di apprendimento prefissati. Dal punto di vista dei bambini delle elementari, le attività, i materiali, i giochi, la collaborazione con i ragazzi più grandi non solo hanno suscitato il gradimento e il coinvolgimento di tutti i bambini, ma hanno favorito anche un approccio positivo e sereno alla disciplina.
Dal punto di vista dei ragazzi delle medie, sembra che il progetto abbia contribuito a far acquisire consapevolezza su quanto sia complesso ma essenziale imparare a comunicare in modo efficace, nonché a sperimentarlo concretamente in più situazioni e attraverso differenti forme comunicative.
Questa esperienza, così coinvolgente a livello motivazionale e affettivo per i bambini delle elementari,

ha avuto successo anche sotto il profilo dell'apprendimento: infatti i loro insegnanti hanno riscontrato che, a distanza di un anno, i bambini, anche quelli più in difficoltà o con bisogni educativi speciali, ricordano con piacere l'esperienza fatta e dimostrano di aver compreso e di ricordare bene quanto appreso sui triangoli nel corso del progetto. A tal riguardo, si riportano di seguito alcuni estratti dei resoconti finali dei due docenti della scuola elementare. I resoconti completi si possono consultare nell'Allegato 14.

> Maestro Matteo Morandi, classe III A:
> «I bambini della mia classe hanno raggiunto i traguardi di apprendimento, perché all'inizio della quarta elementare ho avuto modo di verificare le competenze grazie a delle prove d'entrata che l'hanno effettivamente confermato. […] I miei allievi hanno vissuto con grande entusiasmo la nostra collaborazione e ciò che più è emerso è la grande forza che ha avuto il tutoring dei bambini di scuola media. [...] L'interazione, dal mio punto di vista, è stata estremamente positiva e anche i bambini con bisogni educativi speciali hanno partecipato attivamente all'attività in quanto supportati in maniera massiccia dai ragazzi delle medie».
>
> Maestra Anna Zaninelli, classe III E:
> «Ha aiutato molto la preparazione di materiali, e di questo ringrazio la collega, che ha permesso anche ai bambini più in difficoltà di capire. Un mio allievo, seguito da un'operatrice pedagogica per l'integrazione per difficoltà grosse di apprendimento, è riuscito, manipolando più volte il materiale, a classificare in base alla lunghezza dei lati i triangoli e ha anche ritenuto i nomi e le caratteristiche dei vari tipi di triangoli.
> Durante il momento finale di gioco è stato molto interessante vedere il coinvolgimento da parte di tutti: i ragazzi delle medie si sono dimostrati molto sensibili e accattivanti e i bambini erano orgogliosi di poter "lavorare" con loro. Credo che questo tipo di esperienze permetta a tutti di crescere, di approcciarsi alla matematica (sempre molto temuta come materia) in modo più sereno».

Dunque, un'esperienza da ripetere secondo il parere concorde di allievi e docenti. Le attività svolte da tutti i partecipanti hanno contribuito a gettare le basi per la creazione di una continuità di lavoro tra scuola elementare e scuola media. Inoltre, calarsi nel nuovo ruolo ha consentito ai ragazzi della scuola media di scoprire alcune sfaccettature della professione docente.
Come si evidenzia nelle osservazioni espresse dai ragazzi, sia delle medie sia delle elementari, nelle quali esprimono le loro impressioni e il vissuto personale, l'esperienza nel suo complesso è stata accolta con entusiasmo, e ha riscosso il gradimento di tutti i ragazzi, che hanno sperimentato come imparare possa essere non solo impegnativo ma anche coinvolgente e divertente.
Aspetto questo tutt'altro che trascurabile, perché un approccio positivo alla disciplina, che coinvolga in modo favorevole la sfera affettiva, come mostra la ricerca (si vedano, ad esempio, Di Martino, 2015; McLeod & Adams, 1989) può condizionare positivamente il processo di apprendimento.

Ringraziamenti

Si ringraziano i colleghi docenti di italiano della scuola media, Lidia Cadamuro e Ivan Lebic, e della scuola elementare, Anna Zaninelli e Matteo Morandi, per l'ottima collaborazione e per l'entusiasmo dimostrato nel progetto.

Bibliografia

Cottini, L. (Ed.) (2019). *Universal Design for Learning e curricolo inclusivo.* Giunti EDU.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2022). Il processo "Comunicare e argomentare" in matematica. *Progetto "Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare – 2022".* Dipartimento formazione e apprendimento. https://www.mateval.ch/wp-content/uploads/2022/08/Il-processo-Comunicare-e-argomentare-in-matematica-.pdf

Di Martino, P. (2015). I fattori affettivi e il loro ruolo nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *38A-B*(3), 343–362.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://pianodistudio.edu.ti.ch

Locatello, S., & Meloni, G. (2003). *Apprendimento collaborativo in matematica.* Pitagora.

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving. A new perspective.* Springer-Verlag.

Savia, G. (Ed.) (2016). *Universal Design for Learning. La Progettazione Universale per l'Apprendimento per una didattica inclusiva.* Erickson.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2022). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare 2.* Dipartimento formazione e apprendimento. https://www.mateval.ch/wp-content/uploads/2023/01/Rapporto-valutazioni-standardizzate-2022.pdf

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 137 - 163, DOI: 10.33683/ddm.23.14.7

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Un paese da scoprire attraverso il gioco

Discovering a village through games

Pamela Martinetti
Scuola dell'infanzia di Avegno – Svizzera
Gruppo Matematicando, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica – SUPSI, Locarno – Svizzera

pamela.martinetti@edu.ti.ch

Sunto / L'itinerario didattico presentato in questo articolo è stato realizzato in una scuola dell'infanzia del Canton Ticino, approcciando differenti contesti di apprendimento, tra cui i più rilevanti sono lo studio d'ambiente e l'area matematica. Il focus del percorso sono i giochi, in particolare i giochi di una volta, a cui si è arrivati attraverso una serie di fasi di ricerca, di lavoro e di condivisione. Il lavoro mette in luce le competenze matematiche (e non solo) che i bambini hanno sviluppato a partire dalla scoperta, dalla riproduzione e dall'analisi dei giochi. Il percorso ha attivato anche competenze legate alla comprensione e alla produzione di testi descrittivi e regolativi, arricchiti e supportati da sequenze di immagini. Per comprenderne e spiegarne il funzionamento logico, i bambini hanno descritto i giochi svolti e ne hanno inventati di nuovi, creando le regole in forma iconica e scritta.
L'itinerario ha permesso di effettuare un passaggio dinamico dal gioco giocato alla condivisione e stesura delle regole e viceversa dalle istruzioni alla realizzazione del gioco.

Parole chiave: scuola dell'infanzia; attività laboratoriali; esperienza diretta e sensoriale nel reale; intervista; gioco.

Abstract / The didactic experience presented in this article was carried out in a kindergarten in the Canton of Ticino, approaching different learning contexts, of which the most relevant are the study of the environment and the mathematical area. The path is focused on games, in particular old-time games, introduced through several phases of research, work and sharing. The paper highlights the mathematical (and other) skills developed by the children thanks to the discovery, reproduction and analysis of the games. The path also activated skills related to understanding and producing descriptive and regulatory texts, enriched and supported by sequences of images. To understand and explain their logical functioning, the children described the games played, and invented new ones, creating the rules in iconic and written form.
The didactic experience enabled a dynamic transition from the game played to the sharing and drafting of the rules and vice versa from the instructions to the realisation of the game.

Keywords: kindergarten; mathematics laboratory; direct and sensory experience in reality; interview; game.

1 Introduzione

La conoscenza del mondo che ci circonda si costruisce non solo attraverso le esperienze concrete che riusciamo a fare nel reale, ma anche sulla base delle tradizioni, degli usi e dei racconti di chi l'ha vissuto prima di noi e ne conosce la storia. Negli anni della scuola dell'infanzia, venire in contatto con la propria eredità culturale è fondamentale per lo sviluppo di sé e della propria identità, ma anche in termini affettivi in quanto presuppone una ricerca da fare con i genitori e con i nonni, che raccontano di quando loro stessi erano bambini. Un canale efficace per ravvivare la memoria e creare un ponte tra i vissuti dell'infanzia nel passato e nel presente è quello dei giochi, strumento fondamentale per la crescita personale e sociale del bambino. Nell'itinerario didattico descritto in questo articolo si è partiti proprio dal contesto del paese e dai racconti delle esperienze familiari, specialmente dei nonni, e da questa fase esplorativa hanno letteralmente ripreso vita i giochi di una volta, che i bambini hanno potuto conoscere facendone a loro volta esperienza. Il filo logico del percorso annuale che si è sviluppato è ruotato intorno al gioco, nelle sue diverse forme, e all'uso di immagini e fotografie. Questi due elementi, il gioco e la fotografia, hanno un enorme potere evocativo che ha permesso di favorire l'attivazione e lo sviluppo delle competenze coinvolte nel gioco, in modo diretto ed esperienziale. I temi toccati, in maniera interdisciplinare tra ambiente, matematica e italiano, vanno dall'orientamento spaziale alla capacità di situarsi sia nel tempo lineare e storico sia nel tempo ciclico e nei ritmi ambientali, dalla capacità comunicativa di raccontare un'esperienza vissuta a quella più astratta di sintetizzarne il funzionamento e le regole.
La maggior parte dei giochi si è svolta all'aperto, in giro per il paese. Uscire con il gruppo ha alimentato la curiosità dei bambini e ha facilitato il coinvolgimento di tutti, permettendo loro di fare esperienza e contribuendo in modi differenti alla realizzazione del percorso in ambito logico-matematico e non solo. Fondamentale per la riuscita del progetto, dunque, è stata la *messa in contesto* che, come scrivono Bernasconi et al. (2021, p. 101): «permette all'allievo o all'allieva di dare senso, di contestualizzare, un concetto o una competenza, intrecciandolo con altre conoscenze, competenze ed esperienze di vita, ancorandolo così a una memoria a lungo termine».

2 La valenza didattica del gioco

Il gioco è promosso alla scuola dell'infanzia dallo stesso Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022) come: «una modalità di cui il bambino si serve per costruire e ricostruire la realtà […] Giocare significa infatti imparare con tutti i sensi, con un potente coinvolgimento emotivo, con energia mentale e fisica» (p. 70). Attraverso la voce e i lavori di diversi matematici e didatti della matematica, in questo paragrafo si mette in rilievo la valenza didattica del gioco a diversi livelli intrecciati tra loro: emotivo, affettivo, sociale, formativo, cognitivo, comunicativo.
La valenza affettiva e sociale del gioco è indubbia. Già nel 1979, il matematico e pedagogista Lombardo Radice, nel suo «Elogio del gioco», scriveva:

> «Imparare a giocare, stabilendo e rispettando regole oneste, crea l'abitudine a una convivenza civile molto di più che non lunghe prediche di 'educazione civica' […] I giochi che proponiamo sono anche un mezzo, non facilmente sostituibile, per il 'recupero' dello stare insieme gioioso tra grandi e piccoli, tra genitori e figli, tra maestri e allievi».
>
> (Lombardo Radice, 1979, p. 104)

Il bambino può giocare da solo (attività isolata), giocare vicino ai compagni ma non insieme (attività parallela) e giocare insieme agli altri eventualmente con una suddivisione dei ruoli (attività di gruppo). In tutte le sue diverse forme e tipologie, come sottolinea Sbaragli (2021):

> «Il gioco ha rappresentato in ogni epoca e per le diverse culture una potente forma di apprendimento, confronto, collaborazione e comunicazione. L'infanzia, infatti, si "misura" costantemente con la realtà attraverso il gioco: un mezzo potente ed efficace per entrare in relazione con il mondo circostante e per acquisire nuove competenze disciplinari e trasversali, con approcci diversi per ogni fase della crescita».
>
> (Sbaragli, 2021, p. 14)

In questo senso, Bartolini Bussi (2008) afferma che «Il gioco collettivo è importante sia come elemento socializzante, sia come "strumento di produzione" di situazioni problematiche» (p. 262). L'autrice sottolinea come sia fondamentale in quest'ottica che i bambini facciano esperienza del gioco con regole, in quanto esso richiede di affrontare e tentare di risolvere problemi che intrecciano tre ambiti: il linguaggio (comprensione, spiegazione e creazione delle regole); la socializzazione (condivisione e rispetto delle regole); le abilità di natura logico-matematica (sequenzialità delle istruzioni e organizzazione del comportamento).
A proposito delle abilità logico-matematiche e delle forme di ragionamento scaturite dai giochi, Peres e Sbaragli (2021) propongono il binomio gioco-matematica come "connubio per la mente" e ribadiscono l'importanza del gioco in ambito didattico, evidenziando

> «quanto possa essere stimolante e arricchente per gli allievi e per i docenti proporre giochi di diversa natura, che consentano di sviluppare le diverse forme di ragionamento utili per affrontare in modo creativo non solo i problemi scolastici, ma anche le diverse situazioni della vita».
>
> (Peres & Sbaragli, 2021, p. 36)

Se il gioco è specificatamente a tema matematico, basato ad esempio sul conteggio, sull'ordinamento o sull'orientamento spaziale, l'arricchimento del bagaglio lessicale del bambino è in stretta relazione alle sue esperienze scolastiche ed extrascolastiche. Si può chiedere a un bambino in situazione di gioco di spiegare le regole del gioco verbalmente o supportandole con rappresentazioni grafiche. Le differenti modalità comunicative adottate dai bambini, una volta condivise, permettono al docente di avviare una discussione matematica, di creare cioè una situazione di scambio e di messa in relazione di pareri e saperi

> «[…] che porti gradualmente alla produzione di segni e termini matematici condivisi. In questa fase si lavora sull'ascolto e sulla comprensione delle proposte altrui: i bambini sono guidati a mettere le strategie dei compagni a confronto con le proprie in un percorso che tocca trasversalmente anche lo sviluppo della consapevolezza di sé, dell'espressione comprensibile e chiara, della capacità di ascolto critico e dell'accettazione del punto di vista altrui».[1]

Affrontare con i bambini un testo descrittivo, relativo ad esempio alla spiegazione del gioco o delle fasi per la costruzione di un gioco, permette di affrontare alcuni concetti matematici spiegati nella cornice di senso del gioco e di elaborare, partendo da un esempio, le varie fasi dello svolgersi del gioco. La creazione di nuove strategie di gioco o nuovi giochi permette di affrontare anche il testo regolativo che richiede ai bambini un ulteriore sforzo cognitivo e comunicativo: sapere ordinare, collegare tra loro e spiegare le varie fasi di gioco per lasciare traccia di una nuova proposta.

1. Contesto di senso "Italmatica: unione tra matematica e italiano" (p. 2), disponibile al link: https://mama.edu.ti.ch/wp-content/uploads/2021/11/MD_Contesto_I-V_Italmatica-unione-tra-lingua-e-matematica.pdf (consultato il 04.08.2023).

Inizialmente i bambini possono ripercorrere e imitare con il corpo le fasi del gioco, oppure possono «ricostruire il gioco mediante tanti disegni disposti in "successione temporale"» (Bartolini Bussi, 2008, p. 269); la ripetizione del gioco può essere così descritta come un «sistema di controllo verbale» (Bartolini Bussi, 2008, p. 269).
Non è da sottovalutare dunque la valenza comunicativa del gioco. Nello specifico, tra i giochi liberi, individuali o collettivi, i giochi di una volta permettono di dialogare, di narrare situazioni vissute dai nostri genitori e nonni, di rievocare giochi a noi tramandati, conoscerne le regole che diventano "per sentito dire" o per imitazione più semplici e di facile comprensione. I giochi di una volta sono, per alcuni bambini, esperienze ridondanti che favoriscono le relazioni sociali e l'integrazione di regole e l'utilizzo degli spazi. A titolo d'esempio, si riporta il commento di una bambina E. (5 anni e mezzo) che durante uno dei momenti di gioco riprodotti liberamente ha spiegato così il gioco guardie e ladri ai compagni:

> «Si fa il tamburello: il bambino deve stare sotto e fa il tamburello, tu picchi sulla schiena e dici: guardia o ladro? Con il dito indice frecci un bambino, il bambino che fa il tamburo dice o ladro o guardia, se dice ladro è ladro se dice guardia è guardia. Io lo gioco con i miei amici più grandi vicino casa».

Da questa breve narrazione di E. traspare tutta la carica sociale e comunicativa del gioco e in essa trovano conferma le parole di Pontercovo (1989) la quale spiegava che il gioco «nasce dal bisogno di divertirsi, di stare insieme agli altri, di sperimentare le possibilità del proprio corpo, di cimentarsi con gli altri, di riconoscersi in un gruppo» (p. 64). E già affermava che «Attraverso i giochi, i bambini si rendono conto che esiste una sequenza temporale […]; che c'è uno spazio organizzato da rispettare […]; che ci sono delle regole» (p. 65).

3 La descrizione del percorso

Il progetto didattico realizzato con i bambini della scuola dell'infanzia di Avegno (Cantone Ticino, Svizzera) nel corso dell'anno scolastico 2021-22 si è snodato su più campi di esperienza. Si è voluto principalmente riflettere sull'ambiente circostante, il territorio e il contesto sociale in cui si è immersi. Inizialmente, al singolo bambino si è data la possibilità di esprimersi riguardo le proprie esperienze di vita, i propri affetti e le relazioni sociali. Il primo giorno di scuola, infatti, i bambini sono stati stimolati con una richiesta molto personale: portare un oggetto o una foto che rappresenta per loro qualcosa di importante relativo al proprio paese. La messa in comune delle proposte ha fornito lo stimolo per recarsi alla scoperta dei luoghi indicati, equipaggiati con macchine fotografiche. All'esterno i bambini si sono attivati con esperienze sensoriali e giochi da fare all'aperto. A scuola i bambini hanno narrato ciò che hanno osservato e raccolto attraverso delle foto o rievocato gli aneddoti vissuti o raccontati dai propri cari rispetto ai luoghi visitati. Nel primo periodo dell'anno è emerso in modo evidente il forte coinvolgimento emotivo e narrativo dei bambini durante i momenti vissuti all'esterno. I bambini conoscevano alcuni giochi di una volta: durante le uscite al fiume, si sono divertiti giocando con le biglie e con la sabbia (gioco della polenta); nel prato, invece, i bambini hanno spiegato il gioco guardie e ladri con la conta sul tamburello (schiena del bambino accovacciato).
Nella seconda parte del percorso, dunque, si è deciso di coinvolgere tutti, anche i bambini di origini differenti, nella scoperta dei giochi di una volta legati al territorio, raccogliendo testimonianze sul territorio, attraverso un'intervista ai nonni. I giochi sono stati riprodotti e rielaborati in sezione, ampliando l'interesse verso nuove varianti di gioco. Si trattava infatti di giochi da svolgere sia all'interno

sia all'esterno, negli spazi adiacenti alla scuola o in luoghi di gioco spesso utilizzati dai nonni come la piazza, la fontana, i prati, il bosco e il fiume.
Il gruppo di bambini a cui è stato proposto il percorso ama creare e si attiva facilmente in nuove proposte. Il gruppo di bambini dell'anno obbligatorio 2 (5-6 anni) sono 6 (3 maschi e 3 femmine), il gruppo dell'anno obbligatorio 1 (4-5 anni) è più numeroso (13 bambini) e alcuni seguono incuriositi tutte le dinamiche che si stanno sviluppando. I piccoli allievi dell'anno facoltativo (3-4 anni) sono due bambini molto vivaci e curiosi.

3.1 Le fasi del percorso

Come anticipato, il gioco e la fotografia sono stati il filo conduttore dell'intero percorso. Il nuovo anno alla scuola dell'infanzia è iniziato con il gioco "Ti faccio una foto", per rendere visibile l'identità di ognuno e parlare di sé agli altri (creazione dell'angolo accoglienza), e si è concluso con la proposta di un gioco in paese: la caccia al tesoro con varie postazioni, identificabili tramite una fotografia, alle quali erano proposti alcuni dei giochi di una volta esplorati durante l'anno. Nella seguente tabella (Tabella 1) sono descritte brevemente le fasi del percorso che sono in seguito analizzate nel par. 4. Vengono indicate anche le competenze attivate, soprattutto in riferimento agli aspetti di competenza dell'area matematica promossi nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2022).

Periodo	Attività proposte	Obiettivi e competenze attivate
Agosto – novembre	**Esplorazione del territorio.** Il mostro dei colori (personaggio di inizio anno) permette di parlare delle emozioni che si provano durante il primo periodo di scuola. Uscite in paese per osservare e fotografare particolari e luoghi significativi per i bambini.	Raccontare e condividere i propri sentimenti evocati da differenti immagini di ambienti naturali o sociali.
	I cartelloni di sezione. Si costruiscono con i bambini alcuni cartelloni: quello delle esperienze dei bambini e delle loro passioni (angolo accoglienza) e quello della settimana.	Riconoscere e valorizzare attraverso forme espressive diverse la propria storia personale, familiare, il proprio vissuto scolastico e l'ambiente di vita.
	I giochi spontanei negli spazi esterni. Negli ambienti esterni i bambini escogitano e conoscono giochi che sanno condividere e spiegare ai compagni. I bambini conoscono alcuni giochi di una volta; questa conoscenza viene condivisa con l'intero gruppo, anche a bambini di origini diverse. A partire da una classificazione spontanea delle foto scattate, si crea un modello di calendario settimanale.	Manifestare curiosità per la propria storia, l'ambiente e le sue tradizioni. Creare un modello per rappresentare la ciclicità dei giorni della settimana (aspetto di competenza matematica "Matematizzare e modellizzare").

Novembre – dicembre	**La raccolta di fotografie diventa un gioco di sezione.** Ai genitori si richiede di fotografare un elemento caratteristico o piacevole del paese in due modalità: una fotografia intera del soggetto e una seconda fotografia di un dettaglio riferito allo stesso soggetto. Le foto diventano un ulteriore gioco di sezione, un gioco inizialmente di scoperta e linguistico, successivamente gioco del memory.	Provare a discutere soluzioni diverse per la risoluzione dei problemi (aspetto di competenza matematica "Esplorare e provare").
Gennaio	**I giochi di una volta.** Si lancia una nuova situazione motivante: una nonna trova una scatola rimasta in soffitta per molti anni con dentro dei materiali e una lettera. Chiede ai bambini di provare a giocare con quei materiali e di giocarci con i nonni. Segue la sperimentazione libera e l'intervista ai nonni.	Selezionare le informazioni e caratteristiche utili a dar senso ad una situazione reale; utilizzare conoscenze e procedimenti matematici per comprendere ed esaminare un contesto reale (aspetto di competenza matematica "Matematizzare e modellizzare").
Gennaio – febbraio	**Riproduzione e spiegazione dei giochi.** I bambini presentano i giochi fatti a casa con i nonni e li mostrano (video e spiegazione dal vivo) ai compagni. Si richiede ai bambini di lasciare traccia delle regole dei giochi e dei materiali necessari. Si creano le schede gioco.	Tradurre in forma matematica situazioni e problemi legati a contesti quotidiani; utilizzare diversi tipi di rappresentazioni semiotiche (verbale, figurale, gestuale ecc.) (aspetto di competenza matematica "Matematizzare e modellizzare").
Febbraio – marzo	**Allestimento del laboratorio del gioco.** *Ideazione*, *creazione spontanea*. Si chiede inizialmente di inventare dei giochi con "materiale di fortuna". *Dal modello alla copia del gioco*. I bambini ricevono un modellino di gioco (una trottola) e si chiede loro di ricostruirla senza l'aiuto dell'adulto. *Istruzione grafica del procedimento*. Giungono delle istruzioni grafiche con le indicazioni per costruire dei giochi, i bambini devono riuscire a capire la modalità di esecuzione, utilizzando i materiali in modo corretto. *Giochi per le ricorrenze*. Si inventano nuovi giochi sia in modo spontaneo sia con l'aiuto dell'adulto (giochi per le ricorrenze).	Esplorare procedimenti risolutivi (aspetto di competenza matematica "Esplorare e provare"). Attivare semplici meccanismi di controllo per valutare procedimenti e risultati matematici prodotti personalmente o da altri in relazione al contesto e allo scopo della situazione; assumere un atteggiamento riflessivo di fronte a un procedimento, una strategia o un risultato; stabilire se il procedimento utilizzato in una determinata situazione può essere utilizzato per affrontarne una nuova (aspetto di competenza matematica "Interpretare e riflettere sui risultati").

Marzo – aprile	**Invenzione di un gioco con regole: il gioco della pizza.** Nell'ambito delle attività legate alla scoperta del territorio, si costruiscono gli spazi adibiti a gelateria e pizzeria. Nasce in modo spontaneo il gioco della pizza. I bambini ricevono il materiale strutturato da usare per realizzare un gioco con regole.	Descrivere procedimenti usati per determinare un risultato matematico in modo comprensibile agli altri (aspetto di competenza matematica "Comunicare e argomentare").
Maggio	**La caccia al tesoro in paese.** Il percorso si conclude con una giornata dedicata alla scoperta del paese di Gordevio, attraverso una caccia al tesoro. Una sequenza di fotografie indica il tracciato da seguire e ogni immagine corrisponde a una fermata con una postazione-gioco. I giochi proposti ripercorrono le usanze e i giochi di un tempo.	Prendere l'iniziativa di cimentarsi con problemi e materiali matematici. Selezionare le informazioni e caratteristiche utili a dar senso a una situazione reale (aspetto di competenza matematica "Matematizzare e modellizzare").

Tabella 1. Panoramica del percorso didattico.

4 Le scoperte dei bambini attraverso il percorso

4.1 Esplorazione del territorio e fase di accoglienza

Prima di iniziare l'anno scolastico, i bambini ricevono una lettera (**Figura 1**), nella quale si richiede loro di portare a scuola un'immagine particolare del loro paese.

Ciao bambini,
fra pochi giorni inizierete di nuovo la scuola!
Quest'anno vi chiediamo di portare, il primo giorno di scuola, qualcosa che vi piace tanto del vostro paese di Avegno Gordevio. Potete scegliere di portare un oggetto (non troppo grande) o di fare una foto, come ha fatto il nostro amico Mostro dei colori.

Figura 1. La lettera d'inizio anno e il mostro dei colori che porta una foto ai bambini.

Nei primi giorni di scuola ogni bambino si presenta attraverso l'immagine o l'oggetto portato da casa; molte narrazioni parlano di esperienze vissute sul territorio, queste vengono raccolte e trascritte in un grande cartellone murale che lascia spazio alle esperienze dei bambini (**Figura 2**).

Figura 2. Cartellone delle esperienze dei bambini.

Con i bambini in sede c'è un nuovo amico, il mostro dei colori, un peluche morbido e gigante che si presta per parlare dei colori delle emozioni, ispirato al personaggio del libro "Il mostro dei colori va a scuola" di Anna Llenas (2019).
I bambini lo trovano il primo giorno di scuola seduto su una seggiolina con una macchina fotografica e una fotografia della scuola dell'infanzia di Avegno. I bambini ipotizzano che voglia stare con loro, che abbia fotografato la loro scuola perché gli piace, così come loro hanno fotografato qualcosa che piaceva loro del paese. I bambini raccontano esperienze vissute nell'estate appena trascorsa. Le narrazioni riguardano giochi fatti al fiume (giochi estivi e giochi con la sabbia), nel bosco (ricerca di animali e oggetti naturali), alla fattoria (descrizione di capre, mucche e vitellini), dal ponte (guardare i pesci dall'alto), nei prati (raccolta di fiori) e al parco giochi.
Con i bambini, allora, si costruisce una macchina fotografica (Figura 3), e con questo nuovo strumento al collo inizia l'avventura nel paese. Le uscite sono finalizzate ad osservare i luoghi e a rivivere le esperienze (e con esse le emozioni) raccontate tramite immagini e oggetti dai compagni durante i primi giorni di scuola.

Figura 3. Macchina fotografica costruita con i bambini.

Dopo le uscite vengono create delle categorie, suddividendo le immagini e le foto in gruppi di appartenenza. Si individuano così 7 ambienti: il fiume, il parco giochi, il prato, il ponte, il bosco, la fattoria e un bambino in giro con la bicicletta nel paese (Figura 4).

Figura 4. Categorie.

Con il materiale disponibile vengono creati dei grandi cartelloni raffiguranti i 7 ambienti individuati e con uno schema i bambini provano a indicare la strada che si fa in bicicletta per passare da un luogo all'altro. Poiché gli ambienti sono 7, il cartellone definitivo viene sfruttato come modello della settimana (Figura 5): il mostro dei colori ogni giorno si sposta da una zona all'altra utilizzando una bicicletta (Figura 6). La bicicletta si muove con un sistema scorrevole legato a un filo di pesca e sale e scende percorrendo la strada seguendo la forma circolare, proprio come la ciclicità nella settimana (per un approfondimento sul tema della ciclicità nel tempo si veda: Martinelli & Martinetti, 2021).

Figura 5. Progetto iniziale: la ciclicità, movimento circolare e continuo da un luogo all'altro.

Figura 6. Progetto finale: la settimana con i 7 luoghi identificati dai bambini e il mini-mostriciattolo con la sua biciclettina si sposta ogni giorno con un movimento circolare.

In questa fase, le scoperte matematiche dei bambini sono molteplici. Forse la più evidente è quella di considerare la settimana come un ciclo di 7 giorni che si ripetono ricorsivamente con regolarità e di usare la biciclettina del mini-mostro dei colori per spostarsi ogni giorno da una tappa alla successiva. Poiché il progetto della settimana è un circuito circolare, si lavora sulla rappresentazione del tempo ciclico e più in generale sulla modellizzazione. In questo lavoro vengono messe in gioco anche altre competenze, meno evidenti ma comunque importanti, legate all'orientamento spaziale necessario per compiere percorsi, che vengono svolti sia nel reale, per ritrovare e visitare i luoghi cari e fotografati dai bambini, sia in astratto, su un foglio, come il percorso circolare effettuato dal mostro dei colori per situarsi spazialmente, e quindi temporalmente, nei diversi giorni della settimana.

4.2 La raccolta di fotografie diventa un gioco di sezione

Vengono coinvolte le famiglie nella costruzione di un gioco nuovo per i loro bambini. Si propone ai genitori di diventare fotografi per un giorno, chiedendo loro di fotografare un elemento caratteristico o piacevole del paese in due modalità: una fotografia intera del soggetto e una seconda fotografia di

un dettaglio riferito allo stesso soggetto.
A scuola, il primo giorno del mese di dicembre, i bambini trovano una macchina polaroid gigante che "sviluppa" le foto sorpresa dei genitori (**Figura 7**). Questo gioco, riprendendo anche il tema del calendario, viene proposto ogni mattino come calendario dell'avvento.
Il bambino del giorno (il cui nome viene estratto a sorte) scopre quale foto ha fatto la mamma o il papà per lui. Prima viene mostrata la foto del dettaglio, lanciando la sfida di riconoscere che cosa rappresenti il particolare nella foto. Per capacità intuitive o per grande immaginazione, i bambini si divertono facendo delle ipotesi. Poi segue la soluzione, "sviluppando" anche la seconda foto con l'immagine intera (**Figura 8**).
Il gioco del calendario dell'avvento ha un carattere affettivo molto forte per il singolo bambino (bambino estratto del giorno) e diventa gioco di immaginazione e racconto per tutti.
Le immagini plastificate in formato A5 vengono successivamente usate per il gioco del memory. Per fare ciò, vengono disposte a terra le immagini complete, creando un primo tabellone di gioco, e poi le immagini dei particolari, creando un secondo tabellone di gioco. Il bambino deve estrarre dal primo tabellone di gioco una carta e cercare di trovare l'immagine corrispondente nell'altro tabellone di gioco, seguendo le classiche regole del gioco del memory.

Figura 7. La macchina polaroid gigante che al mattino "sviluppa" le foto scattate dai genitori per il calendario dell'avvento.

Figura 8. Tre esempi di coppie di fotografie: dal particolare alla figura intera.

In questa fase del percorso le attività proposte permettono di lavorare dapprima sui punti di vista, individuando da dove viene scattata una fotografia globale e da dove viene invece catturato il suo dettaglio. In un secondo momento, dovendo abbinare ogni dettaglio all'immagine corrispondente, si lavora anche sulla corrispondenza uno-a-uno, resa ludica nel contesto del memory.

4.3 I giochi di una volta

A inizio gennaio viene lanciato un nuovo stimolo (**Figura 9**): una nonna trova una scatola rimasta in soffitta per molti anni; dentro vi sono dei materiali e una lettera in cui si chiede di provare a giocare con quei materiali e di usarli per giocare con i nonni. I materiali sono i seguenti:

- 40 carte (da 1 a 7, fante, donna, re);
- un sasso e un gesso (per gioco del mondo);
- un elastico;
- 10 sassolini: 5 con una X e 5 con un O (per gioco del tris);
- un sacchetto con delle biglie.

Ciao bambini,

Sono Gisella, una nonnina.

Durante le vacanze di Natale ho riordinato la mia soffitta e ho trovato degli oggetti che utilizzavo quando ero piccola come voi per fare cinque giochi.

Ecco gli oggetti:

I sassolini e un gesso (per il primo gioco)

Il gesso e un sasso (per il secondo gioco)

Il sacchetto di biglie (per il terzo gioco)

L'elastico (per il quarto gioco)

Le carte (per il quinto gioco)

Provate a scoprire di quali giochi si tratta chiedendo aiuto ai vostri nonni. Poi giocate con loro.

Buon divertimento,

Ciao ciao

Nonnina Gisella.

Figura 9. La lettera della nonna Gisella e il materiale contenuto nella scatola.

I bambini formulano delle ipotesi in merito al contenuto seguendo alcune domande-stimolo del tipo: «Cosa sono?», «A cosa servono?», «Come ci si può giocare?» ecc.

Alcune ipotesi di gioco (**Figura 10**) sono le seguenti:

- «Si fanno le discese, uno scivolo a zigo-zago per le biglie».
- «Tipo fare una pista con i sassolini e fare la strada per far passare la biglia».
- «Io conosco le carte e gioco alla briscola».
- «Possiamo prendere l'elastico e fare un cerchio e metterci i pesci (quelli che hai portato tu con i numeri) e giocare a pescarli. Vince chi ha il numero più alto».

Figura 10. Alcuni metodi di gioco con i materiali trovati.

Seguendo la richiesta di nonna Gisella, viene preparata una scheda per intervistare i nonni a casa (**Figura 11**). I bambini all'ultimo anno di frequenza portano a casa il materiale necessario per provare un gioco.

I GIOCHI DI UNA VOLTA

I TUOI NONNI O GENITORI GIOCAVANO
CON QUESTI MATERIALI?
A QUALE GIOCO?

PROVA A GIOCARE CON LORO E POI A SCUOLA
POTRAI RACCONTARCI E MOSTRARCI
COME SI SVOLGE IL GIOCO.

SE VUOI PUOI REGISTRARE CON IL TELEFONO
UN MOMENTO DEL GIOCO CHE FAI
CON I TUOI GENITORI O NONNI
E A SCUOLA LO RIGUARDEREMO INSIEME.

GRAZIE PER L'AIUTO.
I BAMBINI DELLA SCUOLA DELL'INFANZIA
E LE MAESTRE

Figura 11. La scheda per intervistare i nonni o i genitori.

4.4 Riproduzione e spiegazione dei giochi imparati a casa

Dopo alcuni giorni, i bambini tornano a scuola entusiasti e pronti per raccontare e spiegare quanto hanno imparato a casa dai loro nonni, o in alcuni casi dai loro genitori.
Sono stati usati i supporti per il testo descrittivo forniti: alcuni hanno completato la scheda e inviato un video dimostrativo alla docente (Figure 12 e 13). Il video viene proposto a tutti durante il momento dell'esposizione del gioco.

I GIOCHI DI UNA VOLTA

I TUOI NONNI O GENITORI GIOCAVANO CON QUESTI MATERIALI?
A QUALE GIOCO?
SÌ. CON LE BIGLIE IL NONNO GIOCAVA A "TÈCA"
PROVA A GIOCARE CON LORO E POI A SCUOLA POTRAI RACCONTARCI E MOSTRARCI COME SI SVOLGE IL GIOCO.
(possibile descrizione)
CREARE DELLE BUCHE NELLA SABBIA O TERRA. I GIOCATORI DEVONO FAR ENTRARE LA BIGLIA NELLE BUCHE.
SE VUOI PUOI REGISTRARE CON IL TELEFONO UN MOMENTO DEL GIOCO CHE FAI CON I TUOI GENITORI O NONNI E A SCUOLA LO RIGUARDEREMO INSIEME.
DA EMILY
GRAZIE PER L'AIUTO.
I BAMBINI DELLA SCUOLA DELL'INFANZIA
E LE MAESTRE

Figura 12. Gioco delle biglie.

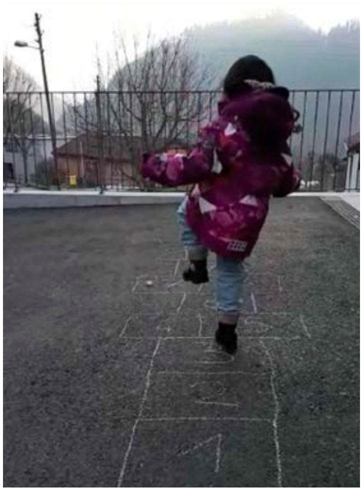


Figura 13. Gioco del mondo.

L'entusiasmo è grande: il bambino che presenta si sente importante, tutti lo ascoltano ed è lui a poter scegliere un compagno con cui provare il gioco. I giochi poi vengono ripetuti più volte anche dopo il momento dell'esposizione, diventando in seguito giochi di sezione da fare da soli e liberamente o in piccolo gruppo. Nelle Figure 14, 15 e 16 i bambini spiegano e mostrano ai compagni, che imparano giocando.

Figura 14. Gioco dell'elastico.

Figura 15. Gioco del quattro.

Figura 16. Gioco del tris.

Le dinamiche di scambio fra i bambini della scuola dell'infanzia e la nonna Gisella si intensificano quando anche il nipotino, Josh, interviene per avanzare delle nuove richieste (Figura 17).

Cari bambini! Sono Josh, ho 5 anni
e sono il nipotino di nonna Gisella.
Un po' di tempo fa mia nonna vi ha mandato
una scatola con degli oggetti per fare dei giochi.

Siete riusciti a giocarci?
Quali giochi avete fatto?

Mi piacerebbe imparare i giochi che avete scoperto.
Avete voglia di mandarmi le regole dei giochi?
Io vi mando un gioco che faccio a casa della nonna
e le sue regole.
Si chiama "Gira la ruota".

Buon divertimento,
Josh.

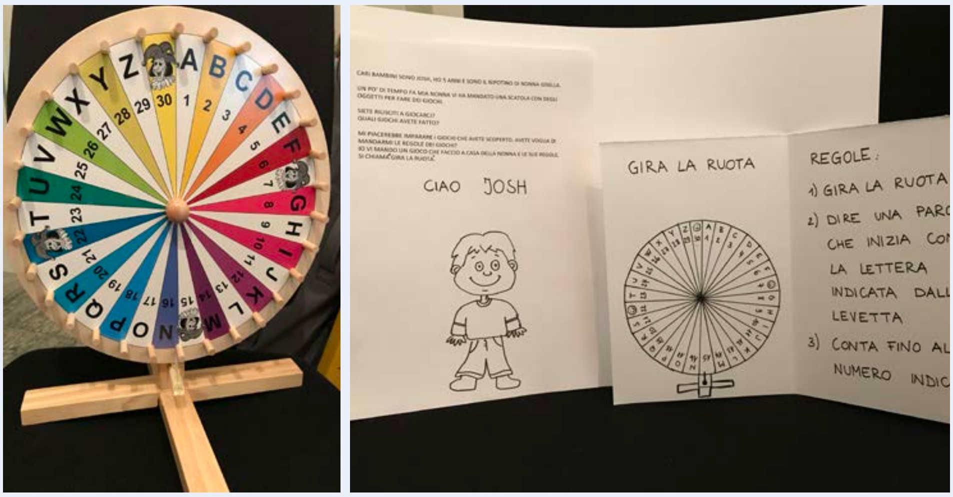


Figura 17. Gioco "Gira la ruota", lettera e regole disegnate e scritte da Josh.

Il nuovo gioco cattura nuovamente l'attenzione dei bambini. Insieme vengono lette le istruzioni per capire come funziona il gioco. Josh è stato chiaro, ha disegnato il gioco e ha scritto bene e per punti cosa fare. I bambini decidono quindi di seguire l'esempio di Josh per comporre le istruzioni dei giochi realizzati con i materiali nella scatola della nonna. La lettera di Josh viene dunque presa a modello per l'elaborazione di un testo regolativo. Si passa dunque alla creazione di schede di regole per ogni gioco. I bambini ricevono la fotografia inerente un momento del gioco e la commentano. La fotografia funge da supporto visivo per aiutarli a documentare particolari comportamenti e strategie (Bartolini Bussi, 2008) e per la successiva rappresentazione grafica del gioco. Anche dettare le regole alla docente non è per tutti cosa facile: «La spiegazione verbale delle regole da parte del bambino è un risultato che richiede tempo e pazienza, in quanto richiede una ricostruzione mentale dell'esperienza e la sua rappresentazione attraverso il linguaggio» (p. 269).

Nelle **Figure 18**, **19** e **20**, si possono visionare alcuni protocolli con relativa trascrizione in didascalia.

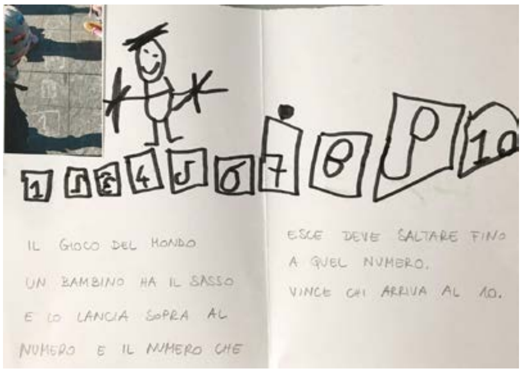


Figura 18. Gioco del mondo: «Un bambino ha il sasso e lo lancia sopra al numero e il numero che esce deve saltare fino a quel numero. Vince chi arriva al numero 10».

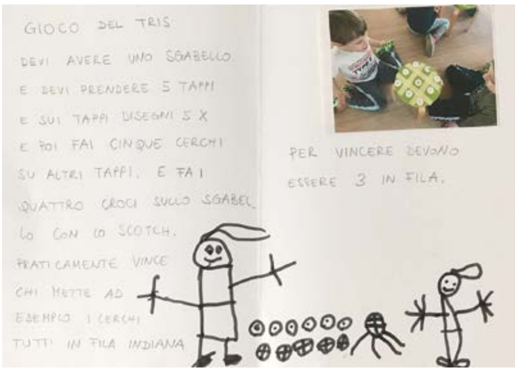


Figura 19. Gioco del tris: «Devi avere uno sgabello e devi prendere 5 tappi e sui tappi disegni 5 X e poi fai 5 cerchi su altri tappi. E fai quattro croci sullo sgabello con lo scotch. Praticamente vince chi mette ad esempio i cerchi tutti in fila indiana, per vincere devono essere 3 in fila».

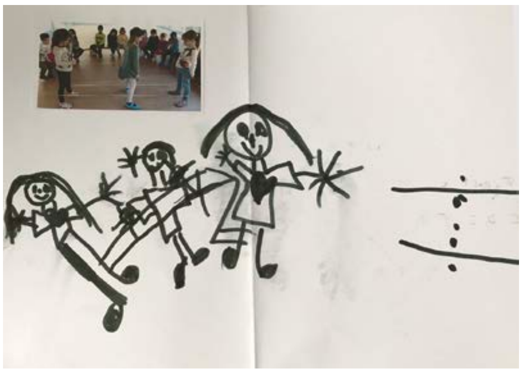


Figura 20. Gioco dell'elastico: «Si gioca il gioco dell'elastico. Metti un piede fuori e uno dentro e dopo tutti e due dentro e dopo metti un piede dentro e un piede fuori e dopo metti tutti e due fuori».

Le istruzioni create dai bambini vengono riposte in un sacchetto e i giochi con i materiali annessi sono resi disponibili in una versione in prestito a casa, diventando così un momento di gioco condiviso anche in famiglia. A rotazione i bambini scelgono quale gioco portare a casa, qualche bambino chiede di farsi filmare e poter mostrare successivamente il video ai compagni proprio come hanno fatto inizialmente i bambini più grandi.
I giochi proposti ed esplorati dai bambini in questa fase del percorso sono scelti anche per le competenze matematiche che possono essere sviluppate svolgendoli, legate ai numeri e al loro ordinamento (gioco del mondo), al conteggio (gioco del quattro), alle griglie (gioco del tris), ai percorsi (gioco delle biglie) e al parallelismo (gioco dell'elastico). Questi aspetti matematici si possono rilevare nelle rappre-

sentazioni dei bambini sulle schede dei giochi (**Figure 18**, **19** e **20**), la cui redazione è ispirata alla lettera di Josh e supportata dalle fotografie di situazioni di gioco.

4.5 Allestimento del laboratorio del gioco

La comunicazione fra il personaggio Josh e i bambini diventa sempre più frequente, i bambini si impegnano e sono molto motivati. In una delle lettere di Josh, riportata qui di seguito, giunge la richiesta di elaborare nuovi giochi con materiali di fortuna (**Figura 21**).

> Qui dalla nonna ci sono alcuni amici che a volte vengono a giocare da me. Purtroppo ho pochi giochi, voi ne conoscete alcuni da inventare o da creare con "materiale di fortuna"?
>
> A casa della nonna ho cartoni e scatole; nastro adesivo, elastici, colla; poi mattoncini di legno e legnetti e per finire bicchieri di carta e corde.
>
> Se vi vengono delle idee o se trovate dei giochi creati con "materiale di fortuna" potete dirlo alla vostra maestra. Insieme a lei potete inventare dei nuovi giochi, io aspetterò con piacere le nuove istruzioni di gioco!
>
> Ciao, ciao amici!

Figura 21. Nuova lettera di Josh.

Gli interventi nei momenti della lettura della lettera e la rispettiva analisi arrivano spesso dai bambini più grandi, ma anche i bambini del primo anno obbligatorio (4-5 anni) ascoltano interessati e vengono successivamente coinvolti nelle attività laboratoriali in piccoli gruppi di lavoro.
Le idee proposte e discusse dai bambini, in seguito alla lettura di questa lettera di Josh, danno ulteriore slancio al progetto. Eccone alcune trascritte:

- «Con una scatola si può fare una maschera da mettere sulla testa».
- «Si può fare un aereo di carta».
- «Un aereo di legno».
- «Giocare a nascondino, a prendersi».
- «Costruire degli animali di gioco con i cartoni». «Sì, un elefante di cartone».
- «Potremmo costruire una fabbrica con tutti i giochi dentro».
- «Potremmo andare a cercare animali, insetti. Strappare i fiori da dare alla mamma, fare una passeggiata, andare a pescare».

4.5.1 Ideazione e creazione spontanea

Con i bambini si discute di quali materiali utilizzare e di quali siano già disponibili in sezione.
Insieme viene allestita *la fabbrica del gioco*, ovvero il momento di laboratorio, così definito dai bambini stessi. Nel laboratorio i bambini possono creare con materiali differenti i giochi nuovi. La sperimentazione è libera; i bambini inizialmente non chiedono aiuto.
Il materiale è molto vario: cartoni, scatole, legnetti tipo kapla, tubi e rotoli, palline di carta, bicchieri in plastica, mollette, bastoncini di legno, cannucce, tappi di bottiglie, corde. Poi forbici, nastro adesivo, punteruoli, colle, matite e pennarelli, fogli.

Le invenzioni sono molteplici: binocoli e cannocchiali, strumenti musicali, trottole, frisbee, scatole trasformate in automobiline, canne da pesca con amo, bicchiere acchiappa pallina, aquiloni.
In **Figura 22** sono visibili alcuni prodotti eseguiti dai bambini, selezionati perché sono quelli che successivamente hanno avuto un ulteriore sviluppo nel progetto. In questa fase, come si nota nelle prime due immagini, i progetti degli aquiloni partono dalla realizzazione del contorno con cannucce della stessa lunghezza.

Figura 22. Alcuni giochi inventati dai bambini: aquilone, trottolina e frisbee, acchiappa pallina.

Molti bambini realizzano giochi da fare all'esterno e così, vista la bella stagione, alcune di queste idee vengono rilanciate all'intero gruppo per realizzarle tutti insieme. La prima modalità di lavoro proposta è la copia dei modelli di gioco costruiti dai compagni. Due bambini hanno proposto l'aquilone e, durante la discussione, spiegano ai compagni come si può eseguire: «Si fa una X e poi si tira una riga da qua a qua, e da qua a qua, … (il bambino mostra unendo i punti estremi della croce, si veda la prima immagine della **Figura 23**)». Si nota che durante la discussione i bambini introducono l'idea di realizzare una croce per il modello dell'aquilone, partendo quindi dalle diagonali (**Figura 23**) invece che dal contorno (**Figura 22**). Discutendo in piccolo gruppo (6 bambini) decidono che bisogna avere un materiale leggero, dei legnetti per fare una croce che tenga bene, altrimenti si può rompere facilmente, e una corda per legarlo e tirarlo.
La maestra aiuta a tenere i legnetti mentre i bambini legano le varie parti; infatti questo passaggio manuale mette in difficoltà i bambini, perché i bastoncini si muovono e si sovrappongono perdendo quella formazione a croce, cioè la perpendicolarità, che i bambini stanno cercando di ottenere. Si può osservare come il bambino comprenda (si vedano i bambini al lavoro nella **Figura 23**) che la lunghezza dei bastoncini deve essere differente, uno più lungo e uno più corto, perché altrimenti si creano altre forme.

Figura 23. I bambini disegnano come costruire un aquilone, poi lo costruiscono.

4.5.2 Dal modello alla copia del gioco

I bambini decidono di regalare un aquilone anche a Josh che risponde loro per lettera:

> Grazie mille per il bell'aquilone!
> Ci ho giocato quando c'era vento e volava benissimo perché era molto leggero.
> Anch'io ho preparato un gioco per voi… è nella scatolina.
> Sapete cos'è?
> Riuscirete a costruire questo gioco da soli?
> Chiedete i materiali necessari alla vostra maestra e poi provateci, io ci sono riuscito senza l'aiuto della nonna!
> Ciao, ciao amici!
> Buon divertimento.

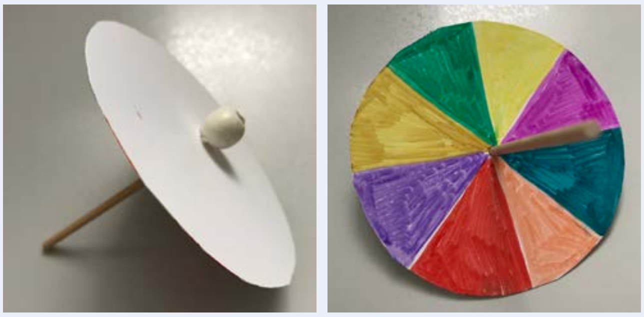


Figura 24. La lettera e la trottola lasciata da Josh senza ulteriori indicazioni.

Parte una nuova sfida: la richiesta questa volta è priva di indicazioni. Occorre dunque osservare l'oggetto-gioco proposto (**Figura 24**) e risalire ai materiali necessari e alla modalità di costruzione. Inoltre, bisogna riconoscere le varie fasi di elaborazione per saperlo successivamente spiegare ai compagni.

Figura 25. Una bambina (5 anni) aiuta un compagno (4 anni) e spiega dove fare il punto con punteruolo.

Le strategie di lavoro e i materiali utilizzati rientrano nelle abilità e conoscenze dei bambini. Per fare il cerchio usano un bicchiere in plastica (pratica a cui erano già abituati), per fare il buchino il punteruolo (utensile da loro conosciuto); legnetti e perline erano già disponibili nel laboratorio.
I bambini più piccoli hanno fanno il buchino per inserire il legnetto dove capita, senza avvicinarsi al centro. I bambini più grandi dopo un primo tentativo un po' distante dal centro capiscono che la trottola si inclina subito; cercano così di individuare il centro facendosi aiutare dai compagni che l'avevano trovato con una serie di tentativi stimando ad occhio e verificando empiricamente la stabilità della trottola (Figura 25).

4.5.3 Istruzione grafica del procedimento per realizzare un gioco

I bambini ricevono una nuova modalità per approcciarsi al gioco, diventando sempre più curiosi. Quando ricevono le nuove istruzioni grafiche su un foglio si attivano subito. Si propone in Figura 26 l'esempio del gioco "Pallina volante". Un bambino sa leggere e aiuta tutti a scoprire di quale gioco di tratta. Una bambina è molto felice perché ricorda di aver proposto lei la "pallina volante" come progetto-gioco nel laboratorio (vedi par. 4.5.1). La sua proposta era stata costruita con un bastoncino; questa nuova versione utilizza invece una cannuccia.

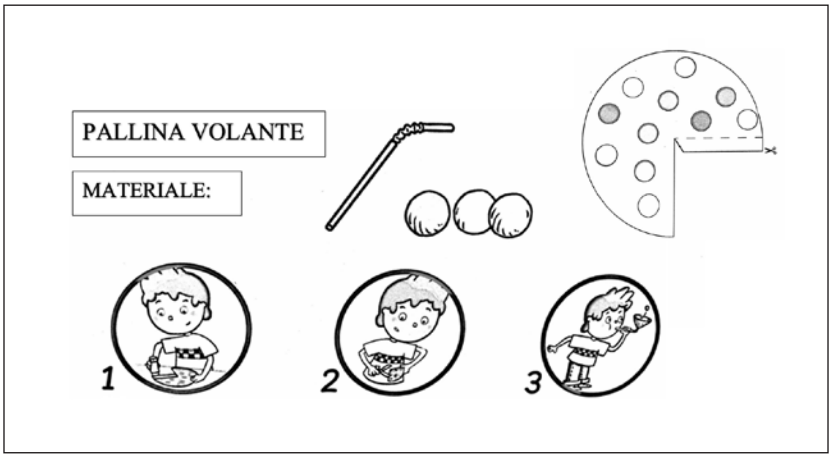


Figura 26. "Pallina volante", tratto da De Hey (2010, pp. 2-3) e rielaborato dall'autrice.

I bambini ricevono il materiale necessario: un settore circolare da ritagliare, una cannuccia e tre palline di carta. Una difficoltà è rappresentata dalla parte tratteggiata, perché i bambini non sanno se occorre ritagliarla o meno. Guardando bene il disegno si osserva che il bambino mette la colla proprio su quella parte, poi lo chiude il settore circolare a cappuccio e infine ci infila la cannuccia piegata; ripercorrendo così la sequenza temporale delle istruzioni, i bambini lavorano sul tempo nella sua linearità.
Con i bambini si ritorna proprio sulla modalità utilizzata per spiegare le fasi di costruzione, analizzando la sequenza illustrata, attraverso delle domande-stimolo quali «Come si leggono queste spiegazioni?», «Perché è stato facile costruire il gioco?», «Ci sono stati dei momenti di difficoltà? Perché?».

4.5.4 Costruzione di giochi per ricorrenze speciali

Si riportano due ricorrenze per le quali si è deciso di creare dei giochi.
Per la festa del papà si prepara una versione speciale del gioco del tris, presentato a scuola nei mesi precedenti, e si vanno a raccogliere dei sassi al fiume. La consegna al fiume è quella di raccogliere, ognuno nel proprio sacchetto, 10 sassolini un po' piatti e grandi circa come una moneta da 2 CHF.

Tornati in classe ogni bambino crea il suo sacchetto personale con raffigurato sé stesso con il suo papà da un lato e dall'altro lato una griglia 3 × 3. Si decorano 5 sassi con un cuoricino e gli altri 5 con un viso sorridente. Ogni bambino ha così tutto il materiale necessario per fare una partita a tris con il suo papà e non solo (**Figura 27**).

Figura 27. I giochi del tris preparati per la festa del papà.

Nel periodo di Pasqua si prepara una festa a scuola, con tanto di gioco creato per l'occasione: la caccia alle uova. Qualche giorno prima con i bambini si costruiscono dei cestini, utilizzando i consueti pacchetti per le uova da 6, decorandoli a piacimento e applicandovi dei coniglietti variopinti.
Il giorno dedicato alla ricerca delle uova in giardino, ogni bambino riceve una scheda gioco personale, sulla quale sono raffigurati 6 elementi (ovetti e conigli di cioccolata) di colore e dimensione differente. Le schede preparate sono 22, una per bambino, e queste variano quasi tutte una dall'altra. Ogni bambino deve osservare bene non solo le dimensioni ma anche alcune caratteristiche raffigurate sui differenti conigli (colore del cravattino, colore e disegno della giacchetta, …). Il coniglio è molto preciso, e ha nascosto nel prato esattamente 132 cioccolatini (6 cioccolatini per 22 schede). Ogni bambino deve trovare il cioccolatino corrispondente all'immagine raffigurata sulla scheda gioco; 6 scomparti nel cestino corrispondono ai 6 cioccolatini da trovare. I bambini muniti di cestino e scheda gioco partono alla ricerca (**Figura 28**).

Figura 28. Materiale per la caccia alle uova.

Si lavora nuovamente sulla corrispondenza uno-a-uno tra cioccolatino e posto nella scatola delle uova. Una volta trovati e sistemati un cioccolatino per ogni buco della scatola, i bambini sono sicuri di averli raccolti tutti. Inoltre devono fare attenzione alle caratteristiche specifiche di ciascun coniglietto verificando la corretta combinazione di tutte le variabili.

4.6 Invenzione di un gioco con regole: il gioco della pizza

All'interno della sezione cerchiamo di ricreare degli ambienti che ricordano alcuni degli spazi esterni trovati sul territorio all'inizio del percorso (vedi par. 4.1): la gelateria e la pizzeria (Figure 29 e 30). Entrambi questi spazi caratteristici permettono di realizzare giochi di ruolo e di inventare nuove forme di vendita di prodotti accompagnati a giochi con i soldi; ambiti molto validi per trattare i numeri, piccole quantità e approcciarsi ai simboli e al codice. Il laboratorio con materiali di fortuna per inventare e costruire giochi permette ai bambini di creare nuovi prodotti, fra i quali gli ingredienti per la pizza.

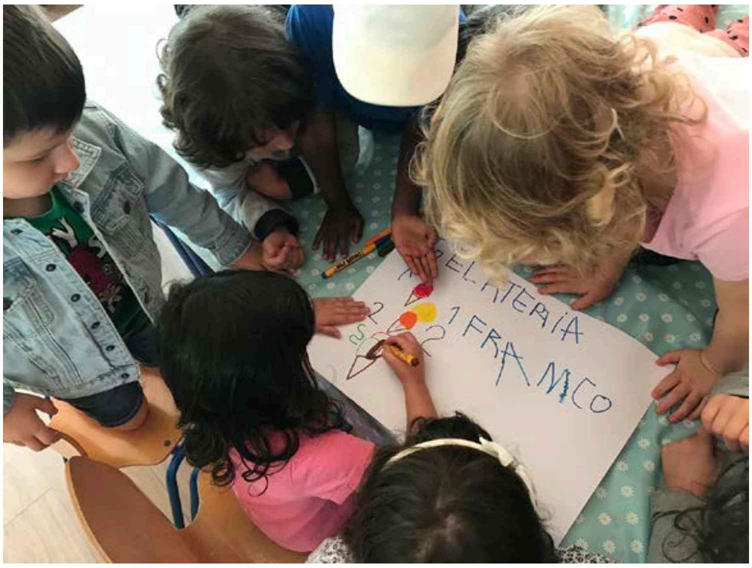


Figura 29. La gelateria.

Figura 30. Creazione di alimenti e pizze varie.

In modo spontaneo i bambini disegnano le pizze sugli imballaggi e inventano nuove pizze ai gusti differenti.
Considerato il percorso realizzato in classe e le nuove proposte spontanee, si coglie l'occasione per lanciare al gruppo il gioco con regole, rivolgendo ai bambini la domanda: «Cos'è e com'è fatto un gioco con regole?». I bambini esprimono i loro pareri a riguardo:

- «Le regole si ascoltano, si ascoltano le maestre. Si pensa nella testa e si può fare qualcosa di bello».
- «Le regole sono come si gioca, un gioco è giusto che è per 3-4 anni o 5 anni».
- «La regola è rispettare i giochi».
- «Se uno costruisce un gioco, il suo amico deve rispettare il suo gioco, perché ci hanno messo impegno».
- «Nel gioco "guardie e ladri" ci sono le regole. Certi sono i ladri, certi sono le guardie. I ladri devono scappare dalle guardie e se vengono presi vanno in prigione. I ladri possono liberare i ladri chiusi in prigione, toccando la mano. Se tutti i ladri sono presi perdono. Si gioca in giardino perché ci vuole tanto spazio per correre».
- «Un gioco con regole è un gioco con squadre».

I bambini ricevono il materiale necessario per creare un nuovo gioco della pizza: dischi di cartoncino che rappresentano le basi delle pizze, icone degli ingredienti da ritagliare, scatola in cui vengono separati i vari ingredienti. Su ogni scatola viene incollata un'icona dell'alimento corrispondente (Figura 31).

Figura 31. Preparazione del materiale necessario al gioco della pizza.

Con i materiali i bambini inventano quindi delle modalità di gioco come quelle in Tabella 2.

	
«Mettere tutti gli ingredienti diversi. Uno per ingrediente».	«È come un memory, alzali a due a due e trova quello diverso, tutti gli altri sono uguali. Devi trovare due ingredienti uguali».
	
«Fai una bella pizza, decorata bene. Tipo i salami sono tutti in fila».	«Metti nell'ordine giusto, segui le parti già fatte es. 2 pomodori, 1 basilico, 2 funghi, altri due pomodori, 1 basilico e continua sempre così».

Tabella 2. Le differenti modalità di gioco proposte dai bambini.

I bambini che propongono queste modalità di gioco sono bambini all'ultimo anno di frequenza, successivamente spiegano al resto del gruppo la loro idea di gioco e lo giocano con altri bambini. Si nota come i bambini, forse ispirati dai giochi svolti in precedenza, propongono giochi che coinvolgono aspetti matematici come il conteggio, le corrispondenze uno-a-uno, le successioni.

4.7 La caccia al tesoro in paese

Il percorso si conclude con una caccia al tesoro pensata e sviluppata nel comune di Gordevio, luogo di residenza di alcuni compagni. È un modo per percorrere le strade di un altro paese e giocare ad alcuni giochi sperimentati durante l'anno.
La mappa del comune (Figura 32) costruita dalla docente è proposta in modo circolare (come lo è il percorso ciclico del mostro delle emozioni nel "cartellone della settimana" nel paese di Avegno, si veda la Figura 6); ad ogni punto-fotografia, luogo caratteristico del paese, è associato il numero del gioco corrispondente; i giochi proposti ripercorrono le usanze e i giochi di un tempo (alcuni dei quali descritti nel par. 4.3)

Figura 32. Mappa della caccia al tesoro con i luoghi del paese.

A titolo di esempio, si riportano i giochi matematici proposti a due postazioni.

Postazione 1 (Cancelleria comunale di Avegno Gordevio). Ispirandosi alla bandiera del comune si gioca a rubabandiera. I bambini più grandi ricevono ognuno una collana con un cartoncino che riporta un numero scritto in cifre indoarabe. I bambini più piccoli ricevono altrettante collane con dei cartoncini che hanno raffigurati dei frutti o delle verdure. La maestra si pone fra le due squadre e tende le due mani con due bandiere, una alzata sulla destra e una sulla sinistra, e chiama un numero o un frutto/verdura. I bambini delle due squadre che hanno il numero o il frutto/verdura indicato dalla docente devono correre e cercare di prendere per primi la bandiera.

Postazione 2 (Fontana). In piazzetta Sant'Antonio si propone il gioco del bucato. I bambini devono riuscire ad appendere con mollette su un filo da bucato i fazzoletti di colori differenti rispettando una sequenza colorata indicata su un cartoncino. I bambini divisi in due squadre ricevono ognuno la striscia con le indicazioni della sequenza dei colori (si inizia con la sequenza da 4 a seguire le richieste sono più complesse). Il gioco si svolge come fosse una staffetta, parte un bambino alla volta per squadra e al ritorno parte il secondo. Chi ha la striscia controlla e dà indicazioni sul colore del fazzoletto che va appeso seguendo l'ordine corretto.

L'ultimo punto della mappa indica il parco giochi, luogo in cui abbiamo nascosto un tesoro da cercare. I bambini trovano uno scrigno zeppo di dolciumi e autocollanti con lo stemma del comune di Avegno Gordevio.

5 Bilancio e conclusioni

Il percorso annuale proposto ha attivato differenti competenze sociali: raccontarsi, ascoltare l'altro e mettere le conoscenze e le proprie esperienze a confronto. Il progetto ricco di esperienze legate al territorio ha permesso di giocare con gli stimoli del contesto, di attivarsi in giochi della tradizione e di crearne di nuovi. Coinvolgere le famiglie, con le interviste e il gioco fotografico riguardante il territorio,

ha pure intensificato lo scambio di idee e di confronto fra bambini e il buon rapporto con le famiglie. Gli ambiti di sviluppo attivati spaziano dalle conoscenze socio-affettive, percettive, cognitive con un'attenzione a quelle matematiche.
La richiesta iniziale di portare una foto del proprio contesto di vita ha permesso al bambino di esternare sue considerazioni e interessi, presentandosi e raccontando qualcosa di sé al resto del gruppo. Il singolo allievo è diventato in diversi momenti una risorsa per affrontare nuovi stimoli con tutto il gruppo, ad esempio presentando e condividendo i propri giochi.
Il tema "giochi di una volta" e le esperienze raccontate e vissute sul territorio sono state lo stimolo all'ideazione del nostro sfondo motivazionale: l'allievo può immedesimarsi nel piccolo nipote Josh e riscoprire con lui i giochi fatti a casa con i nonni. Le differenti attività, motivate e rilanciate attraverso lettere e materiali insoliti e/o di uso comune, si susseguono dal semplice al complesso: le fasi del percorso (si veda la **Tabella 1**) vanno dalla scoperta e manipolazione libera di materiali, alla creazione di un nuovo gioco con regole. L'approccio metodologico è cambiato ad ogni stimolo, richiedendo man mano un'ulteriore competenza da attivare. Si è passati dall'*esplorare e provare* procedimenti risolutivi, scoprendo i materiali e associandovi possibili modalità di gioco, a *comunicare e argomentare*, discutendo soluzioni varie, per arrivare poi a *matematizzare e modellizzare*, imparando a tradurre situazioni e descrizioni in linguaggio matematico e schematico, e ad *interpretare e riflettere sui risultati*.

Tuttavia, durante il lavoro spesso si fa fatica, per i tempi ristretti o le differenti situazioni vissute, a fermarsi e ritornare su quanto svolto. A mente fredda e ritornando sull'intero lavoro svolto ci si rende conto che alcune modalità di lavoro e di verifica potevano essere ulteriormente sviluppate. In particolare, sul piano linguistico, varrebbe la pena recuperare i giochi svolti e favorire atti descrittivi ed esplicativi, stimolando un ampio utilizzo di parole per spiegare di regole di un gioco. Ad esempio, quando si è parlato del gioco con regole chiedendo ai bambini «Cos'è e com'è fatto un gioco con regole?» (**par. 4.6**) sono emersi molti spunti da cui partire per arricchire ulteriormente le loro produzioni linguistiche e matematiche. Infatti, come sottolinea bene D'Amore (1999), quando un bambino spiega ad un altro le regole per giocare a un certo gioco,

> «[…] inizia un'avventura linguistica che ci piace prendere come paradigma significativo di attività matematica. Spiegare a parole le regole di un gioco richiede un'organizzazione razionale dell'apparato linguistico di alto livello, non posseduta da tutti. Ascoltare un bambino che spiega ad un altro le regole di un gioco è un'attività di grande interesse e fornisce moltissime informazioni sulle capacità "logiche" di organizzazione linguistica. Attivare situazioni nelle quali ciò avvenga è di straordinaria importanza».
>
> (D'Amore, 1999, p. 13)

In quest'ottica, la matematica viene concepita come campo di esperienza, come «forma di conoscenza che si può rintracciare e scoprire in molte attività dell'uomo, pratiche o anche solo linguistiche» (D'Amore, 1999, p. 13). Ripercorrendo le attività di questo percorso didattico, si avverte quanto sarebbe interessante e proficuo riprendere i singoli giochi, per «cogliere la matematica, esplicitarla, situarla, decontestualizzarla, sfruttarla per avviare questo tipo di percorso di apprendimento» (D'Amore, 1999, p. 41). Sapersi fermare a riflettere, ritornare su quanto svolto e metterci parole sono davvero le fondamenta per un buon percorso di apprendimento.
Due momenti emblematici in cui questo lavoro potrebbe essere approfondito sono, ad esempio, la realizzazione dell'aquilone e la costruzione della trottola. Nel caso dell'aquilone, si potrebbero consegnare i due bastoncini e chiedere ai bambini di posizionarli in modi differenti, di incollarli su una superficie e di unire i punti estremi dei legnetti con linee dritte. Si potrebbe quindi prendersi il tempo per esplorare più a fondo la situazione: «Quali forme si possono individuare? Con bastoncini della stessa misura? Se invece uno è più lungo e uno è più corto?». Nel caso della costruzione della trot-

tola, si potrebbe sviluppare ulteriormente la ricerca del centro del cerchio per inserire un bastoncino, rilanciando la questione a tutti e condividendo idee e strategie.
Tali approfondimenti andrebbero ad innestarsi su un terreno già molto fertile. Nel periodo di febbraio-marzo, durante l'attivazione del laboratorio (definito dai bambini "la fabbrica dei giochi"), si è constatato un ulteriore coinvolgimento, un intensificarsi degli scambi fra bambini e una maggiore autonomia nelle regolazioni e produzioni. I bambini hanno inventato e costruito, messo a confronto le loro idee modificandole in base ai suggerimenti ricevuti (ad esempio, hanno discusso su quali materiali sostituire quando le ruote di una macchinina costruita con le scatole non giravano, o quando un aquilone volava male). In generale, i bambini hanno manifestato, nel secondo periodo dell'anno scolastico, maggiore interesse per lo svolgimento dei giochi a tavolino con regole (giochi in commercio, si veda a questo proposito Battaini et al., 2019). I bambini hanno non da ultimo acquisito una maggiore consapevolezza delle loro competenze in ambito numerico, in particolare relative alla corrispondenza uno-a-uno, enumerazione, conta, conteggio, riconoscimento dei numeri in forma iconica e simbolica (utilizzo del dado e delle carte). Sono state attivate anche competenze di orientamento spaziale, legate soprattutto ai percorsi nel reale e su mappa (ambito geometrico), e competenze legate al sapersi situare nel tempo, ciclico e lineare (ambito grandezze e misure).
Si è trattato di un percorso che ha creato sinergie e autonomia, crescita individuale con esperienze dentro e fuori la sede. Oltre alla sabbia nelle scarpe e i sassolini nel sacchetto per creare nuovi giochi, i bambini si sono portati a casa storie e aneddoti da ascoltare per scoprire i giochi della tradizione a volte dimenticati, giochi ricchi di emozione, strategia e coinvolgimento. Un contesto tutto da esplorare con gli occhi e le parole dei bambini, come propongono di fare Carminati e Tappari (2021) nella loro poesia:

> «Esci a fare quattro passi:
> prendi aria, ti rilassi
> mentre conti mi racconti
> quel che vedi, quel che incontri.
>
> Ci sono tante cose da guardare quando si fa una passeggiata,
> anche se si percorrono sempre le stesse strade: ogni oggetto
> del mondo non è mai solo se stesso, ma ne richiama altri
> con cui compone famiglie, squadre, collezioni…
> Segui questo invito a passeggiare tra immagini e parole,
> lascia fluire il senso di meraviglia.
> E dopo aver chiuso il libro, apri la porta».

Ringraziamenti
Ringrazio i bambini e le famiglie per il grande entusiasmo. Le mie colleghe Manuela Viecelli ed Elena Mesterhazy coinvolte nel progetto. Odile Pedroli per i suoi consigli, Marco e Michela Bettoni per alcuni materiali di gioco (descritti nel loro articolo, presente in questo numero della rivista). Monica Panero per la sua disponibilità e per avermi supportata nella stesura dell'articolo.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G. (2008). *Matematica. I numeri e lo spazio.* Edizioni Junior.

Battaini, L., Bernasconi, I., Franscella, S., & Pellandini, A. (2019). *1, 2, 3… Si gioca! Giochi numerici in continuità dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare.* Collana Praticamente. Divisione scuola, DECS. https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/1-2-3-si-gioca

Bernasconi, L., Piatti, A., & Bottinelli Montandon, M. (2021). Dalla statistica alla creazione di pittogrammi: un esempio di itinerario didattico contestuale nella scuola dell'infanzia. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *10*, 100–118.

Carminati, C., & Tappari, M. (2021). *Quattro passi*. Lapis editore.

D'Amore, B. (1999). *La matematica in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola elementare: ipotesi teoriche, ricerche empiriche ed esperienze ludiche per una educazione matematica significativa.* Pitagora.

De Hey, M. (2010). Envole-toi !. *Dorémi : pour les grands de maternelle – Dorémi extra*, *7.* Editions Averbode.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://pianodistudio.edu.ti.ch

Llenas, A. (2019). *Il mostro dei colori va a scuola*. Feltrinelli.

Lombardo Radice, L. (1979). *Il giocattolo più grande.* Giunti Marzocco.

Martinelli, S., & Martinetti, P. (2021). *Prendiamoci il tempo.* Collana Praticamente. Divisione scuola, DECS. https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/prendiamoci-il-tempo

Peres, E., & Sbaragli, S. (2021). Gioco e matematica: un connubio per la mente. *Scuola ticinese*, *340*(2), 29–36.

Pontecorvo, C. (1989). *Un curricolo per la continuità educativa dai quattro agli otto anni*. La Nuova Italia.

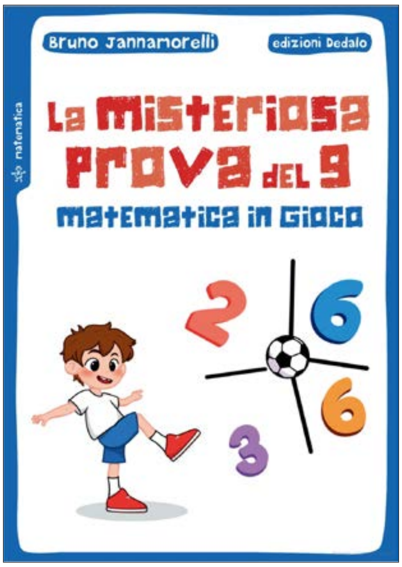
Sbaragli, S. (2021). *Linee guida del progetto MaMa. Impostazione metodologica, disciplinare e didattica del progetto. Ambito Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport, Dipartimento formazione e apprendimento. https://mama.edu.ti.ch/wp-content/uploads/2021/11/2021-Guida-MaMa-Numeri-e-calcolo.pdf

Recensioni

DdM

Recensioni[1]

Jannamorelli, B. (2023). *La misteriosa prova del 9*. Edizioni Dedalo.



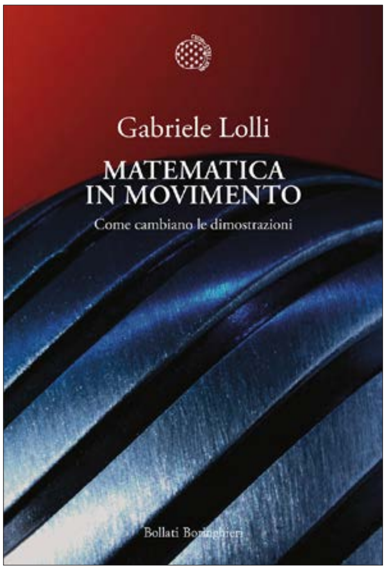
Pubblicato dalle Edizioni Dedalo a febbraio 2023, *La misteriosa prova del 9* è prima di tutto un libro che racconta di una relazione speciale: quella tra il nonno Beppe, maestro in pensione, e i suoi due nipotini, Gianni e Claudia. L'autore, docente di matematica nei licei e di didattica della matematica all'Università, ha giustamente pensato che inserire una cornice a forte valenza affettiva potesse aiutare i piccoli lettori a non partire prevenuti rispetto ai vari temi matematici, tutt'altro che banali, che si affrontano nel testo. Che non siano temi banali lo testimonia anche la scelta, molto efficace, di aggiungere una sezione finale di approfondimenti di varia natura: si va da alcune pagine utili a impratichirsi con attività laboratoriali o esercitative al cosiddetto "angolo dei grandi", in cui si dà al lettore qualche suggerimento per sviscerare l'argomento in classe o a casa. Ma torniamo alla storia. Fin dal primo paragrafo (dal confortante titolo *Che noia le moltiplicazioni!*) il lettore è coinvolto in un arco narrativo fatto di momenti quotidiani (come le merende, i giochi all'aperto, i pranzi e i compiti per casa) all'interno dei quali si parla di moltiplicazioni a mente, "a reticolo" e di moltiplicazioni con le dita; si affronta poi la regola della prova del 9, mettendola in discussione, e poi ancora l'aritmetica dell'orologio, le prove del 3, del 5 ecc. Il fine concettuale del libro è arrivare a capire i meccanismi logici e aritmetici che conducono ragionevolmente ad affermare che la prova del 9 tanto "prova" non è. Ma, per arrivarci, nonno Beppe dovrà faticare non poco, e scardinare alcune convinzioni dei suoi giovani nipoti (e forse anche di qualche insegnante): ad esempio che in aritmetica non si debba disegnare perché il disegnare è attività specifica della geometria; oppure che in matematica si debbano applicare procedure, senza stare tanto a chiedersi perché funzionino; oppure ancora che il risultato di un'operazione, o la soluzione di un problema, possano essere raggiunti in un solo modo. Insomma, leggendo attentamente ci si rende conto che forse l'autore ha utilizzato questa "misteriosa" prova

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

per condurre il lettore in due riflessioni: una riflessione su alcuni meccanismi aritmetici e una riflessione riguardo alla visione della matematica. Entrambe hanno una grande importanza: la prima ci porta a riconoscere e a ragionare sulle proprietà della moltiplicazione e dell'addizione, e ad analizzare matematicamente alcune usuali tecniche di calcolo che ingenuamente potremmo pensare prive di interesse; la seconda invece ci porta a considerare la matematica come un'attività esplorativa, fatta di scoperte, avventure, soste, sentieri misteriosi e poco illuminati che però aprono la strada a luoghi nuovi e affascinanti.
Ecco perché, come specificato nella quarta di copertina, il libro è consigliato ai curiosi dai 9 ai 99 anni: perché non è mai troppo presto né troppo tardi per scoprire i tesori del mondo della matematica e gustarne a pieno i sentieri.

Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

Lolli, G. (2022). *Matematica in movimento. Come cambiano le dimostrazioni.* Bollati Boringhieri.

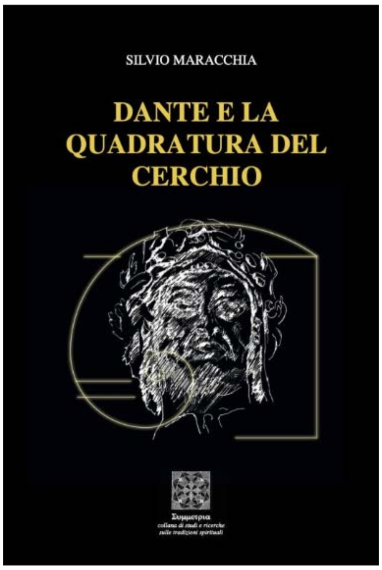


Perfino fra le persone che si autoreputano colte in matematica c'è talvolta (anzi: spesso) la diffusa convinzione che la nostra disciplina sia una specie di sacrario storicizzato perenne, senza mutamenti, che i paladini dei contenuti e delle modalità creative siano quelli eterni, fissi, che la storia ha consacrato, Pitagora, Euclide, Archimede; che una dimostrazione resti immutabile nei secoli, nei millenni; che la coerenza e il rigore siano essi stessi perenni e non soggetti a modifiche.
Ricordo ancora che, tentando di mettere in discussione tutto ciò in un mio articoletto del 1990, ebbi fior di contestazioni e dissidi: il rigore è eterno, mi si ribatteva, le modalità di creazione della matematica sono perenni, uniche ...
Ma non è così. La matematica di oggi è assai diversa, nei temi, nei modi, nel linguaggio, nelle pretese di quel cosiddetto rigore, nelle modalità di esposizione e di dimostrazione da quella anche solo di 100 anni fa, tanto per fare riferimento esattamente a quel periodo durante il quale questo tipo di discussione (peraltro sempre esistita) si faceva violenta, evidente, esasperata. Nascevano epistemologie, logiche, definizioni, strumenti matematici, convinzioni matematiche, idee che stavano scuotendo con veemenza ogni esasperata velleità fondazionale supposta unica, immutabile.
In particolare, quel che colpisce di più, è la modalità dimostrativa. Come tutti i lettori ben sanno, si sono avvicendate, nel corso dei secoli, modalità dimostrative tra loro assai diverse. E il processo segue, inarrestabile, sempre più rapido.
Se è vero, come è vero, quel che scrive l'autore, Gabriele Lolli, che a scuola l'attività dimostrativa continua a essere insegnata come fondata, basata, asserita su principi che datano millenni e che vengono ritenuti e dunque proposti culturalmente come perenni e universali, unici, è anche vero invece che le modalità dimostrative sono varie, alcune tra loro radicalmente diverse. È certo il fatto che taluni disdegnano, disapprovano, ridicolizzano le modalità diverse dalle proprie, quelle sulle quali si sono formati, ma è altrettanto vero che ci sono forme nuove, affascinanti, sorprendenti che si sono affermate, altre che sono in fase di farlo, ma che già s'avvertono.
Ecco, nelle precedenti linee ho cercato di riassumere in poche battute uno dei contenuti di questo affascinante libro, denso di notizie storiche, logiche, epistemologiche, un libro attraente che è necessario leggere e meditare, sia se si è matematici (soprattutto se si ritiene che il proprio modo di dimostrare sia "il" corretto, unico, indiscutibile), sia se si è docenti di matematica di scuola, per allargare il repertorio delle modalità di strade possibili, almeno quello personale, giungendo ad accettare con

apertura mentale dimostrazioni meno formali, anche da parte degli studenti, e non solo ripetizioni apprese a memoria che hanno significato solo per un adulto.
Ma non c'è solo questo, nel libro di Lolli. Vi si parla di storia, di logica, in modo molto profondo, di assiomatiche, della contrapposizione mai abbastanza discussa e analizzata fra Hilbert e Bourbaki, di che cosa vuol dire davvero assioma, di come ci siano state nella matematica rivoluzioni sofisticate e devastati, talvolta occorse senza che tutti se ne rendessero conto. Questo libro parla di un tema affascinante, tecnico, unico, la "bellezza della matematica", che cosa significa davvero questo sostantivo semanticamente così vario. Un capitolo tremendamente interessante è l'undicesimo, nel quale si inizia commentando il famoso testo di Eugene Wigner del 1960 dedicato alla cosiddetta "irragionevole efficacia della matematica", che tutti abbiamo letto, ma non sempre compreso in profondità. (Invito tutti coloro che si ritrovano descritti dalla precedente frase a leggere tale capitolo).
E poi… e poi! Che cosa sarà la dimostrazione in futuro? Chi ricorda quando, nel 1977, apparve la "dimostrazione" di Kenneth Appel e Wolfang Haken relativa alla congettura-teorema dei 4 colori? Ho messo "dimostrazione" fra virgolette perché in quella occasione si accese un dibattito tremendo proprio sulla modalità (da pochi ritenuta accettabile) delle dimostrazioni affidate a macchine, in grado di effettuare operazioni di stima, di comparazione e di sintesi impossibili per un essere umano. Credo che tutti noi partecipammo a quel dibattito epistemologico, forse mai sopito. Ma ora ci siamo. Non soltanto questo tipo di dimostrazioni sono accettate dai più, ma sono sempre più comuni e potenti.
Un intero scaffale della mia vasta biblioteca personale contiene solo libri di Gabriele Lolli, molti dei quali da me recensiti negli anni, alcuni dei quali riletti, tutti apprezzati; ma questo, questo è una vera e propria bomba!, ricco com'è di citazioni, di esempi, di approfondite spiegazioni. Lo suggerisco subito, appena finito di leggere, confessando che lo rivedrò daccapo nelle prossime settimane, quaderno e matita a portata di mano, per prendere preziosi appunti.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia

Maracchia, S. (2022). *Dante e la quadratura del cerchio.* Simmetria Edizioni.



Il titolo di questo breve lavoro di Silvio fa riferimento solo a uno dei diversi temi trattati; in realtà nel libro si affrontano molteplici sfaccettature di quelle che possiamo descrivere come le citazioni matematiche nell'opera complessiva di Dante.
Molti sono di fatto gli argomenti proposti, di carattere aritmetico, geometrico, logico, coinvolgenti tutta l'opera di Dante, non solo la *Comedìa*, anche il *Convivio*, la *Monarchia*, la *Questio de aqua et terris*.
Alcune sono fra le più note, quelle alle quali molti di noi autori di questo specifico settore facciamo sempre riferimento, trattate con l'acume usuale cui Silvio ci ha abituato nelle sue opere; altre sono più sottili, di stampo filosofico o, meglio, epistemologico. Sulle quali torneremo.
Uno dei temi che appassionano coloro che vogliono analizzare le citazioni matematiche di Dante è quello relativo alla sua formazione matematica: come si è costruita, su quali testi, di quali autori. Per esempio, aveva letto Dante davvero l'opera di Fibonacci? Davvero aveva almeno sentito parlare di quella di Archimede, dato che non poteva averla conosciuta direttamente? Fino a che punto si era spinto nell'esaminare Euclide? E la logica? Che logica conosceva? Com'è possibile che più d'uno tra noi voglia vedere suoi riferimenti al teorema cosiddetto dello Pseudo Scoto (attribuito da alcuni decenni a Giovanni di Cornovaglia)? Come distingueva il modo di creare la matematica, in particolare la geometria di Euclide e dei grandi matematici greci, rispetto al modo di trattarne di Aristotele? Avendo dedicato diversi decenni a questi studi, so che tale problematica non si risolverà, forse mai; ma trovo corretto che ogni autore-studioso che se ne occupi faccia proposte personali, documentate con quanto è disponibile oggi, grazie agli studi sempre più critici, profondi, analitici che rapidamente si susseguono. E questo di Silvio è un bell'esempio di come procedere, con cautela ma anche con coraggio, soprattutto quando si possono citare fonti o riferimenti a difesa del proprio modo di concepire, delle proprie intuizioni.
Trovo affascinante il tentativo di proporre al lettore un Dante epistemologo moderno, dunque non costretto dal fascino aristotelico a difendere la dimostrazione in matematica (in particolare in geometria) soggetta alla prassi greca che vede nel sillogismo il trionfo del "se allora". La moderna logica, oramai quasi cent'anni dopo Gödel, è diversa assai e poca fede riserva alle caratteristiche che dominavano la cultura matematica greca classica e ancora quella medioevale. Oggi le cose sono evolute o, almeno, modificate; e, come scrivono molti altri autori a questo proposito, la logica ha cambiato

aspetto, scopo, attenzione, volgendosi più alla metamatematica che alla logica in sé. «Una scienza organizzata come sistema ipotetico-deduttivo non sarebbe in grado di autogiustificarsi», scrive Silvio a pagina 61.
Questo è, a mio avviso, il tema centrale e forse il più interessante di questo libro; e costituisce la spiegazione del capitolo finale, nel quale il nostro autore racconta di un sogno suggestivo e rivelatore avvenuto in «un giardino costituito di aree ben curate colme di fiori», nel quale incontra personalmente Dante, che lo riconosce e che dimostra di aver letto le sue opere. E Dante, appunto, si rivela per come Silvio vuole che sia, un creatore che crede alla matematica come «costruzione dello spirito umano, fatta di relazioni, di simmetria e, soprattutto, di infinito e non dipendente dalle cosiddette dimostrazioni», le quali «offuscano lo spirito matematico» essendo «un peso inutile per chi giunge agli stessi risultati per intuizione, per illuminazione, per magia quasi».
Il sogno di Silvio è rivelatore. Non so se corretto fino in fondo per un personaggio del Medioevo, ma certo affascinante.

Bruno D’Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia

Odifreddi, P. (2022). *Pillole matematiche. I numeri tra umanesimo e scienza*. Raffaello Cortina Editore.

Tanti anni fa, quando ancora non conoscevo di persona Piergiorgio, lessi un suo breve testo, non ricordo più quale; in esso parlava de *De Rerum Naturae* di Lucrezio. Per me era solo la citazione di un'opera sentita nominare mille volte, ma mai letta/studiata per davvero. Ma quella citazione di Piergiorgio era così intensa e convincente, che non trovai altra possibilità, e mi costrinsi a leggere quell'opera. Ne fui così soddisfatto, che cominciai io stesso a citarla e a consigliarla a tutti. Prima e dopo ciò, ho letto credo tutto quel che Piergiorgio ha pubblicato sotto forma di libro. Mentre confesso di aver letto solo di tanto in tanto le sue puntate su *Le Scienze*, negli ultimi 20 anni circa, trovandole esilaranti, dotte, stimolanti, preziose. Nel frattempo ci siamo conosciuti, siamo diventati amici, l'ho invitato in Colombia per un tour di conferenze su tutti i temi possibili (dalla religione, alla storia, all'arte figurativa, ah sì, anche sulla matematica in genere e logica in particolare). Fino al punto di fare una conferenza a due voci, a Ravarino, in provincia di Modena, nell'aprile 2023. Ho sempre raccomandato a tutte le persone che stimo di leggere i suoi scritti perché sono densi, ricchi, utili, colti… Ma poi, la sorpresa! Avendo saputo che non avevo letto tutti i suoi scritti su *Le Scienze*, per farmi un regalo personale, Piergiorgio ha deciso di ristamparli tutti in un libro, apposta per me; e così è nato questo *Pillole matematiche* dal quale ora non riesco più a separami.
È diviso in sezioni.
La prima è *Umanesimo*, a sua volta comprendente varie tematiche ciascuna delle quali ha come titolo un verbo.
In *Divulgare* (che è la sua passione e la sua principale attività) passa da Platone ad Archimede, da Swift a Disney, da Abbott a Gardner e tanti altri autori, in una sorta di carosello preciso e documentato, attraente e significativo, dal racconto, al film, al documentario, al blog. E regalando al lettore dati, storie, immagini, racconti suggestivi, divertenti, colti, innumerevoli. E facendo capire bene finalmente a tutti che cosa sia la divulgazione vera, di classe, divulgazione dotta!
Poi *Raccontare*, che comprende una decina di storie narrate con quella verve e quella sapienza che ti lasciano senza fiato, facendo uso di testi scelti fra i più belli e significativi di vari letterati, da Dostoevskij a Verne, da Borges a García Marques a Dan Brown, passando da Mann e Broch, senza dimenticare Tolstoj ed Eco. In ciascun caso la narrazione e le scelte sono di una efficacia esemplare che ti lascia senza fiato. Perfino quando sai già tutto, il modo di dirtelo è appassionante, diretto, contundente.

Segue il verbo *Rappresentare*, nel cui ambito appaiono Archita, Giotto, Leonardo, Raffaello, Manet e tanti altri, tra i quali, questa volta inaspettato, Kubrick. D'altra parte, molta matematica *si deve* rappresentare, e altra *serve per* rappresentare; a volte ce ne dimentichiamo. Ma gli esempi sono precisi e chiarissimi.

Giocare è il trionfo dei più famosi giochi, narrati e spiegati ed esemplificati con arguzia e sensibilità, Tris, Scarabeo, Origami, i puzzle di Loyd, Sudoku, Dama, Scacchi, Hex, Go, Life, con un omaggio finale a Conway, da tutti noi super amato. Né poteva mancare il riferimento all'*Arte Amatoria* di Ovidio, esempio che anch'io amo fare per attrarre l'attenzione della platea.

Segue il capitolo *Curiosare*, nel quale si presentano vari temi matematici a carattere giocoso o almeno inatteso, come la geometria del taxi, le ruote quadrate, i pendoli di Huygens, la legge di Hack sulla lunghezza dei fiumi, Luis Carroll e una versione moderna di problemi che risalgono ad Alcuino di York, il famoso autore di uno dei più famosi libri sui giochi matematici della storia. (E qui ci sarebbe tutta una storia da raccontare a proposito di un presunto saccheggio da un libro precedente, di Beda il Venerabile, sempre di York; ma sarà per un'altra volta).

Il tema successivo è espresso con il titolo *Vivere e morire*, bellissimo, appassionante, nel corso del quale appaiono nomi come Pascal, Euler, Hilbert, Weil, Villani, Thurston, Kreisel, Nash, Mirzakhani e Atiyah. Piergiorgio ci obbliga a riflettere su temi profondi, esistenziali, in relazione a esseri umani speciali. La lettura del testo su Nash mi ha ricordato con entusiasmo quando mi invitò a tenere la conferenza finale del suo *III Festival della matematica* a Roma, la sera del 22 marzo 2009, che ahinoi fu anche l'ultima conferenza di quel ciclo leggendario, dato che mai ci fu un IV festival per via della miopia di politici locali. Ebbi in quei giorni l'occasione di conoscere Nash, personaggio davvero leggendario, non certo per via del famoso film su di lui, ma per quanto ha saputo creare in matematica, con moglie e figlio. (L'emozione era anche dovuta al fatto che la mia tesi di laurea in matematica a Bologna e il mio primo libro pubblicato fu proprio sulla teoria dei giochi, ma non lo dissi a Nash). Ricordo che, in quella occasione, Piergiorgio chiese a Martha e a me di prestare 100 opere di Oscar Reutersvärd da mettere in mostra nel corso del festival, cosa che avvenne, ovviamente; con centinaia di persone in fila per ammirare, una per una, queste opere, discutendone, dita puntate su ciascuna di esse. Come avvenne, in situazione analoga a Bogotà, in una bella sala espositiva della Universidad Nacional, sempre Piergiorgio presente. Una grande occasione per potenziare la cultura matematica, buttata via, trascurata, addirittura ignorata da chi non ha mezzi per capirla.

Tornando alle pillole, si passa poi alle *Scienze* e fanno così la loro apparizione la geografia, l'astronomia, la fisica, la chimica, la biologia, l'economia e la politica, sempre con esempi assai più che calzanti, convincenti, unici, profondi, contundenti. Devo ammetterlo, spesso perfino per me stesso inattesi. Il tutto con un linguaggio che, sebbene sia chiarissimo e leggibile, è però coerente e scientificamente corretto, come solo un vero divulgatore sa fare.

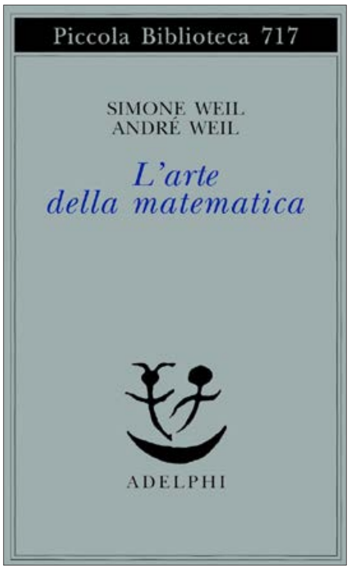
A chi è destinato un libro come questo? A chi lo posso consigliare? Per prima cosa a tutti coloro che amano la matematica, professionisti o no, perché per costoro sarà un piacere leggerlo, una bella avventura intellettuale, anche proprio sul piano della curiosità e (spesso) della sorpresa. Ma anche a coloro che hanno dubbi sulla matematica e vogliono saperne di più, senza doversi sorbire testi tecnici universitari un po' pesantucci (a volte).

Ma io sto pensando, è una mia tendenza naturale, una sorta di vizio intellettuale, a quegli insegnanti nella cui classe ci sono studenti che non sopportano, non capiscono, non accettano la matematica; se a costoro si potessero offrire, di tanto in tanto, storie avvincenti come queste, e non solo la proposta di trovare le radici di un'equazione di secondo grado, beh, credo che sarebbe un vantaggio per tutti: per questi studenti, in primis, per il docente, che d'improvviso diverrebbe un dispensatore di idee geniali e piacevoli e (pur sotto il nome "matematica"). Credo che questo libro potrebbe avere un suo posto nell'aula e un suo ruolo didattico, narrativo, enciclopedico, … lasciatemelo dire, divertente, aggettivo che per molti studenti e colleghi stona un po', fra quelli che s'usano relazionare con la matematica.

Se c'è ancora qualcuno che crede alla favola delle *due culture*, inventata per sollevare l'animo a chi non sa nemmeno leggerla, la scienza in generale e la matematica in particolare, bene, questo libro è per costui una definitiva sconfitta, senza più appello.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia

Weil, S., & Weil, A. (2018). *L'arte della matematica*. Adelphi.



Durante la prima metà dell'anno 1940 André Weil è imprigionato per essersi sottratto alla leva militare, avendo ritenuto suo dovere "fare il matematico e non la guerra". Dal carcere, intrattiene un vivace scambio epistolare con la sorella Simone: il loro carteggio è riprodotto in *L'arte della matematica*, traduzione di Maria Concetta Sala dell'originale francese a cura di Robert Chenavier e André Devaux, pubblicato da Adelphi nel 2018.

Nella prima lettera Simone provoca André, che all'epoca era già un matematico affermato: «Visto che di tempo ne hai anche troppo, un'altra occupazione potrebbe essere quella di riflettere sul modo di far intravedere a profani come me in che cosa consistano esattamente l'interesse e la portata dei tuoi lavori» (p. 12). La discussione innescata da questa domanda si snoda lungo tutto il libro e intaglia, una faccetta dopo l'altra, un prisma che riflette l'idea di matematica del lettore e la irradia di nuovi colori. Non un cristallo che diffonde luce soffusa, ma una punta di diamante dagli spigoli affilatissimi che infrange molti stereotipi e luoghi comuni.

Il titolo del libro strizza l'occhio alle formule usate a volte per associare la matematica all'arte in modo vagamente estetizzante. Invece qui Simone intende l'arte come ciò che «rende[re] sensibile un'affinità tra la mente umana e l'universo» (p. 40). E la matematica è arte in quanto «scultura in una materia estremamente dura e resistente (come certi porfidi che a volte usano, credo, gli scultori)» (p. 18) – così André, con quel "credo" infilato nella parentesi che rivela la tipica cautela di chi è educato alla matematica. Anche a scuola la nostra materia offre un'ottima palestra per sviluppare quella prudenza intellettuale così preziosa sia per la formazione dei futuri cittadini sia come baluardo difensivo a fronte dei pericoli del mondo digitale.

E che dire della presunta contrapposizione tra rigore formale ed emozioni? André (uno dei fondatori del gruppo Bourbaki!) descrive l'esperienza della ricerca in matematica parlando di «angoscia e delizia», di «palpeggiamenti un poco adulteri» e di «torbidi e deliziosi riflessi» (pp. 57-58). Chi si cimenta con un problema di matematica è «sottomesso al filo, al controfilo, a ogni curvatura e anche alle asperità della materia con cui lavora» (p. 19). La franchezza e l'ironia che pervade il dialogo tra fratello e sorella non lasciano dubbi sulla genuinità di queste descrizioni.

Lungo il libro incontriamo anche molte riflessioni dedicate alla storia della matematica. Non ho competenza per esprimermi sul loro merito storico, ma posso assicurare di avervi trovato interessanti spunti di riflessione. Ad esempio, Simone esprime il timore che Bourbaki porti la matematica moderna a diventare "un gioco più che un'arte" assumendo così una posizione "lontana dal mondo". E indica come modello positivo i greci antichi che «non attribuivano valore ad un metodo di ragionamento di per sé, ma gli attribuivano valore in quanto permetteva di studiare in modo efficace problemi concreti» specificando subito che «non [erano] avidi di applicazioni tecniche» (p. 40). La distinzione qui è dunque più sottile rispetto alla banale contrapposizione tra matematica pura e applicata, e lascia trasparire la poliedricità del pensiero di Simone (filosofa, mistica e attivista politica dedita alle cause sociali).

È intrigante notare come questi pensieri evochino il *Gioco delle perle di vetro* che Hermann Hesse stava ultimando proprio mentre i fratelli Weil si scambiavano le loro lettere[2]. Il personaggio principale del romanzo di Hesse vive una profonda lotta interiore: dedicarsi completamente al *Gioco*, poderoso sistema di regole astratte che unifica tutta la scienza in una elegantissima costruzione formale, significa rinunciare al contatto con il mondo e ad un ruolo attivo nella società umana. E tuttavia il *Gioco* ha radici nobili: è reazione alla *feuilletonistische Epoche* – che Hesse descrive come un tempo in cui la curiosità del cittadino si esaurisce negli articoli divulgativi degli inserti culturali o scientifici dei quotidiani; anzi, quanto non può essere ridotto a tale formato viene considerato inutile ed elitario.

Non siamo lontani dallo scrupolo di André. Egli crede che descrivendo la sua ricerca in matematica a chi non ne ha esperienza rischierebbe di produrre solo «frasi, o tutt'al più un componimento bello o brutto, che non ha nulla a che vedere con ciò che si voleva descrivere» (p. 18). Da qui la sua iniziale reazione negativa alla richiesta della sorella: non scontrosità o sufficienza, ma convinzione che nulla può sostituire l'*esperienza diretta* di quel porfido scabroso dai deliziosi riflessi.

Infine André cede, e nella settima lettera ci regala un sontuoso racconto con, tra le altre, osservazioni illuminanti sul ruolo dell'analogia in matematica, su necessità e pericoli delle teorie unificatrici eccessivamente generali, e su uno «scultore di mestiere che si diverte a fare un pupazzo di neve» (p. 65). Una prosa schietta, spontanea e sanguigna – al punto che conclude avvertendo: «Ti mando tutto senza rileggere, perché se rileggessi non lo manderei» (p. 64).

Ed è forse quest'ultima la frase più rappresentativa dell'avvincente volumetto che presentiamo. Proprio l'immediatezza dello scambio tra fratello e sorella conferisce unità ad un libro che non si lascia racchiudere in un singolo ambito tematico ma si nutre della giustapposizione di pensieri diversi.

Il risultato non è uno sterile *gioco* di perle di vetro, ma una conversazione tanto erudita quanto appassionata, piena di umanità e di concretezza – e di riferimenti diretti all'insegnamento della matematica a scuola. Un esempio: André propone uno schema in tre punti per «un insegnamento della geometria elementare che ne ripercorr[a] la storia così come me la immagino». Curiosi? Lo troverete a pagina 68 del libro. Buona lettura!

Emanuele Delucchi
Istituto Dalle Molle di studi sull'intelligenza artificiale
USI/SUPSI, Svizzera

2. Il libro di Hesse sarà pubblicato nel 1943, alla fine di una gestazione lunga più di un decennio e poco dopo la prematura morte di Simone.

Zan, R. (2021). *Mio figlio ha paura della matematica*. Giunti EDU.

A settembre scorso, pochi giorni dopo l'inizio della scuola, un amico insegnante di matematica in un Istituto Tecnico mi inviò un messaggio nel quale riassumeva le risposte a una richiesta fatta ai suoi studenti del primo anno. La richiesta era «Scrivi un'emozione per descrivere il tuo rapporto con la matematica» e le risposte degli alunni, usciti da tre mesi dalla scuola media, si raccoglievano quasi tutte attorno alle parole: rabbia, ansia, tristezza e… paura.

«In bocca al lupo…», pensai dentro di me, consapevole del fatto che si trattasse, per il suo lavoro di docente, di una partenza in salita.

Chiunque si occupi di insegnamento-apprendimento della matematica sa che, purtroppo, la situazione degli alunni di questo amico non è rara: tanti docenti hanno a che fare quotidianamente con studenti che associano alla disciplina emozioni in prevalenza spiacevoli. Tra queste emozioni, la più dannosa è probabilmente la paura, forse perché è quella che crea più problemi a un sano processo di apprendimento. Lo sa bene l'autrice di questo formidabile volumetto, Rosetta Zan, già docente di didattica della matematica presso l'Università di Pisa, che da decenni si occupa di processi di insegnamento e apprendimento della matematica, con particolare interesse per le difficoltà degli allievi, il problem solving, la formazione degli insegnanti.

Che il libro sia intrigante lo si desume già dallo specifico uditorio a cui si rivolge: i genitori, spesso spettatori inermi delle preoccupazioni, delle ansie e delle paure dei figli di fronte alla matematica. L'intento dell'autrice in questo senso è duplice: da un lato sensibilizzare i lettori riguardo alla complessa panoramica di motivi che ruotano attorno al rapporto difficile con la materia, dall'altro fornire consigli e indicazioni pratiche per aiutare il proprio figlio a superare la paura e costruire un rapporto sereno con la disciplina. Il testo, una preziosa collana di perle riguardanti l'atteggiamento nei confronti della matematica, è organizzato in tre sezioni: conoscere, capire e intervenire.

La prima sezione ha l'obiettivo di introdurre il tema e delineare alcuni elementi di riflessione: per esempio l'inevitabile intreccio tra paura della matematica e difficoltà in matematica; oppure i risultati di alcune ricerche che mostrano come la paura della matematica sia trasmissibile da una generazione all'altra; o ancora, come la paura della matematica possa condurre a scelte di evitamento, piccole di tutti i giorni, o grandi quando si rinuncia a scelte di studi a causa della presenza della matematica come disciplina del curricolo.

La seconda sezione è quella più ampia; leggendola, appare manifesta la cura con la quale sono stati scelti gli snodi concettuali, la disposizione dei temi, gli esempi, le parole, con le quali dipanare il senso del discorso. L'attenzione agli aspetti comunicativi è tale che sembra che ci sia stato, nella redazione del testo, qualcosa di più della consueta abilità di scrittura con cui l'autrice ci ha abituati ad aver a che fare nei suoi lavori. A tal proposito, non ho potuto fare a meno di ipotizzare che dietro a questo sforzo intellettuale ci sia stata un'intenzione particolare: forse Rosetta Zan ha sentito l'urgenza di divulgare nel modo più chiaro, semplice e al contempo rispettoso della disciplina, i risultati di anni di ricerche a quella fetta di utenza che, difficilmente raggiungibile attraverso convegni o pubblicazioni scientifiche, ciò nondimeno è coinvolta in modo non marginale nelle dinamiche di apprendimento degli studenti. Ci vuole ancora più chiarezza, sembra aver pensato l'autrice, per riuscire a condurre i genitori a comprendere questioni riguardanti un apprendimento che, nella stragrande maggioranza dei casi, è per loro ormai lontano nel tempo. Così, questa sezione affronta in modo coraggioso, preciso e limpido allo stesso tempo, i veri punti cruciali della questione: la paura di sbagliare (che è il centro di una catena di paure), il ruolo dell'errore in matematica e le implicazioni di una visione distorta e negativa di questo aspetto; e ancora, le caratteristiche della matematica che la rendono fonte di difficoltà, le molteplici conseguenze negative di una visione della matematica come disciplina procedurale, il ruolo del senso di autoefficacia per costruire una sana fiducia di potercela fare; e poi un ampio e importantissimo capitolo dedicato ai problemi, alle loro caratteristiche più comuni e a quelle che invece dovrebbero avere, alla distinzione tra problemi reali e falsamente reali, all'importanza della dimensione linguistica nella comprensione di un problema di matematica. È una lettura appassionante, che coinvolge il lettore in una catena di assensi del tutto spontanei, grazie ai quali ci si sente ineluttabilmente portati ad aderire alle varie tesi proposte dall'autrice. Segno che le riflessioni proposte hanno la forza persuasiva della verità.

L'ultima sezione si occupa di delineare alcune piste di lavoro, e viene incisivamente intitolata "Spezzare il circolo della paura". Si danno consigli pratici per un'educazione casalinga al problem solving, così da incentivare ad esempio un approccio giocoso, fantasioso, nel quale l'invenzione di tante strategie non è vista come una perdita di tempo, ma come principale caratteristica dell'attività di risoluzione di problemi. Infine, l'autrice regala alcune riflessioni per instaurare un rapporto fra scuola e famiglia che vada all'insegna della comprensione reciproca e del lavoro congiunto per il bene dello studente.

È inutile girarci intorno: bisognerebbe che questo libro venisse letto in primis da quelli che l'autrice ha individuato come destinatari, cioè i genitori di studenti di scuola elementare e media. Ma anche gli insegnanti possono trovare in questo testo una sintesi, veramente efficace, delle principali problematiche legate all'atteggiamento nei confronti della matematica, così da averle sempre in mente quando entrano in classe.

Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera