Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 12

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Impaginazione:
Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
matematica

12

Novembre 2022

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), I - II, DOI:10.33683/ddm.22.12.0
OPEN ACCESS

Editoriale

La rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* giunge al dodicesimo numero, l'ultimo del 2022. Fin dalla sua nascita, la rivista ha avuto come principale finalità quella di accorciare la distanza tra il mondo della ricerca in didattica della matematica e quello delle esperienze didattiche sul campo. Anche questo numero, ovviamente, persegue questo obiettivo, e lo fa con una serie di contributi di qualità, scritti da studenti, docenti, docenti-ricercatori e ricercatori, appassionati di quel delicato processo che è l'insegnamento-apprendimento della matematica.

Come di consueto, nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli. Il primo affronta l'importante tema della comprensione del testo di un problema con alcuni studenti del primo anno di una scuola secondaria di secondo grado italiana[1] che, prima di risolvere un problema, sono stati invitati ad analizzarne criticamente il testo; gli autori propongono una riflessione sui dati raccolti, mostrando come la maggior parte degli studenti, dopo aver lavorato sulla comprensione del testo, migliori la correttezza delle risposte e produca argomentazioni a supporto delle stesse. Il secondo articolo espone un'interessante riflessione riguardo la relazione etica degli studenti con un documento tratto dalla storia della matematica; un'attività di interpretazione di un brano di Eulero, effettuata in una classe quinta di scuola secondaria di secondo grado, consente all'autore di evidenziare varie problematiche in termini di responsività e responsabilità dello studente nei confronti del testo; alla luce del pensiero di Levinas e Gadamer, l'attenzione è rivolta a come gli studenti orientano la loro interpretazione, come affrontano il confronto con il punto di vista dell'altro, e come seguono l'autore nei suoi ragionamenti. L'ultimo articolo di questa sezione presenta l'analisi del discorso matematico degli studenti di una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado italiana,[2] intrapreso durante una lezione sul riconoscimento delle altezze di un triangolo; l'obiettivo delle autrici è documentare e descrivere le realizzazioni del significante *altezza* comparse durante l'attività, così da mettere in luce sia la ricchezza del discorso di classe, sia le interazioni tra realizzazioni diverse.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Il primo contributo descrive un'esperienza condotta in una scuola secondaria di primo grado italiana all'interno dell'unità didattica dedicata al cerchio e alla circonferenza; a partire dalla famosa burla dei cerchi nel grano risalente agli anni '70, gli studenti sono stati sfidati a progettare un loro originale cerchio: questa richiesta ha sollecitato la mobilitazione di competenze di misura e disegno tecnico, oltre all'ideazione di vere e proprie istruzioni operative, così da stimolare da parte degli studenti un atteggiamento positivo nei confronti della disciplina. Il secondo contributo presenta alcune esperienze didattiche effettuate nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria in Italia;[3] queste esperienze sono state progettate sia per conoscere le rappresentazioni di oggetti della geometria scelte e usate spontaneamente dai bambini, sia per favorire la visualizzazione e il passaggio dal modo di vedere *iconico* al modo di vedere *non iconico* richiesto in geometria; i risultati consentono di sottolineare l'importanza di lavori di decostruzione dimensionale delle figure in unità figurali di dimensione inferiore, di descrizione delle figure, di costruzione e arricchimento del vocabolario tecnico, di costruzione delle figure con riga e

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.
2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino. In Canton Ticino la scuola media dura quattro anni.
3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

compasso. Il terzo contributo descrive un'attività didattica nata da un classico problema di calcolo combinatorio e probabilità che si sono posti due studenti di quinta liceo scientifico in Italia – studenti che sono anche due degli autori dell'articolo; dopo la spiegazione dei primi tentativi di risoluzione, che hanno previsto l'uso di simulazioni al computer e l'implementazione di due diversi approcci per la ricerca di regolarità matematiche, gli autori presentano l'ultima fase dell'esperienza: raccontare ai compagni e alle compagne tutto il lungo e articolato processo di approccio al problema, condividendo l'attività di ricerca, insieme allo stupore e alla meraviglia provati. Anche l'ultimo contributo racconta un'esperienza legata all'ambito probabilistico: nell'articolo viene descritto un percorso, proposto in una classe terza liceo scientifico, che verte attorno ad alcune domande di fondo: come distinguere sequenze binarie finite generate dal lancio ripetuto di una moneta da altre immaginate da un agente umano o simulate con una calcolatrice che utilizza un algoritmo deterministico? I risultati dell'esperienza condotta mostrano come gli alunni siano riusciti a riflettere in modo critico sulle loro convinzioni relative alla probabilità e al caso.

Non resta dunque che augurarvi una buona e profonda lettura, con la speranza che queste riflessioni ed esperienze siano di ispirazione per altre applicazioni di ricerca e di sperimentazione in aula.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Editorial

The *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* journal is now in its twelfth issue, the last in 2022. Since its inception, the main aim of the journal has been to shorten the distance between the world of the research in Mathematics Education and the world of everyday teaching and learning experiences in the classrooms. This issue also pursues such an aim thanks to a series of high-quality contributions, written by students, teachers, teacher-researchers and researchers who are interested in the delicate process of teaching and learning mathematics.

As usual, there are three articles in the *Riflessione e ricerca* section. The first deals with the important topic of understanding the text of a problem with some 9th graders attending an Italian upper secondary school[1] who, before solving a problem, were asked to critically analyse its text; the authors propose a reflection on the data collected, showing how most students, after a text understanding work, improve the correctness of their answers and produce arguments in support of them. The second article presents an interesting reflection on students' ethical relationship with a document retrieved from the history of mathematics; an interpretation activity of a passage written by Euler, carried out in a 13th grade class, allows the author to highlight various issues in terms of students' responsivity and responsibility towards the text; in the light of Levinas's and Gadamer's thought, the focus lies on how students orient their interpretation, how they deal with the other's point of view, and how they follow the author in his reasoning. The last article in this section presents the mathematical discourse analysis of students attending 7th grade in an Italian lower secondary school,[2] during a lesson concerning the identification of the heights of a triangle; the authors' aim is to detect and describe the realisations of the signifier *height* appeared during the activity, so as to highlight both the richness of the class discourse and the interactions between different realisations.

There are four articles in the *Esperienze didattiche* section. The first contribution describes an experience conducted in an Italian lower secondary school as part of the circle and circumference teaching unit; starting from the famous crop circles hoax of the seventies, the students were challenged to design their own original circle: this request mobilized measurement and technical drawing skills, as well as the design of real operating instructions, so as to inspire a positive attitude towards the discipline. The second contribution presents some didactic experiences carried out in kindergarten and primary school in Italy;[3] these experiences were designed both to learn about the representations of geometrical objects chosen and used spontaneously by children and to encourage visualization and the transition from the *iconic* way of seeing to the *non-iconic* way of seeing required in geometry; the results emphasise the importance of engaging students in activities like dimensional deconstruction of figures to reach smaller dimensional figural units, as well as figures description, construction and enrichment of technical vocabulary, and straightedge-and-compass figures construction. The third contribution describes a teaching activity arising from a classic combinatorial calculus and probability problem posed by two 13th graders of an Italian scientific upper secondary school – students who are also two of the authors of the article; after explaining the first attempts to solve the problem, which involved the use of computer simulations and the implementation of two different approaches

1. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.
2. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.
3. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.

to search for mathematical patterns, the authors present the last phase of the experience: telling their classmates about the whole long and complex process of addressing the problem, by sharing the research activity, together with the amazement and wonder they felt. The last contribution also illustrates an experience related to the probabilistic field: the article describes a learning path, proposed in a 11^{th} grade class of a scientific upper secondary school, which revolves around some basic questions: how to distinguish finite binary sequences generated by the repeated tossing of a coin from those imagined by a human agent or simulated by a calculator using a deterministic algorithm? The results of the experiment show that the students were able to critically reflect on their beliefs regarding probability and chance.

It just remains to wish you a good and profound reading, hoping that these reflections and experiences will inspire other research applications and classroom experiment.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 9 - 21, DOI: 10.33683/ddm.22.12.1
OPEN ACCESS

Dalla comprensione del testo alla risoluzione del problema: un'esperienza nella scuola secondaria di secondo grado

From text comprehension to problem solving: an experience in upper secondary school

Umberto Dello Iacono•, Eva Ferrara Dentice•, Chiara Vitina Mannillo• e Maria Letizia Vitale°
•Dipartimento di Matematica e Fisica, Università della Campania "L. Vanvitelli" – Caserta, Italia
°Istituto Tecnico Statale "M. Buonarroti" – Caserta, Italia

umberto.delloiacono@unicampania.it, eva.ferraradentice@unicampania.it, chiaravitina.mannillo@unicampania.it, marialetizia.vitale@istruzione.it

Sunto / La risoluzione dei problemi è un'attività che crea difficoltà a molti studenti, indipendentemente dall'ordine scolastico, spesso legate alla fase di comprensione del testo del problema stesso. A tal proposito, abbiamo disegnato un'attività di apprendimento che prevede che gli studenti, a partire da alcuni problemi assegnati, individualmente e poi in maniera collaborativa, ne analizzino dapprima criticamente il testo per poi affrontarne la risoluzione. Abbiamo sperimentato tale attività con studenti del primo anno di una scuola secondaria di secondo grado. L'analisi dei dati mostra che l'attività didattica progettata sembra essere efficace nel favorire l'attivazione di adeguati processi risolutivi da parte degli studenti, nonché la produzione di argomenti a sostegno delle risposte fornite. In particolare, la maggior parte degli studenti, dopo aver lavorato sulla comprensione del testo, migliora la correttezza delle risposte e/o produce argomenti a supporto delle stesse.

Parole chiave: comprensione del testo; rappresentazione di un problema; argomentazione; problem solving.

Abstract / Problem solving is an activity that causes difficulties for many students, regardless of school order, often related to the phase of understanding the text of the problem itself. In this regard, we have designed a learning activity that requires students, first individually and then collaboratively, to first critically analyse the text of some assigned problems and then approach the resolution. We experimented with this activity with first-year students at upper secondary school. Analysis of the data shows that the designed teaching activity seems to be effective in encouraging the activation of appropriate solving processes by the students, as well as the production of arguments in support of the answers provided. In particular, most students, after working on text comprehension, improve the correctness of their answers and/or produce arguments to support them.

Keywords: text comprehension; problem representation; argumentation; problem solving.

1 Introduzione e quadro teorico

La risoluzione di problemi è una delle attività maggiormente affrontate nei curricula scolastici. La traduzione dal latino di un brano di Cicerone, oppure l'interpretazione di un brano musicale del quale si conosce lo spartito sono esempi di risoluzione di problemi, e se ne potrebbero mostrare molti altri. Secondo Duncker (1935), con il termine "problema" si intende una situazione problematica che non è possibile risolvere in maniera immediata applicando comportamenti noti o già sperimentati con successo. Tuttavia, in ambito scolastico è consuetudine che con il termine "problema" si intenda principalmente il "problema in matematica". D'Amore e Fandiño Pinilla (2006, p. 6) affermano che «risolvere problemi e saper scegliere come comportarsi in situazioni problematiche sembra essere un veicolo eccellente per la formazione di concetti» e, dunque, per l'apprendimento. Di fronte a una situazione nuova e stimolante, lo studente potrebbe trovare nuove soluzioni e strategie che vanno ad arricchire il proprio bagaglio personale, a cui attingere in futuro.
Risolvere un problema di matematica, e in particolare un "word problem", è un'attività complessa che molte volte crea difficoltà agli studenti, spesso legate alla fase di comprensione del testo. Un "word problem" è

> «[...] un testo (tipicamente contenente informazioni quantitative) che descrive una situazione assunta familiare per il lettore e che pone una domanda quantitativa, alla quale si può dare una risposta attraverso operazioni matematiche eseguite a partire dai dati forniti nel testo o dedotti in altro modo».
>
> (Greer et al., 2002, citato da Zan, 2017, p. 46)

Alcune difficoltà nella comprensione di un "word problem" sono dovute a carenze sul piano delle competenze linguistiche ed espressive dello studente, al quale può mancare, o essere incompleta, la padronanza della lingua comune (Ferrari, 2004, 2021). Anche il linguaggio specialistico della matematica può contribuire alla difficoltà di comprensione di un problema e, più in generale, di apprendimento della disciplina (D'Amore, 1999, 2000; Demartini & Sbaragli, 2019; Ferrari, 2003; Laborde, 1995; Maier, 1993, 1995; Sbaragli et al., 2021). Infatti, come tutti i linguaggi specialistici, quello della matematica, da un lato, fa uso di simboli, figure e grafici e, dall'altro, utilizza termini che nella lingua di uso comune o non hanno significato oppure si discostano dal loro significato matematico. La mancata comprensione lessicale può essere, dunque, la causa di un'errata risoluzione del problema. A tal proposito, Fornara e Sbaragli (2017) indagano sull'origine degli errori in 216 risoluzioni di problemi da parte di studenti della scuola primaria,[1] e sottolineano che su 138 soluzioni errate 74 erano dovute a difficoltà nella comprensione lessicale. Tuttavia, la mancata comprensione del testo di un problema da parte dello studente può dipendere anche dal modo in cui il testo stesso è formulato. Zan (2012a, 2012b, 2016) individua nel *lessico*, nell'*enciclopedia* e nelle *sceneggiature* alcuni degli aspetti linguistici che possono ostacolare o impedire il processo di risoluzione.
Per quanto riguarda il *lessico*, lo studente potrebbe non conoscere il significato di alcuni termini presenti nel testo del problema, come parole che hanno un significato esclusivamente in ambito matematico (ad esempio "parallelogramma", "cateto", "ascissa", "ortocentro"). Secondo Zan (2007, p. 746), «se chi legge si rende conto di non conoscere il significato di una parola, può chiederlo o cercarlo, o sospendere l'interpretazione del testo. Ma non è detto che questo succeda». Un'altra difficoltà lessicale potrebbe essere legata alle *parole polisemiche*, ossia a quelle parole che hanno significati ed interpretazioni differenti a seconda del contesto. Potrebbe accadere che lo studente sostituisca il

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

significato di alcuni termini matematici con quello del linguaggio quotidiano (ad esempio "angolo", "limite", "radice", "ipotesi", "tesi") e ciò potrebbe portarlo a una risoluzione errata del problema. Ulteriori aspetti che possono inficiare la comprensione del testo sono i *richiami anaforici*, ossia richiami a parti di testo precedenti. L'anafora è uno strumento di coesione linguistica dei testi che serve a economizzare le dimensioni di un testo, ma può essere fuorviante per la comprensione dello stesso. Infatti, lo studente potrebbe non comprendere "a chi" o "a cosa" faccia riferimento il richiamo, e ciò potrebbe disorientarlo.

Sicuramente, possedere un vocabolario il più ricco possibile permette allo studente di comprendere il significato dei termini presenti nel testo del problema. Fondamentale, però, è anche la sua *conoscenza enciclopedica*, ossia la conoscenza del mondo. Essa fa riferimento alle informazioni sottintese nel testo, che possono essere estrapolate tenendo conto dell'esperienza personale, ed è necessaria per formulare inferenze sugli impliciti presenti nel testo (Zan, 2012a, 2012b). Una mancata conoscenza enciclopedica potrebbe condurre lo studente a una interpretazione errata e, dunque, ostacolare la corretta risoluzione del problema.

Alla conoscenza enciclopedica sono strettamente legate le *sceneggiature comuni* che rappresentano gli schemi più o meno complessi in cui è organizzata la conoscenza. La comprensione del testo è ostacolata se esso fa riferimento a sceneggiature sconosciute o che violano le consuetudini.

È opportuno, allora, che lo studente diventi consapevole dell'importanza della fase di comprensione del testo del problema, che diviene fondamentale e propedeutica per il processo risolutivo.

Questo lavoro di ricerca nasce a partire da tali premesse. Abbiamo progettato un'attività di apprendimento affinché gli studenti si soffermino dapprima sulla comprensione del testo di un problema per poi affrontarne la risoluzione.

In questo articolo ci chiediamo: in che misura l'attività didattica progettata, che prevede che lo studente risolva dei "word problem" solo dopo aver letto attentamente e analizzato il testo del problema, risulta efficace nel favorire l'attivazione di adeguati processi risolutivi da parte degli studenti, nonché la produzione di argomenti a sostegno delle risposte fornite?

Per poter rispondere a questa domanda, abbiamo condotto una sperimentazione con studenti del primo anno della scuola secondaria di secondo grado,[2] in orario extracurricolare, nell'ambito del progetto "Liceo Matematico UniCampania" (parte di un più ampio progetto nazionale di ricerca e di formazione, denominato "Liceo Matematico").

Di seguito descriviamo in dettaglio il disegno dell'attività di apprendimento (**par. 2**), la metodologia di ricerca e i criteri di analisi (**par. 3**). Successivamente analizziamo i dati (**par. 4**), discutiamo i risultati e indichiamo alcune future prospettive di ricerca (**par. 5**).

2 Disegno dell'attività di apprendimento

Per progettare la nostra attività di apprendimento, abbiamo individuato 5 "word problems" (di cui uno tratto dalle prove OCSE-PISA del 2000, tre tratti dalle prove OCSE-PISA del 2003 e uno tratto dalla prova unica di ammissione ai corsi di Laurea Magistrale in medicina e chirurgia e in odontoiatria e protesi dentaria, a.a. 2017/2018), i cui testi contenevano, a nostro parere, ostacoli linguistici che potevano interferire con il processo di risoluzione. In particolare, in accordo al nostro quadro teorico, abbiamo individuato ostacoli riguardanti il lessico, l'enciclopedia, le sceneggiature e i richiami anaforici. L'attività prevede due macrofasi sequenziali per ciascuno dei 5 quesiti individuati, denominate ma-

2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

crofase 1 e macrofase 2. Nella macrofase 1, gli studenti rispondono a delle domande aperte di comprensione del testo, mentre, nella macrofase 2, risolvono i quesiti motivando le proprie risposte. Lo scopo è far in modo che gli studenti, nella macrofase 1, analizzino attentamente il testo del problema e si soffermino sul significato di termini ed espressioni, in modo da comprendere a pieno la richiesta prima di affrontare la risoluzione del quesito, che avverrà nella macrofase 2. In entrambe le macrofasi, gli studenti rispondono individualmente alle domande (fase individuale) e, poi, discutono tra loro in piccoli gruppi per concordare una risposta condivisa a ciascuna domanda (fase collaborativa). I gruppi sono formati casualmente e costituiti da 2 o 3 componenti e, per ogni gruppo, è nominato un "portavoce". Entrambe le macrofasi terminano con una fase di discussione collettiva, avviata dai "portavoce" di ciascun gruppo, i quali riportano all'intera classe le risposte del proprio gruppo per ognuno dei quesiti. Il docente, oltre a mediare la discussione, ha anche il compito di chiarire qualsiasi dubbio relativo alle attività svolte.
Per ragioni di ricerca, abbiamo previsto anche una macrofase 0, nella quale ciascuno studente, prima di lavorare sulla comprensione del testo, risponde individualmente ai cinque quesiti individuati. L'obiettivo è quello di poter confrontare le risposte fornite in questa macrofase con quelle fornite nella macrofase 2 per capire quanto la macrofase 1 abbia influito sul processo risolutivo e su quello argomentativo.
Di seguito riportiamo il testo del quesito "Tasso di cambio", tratto dalle prove OCSE-PISA, sul quale ci focalizzeremo in questo articolo:

> Mei-Ling, una studentessa di Singapore, si prepara ad andare in Sudafrica per 3 mesi nell'ambito di un piano di scambi tra studenti. Deve cambiare alcuni dollari di Singapore (SGD) in rand sudafricani (ZAR).
> Domanda 1: Mei-Ling ha saputo che il tasso di cambio tra il dollaro di Singapore e il rand sudafricano è 1 SGD = 4,2 ZAR. Mei-Ling ha cambiato 3'000 dollari di Singapore in rand sudafricani a questo tasso di cambio. Quanti rand sudafricani ha ricevuto Mei-Ling?
> Domanda 2: Quando Mei-Ling torna a Singapore dopo 3 mesi, le restano 3'900 ZAR. Li cambia di nuovo in dollari di Singapore, notando che il nuovo tasso di cambio è 1 SGD = 4,0 ZAR. Quanti dollari di Singapore riceve Mei-Ling?
> Domanda 3: Durante questi 3 mesi il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD. Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR nel momento in cui cambia i suoi rand sudafricani in dollari di Singapore? Spiega brevemente la tua risposta.

Per quanto riguarda questo quesito, le percentuali di risposte corrette fornite dagli studenti nella prova del 2003 sono state basse, soprattutto per quanto riguarda la Domanda 3 (33,2% a livello nazionale, 39,6% a livello di media paesi OCSE). Il testo del quesito presenta, a nostro avviso, difficoltà legate al significato dei seguenti termini o espressioni: "Tasso di cambio", "Ambito", "Piano di scambi tra studenti", "il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD", "Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR". Inoltre, contiene termini polisemici come "piano" e "tasso" e due richiami anaforici, "le" e "li", rispettivamente nelle frasi "le restano 3'900 ZAR" e "li cambia di nuovo". Nella macrofase 1, viene pertanto consegnata agli studenti una scheda con il testo originale del quesito e con le seguenti domande aperte per indagare su aspetti legati al lessico e alle anafore:

– spiega il significato dei seguenti termini o espressioni presenti nel testo del quesito: Ambito; Piano di scambi tra studenti; Tasso di cambio.
– Cosa significa, nella domanda 3, che "il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD"?
– Nella domanda 3, cosa significa "più vantaggioso" nella frase "Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR"?

– Alcuni sostantivi presenti nel testo assumono più significati. Quali significati attribuisci ai termini "piano" e "tasso"?
– Ci sono altri termini che per te assumono più significati? Quali? Motiva la tua risposta.
– Nella domanda 2, nell'espressione "le restano 3'900 ZAR", a chi o cosa è riferito il pronome "le"? Motiva la tua risposta.
– Nella domanda 2, nell'espressione "li cambia di nuovo", a chi o cosa è riferito il pronome "li"? Motiva la tua risposta.

Inoltre, nella scheda è presente la domanda "Spiega perché Mei-Ling ha bisogno di cambiare i dollari di Singapore in rand del Sudafrica", formulata al fine di avere informazioni sul livello di comprensione, da parte degli studenti, di questa sceneggiatura. Nella macrofase 2, agli studenti è consegnato nuovamente il quesito originale con la richiesta di rispondere alle tre domande e di motivare ciascuna risposta.

3 Metodologia

In questo paragrafo forniamo dettagli sugli studenti che hanno partecipato alla sperimentazione e descriviamo la procedura di sperimentazione. Descriviamo, poi, la modalità di raccolta dei dati e i criteri utilizzati per l'analisi qualitativa delle risposte fornite dagli studenti.

3.1 Setting e partecipanti

L'attività di apprendimento sopra descritta è stata sperimentata nell'ambito del progetto "Liceo Matematico UniCampania" in orario extracurriculare, con 20 studenti di una classe prima dell'Istituto Tecnico Statale "M. Buonarroti" di Caserta, indirizzo Costruzioni, Ambiente e Territorio. Di questi, 11 studenti (che di seguito indicheremo con S1, ..., S11) hanno partecipato a tutte le macrofasi relativamente al quesito "Tasso di cambio", sul quale ci focalizziamo in questo articolo. Gli studenti erano abituati a lezioni dialogate e discussioni di gruppo mediate dal docente, durante le quali venivano continuamente sollecitati a essere parte attiva nella costruzione dei nuovi significati.
L'intero percorso ha avuto la durata di 17 ore complessive e si è svolto nell'aula della classe. La macrofase 0 si è svolta in una lezione di 2 ore, mentre le macrofasi 1 e 2, per ognuno dei 5 quesiti, hanno avuto la durata di un'ora e mezzo ciascuna, di cui i primi 30 minuti dedicati alla fase individuale, i successivi 30 minuti alla fase collaborativa e gli ultimi 30 minuti alla fase di discussione collettiva (vedi par. 2). Gli studenti hanno risposto alle domande aperte senza che il docente intervenisse. Durante la fase collaborativa, ciascuno studente ha potuto consultare le risposte da lui fornite nella fase individuale. Nella fase di discussione collettiva, ciascun gruppo ha avuto a disposizione le schede compilate nella fase di lavoro in gruppi. Il docente è intervenuto soltanto nelle fasi di discussione collettiva.
Relativamente al quesito "Tasso di cambio", la macrofase 0 si è svolta circa un mese prima delle macrofasi 1 e 2.

3.2 Modalità di raccolta dati e criteri di analisi

Abbiamo raccolto i seguenti dati:
– le risposte individuali relative a ciascuna macrofase, ossia le risposte fornite da ciascuno studente: nella macrofase 0, quando risponde per la prima volta ai quesiti; nella fase individuale della macrofase 1, quando risponde ai quesiti di comprensione del testo; nella fase individuale della macrofase 2, quando risolve nuovamente i quesiti dopo aver lavorato sulla comprensione del testo;
– le risposte fornite da ciascun gruppo nelle fasi collaborative relative alle macrofasi 1 e 2.

Per poter rispondere alla nostra domanda di ricerca, ossia per capire in che misura, relativamente alle attività didattiche progettate, la fase di comprensione del testo abbia influenzato la successiva fase di

risoluzione del problema nonché la produzione di argomenti da parte degli studenti, abbiamo analizzato le loro produzioni individuali rispettivamente nella macrofase 0 e nella macrofase 2, ossia prima e dopo la macrofase 1 di comprensione del testo. In particolare, abbiamo cercato eventuali cambiamenti nel processo risolutivo e argomentativo, avvenuti in seguito alla macrofase 1, sia relativamente alla correttezza nella risoluzione dei quesiti sia relativamente alla pertinenza, correttezza e completezza dell'argomentazione. Per capire se le ragioni dell'eventuale cambiamento siano state dovute ad una riflessione da parte dello studente sul testo del problema e sugli ostacoli linguistici in esso contenuti, abbiamo analizzato le produzioni individuali e di gruppo degli studenti nella macrofase 1.
I dati si riferiscono al quesito "Tasso di cambio", descritto nel par. 2.

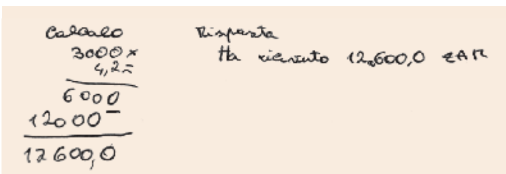
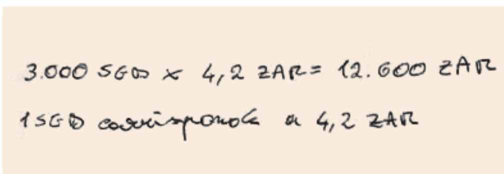
4 Analisi dei dati

Abbiamo analizzato i dati da un punto di vista qualitativo in accordo ai criteri di analisi sopra specificati. Abbiamo fornito, comunque, anche alcuni dettagli quantitativi.
Dall'analisi dei dati sono emersi cambiamenti nel passaggio dalla macrofase 0 alla macrofase 2, sia relativamente ad aspetti legati alla risoluzione dei quesiti, sia legati alla produzione di argomenti.
Più in particolare, nel passare dalla macrofase 0 alla macrofase 2:
- è migliorata la correttezza della risoluzione per la maggior parte degli studenti, ossia per 7 studenti su 11 (S1, S4, S6, S7, S8, S10, S11);
- sono comparsi argomenti, prima assenti, a supporto delle risposte, per la maggior parte degli studenti, ossia per 7 studenti su 11 (S1, S3, S4, S5, S7, S10, S11).

Osserviamo che per 5 studenti su 11 (S1, S4, S7, S10, S11) non solo è migliorata la correttezza della risoluzione, ma sono anche comparse argomentazioni a supporto delle risposte fornite.
Di seguito analizziamo in dettaglio le risposte di alcuni studenti come esempi dei miglioramenti osservati. Per cercare di capire in che misura i cambiamenti evidenziati siano dovuti alla fase di comprensione del testo, analizziamo le risposte fornite da tali studenti nella macrofase 1, sia durante la fase di lavoro individuale sia durante la fase di lavoro collaborativo.

4.1 Miglioramento nella correttezza della risoluzione

Gli studenti S1, S4, S6, S7, S8, S10, S11, nella macrofase 0, non hanno risposto o hanno risposto in maniera errata ad alcune delle domande previste dal quesito. Nella macrofase 2, invece, hanno risposto correttamente a tutte le domande.
Di seguito analizziamo in dettaglio le risposte fornite da S8 rispettivamente nella macrofase 0 e nella macrofase 2.

Macrofase 0	Macrofase 2
Domanda 1	
	
«Calcolo 3000 × 4,2 Risposta Ha ricevuto 12600,0 ZAR».	«3000 SGD × 4,2 ZAR = 12.600 ZAR 1 SGD corrisponde a 4,2 ZAR».

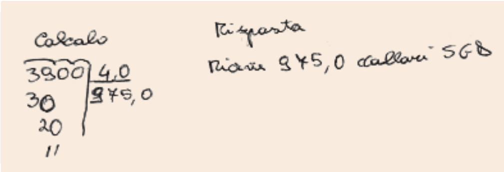
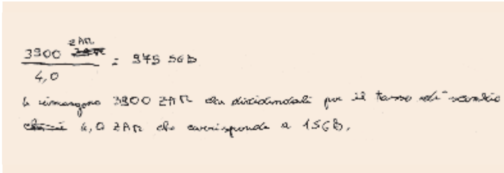
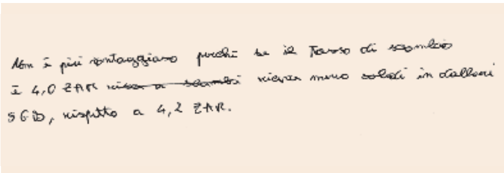
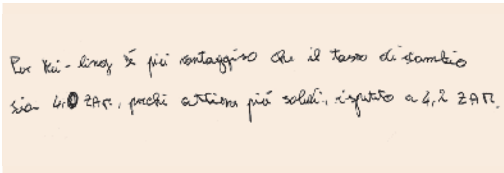
Macrofase 0	Macrofase 2
Domanda 2	
 «Calcolo 3'900 : 4 Risposta Riceve 975,0 dollari SGD».	 « $\frac{3900\ \text{ZAR}}{4{,}0} = 975$ SGD Le rimangono 3900 ZAR che dividendoli per il tasso di cambio 4,0 ZAR che corrisponde a 1 SGD».
Domanda 3	
 «Non è più vantaggioso perché se il tasso di cambio è 4,0 ZAR riceve meno soldi in dollari SGD, rispetto a 4,2 ZAR».	 «Per Mei-ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR, perché ottiene più soldi rispetto a 4,2 ZAR».

Tabella 1. Risposte dello studente S8 nelle macrofasi 0 e 2.

Come possiamo osservare dalla **Tabella 1**, nella macrofase 0, lo studente S8 utilizza una modalità risolutiva strutturata (calcolo/risposta) nelle risposte alle domande 1 e 2, risolvendo le operazioni in colonna. Sbaglia la risposta alla domanda 3. A tal proposito, sembra che lo studente confronti semplicemente i due numeri (4,0 e 4,2) e non i risultati ottenuti dividendo per essi, nonostante abbia correttamente utilizzato l'operatore di divisione per rispondere alla domanda precedente.

Nella macrofase 2 le operazioni vengono indicate in linea e i numeri sono accompagnati dalle unità di misura. Lo studente risponde correttamente a tutte domande e, in particolare, alla terza, facendo riferimento agli ZAR ("meno ZAR") per ottenere gli SGD ("più SGD"). Sembra, quindi, che lo studente immagini, questa volta, di fare una divisione intesa come raggruppamento e che riesca a stimare il risultato al variare del divisore.

Dall'analisi dei protocolli relativi alla macrofase 1, sembra che tale fase intermedia di comprensione del testo, favorendo la riflessione sul significato di alcune espressioni, abbia influenzato fortemente il cambio di prospettiva da parte di S8 nel rispondere alla domanda 3. Infatti, già nella fase individuale, lo studente, alla richiesta "Che cosa significa che il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD?" risponde «Significa che 1 SGD corrisponde a 4,0 ZAR invece di 4,2», e alla richiesta "Cosa significa 'più vantaggioso' nella frase 'Per Mei-ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR […]?'" risponde «Significa che le conviene di più». La sua risposta alla prima delle due richieste viene scelta dal gruppo come risposta condivisa nella fase collaborativa della macrofase 1. Inoltre, alla seconda delle due richieste, il gruppo risponde: «Significa che conviene di più il nuovo tasso di cambio». Gli studenti, lavorando in collaborazione, vanno oltre la semplice richiesta relativa alla comprensione del testo, anticipando la fase risolutiva. Ciò sembra aver influenzato in maniera significativa la correttezza della risposta alla domanda 3 nella macrofase 2 da parte di S8, il quale afferma che «il tasso di cambio di 4 ZAR è più vantaggioso dell'altro perché utilizza meno ZAR per poi ottenere più SGD», richiamando il significato di variazione del tasso di cambio da lui riportato nelle risposte in macrofase 1.

4.2 Comparsa di argomentazioni prima assenti

Gli studenti S1, S3, S4, S5, S7, S10, S11, nella macrofase 0, non hanno prodotto argomenti a supporto delle proprie risposte. Le argomentazioni sono invece comparse nella macrofase 2.
La seguente **Tabella 2** mostra le risposte di S3 rispettivamente nella macrofase 0 e 2.

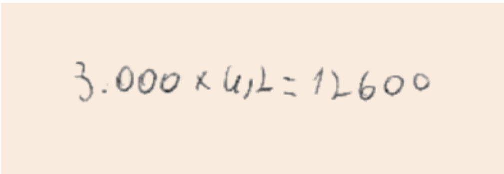
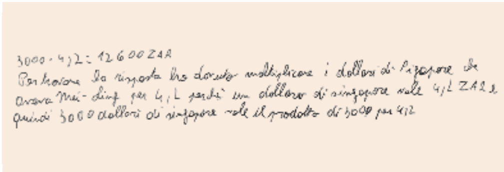
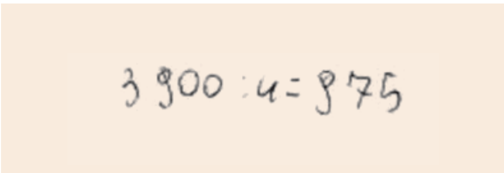
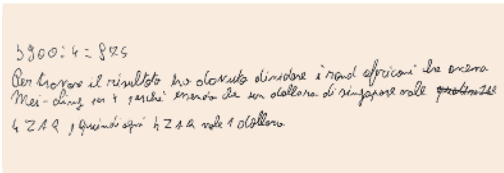
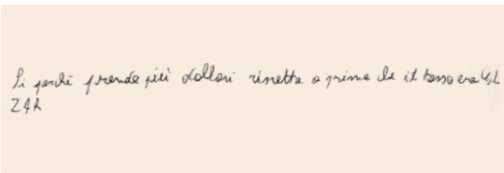
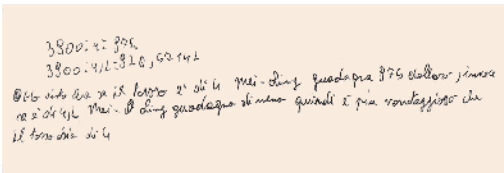
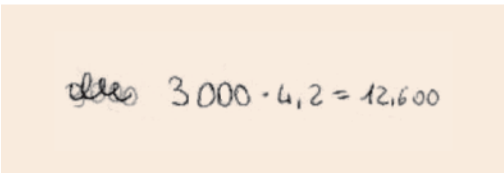
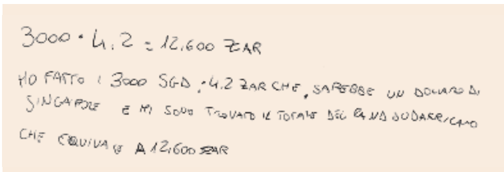
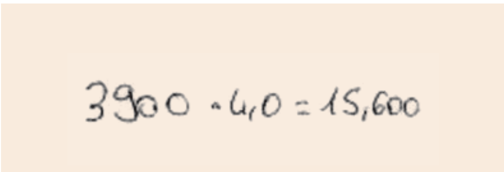
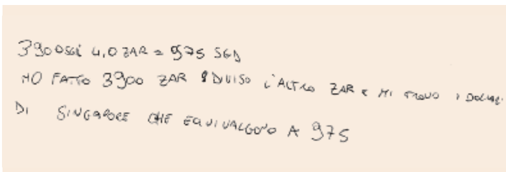
Macrofase 0	Macrofase 2
Domanda 1	
 «3.000 × 4,2 = 12600».	 «3000 · 4,2 = 12'600 ZAR Per trovare la risposta ho dovuto moltiplicare i dollari di Singapore che aveva Mei-Ling per 4,2 perché un dollaro di Singapore vale 4,2 ZAR e quindi 3000 dollari di Singapore vale il prodotto di 3000 per 4,2».
Domanda 2	
 «3900 : 4 = 975».	 «3900 : 4 = 975 Per trovare il risultato ho dovuto dividere i rand africani che aveva Mei-Ling per 4 perché essendo che un dollaro di Singapore vale 4 ZAR, quindi ogni 4 ZAR vale 1 dollaro».
Domanda 3	
 «Sì perché prende più dollari rispetto a prima che il tasso era 4,2 ZAR».	 «3900 : 4 = 975 3900 : 4,2 = 928,57142 Ho visto che se il tasso è di 4 Mei-Ling guadagna 975 dollari, invece se è di 4,2 Mei-Ling guadagna di meno quindi è più vantaggioso che il tasso sia di 4».

Tabella 2. Risposte dello studente S3 nelle macrofasi 0 e 2.

Nella macrofase 0, S3 risponde correttamente a tutte le domande, sebbene non utilizzi le unità di misura, ma non produce argomenti a supporto delle proprie risposte. Nella macrofase 2, aggiunge dettagli alle proprie risposte, come ad esempio l'unità di misura nella risposta alla domanda 1, e argomenta tutte le risposte. In particolare, nella domanda 3, lo studente passa da una risposta corretta ad una corretta e motivata mediante il confronto dei risultati di due operazioni matematiche. Sembra che lo studente utilizzi l'operatore di divisione con consapevolezza. Infatti, per decidere il cambio più vantaggioso, lo studente confronta i risultati di due divisioni.
Nella macrofase 1 di comprensione del testo, alla domanda "Cosa significa 'più vantaggioso' nella frase 'Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR […]?'", lo studente S3, nella fase individuale, risponde: «significa che quando dovrà fare il tasso di cambio dallo ZAR allo SGD avrà più soldi rispetto a prima che il tasso era 4,2 ZAR». Tale risposta è molto simile a quella da lui fornita alla domanda 3 della macrofase 0 (vedi Tabella 2). Sembra, quindi, che la fase individuale di comprensione del testo non abbia influito sul miglioramento dell'argomentazione da parte dello studente. Nella successiva fase collaborativa di comprensione del testo, invece, alla stessa richiesta, il gruppo risponde «che rispetto a prima ci vogliono meno ZAR per fare un SGD quindi avrà più soldi», entrando nel merito della motivazione del vantaggio e quindi anticipando la strategia risolutiva. Tale strategia è messa in atto da S3 nella successiva macrofase 2, il quale utilizza il calcolo come supporto argomentativo, confrontando il risultato di due diverse divisioni. Sembra quindi, che la fase collaborativa della macrofase 1 di comprensione del testo abbia condizionato fortemente la modalità risolutiva messa in atto dallo studente.

4.3 Miglioramento nella correttezza della risoluzione e comparsa di argomentazioni prima assenti

Gli studenti S1, S4, S7, S10 e S11, nel passare dalla macrofase 0 alla macrofase 2, non solo migliorano nella correttezza delle risposte, ma producono anche argomenti a sostegno delle stesse.
Riportiamo di seguito le risposte fornite da S4 rispettivamente nella macrofase 0 e nella macrofase 2.

Macrofase 0	Macrofase 2
Domanda 1	
 «3000 · 4,2 = 12.600».	 «3000 · 4,2 = 12.600 ZAR Ho fatto i 3000 SGD · 4,2 ZAR che sarebbe un dollaro di Singapore e mi sono trovato il totale del Rand sudafricano che equivale a 12.600 ZAR».
Domanda 2	
 «3900 · 4,0 = 15.600».	 «3900 SGD : 4,0 ZAR = 975 SGD Ho fatto 3900 ZAR diviso l'altro ZAR e mi trovo i dollari di Singapore che equivalgono a 975».

Macrofase 0	Macrofase 2
Domanda 3	
PERCHE ~~CON~~ QUANDO RITORNA PRENDE 3900 DOLLARI QUINDI AVRÀ PIÙ SOLDI «Perché quando ritorna prende 3900 dollari quindi avrà più soldi».	È PIÙ VANTAGGIOSO CHE SIA PASSATO A 4,0 PERCHE COSÌ DOVRÀ DARE MENO SOLDI PER AVERNE DI PIÙ «È più vantaggioso che sia passato a 4,0 perché così dovrà dare meno soldi per averne di più».

Tabella 3. Risposte dello studente S4 nelle macrofasi 0 e 2.

Lo studente S4, nella macrofase 0, risponde correttamente solo alla domanda 1, usa le unità di misura (anche se non correttamente) solo nella domanda 3 e propone argomentazioni solo per la domanda 3. Nella macrofase 2, invece, risponde correttamente, utilizza in maniera appropriata le unità di misura e argomenta a supporto dei calcoli fatti in tutte le domande.
In particolare, lo studente, nella macrofase 0, dimostra di non aver compreso il significato della domanda 3. Infatti, alla domanda "Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR [...]?" lo studente risponde affermativamente sostenendo «perché quando ritorna prende 3900 dollari quindi avrà più soldi». La sua argomentazione suggerisce però chiaramente un errore di risoluzione perché la cifra 3'900 nel testo del problema si riferisce ai rand sudafricani e non ai dollari, come sostenuto dallo studente. Allo scopo di analizzare tale errore, viene di seguito riportata la risposta fornita dallo studente nella scheda individuale durante la macrofase 1 di comprensione del testo.
Alla domanda "Cosa significa 'più vantaggioso' nella frase 'Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR […]?", lo studente risponde: «Perché quando c'era 4,2 ZAR guadagna 3000 dollari di Singapore invece ora che sta a 4,0 ZAR ne guadagna 3'900». Sembra quindi che egli associ "visivamente" il dato 4,2 al dato 3'000 e il dato 4,0 al dato 3'900; questo probabilmente perché nella formulazione del testo della domanda il dato 3'000 è nello stesso paragrafo in cui compare il dato 4,2 mentre il dato 3'900 è nello stesso paragrafo del dato 4,0.
Lo studente, quindi, nella macrofase 0 sbaglia la risposta alla domanda 3 perché è convinto che Mei-Ling al ritorno a Singapore, quando il cambio è 4,0, abbia 3'900 dollari invece dei 3'000 posseduti alla partenza, non considerando affatto che la cifra in effetti si riferisce ai rand Sudafricani. Questo aspetto sembra essere ribadito anche dalla risposta individuale dello studente alla domanda "Nella domanda 2, nell'espressione 'li cambia di nuovo', a chi o cosa è riferito il pronome 'li'?" posta nella macrofase 1 di comprensione del testo. Infatti, S4 risponde: «ai dollari sudafricani».
Nella macrofase 2, invece, lo studente motiva diversamente la risposta alla stessa domanda, sostenendo «è più vantaggioso che sia passato a 4,0 perché così dovrà dare meno soldi per averne di più». Questo mostra un miglioramento in termini di comprensione perché la risposta fa riferimento a quanti rand Mei-Ling deve dare in cambio di 1 SGD. Lo studente acquisisce la consapevolezza che la cifra 3'900 si riferisce ai rand sudafricani e che questi devono essere convertiti in dollari.
Il miglioramento della comprensione del testo giustificato dalla risposta fornita dallo studente nella fase individuale della macrofase 2 sembra essere frutto, alla luce dell'analisi della risposta fornita dallo studente nella fase individuale della macrofase 1, della fase collaborativa della macrofase 1 di comprensione, laddove il gruppo del quale fa parte, alla domanda "Cosa significa 'più vantaggioso' nella frase 'Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR […]?'", risponde «Per Mei-Ling è più conveniente che il tasso di cambio sia di 4,0 ZAR che di 4,2 ZAR».

5 Discussione e conclusioni

In questo lavoro abbiamo descritto un'attività di apprendimento (par. 2) disegnata affinché gli studenti, posti di fronte alla risoluzione di un "word problem", si soffermino dapprima sulla comprensione del testo del problema per poi affrontare la sua risoluzione. L'attività si inquadra nell'ambito delle teorie di Zan (2012a, 2012b, 2016, 2017) e pone l'attenzione su alcuni aspetti linguistici che possono ostacolare o impedire un corretto processo di risoluzione. Essa prevede tre momenti, denominati macrofasi. Nella macrofase 0, gli studenti rispondono individualmente ad alcuni quesiti. Nella successiva macrofase 1 di comprensione del testo, essi, dapprima individualmente e poi in piccoli gruppi, rispondono a domande aperte su aspetti linguistici presenti nei testi dei problemi. Infine, nella macrofase 2, gli studenti risolvono nuovamente i quesiti, lavorando dapprima individualmente e poi in maniera collaborativa.

Abbiamo sperimentato l'attività con studenti del primo anno di scuola secondaria di secondo grado (nono grado di istruzione scolastica) con l'obiettivo di investigare quanto la comprensione del testo di un problema influenzi la sua risoluzione e favorisca la produzione di argomenti a supporto delle risposte date. In particolare, alla luce del quadro teorico descritto nel par. 1, abbiamo cercato cambiamenti nelle produzioni degli studenti nel passaggio dalla macrofase 0 alla macrofase 2, relativamente ad aspetti legati sia alla risoluzione dei quesiti sia alla produzione di argomenti e abbiamo investigato le ragioni di tali cambiamenti, analizzando se e in che misura questi siano dovuti alla macrofase 1 di comprensione del testo.

L'analisi si è focalizzata su un quesito in particolare, denominato "Tasso di cambio" e descritto nel par. 3. Dall'analisi emerge che la maggior parte degli studenti (7 studenti su 11), dopo essersi soffermata sulla comprensione del testo, migliora la correttezza delle risposte fornite nella macrofase 2 rispetto a quanto prodotto nella macrofase 0. Inoltre, la maggior parte di loro (7 su 11), nella macrofase 2, produce argomenti a supporto delle proprie risposte, assenti nella macrofase 0. Addirittura, per 5 studenti su 11, nel passare dalla macrofase 0 alla macrofase 2, migliora la correttezza della risoluzione e compaiono argomentazioni a supporto delle risposte fornite. Questi miglioramenti sembrano essere conseguenza dell'attività di comprensione del testo svolta nella macrofase 1 e, in particolare, dei momenti collaborativi, che hanno favorito la discussione e il confronto all'interno dei gruppi nonché l'emergere di significati diversi che gli studenti, lavorando individualmente, non avevano considerato. Ad esempio, S8, nel rispondere alla domanda 3 del quesito "Tasso di cambio" nella macrofase 2, cambia completamente prospettiva rispetto alla macrofase 0, dopo aver riflettuto sul significato di alcune espressioni durante la macrofase 1 (si veda il par. 4.1). Anche per quegli studenti che avevano risposto in maniera corretta già nella macrofase 0, la fase collaborativa della macrofase 1 ha comportato un miglioramento nell'argomentazione. È questo il caso degli studenti S3 ed S4 che, a seguito della fase collaborativa di comprensione del testo, producono nella macrofase 2 argomentazioni prima assenti e indicano nelle loro risposte le unità di misura prima omesse. In particolare, le risposte non corrette di S4 in macrofase 0 (si veda il par. 4.3), sembrano essere il risultato di una lettura selettiva del testo che compromette la comprensione della relazione tra i dati presenti nel quesito. Ciò è in accordo con Pozio (2011), la quale, analizzando i risultati degli studenti italiani nelle prove OCSE-PISA del 2003, osserva come molte difficoltà dipendano da carenze relative alla lettura e comprensione del testo, poiché gli studenti spesso si focalizzano solo sui dati numerici o su parole o espressioni che suggeriscono loro una soluzione. È necessario, dunque, progettare attività didattiche che favoriscano il superamento di difficoltà derivanti da una lettura selettiva del testo del problema. La nostra attività, che richiede che lo studente legga con attenzione il testo proposto e si interroghi sui significati di termini ed espressioni, mediando con gli altri la scelta di un significato condiviso, sembra essere risultata efficace in tal senso. Infatti, sembra essere stata proprio la macrofase 1, e in particolare la sua fase

collaborativa, a consentire a S4 di giungere alla reale comprensione del testo del problema e alla sua corretta risoluzione in macrofase 2.
Questo lavoro potrebbe contribuire ad accrescere negli studenti, ma anche nei docenti, la consapevolezza dell'importanza della fase della comprensione del testo nel processo di problem solving argomentativo e a favorire l'acquisizione di un metodo da utilizzare ogni qual volta si è alle prese con un "word problem". Seguendo la metodologia proposta, gli studenti potrebbero sviluppare un approccio ai problemi che preveda la messa in atto di una fase di analisi e comprensione del testo, necessaria per l'individuazione dei dati e delle loro relazioni, preliminare alla fase di risoluzione. Questa ricerca, inoltre, sembra mostrare come le attività collaborative in piccoli gruppi, all'interno dei quali i significati sono mediati e condivisi, siano efficaci nel favorire la comprensione del testo di un problema e, dunque, la sua corretta risoluzione. Tali attività dovrebbero essere previste dai docenti sempre più frequentemente nella loro pratica didattica.
Lo studio descritto in questo articolo è da considerarsi esplorativo. I miglioramenti nella risoluzione e produzione di argomentazioni da parte degli studenti, rilevati nella macrofase 2, sembrano essere conseguenza di quanto avvenuto in macrofase 1. Tuttavia gli studenti hanno risolto gli stessi quesiti due volte, sebbene a distanza di tempo. Pensiamo, pertanto, di condurre ulteriori esperimenti sia per confermare gli effetti della macrofase 1 (in particolare dei momenti collaborativi di condivisione e confronto all'interno dei piccoli gruppi) sui miglioramenti osservati in macrofase 2, sia per separare tali effetti da quelli legati alla riproposizione di uno stesso quesito.

Bibliografia

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Pitagora.

D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*, *1*, 28–47.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *6*(29), 645–664.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). Le parole che "ingannano". La componente lessicale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *2*(5), 19–25.

Duncker, K. (1935). *The psychology of productive thinking.* Springer.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *26A*(4), 469–496.

Ferrari, P. L. (2004). Mathematical language and advanced mathematics learning. In M. J. Hoines & A. B. Fugelstad (Eds.), *Proc. 28th Conference of PME* (pp. 383–390). Bergen University College.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione Matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe.* UTET Università.

Fornara, F., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (Eds.), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche, I quaderni del GISCEL* (Vol. 2, pp. 211–224). Aracne.

Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 271–292). Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 121–135.

Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *7*(1), 69–80.

Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 298–305.

Pozio, S. (2011). *La risoluzione di prove di competenza matematica. Analisi dei risultati italiani nell'indagine OCSE-PISA 2003*. Nuova Cultura.

Sbaragli, S., Franchini, E., & Demartini, S. (2021). Difficulties in understanding and managing specialized geometry terms at middle school entrance. *La matematica e la sua didattica*, *29*(1), 7–37.

Zan, R. (2007). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *30A–B*(6), 741–762.

Zan, R. (2012a). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate: I parte*, *35A*(2), 107–126.

Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate: II parte*, *35A*(5), 437–467.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Carocci Faber.

Zan, R. (2017). Il ruolo cruciale del pensiero narrativo nella comprensione dei problemi. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *2*, 46–57. https://doi.org/10.33683/ddm.17.2.3

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 22 - 44, DOI: 10.33683/ddm.22.12.2 OPEN ACCESS

Relazione etica degli studenti con un documento tratto dalla storia della matematica

Ethical relation of students with a document taken from the history of mathematics

Adriano Demattè
Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", Pieve del Grappa (TV) – Italia

adrdematte@gmail.com

Sunto / Un'attività di interpretazione di un brano tratto da *Introductio in analysin infinitorum* di Eulero, in una classe quinta della scuola secondaria di secondo grado, consente di evidenziare varie problematiche riguardanti una relazione di responsività e responsabilità – che in questo articolo viene denominata *etica* – da parte degli studenti con un testo matematico e in particolare con un documento storico. L'analisi viene operata alla luce del pensiero dei filosofi Emmanuel Levinas e Hans-Georg Gadamer. L'attenzione è rivolta a come gli studenti orientino la loro interpretazione, come affrontino la situazione di alterità – di confronto con il punto di vista dell'Altro – e come seguano l'autore nei suoi ragionamenti.

Parole chiave: testi matematici; documenti storici; etica; Levinas; Gadamer.

Abstract / Interpretations of a passage from Euler's *Introductio in analysin infinitorum* by secondary school students (18-19 years old) allow to highlight various problems concerning a relation based on responsivity and responsibility – which in this article is named *ethical* – that students have with a mathematical text, specifically with a historical document. The analysis is carried out with reference to the thought of the philosophers Emmanuel Levinas and Hans-Georg Gadamer. The focus is on how students orient their interpretation, how they deal with the experience of otherness – facing the Other's point of view – and how they follow the author in his reasoning.

Keywords: mathematical texts; historical documents; ethics; Levinas; Gadamer.

1 Introduzione: quale relazione con un testo?

Il testo scritto è uno strumento di trasmissione privilegiato della conoscenza matematica, basti pensare alle riviste di ricerca scientifica e di divulgazione, ai manuali scolastici, alle schede di lavoro per gli studenti ecc. L'autore propone al lettore una condivisione di ragionamenti e per come realizza la sua esposizione gli fornisce la possibilità di ripercorrere, assieme, quei ragionamenti – anche se non è escluso che possa riportare delle affermazioni non giustificate (aggiungendo, ad esempio, che la dimostrazione viene omessa). Se si tratta di un documento storico, a quei ragionamenti un lettore moderno potrebbe dare significati diversi rispetto all'autore, dipendenti dalla distanza storica.
Riprendendo Foucault (1969/1977), in un trattato di matematica può essere presente l'opera di più figure: colui che lo presenta, chi stende il contenuto, chi cura l'edizione. Un testo reca traccia di una o più persone. Con Dilthey, possiamo osservare che l'autore non domina tutto quello che scrive e vari aspetti sono lasciati da lui inconsapevolmente nel testo. Questo è un aspetto della teoria romantica della creazione inconscia. Conseguenza, paradossale, di questa teoria è che scopo finale del processo ermeneutico è comprendere l'autore meglio di come lui stesso si comprenda (Dilthey, 1900/1996). A questo possiamo aggiungere l'affermazione di Gadamer (1960/2006) per la quale il senso di un testo va molto oltre ciò che il suo autore originariamente ha inteso.
Considero che ciò trovi riscontro anche nell'utilizzo didattico del testo matematico. Può avvenire che un autore, pur avendo appunto la finalità di presentare aspetti matematici, riporti informazioni che da essi esulano, come indicazioni, se non addirittura personali, almeno riguardanti il contesto in cui è vissuto: si pensi ai manuali d'abaco medioevali e rinascimentali in cui non manca il riferimento a unità monetarie e di misura tipiche di specifiche città o dettagli tecnici, ad esempio sull'agricoltura o sulla vinificazione, che rivelano conoscenze dell'autore che vanno oltre gli aspetti matematici.
Un testo passa di mano in mano: chi ne suggerisce la lettura si associa all'autore nell'esibirne il contenuto. L'insegnante indica ai suoi studenti il libro di testo o parti di esso o altri documenti. Se si tratta di una fonte storica, il fatto che sia giunta fino a noi testimonia l'interesse che ha suscitato presso le persone, attraverso i secoli. Il testo è traccia di un Altro e, essendo traccia, rompe la fenomenologia perché lascia intendere un "al di là" che non documenta appieno. Questo estende al testo quanto Levinas (1963/1979a) introduce a proposito della traccia e dell'Altro; si veda anche Guillemette (2018).
L'esperienza di alterità consiste nell'abbandonare ciò che ci è familiare per andare verso qualcosa che ci è estraneo, con un atto di accoglienza, accettando la nostra inadeguatezza. Non si tratta però di un intento di possesso: l'Altro è fonte di desiderio mai completamente soddisfatto (come dice Levinas, non è come il pane che si mangia, e che sazia). Al *desiderio* del filosofo, riferendosi all'alunno, l'insegnante potrà associare termini quali: *curiosità*, *interesse*, *motivazione*.
Nel presente articolo intendo dunque fare riferimento all'opera di Levinas e Gadamer, due fra i più influenti filosofi del Novecento: al primo per il tema dell'alterità, al secondo per i suoi contributi all'ermeneutica. In ambito filosofico, King (2019) pone «l'interrogativo se l'approccio ermeneutico all'etica e all'altro di Hans-Georg Gadamer renda giustizia all'alterità dell'altro, come illustrato dall'approccio di Emmanuel Levinas all'etica come filosofia prima» (p. 1, traduzione dell'autore). Non intendo affrontare il tema della possibile conciliazione fra i rispettivi punti di vista dei due pensatori in senso generale ma ritengo comunque significativa la precedente citazione perché li accosta e lo fa in merito al tema dell'alterità che risulterà centrale allorquando, più avanti, si esamineranno le interpretazioni di un documento storico da parte di alcuni studenti. Per tali scopi riferiti all'educazione matematica, ritengo che vada posto l'interrogativo se la comprensione di un testo da parte di uno studente possa essere intesa come appropriazione, vale a dire: lo studente fa un uso distorto del testo anteponendo i propri fini, oppure l'Altro è salvaguardato? Intendo: il fatto che l'alunno segua il punto di vista dell'Altro – il che comporta l'esigenza di metterlo in relazione con le proprie preconoscenze (Gadamer usa il termine «pregiudizi» o «precomprensioni» – *Vorverständnisse*) – si concilia sempre con l'utilizzo che

del testo fa in relazione alle richieste dell'istituzione scolastica? Penso che la risposta non sia sempre affermativa.
Un testo nasce attraverso il linguaggio. In prospettiva levinasiana, possiamo dire che il linguaggio scaturisce come atto primigenio, irriflesso, nell'incontro di due persone: come saluto, come richiesta o dimostrazione di interessamento ecc. Si tratta dunque di una manifestazione della relazione etica che si instaura fra di esse. In una prospettiva diversa (neokantiana) Habermas (1983/1993) parla di un'etica del discorso. Non voglio addentrarmi in questa sua analisi ma desidero citarla considerato che un testo (ci riferiremo a un documento storico ma potremmo anche pensare a un manuale scolastico moderno) raccoglie un discorso che risponde a certe caratteristiche, ma poi lo studente che ne fruisce è indotto ad affrontarlo secondo opportune modalità. Intendo sostenere l'idea che vi possa essere una relazione etica con un testo scritto e la desidero ricondurre però all'Altro che sta dietro il testo. In questa relazione, lo studente trova condizioni per comprendere. Quella che chiamo "relazione etica con un testo scritto" prevede, come condizioni necessarie, la responsività e l'assunzione di responsabilità dello studente di fronte all'alterità del documento. Essa trova origine nell'incontro con l'Altro (l'autore ma anche l'insegnante o un'altra persona che propone il documento). L'apertura responsiva dello studente prevede la sua disponibilità a investire le proprie risorse, a fare un esame generale e una ricerca dei particolari, a confrontare le proprie conoscenze con il contenuto del testo. La sua responsabilità consiste nel riconoscere l'autorevolezza del testo, nell'accettare di rivedere i propri preconcetti, nell'argomentare soffermandosi sulla possibile origine degli eventuali errori riscontrati. Fin qui sono evidenziati gli aspetti che riguardano la relazione con il documento da parte del singolo studente. La relazione diventa più complessa se consideriamo anche l'istituzione scolastica. Può avvenire che lo studente faccia un uso strumentale del testo allorquando lo utilizza per superare verifiche ed esami senza aver affrontato un percorso mirato alla comprensione, senza cioè essere passato attraverso le fasi di responsività e responsabilità indicate poc'anzi.
L'osservazione di Dougan che segue, negli intendimenti dell'autrice, riguarda i testi letterari ma ritengo che si adatti anche al testo matematico: «[...] sono interessata al testo come Altro e alla responsabilità del lettore in merito ad esso [. . .]. Mi riferisco all'ermeneutica di Hans-Georg Gadamer per considerare sia la relazione che si ha con il testo che per descrivere chi esattamente l'Altro possa essere» (Dougan, 2016, p. 4, traduzione dell'autore). Un aspetto che Gadamer affronta nel suo *Verità e metodo* fornisce elementi per analizzare la relazione degli studenti con un testo matematico: si tratta di quello che riporta nella parte dal titolo «La priorità ermeneutica della domanda». Essa evidenzia come la *docta ignorantia* socratica racchiuda l'indicazione che l'estrema negatività della domanda, come consapevolezza di non sapere, in realtà conduca alla vera superiorità del domandare. Rileva come sia più difficile porre le domande che non rispondere ad esse, come avvenga che chi desidera capire passi attraverso la domanda. Non si riferisce quindi al tipo di domande che l'insegnante rivolge all'alunno e di cui sa già la risposta. Si tratta invece di domande aperte alla risposta – anche se questa apertura non è senza limiti, infatti una domanda pone un determinato "orizzonte" entro cui si colloca.

2 Documenti matematici originali in classe

Esiste un'ampia bibliografia riguardante l'utilizzo delle fonti storiche originali nell'insegnamento/apprendimento della matematica. Mi riferisco, prima di tutto, ai lavori contenuti negli Atti dei convegni di HPM-History and Pedagogy of Mathematics (Thematic Organization affiliata a ICMI–International Commission on Mathematical Instruction) e delle diverse edizioni di ESU-European Summer University di HPM (si veda, ad esempio, Barbin et al., 2019). Già in Jahnke (2000) veniva evidenziato come le fonti originali possano chiarire ed estendere ciò che viene riportato nelle fonti secondarie. Il loro uso didattico

è la modalità più ambiziosa per introdurre la storia nell'insegnamento/apprendimento della matematica. Rappresentano un'occasione che può essere molto fruttuosa sia dal punto di vista della riflessione sugli esiti educativi immediati, sia da quello di un ripensamento della matematica nella scuola.
Riguardo al problema dell'interpretazione di un documento originale, l'ermeneutica filosofica ci aiuta a riflettere sulla distanza temporale fra autore e lettore e su come l'alunno possa operare una immedesimazione in chi ha prodotto il documento. In effetti, non può esserci una reale trasposizione, se non altro perché dell'autore è impensabile ricostruire integralmente le motivazioni e i condizionamenti che lo hanno portato alla realizzazione del lavoro. Il superamento da parte dell'alunno dei propri preconcetti con l'intento di avvicinarsi alla prospettiva adottata dall'autore costituisce un obiettivo educativo fondamentale ed è legato all'instaurarsi di quella che chiamo "relazione etica con il documento".
Chi si occupa di utilizzo didattico della storia della matematica si è interrogato sul suo valore per l'apprendimento della disciplina. Non si è giunti a conclusioni concordi. C'è chi ritiene che solo occuparsi di storia nella matematica scolastica sia "mission accomplished", senza voler associare necessariamente ad essa delle performance da parte dello studente (Guillemette, comunicazione personale, 20 febbraio 2021). È mia opinione che lo studio di un documento originale abbia valore per molteplici aspetti, anzitutto per la figura dell'autore. Non considero però un fatto necessario che si tratti di un matematico importante. Il valore di un documento sta anche semplicemente nell'essere arrivato fino a noi, nell'essere associato a certe fasi dell'evoluzione del pensiero matematico, nel testimoniare la presenza della matematica nella cultura di un certo periodo, nell'essere stato fatto conoscere da persone di oggi, nell'essere stato scelto dall'insegnante.
Un libro di testo attuale è concepito per gli studenti. Al contrario, un documento storico non era in origine necessariamente concepito per giovani lettori. Questo, unito alla distanza temporale, è uno dei motivi per cui la sua lettura può determinare uno "spaesamento". Parla di *dépaysement épistémologique* Évelyne Barbin (1997, 2012) a proposito dell'introduzione della storia della matematica in classe che determina una sostituzione dell'usuale con l'insolito, nel rendere in forma diversa quanto lo studente già possiede. Lo spaesamento può avvenire anche negli studenti con un profitto elevato e che sanno utilizzare al meglio i testi moderni. Un documento storico presenta un compito impegnativo ma offre contemporaneamente motivazioni per affrontare lo spaesamento in quanto racchiude, in modo precipuo, gli elementi per arrivare a stabilire una relazione etica.


Eglie un canale pieno duue pigiare che e lungo 4 braccia τ e largo 2 braccia τ 1/2 τ e alto 2 braccia uo sapere quanto uino rendera calando p la uinaccia tra il 1/3 τ il 1/4 Cioe e 7/24 della tenuta ocupa la uinaccia τ e 17/24 della tenuta e il uino

rēdera barili 70 1/6

Figura 1. Dall'Aritmetica di Filippo Calandri (1491).[1]

1. Fonte immagine: https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fichier:Arithmetica_filippo_calandri.04.jpg.

Il testo storico ritengo aiuti lo studente a cogliere l'Altro che vi sta dietro, anche attraverso gli aspetti lasciati inconsapevolmente dall'autore a cui si accennava sopra. Riporto qui un documento storico che non richiama i contenuti matematici su cui si sofferma il presente articolo, ma che mette in evidenza come possa avvenire rispetto ad esso una ricerca dell'Altro che mette in risalto vari elementi di diversità rispetto a quello che potrebbe scrivere un autore moderno (**Figura 1**; nell'originale, accanto a questo è riportato un altro problema relativo a un contenitore di forma diversa). Questo problema di Filippo Calandri sulla vasca per la vinificazione ci porta a rilevare la sua conoscenza di aspetti che oggi non fanno più parte del sapere comune e che ai nostri occhi contribuiscono a caratterizzare il suo profilo. Evidentemente l'interesse storico del celebre incunabolo del Quattrocento può dare luogo a indagini che riguardano aspetti matematici, filologici, grafici ecc. Il lettore può rilevare anzitutto la particolare esposizione dei calcoli risolutivi del problema che può fornire un importante elemento riguardo alla collocazione storica dell'autore, considerando l'evoluzione del simbolismo matematico in Europa: inizio dell'algebra simbolica con Viète (1540-1603), diffusione dei numeri decimali (sistema numerico posizionale con suddivisione decimale) con Stevino (1548-1620). Qui desidero proporre questo testo per suggerire un raccordo fra quanto espresso nelle premesse filosofiche e le riflessioni sull'educazione matematica delle successive pagine. In esso, infatti, per un lettore attuale l'alterità del documento viene rimarcata dai caratteri inusuali della stampa, dalla particolare esposizione dei calcoli, dalla mancanza di punteggiatura ecc. Nella seguente trascrizione del documento, per comodità del lettore riporto fra parentesi quadre i calcoli in notazione moderna, pensando che poi vengano ritrovati nell'originale.

> «E glie un canale pieno duve pigiate che e lungo 4 braccia e e largo 2 braccia e $\frac{1}{2}$ e alto 2 braccia vo sapere quanto vino rendera calando poi lavinaccia tra il $\frac{1}{3}$ e il $\frac{1}{4}$ Cioe e $\frac{7}{24}$ della tenuta ocupa lavinaccia e e $\frac{17}{24}$ della tenuta e il vino
>
> $$\left[4 \cdot 2\tfrac{1}{2} \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20, \quad 20 \cdot \tfrac{17}{24} = \tfrac{340}{24} = 14\tfrac{1}{6}, \quad 14\tfrac{1}{6} \cdot 5 = 70\tfrac{5}{6}\right]$$
>
> rendera barili $70\frac{5}{6}$».

L'immagine aggiunge altri particolari sulla procedura indicata nel testo e contribuisce a far capire il senso del calare della vinaccia. Non possiede un'analoga figura il problema 94 tratto da *Triparty en la science des nombres* di Nicholas Chuquet – francese, contemporaneo di Calandri – che prende ancora spunto dall'attività di vinificazione: «Una botte si svuota ogni giorno di $\frac{1}{10}$ della sua capacità; dopo quanto tempo si sarà svuotata per metà?». Nel presente articolo ritengo significativo riportarlo in quanto introduce il tema del logaritmo, di cui si occupa il passo scelto per l'attività in classe. Esprimendoci in termini che non appartenevano a Chuquet, il problema richiede evidentemente di risolvere l'equazione $\left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{2}$. L'autore ricava che al termine del sesto giorno la botte è piena per oltre metà del contenuto e al termine del settimo per meno della metà. Nella ricerca del valore esatto, però, fa ricorso alla regola del tre supponendo erroneamente il flusso costante nel corso del settimo giorno (si vedano le dispense del corso di Storia della matematica del Prof. Riccardo Rosso,[2] p. 12).
Iniziative didattiche come, ad esempio, far conoscere agli studenti la biografia dell'autore, mostrarne il ritratto e altre immagini, richiamare il contesto storico in cui è vissuto, ricordare aneddoti, collocarlo nella storia della matematica, o addirittura visitare i luoghi in cui è vissuto vengono ad avere un senso nella prospettiva che lo studente veda nell'autore un Altro che sollecita la sua responsabilità (intesa come attenzione, interesse, partecipazione al lavoro di analisi, ricerca della condivisione di ragionamenti matematici). Le considero dunque iniziative che possono avere una ricaduta positiva, anche se

2. Disponibili al link: https://mate.unipv.it/~rosso/logaritmi.pdf.

indiretta, per l'apprendimento della matematica. Penso che però non debbano entrare a far parte delle prove di verifica per evitare che gli studenti diano loro altre valenze, le ritengano funzionali all'assolvimento delle richieste dell'insegnante e al conseguimento di crediti scolastici. Ritengo che la condivisione di ragionamenti con l'autore, se racchiude elementi di novità e se determina il sovvertimento di qualche aspetto che per gli studenti è usuale in matematica, possa essere un modo efficace affinché riconoscano nel testo la traccia dell'Altro perché l'Altro, in quanto tale, si caratterizza proprio perché contiene la novità, la diversità.

3 Un'indagine in classe a partire da un documento di Eulero

L'indagine illustrata nel presente articolo ha carattere qualitativo-descrittivo e fa riferimento ad elaborati degli studenti che vengono analizzati con riferimento al pensiero di Levinas e Gadamer (si veda il par. 1). È stato utilizzato un passo sul tema dei logaritmi tratto da *Introductio in analysin infinitorum* di Leonhard Euler (Eulero, 1707-1783). Il grande matematico svizzero ha dato un contributo importante alla moderna teoria dei logaritmi. Scrisse l'*Introductio* come prima parte di un programma a cui seguirono le *Institutiones calculi differentialis* (1755) e le *Institutiones calculi integralis* (1768). Le opere furono dirette a chi voleva seguire gli studi matematici fino ai confini della ricerca. L'*Introductio* è stata scritta nel 1745, in latino, e pubblicata nel 1748; l'opera è suddivisa in due volumi.[3] Boyer (1951) ritiene che essa abbia avuto per la storia dell'analisi matematica un'importanza equivalente a quella degli *Elementi* di Euclide per la geometria sintetica e di *Al jabr wa'l muqabala* di al-Khwarizmi per l'algebra elementare. L'originalità del contenuto convive con un'esposizione in forma moderna ed appare accessibile in alcune sue parti ad uno studente di scuola secondaria di secondo grado.[4] La prima traduzione in lingua inglese è del 1988 a cura di John D. Blanton.[5] Il primo volume tratta delle funzioni, delle loro trasformazioni, della loro rappresentazione in serie di potenze, delle funzioni di due o più variabili, delle funzioni trascendenti, delle funzioni esponenziali, logaritmiche, goniometriche, delle frazioni continue. Nella *Prefazione*, Eulero esordisce con una riflessione di tipo didattico in quanto parla delle difficoltà nell'affrontare l'analisi, ritenendole imputabili a quelle in algebra; tuttavia, riconosce che l'analisi non richiede una conoscenza esaustiva dell'algebra. Il secondo volume è invece dedicato alle curve.

3.1 Il contesto dell'indagine

L'indagine è stata svolta nell'anno scolastico 2020-21 in una classe quinta di un liceo delle scienze umane. La classe seguiva una parte delle lezioni di matematica in modalità CLIL – *Content and Language Integrated Learning*. I libri scolastici, anche quello di matematica, spesso propongono testi specificamente concepiti per la didattica CLIL con alunni italiani. In tali testi, però, la lingua inglese risulta spesso destinata ad aspetti descrittivi o aneddotici, mentre per la sperimentazione si voleva scegliere un brano in inglese che portasse gli studenti a *fare* matematica. Attraverso di esso, oltretutto, si intendeva mostrare un caso in cui l'inglese consente di rendere fruibile alla comunità scientifica un'opera originariamente scritta in latino: si è considerato che l'inglese ha assunto il ruolo di lingua veicolare, ruolo che il latino possedeva ma non possiede più. In ciò trova giustificazione l'aver proposto agli studenti il brano in inglese e non nell'originale latino. Va precisato inoltre che, per il

3. L'originale, in latino, è consultabile online: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/101/.
4. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e agli anni di scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.
5. In http://www.17centurymaths.com/contents/introductiontoanalysisvol1.htm è possibile consultare la successiva traduzione di Ian Bruce.

loro percorso scolastico, la padronanza della lingua inglese da parte degli studenti era decisamente superiore a quella della lingua latina, anche per lo specifico compito di traduzione, e perciò il lavoro con l'originale latino avrebbe richiesto un investimento di tempo che, per la collocazione didattica dell'attività, non sarebbe stato sostenibile.

La classe aveva già affrontato l'interpretazione di altri brani storici sotto la guida dell'insegnante[6] (fonti primarie e secondarie) e utilizzato esercizi e problemi tratti dalle opere di Eulero riguardanti proprio i concetti di esponenziale e logaritmo. In classe quarta, questi erano inseriti in una scheda di lavoro in lingua inglese che comprendeva passi dall'opera anche di altri autori. In dettaglio: il problema sulla crescita della popolazione riportato come Esempio II nel paragrafo 110 della *Introductio*, con una risoluzione guidata comprendente anche un grafico cartesiano della situazione descritta nel problema e a un analogo problema sulla decrescita della popolazione; quattro passi dal *Saggio sul principio della popolazione* di Malthus con relative domande-guida per l'analisi del testo; una tabella di potenze di 2 ispirata a quella riportata in *Triparty en la science des nombres* di Chuquet con associati calcoli di prodotti, quozienti, potenze, radici utilizzando le proprietà delle potenze per una introduzione del logaritmo; esercizi da *Vollständige Anleitung zur Algebra* di Eulero nei quali, posto $\log_{10} 2 = x$, era richiesto di esprimere in funzione di x il logaritmo di numeri del tipo $2^n \cdot 5^m$ con n, m numeri naturali; un ragionamento di Eulero per l'approssimazione del valore di $\log_{10} 2$.

La finalità di queste schede era di realizzare situazioni laboratoriali in cui lo studente fosse chiamato ad operare con riferimento a un contenuto matematico mettendosi alla prova e confrontandosi con la proposta dell'autore dei documenti originali e con l'insegnante che li aveva scelti e che forniva determinate chiavi di interpretazione. Non si trattava dunque di impostare un discorso storico organico, né di operare una riflessione sulla matematica e la sua storia, ma di creare le condizioni per un coinvolgimento diretto dello studente, per costruire competenze matematiche. Anche il semplice riferire un passo tratto da un'opera storica ad un autore ritengo fosse un fatto significativo, per porgere la matematica in modo diverso e introdurre fra gli attori del processo di insegnamento/apprendimento un'altra persona.

3.2 Il documento scelto

Si riporta qui il brano tratto dall'opera di Eulero che è stato consegnato agli studenti per la sperimentazione descritta nel presente articolo.

> 103. Whatever logarithmic base we choose, we always have log 1 = 0, since in the equation $a^z = y$, which corresponds to $z = \log y$, when we let $y = 1$ we have $z = 0$. From this it follows that the logarithm of a number greater than 1 will be positive, depending on the base a. Thus, $\log a = 1$, $\log a^2 = 2$, $\log a^3 = 3$, $\log a^4 = 4$, etc. and, after the fact, we know what base has been chosen, that is the number whose logarithm is equal to 1 is the logarithmic base. The logarithm of a positive number less than 1 will be negative. Notice that $\log \frac{1}{a} = -1$, $\log \frac{1}{a^2} = -2$, $\log \frac{1}{a^3} = -3$, etc., but the logarithms of negative numbers will not be real, but complex, as we have already noted.
>
> (Euler, 1748/1988, p. 79).

Trattandosi dell'anno che concludeva il quinquennio della scuola secondaria di secondo grado, si è seguita l'idea di proporre agli studenti dei lavori che riprendessero concetti matematici già affrontati in precedenza e li collocassero in una prospettiva nuova. Un'analisi dettagliata del documento porta ad evidenziare gli aspetti di contenuto matematico per i quali è stato scelto per questa sperimentazione. Qui di seguito sono espressi sotto forma di "domande a cui il testo dà risposta". Ritengo significativo evidenziare, come fa Gadamer (1960/2006) nella sezione dedicata alla «Logica di domanda

6. L'insegnante è anche l'autore del presente articolo.

e risposta», che un testo è concepito per rispondere a delle domande, che peraltro il più delle volte rimangono implicite, così come il lettore lo analizza ponendosi domande a cui cerca risposta. Preciso che le seguenti domande non sono state fornite agli studenti, ma verranno qui usate come indicatori per l'analisi dei loro elaborati scritti.

1. Perché il logaritmo di 1 è uguale a 0?
2. Come si determina il logaritmo delle potenze ad esponente naturale aventi come base la base logaritmica? E il logaritmo dei reciproci di tali potenze?
3. Qual è il numero il cui logaritmo è 1?
4. Per quali valori della variabile indipendente il logaritmo è positivo e per quali negativo?
5. Il logaritmo di un numero negativo è reale?

Si noti che il documento non menziona il caso del logaritmo di 0, anche se al termine si riferisce ai logaritmi di numeri negativi e al fatto che la base utilizzata da Eulero è maggiore di 1, come egli stesso precisa nella parte finale del paragrafo 102 della *Introductio*, aggiungendo poi che è solo dei numeri positivi che possiamo esprimere il logaritmo con un numero reale. Nella parte conclusiva del paragrafo 98, Eulero sottolinea che il caso della base a, positiva e minore di 1, può venire esaminato a partire da quello della base maggiore di 1 considerando che se $a < 1$ allora $\frac{1}{a} > 1$ e basterà porre $\frac{1}{a} = b$.
Dal punto di vista dell'uso della lingua inglese, si è ritenuto che il brano di Eulero nella traduzione di Blanton fosse accessibile a tutti gli studenti della classe e quindi non presentasse ostacoli aggiuntivi alla comprensione del contenuto matematico. Eppure, in fase progettuale, ci si è dovuti confrontare con il fatto che l'uso di fonti in traduzione necessita di cautele particolari in quanto il linguaggio è parte integrante del discorso matematico. Esso può però introdurre ulteriori elementi che connotano l'autore. La comprensibilità per un lettore moderno e lo stile del passo di Eulero hanno suggerito alcuni elementi per la collocazione storica dell'autore. Nell'ambito dell'attività presentata in questo articolo, agli studenti era stata proposta anche l'analisi del problema 13 *De rege et de eius exercitu* tratto dalle *Propositiones ad acuendos juvenes* di Alcuino di York (ca. 735-804) che forniva loro la possibilità di un confronto: la prolissità di quest'ultimo testo nel presentare un numero di esempi specifici, che va ben oltre la necessità di far comprendere al lettore la situazione matematica (un accrescimento esponenziale), fa emergere la mancanza dell'indicazione esplicita di una legge generale nonché di un simbolismo algebrico. Riguardo al simbolismo del passo di Eulero, a confronto, il dettaglio sull'uso di «=» consentiva di segnalare una differenza rispetto al modo di indicare l'uguaglianza in Cartesio, presente in un passo sulle equazioni tratto da *La Géométrie* che gli studenti avevano esaminato in classe terza. Nel documento di Eulero, si può inoltre notare la densità di concetti, una caratteristica che i libri di testo utilizzati dagli studenti non possiedono. Dunque, il testo di Eulero non mostra il modo di esporre di un documento medievale, utilizza un simbolismo senza eccezioni analogo a quello che gli studenti hanno conosciuto ma si distingue rispetto all'esposizione dei loro libri di testo: sono tre indizi a disposizione degli studenti per una collocazione di Eulero e della sua opera nella storia della matematica.
Blanton ha scelto di tradurre «imaginarius» con «complex», diversamente da Bruce che ha preferito «imaginary»; il termine «imaginarius», di cartesiana memoria, nel passo di Eulero figura in contrapposizione con «realis». Gli studenti non avevano affrontato una trattazione specifica dei numeri complessi: avevano avuto come esempio più significativo il caso di discriminante negativo nella risoluzione delle equazioni di secondo grado. Si è considerata l'ultima riga del passo di Eulero in cui dice che il logaritmo di numeri negativi è complesso come una suggestione che potesse incuriosire gli studenti e inoltre un piccolo segnale che quanto affrontato nella matematica della scuola secondaria lascia uno spazio (sterminato) per futuri approfondimenti e ampliamenti: la teoria dei numeri reali e i numeri complessi, ad esempio. Anche questo ritengo potesse testimoniare che l'interpretazione è un atto mai concluso e che è illusorio o addirittura fuorviante credere di poter esaurire tutte le possibili aperture che un documento offre. Un resoconto sull'utilizzo didattico di una parte più ampia della stessa

opera di Eulero, che comprende il passo utilizzato nell'attività qui descritta, è riportato in Demattè e Furinghetti (2014).
Si era previsto un possibile disorientamento degli studenti riguardante aspetti attinenti ai termini specifici del linguaggio matematico magari non adeguatamente assimilati, ai legami logici fra le parti del testo, al gran numero di concetti richiamati in un passo così breve.
Prima dell'attività qui descritta, fra le misconcezioni degli studenti con più difficoltà si era rilevata quella per la quale il logaritmo non possa essere negativo. Evidentemente si tratta di una distorsione del fatto che il logaritmo di un numero negativo non è reale. Partendo dal documento, si è individuata l'opportunità per gli studenti di ricavare indicazioni per la realizzazione del grafico cartesiano di una funzione logaritmica a base maggiore di 1. In effetti tale grafico era già stato costruito attraverso una tabella di valori ma la capacità di riprodurlo si era riscontrato essere carente, per cui sarebbe stato utile un rinforzo. Dunque, si sarebbe trattato di utilizzare quanto Eulero indica, vale a dire che: $\log 1 = 0$; per valori maggiori di 1 il logaritmo è positivo; per valori compresi fra 0 e 1 il logaritmo è negativo. Era nelle attese che il passaggio dai registri verbale e simbolico a quello grafico avrebbe introdotto ulteriori difficoltà in un numero significativo di studenti, ma al contempo avrebbe consentito di affrontare ancora una volta uno degli aspetti più qualificanti dell'intero quinquennio, appunto la competenza nel passaggio da un registro all'altro. In particolare, un punto di cui ritenevo potesse non venir colto il significato in termini di implicazione per il grafico della funzione era «the number whose logarithm is equal to 1 is the logarithmic base» in cui Eulero parte da 1 come valore noto del logaritmo per risalire all'argomento.

3.3 L'attività proposta

Il documento di Eulero è stato consegnato assieme al problema di Alcuino (par. 3.2) per un lavoro domestico individuale, dopo aver ripreso in classe, nel periodo precedente, i concetti di esponenziale e logaritmo. Agli studenti è stato richiesto di scrivere tutto quello che potevano dire riguardo al documento, con l'aggiunta: «Chiamiamolo brainstorming!». Era stata lasciata loro la facoltà di scrivere un'interpretazione in lingua inglese o in lingua italiana: questo per favorire la loro possibilità di esprimersi e fornire preziosi elementi per la ricerca. Si è precisato che non ci sarebbe stato un voto né un giudizio da parte dell'insegnante e che lo scopo era indagare la loro relazione etica con il documento, usando appositamente questi termini e discutendone il significato con loro. A questo proposito, si è ribadito che proprio l'assenza di un ritorno in termini di voto avrebbe dovuto spingerli a stabilire una relazione diretta con il documento, escludendo che di esso si fosse interessati a fare un uso finalizzato a ricompense o riconoscimenti scolastici.
È stato detto agli studenti che avevano facoltà di scrivere delle domande di chiarimento alle quali sarebbe stata data risposta durante una lezione specificamente concepita in seguito all'attività. Nella presentazione dell'attività agli studenti, non è stata fatta una analisi nel merito dei contenuti del passo di Eulero, vale a dire una lezione in senso classico: questo per l'importanza di rilevare i punti sui quali gli studenti stessi avrebbero scelto di soffermarsi.
Circa tre mesi dopo l'attività di interpretazione, quasi tutti gli studenti sono stati intervistati brevemente, in modo individuale. Sono state poste loro una o più domande orali derivanti dall'analisi dei lavori e le loro risposte sono state trascritte immediatamente. Al termine, gli studenti potevano verificare se quanto scritto rispecchiava fedelmente ciò che intendevano dire e indicare eventuali modifiche o integrazioni. Nel par. 4 dedicato all'analisi dei loro elaborati vengono riportate le domande che sono state poste agli studenti intervistati e le loro risposte.
Nella settimana successiva alle interviste, è stata svolta la lezione programmata per dare risposta alle domande poste dagli studenti. Considerato il loro numero ridotto e tenuto conto del fatto che due studentesse non avevano consegnato il lavoro scritto, la lezione è stata per la maggior parte dedicata ad una sistematica riproposizione dei vari punti del brano di Eulero, con richiami concettuali, esempi numerici e realizzazione di grafici.

La finalità del lavoro proposto era di condurre gli studenti a rinforzare la competenza nell'utilizzo del concetto di logaritmo, ma non solo: ripensando la definizione e confrontandosi con l'autorevolezza di un grande matematico, avrebbero potuto constatare come l'elemento decisivo per acquisire tale competenza non sia tanto la gestione della complessità del calcolo – richiesta in alcuni degli esercizi tratti dal libro di testo affrontati in precedenza –, bensì la padronanza di opportuni esempi, riferimenti e argomentazioni. L'attesa era che gli studenti sapessero dare significato alle scritture simboliche utilizzate da Eulero, illustrandole a parole o con opportuni esempi.
Il lavoro con il documento qui illustrato veniva ad avere caratteristiche molto diverse rispetto a quello con le schede menzionate sopra (par. 3.1) e riguardanti esponenziale e logaritmo: nell'interpretazione del testo, lo studente doveva affrontare un compito aperto, in cui le sue conoscenze (come preconoscenze) venissero messe in discussione proprio da quanto diceva l'autore con il quale andava ricercata, come dire, una "conciliazione". Gli studenti avevano conosciuto in precedenza l'importanza di Eulero nella storia della matematica e si erano soffermati sulla sua biografia. In particolare, durante il precedente anno scolastico – in un lavoro pluridisciplinare su alcune figure del Settecento che aveva coinvolto Matematica, Italiano, Filosofia, Scienze umane e Insegnamento della Religione cattolica – un gruppo di studenti aveva approfondito i legami di Eulero con la cultura dell'epoca e aveva presentato il proprio lavoro al resto della classe. Il ricordo di questa attività è stato ripreso all'interno della presentazione del lavoro documentato nel presente articolo. Si è voluto fornire alla classe un quadro significativo della figura e dell'opera di Eulero (ruolo nella storia della matematica, utilizzo di esercizi e problemi tratti dai suoi lavori, analisi di un testo), lasciando a ciascuno studente la riflessione sui possibili legami fra i vari aspetti affrontati e riguardo al fatto che un grande matematico ha in parte prodotto opere non riservate agli specialisti della disciplina.
Un'ulteriore precisazione riguarda la scelta di far realizzare agli studenti un lavoro scritto, dettata da esigenze organizzative che hanno portato a scartare l'idea di colloqui individuali con ciascuno degli studenti, considerata la relativa lunghezza del compito. Un aspetto di dialogo è stato tuttavia mantenuto suggerendo che accanto all'interpretazione del testo venissero scritte le loro richieste di chiarimento. Una criticità di tale scelta può risiedere nel fatto che, nello scrivere la propria interpretazione, lo studente può operare delle scelte dipendenti, oltre che dal merito del contenuto matematico anche, come si diceva, da quelle che pensa possano essere le aspettative che attribuisce all'insegnante e che lo possono distogliere dalla relazione diretta con il documento.
Ci si attendeva infatti che gli studenti producessero lavori in cui il testo originario venisse rielaborato mantenendo però una coerenza logica interna e che seguissero la proposta dell'autore. Ci si attendeva inoltre che gli studenti cogliessero un messaggio di accettazione del loro pensiero, che diventassero protagonisti nella relazione con il documento anche a fronte del fatto che non ci sarebbero stati disapprovazione o conseguenze negative o voti penalizzanti in caso di errori.
A questo scopo, dopo aver comunicato la consegna del lavoro, l'insegnante, nel ruolo istituzionale e di mediatore rispetto al documento, si sarebbe defilato, devolvendo totalmente il compito agli allievi. Si riteneva che comunque gli studenti avessero ciascuno un loro quadro riguardo a quali fossero le aspettative dell'insegnante in merito alla realizzazione dell'elaborato scritto e che da esse si sarebbero fatti condizionare. Ci si è chiesti se queste aspettative rimaste implicite potessero essere ricondotte agli aspetti della traccia dell'autore e dell'insegnante che il documento reca con sé, di cui si è parlato all'inizio del presente articolo. Da qui la scelta di chiedere agli studenti di formulare eventuali domande di chiarimento per rinforzare la richiesta che avvenisse una genuina indagine personale.
Vincolare lo studente a produrre un elaborato scritto può dunque condizionare il suo pensiero. Può determinare inoltre eventuali difficoltà dal punto di vista linguistico. È verosimile pensare che qualche studente avrebbe scelto un'altra modalità per realizzare la propria interpretazione, magari mantenendola interna al suo pensiero come forma di (particolare) dialogo fra sé e il documento. Esplicitare l'interpretazione attraverso uno scritto induce un atto che – richiamando Levinas (1961/1979b, p. 27) – determina una violenza in quanto compromette il permanere in sé stesso del pensiero che riven-

dica l'idea di contenere l'essere, per chiedergli di affrontare un «surplus d'essere» (a rigore va detto che Levinas parla di «pensiero come atto» quindi anche non richiedendo allo studente un elaborato scritto si determina comunque in lui la violenza legata all'atto di pensiero che il documento induce). Voglio chiarire questa affermazione riferendola al ruolo didattico di esercizi e problemi e di ogni altra attività richiesta agli studenti, come appunto l'interpretazione di un documento. Anche se uno studente ha imparato una definizione ben formulata (che introduce in modo formalmente esauriente un concetto) e perciò ha acquisito una porzione di essere, richiedergli un surplus attraverso le attività è un modo per distoglierlo da un atto di presunzione – per farlo uscire da una sensazione di autosufficienza – proponendogli un confronto con altri aspetti dell'essere nei quali la sua acquisizione deve integrarsi. Parlare di "violenza" (il termine è ricorrente in Levinas), in questo caso, non riporta quindi a un'accezione negativa del termine. Ritengo infine evidente che le diversità fra i possibili atti richiesti (esercizi e problemi, riflessione interna al pensiero o realizzazione di un elaborato) possano determinare conseguenze formative diverse.

4 Analisi degli elaborati degli studenti

I lavori prodotti mostrano peculiarità molto difformi per il modo di esporre e per gli aspetti portati a tema. Le difficoltà manifestate dagli studenti attraverso gli errori contenuti nei loro elaborati non sono considerate di per sé un impedimento all'instaurarsi di una relazione etica con il documento: la riflessione che desidero operare riguarda invece l'approccio al testo, vale a dire l'atteggiamento degli studenti nei confronti del testo. Negli elaborati che vengono analizzati qui di seguito è mantenuta la formattazione scelta dagli studenti, a parte il tipo di carattere.[7] Sono stati scelti fra quelli prodotti dagli studenti della classe per mostrare anzitutto (in due casi) come la relazione etica appare essersi instaurata, ma tuttavia con esiti diversi dal punto di vista dell'utilizzo dei concetti. I successivi quattro mettono in risalto aspetti soggettivi diversificati che contrastano la relazione: a parte questo elemento di fondo, però, l'analisi di dettaglio non mostra comunanze significative fra di essi. L'ultimo viene riportato per analizzare un aspetto che ha avuto un ruolo importante nella strutturazione dell'esperimento didattico, vale a dire la formulazione di domande, interrogandosi comunque sulla relazione con il testo della studentessa che ne è autrice. Nel commento agli elaborati viene riportato pure l'esito della breve intervista personale, se il singolo studente è stato interpellato.

4.1 L'elaborato di Gaia[8]

LOGARITMI

Appena ho letto il testo non capivo molto ma poi rileggendolo molte volte ne ho capito il significato. In questo testo vengono spiegate i logaritmi e le loro proprietà. Il logaritmo è l'esponente di una potenza. Per trovare il logaritmo in base n di un numero y vuol dire trovare quel numero x che elevato alla base n mi dia y.

$$log_n y = x$$

Questo testo affermava che ogni numero più grande di 1 sarà positivo:

$$log\ a = 1$$

7. In particolare, sono state mantenute le scelte tipografiche degli studenti per la scrittura delle formule e non sono stati corretti eventuali errori linguistici o di battitura.

8. Per la tutela della privacy, verranno usati degli pseudonimi in ciascuno dei successivi casi di attribuzione degli elaborati agli studenti.

> Se noi abbiamo:
>
> *log a*^2
>
> In questo caso dobbiamo trovare un numero che elevato a 2 dia 2 ed è 10 poiché 10^2 da 100 e il logaritmo di 100 è 2.
> Così anche se abbiamo un numero minore di 1 sarà negativo
>
> $\log \frac{1}{a\text{^}2} = -2$

Fra le domande a cui il testo dà risposta (si veda il **par. 3.2**), Gaia fa riferimento alla 1 (però senza esplicitare il fatto che log 1 = 0), alla 2, alla 3, alla 4. Si notano in più punti alcune sue difficoltà: gestione delle espressioni scritte «quel numero *x* che elevato alla base *n*», «ogni numero più grande di 1 sarà positivo», «un numero che elevato a 2 dia 2»; passaggio al valore 10 senza rimarcare che si tratta di valore specifico della base; omissione del soggetto nell'ultima affermazione. Nelle prime due righe, Gaia porta a tema sé stessa e il documento. Solo successivamente segue l'autore nei suoi ragionamenti. Nella parte introduttiva non si è ancora instaurata la relazione con il documento che ho chiamato *etica*. È successivamente che essa emerge quando Gaia si espone riprendendo e riformulando quanto Eulero dice, anche se non riesce a portare a compimento la revisione delle proprie preconoscenze in una esposizione del tutto accettabile. Quando scrive «vengono spiegate i logaritmi e le loro proprietà» dice qualcosa che Eulero non afferma esplicitamente: porta a tema il documento attraverso una sintesi sommaria. Questo realizza una situazione che voglio considerare analoga a quella che si ha nella ripetizione "mnemonica", intendendo con quest'ultima espressione appunto un appropriarsi del testo, così com'è, e una non esplicita adesione alla sostanza del pensiero dell'autore. Quello dello "studio mnemonico" può risultare un atto illusorio per l'insegnante e pericoloso per l'allievo, in quanto non permette appieno di valutare (o autovalutare nel caso dello studente) se vi è un'effettiva comprensione, come nel caso dello scritto di Gaia.

4.2 L'elaborato di Francesca

> 103
> Il documento parte dal presupposto che qualunque base logaritmica scegliamo, log 1 = 0; infatti se a^z = y e quindi log y = z, se y = 1 allora z sarà sempre 0 perchè per qualunque numero elevato ad un altro numero che debba risultare 1 l'esponente sarà sempre 0. Per esempio, 10^z = 1, z=0. Da ciò deriva che il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo, per esempio log (base 10) 10 = 1. Se log *a* = 1, log *a*^2 = 2 ,etc allora si saprà che la base del logaritmo equivale ad a, per esempio 10^1 = 10, 10^2 = 100,...
> Allo stesso modo il logaritmo di un numero positivo minore di 1 sarà negativo. Per esempio log 1/a = -1 infatti 10^-1 =1/10.
> domanda: perchè nella terza riga del documento si afferma che come conseguenza alla prima proposizione il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo?

Nell'elaborato di Francesca appare il riferimento alle domande 1, 2, 3, 4. Si nota come anche lei associ alle scritture simboliche esempi specifici. Durante l'intervista, le è stato chiesto: «Qual è il ruolo degli esempi che hai scelto?». Ha risposto: «Siccome *a* è generale, ho scelto 10 per mostrare la verità della regola generale che c'è scritta; puoi rimpiazzare *a* con qualsiasi numero».
Francesca mostra di accettare la proposta dell'autore e di cercare di seguirla. Mette in evidenza questo fatto anche scegliendo degli esempi numerici a conferma della regola generale. Realizza in tal modo un aspetto della relazione con l'autore che sta dietro il testo e che ho chiamato *etica*. Avrebbe palesato un atteggiamento diverso se avesse utilizzato esempi specifici per mostrare l'utilizzo delle regole proposte dall'autore: avrebbe mostrato responsività ma non la responsabilità derivante dall'offerta di condivisione di pensiero fatta da Eulero attraverso il testo. Soffermiamoci

sugli esempi scelti da Francesca e consideriamo i diversi ruoli delle persone protagoniste dell'attività. Rispetto a sé, gli esempi appaiono utili per dare significato alle scritture generali presenti nel documento, per farle "radicare" in lei stessa, per superare quella che ha rilevato inizialmente come un'indicazione non evidente e tale da giustificare la ricerca di un elemento chiarificatore – la scelta di esempi numerici, appunto. Rispetto all'autore, sembrano rispondere al desiderio di dar seguito alla sua proposta, aggiungendo un proprio surplus per mettersi in sintonia con lui nell'indagine su quello specifico concetto matematico. Rispetto all'insegnante, dovendo produrre un elaborato scritto da lui richiesto, possiamo congetturare che Francesca presupponesse che pure lui ritenesse le scritture simboliche di Eulero un elemento non banale e tale da meritare un intervento chiarificatore. Per approfondire l'analisi del tipo di esempi scelti da Francesca, così come di quelli scelti da Gaia, si veda Mason e Pimm (2008).
A proposito della domanda di chiarimento finale presente nell'elaborato di Francesca, notiamo che al paragrafo 98 Eulero dice che nel caso in cui la base sia superiore a 1, a^z verrà ad avere un valore maggiore se z sarà maggiore:

ſin autem fuerit $a > 1$, tum valor ipſius a^z eo erunt majores, quo major numerus loco z ſubſtituatur

Figura 2. Estratto dal paragrafo 98 dell'originale latino (Euler, 1748/1988).

Considerato il mantenimento della monotonia da parte della funzione inversa, si giustifica quanto afferma Eulero, vale a dire che da log 1 = 0 segue che il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo.

4.3 L'elaborato di Chiara

Documento: logaritmi

Questo documento fa riflettere sulle regole dei logaritmi.
Logaritmo: a=b elevato alla c → log in base b (a) = c. Ad esempio: 100=10 alla seconda → log in base 10 (100) = 2
Regole:
-log in base 10 (10) = 1 → base e argomento UGUALI = 1.
-log in base a (1) = 0 → qualsiasi base con argomento 1 = 0.
-log (a x b) = log (a) + log (b) → moltiplicazione = addizione.
-log (a / b) = log (a) – log (b) → divisione = sottrazione.
-log (a elevato alla b) = b x log (a) → potenze = moltiplicazione.
Dopo aver ragionato sulle regole dei logaritmi, il documento mi fa riflettere sul fatto che se l'argomento del logaritmo è > 1 il risultato sarà POSITIVO, se invece è < 1 sarà NEGATIVO.
Esempi:
-log (0,9) = -log (9/10) = -(log (9) – log (10)) = -(log (3 alla seconda) – log (10)) = - (log (3 alla seconda) – 1) = -2 log (3) – 1) = - 2 log (3) + 1 oppure = -0,046 → logaritmo di un numero positivo minore di 1 = negativo
-log (2) = 0,30 → logaritmo di un numero positivo maggiore di 1 = positivo

Chiara fa riferimento alle domande 1, 2, 3, 4. Inizialmente elabora il ragionamento di Eulero pure attraverso esempi. Dopo di ciò sviluppa un proprio ragionamento, diverso da quello di Eulero: riporta le proprietà del logaritmo di un prodotto, di un quoziente, di una potenza ma nel prosieguo non utilizza

la prima. Il lavoro di Chiara mostra come l’interpretazione di un testo tratto dalla storia della matematica sia il risultato di una solo parziale identificazione con l’autore e sia condizionata dalle conoscenze e dall’esperienza dell’interprete. Chiara non segue i passaggi sviluppati dall’autore, in base ai quali è immediato ricavare il logaritmo di una potenza, anche con esponente negativo: abbandonando il ragionamento dell’autore, rinuncia alle potenzialità contenute in esso. Nel primo esempio, Chiara usa la regola dei logaritmi e mostra un ragionamento che può essere adatto per altri esempi e può essere considerato alla stregua di una dimostrazione. L’ultimo esempio, invece, si basa su un valore del logaritmo precedentemente utilizzato in un esercizio svolto in classe.
A Chiara, durante l’intervista, è stato chiesto perché abbia abbandonato il ragionamento di Eulero ed ha risposto: «Nel documento di Eulero ho preferito richiamare le proprietà dei logaritmi per soffermarmi e per ragionare sul fatto che se l'argomento del logaritmo è maggiore di 1 il risultato sarà positivo, al contrario se è minore di 1 sarà negativo. Quindi ho scelto di mettere un po’ in disparte il documento per un ragionamento mio, visto che inizialmente non comprendevo, ma grazie al richiamo delle proprietà dei logaritmi e dei calcoli ho compreso».

4.4 L’elaborato di Doris

Doris ha consegnato il lavoro richiesto solo dopo essere stata personalmente sollecitata a farlo, una volta scaduti i termini inizialmente indicati. L’alunna aveva mostrato in precedenza, durante le attività di classe, varie difficoltà in matematica. Allo scopo di fornirle un innesco che la inducesse a realizzare l’elaborato richiesto, le è stato inviato un messaggio via email suggerendole di partire da una riflessione personale sul perché non avesse svolto il lavoro. Qui di seguito è riportato l’elaborato di Doris.

> La comprensione dei logaritmi non risulta immediata, poiché nel testo seguente, prima bisogna tradurre il testo e successivamente comprenderlo e fare le relative considerazioni.
> Dopo aver compreso cos'è un logaritmo, ovvero «dato un numero reale non [*sic*] X esiste solo un numero Y tale che =X», questo numero si chiama «logaritmo di X». Questa condizione non è semplice all'inizio. Un'altra difficoltà è comprendere che il problema del logaritmo è risolvibile trovando l'esponente che mi permette di trovare quel risultato.
> Il motivo per il quale non ho svolto il compito, o meglio non ho l'ho terminato, è che la matematica personalmente è un concetto da capire attraverso la pratica di esercizi e formule, invece attraverso un testo in inglese mi sono trovata maggiormente in difficoltà poiché non mi permetteva di comprendere il concetto di logaritmo o dei concetti che richiedeva ogni testo del “brain-storming” in modo esplicito e diretto. Questo lavoro distoglieva la mia attenzione dal vero scopo, ovvero quello di interiorizzare il concetto, invece il lavoro di tradurre e comprendere il testo in sé quindi il ragionamento per arrivare alla comprensione del concetto era molto enigmatico e prolungato.

Doris sembra avere raccolto il suggerimento di partire da una riflessione personale non tanto per sviluppare la propria interpretazione del documento quanto per esprimere un’opinione sul suo utilizzo e la sua utilità. In effetti la sua adesione al ragionamento matematico dell’autore è solo marginale. Il suo spaesamento è espresso in pieno ma non affrontato. Le sue riflessioni confermano che l’interpretazione di un documento è un compito che trova ostacolo in un approccio alla matematica basato sull’utilizzo di regole («formule») finalizzato alla risoluzione di esercizi. Appare allarmante che Doris attribuisca ad una «pratica di esercizi e formule» il modo per arrivare a «interiorizzare il concetto», senza citare altri modi. Ritorneremo su questi aspetti più avanti traendo spunto anche dall’elaborato di Marta (par. 4.6).

4.5 L'elaborato di Franca

1) LOGARITMO
TRADUZIONE TESTO
103) Qualsiasi base logaritmica scegliamo abbiamo sempre log 1 = 0.
dato che nell'equazione $a^z = y$, che corrisponde a z = log y, se y = 0 allora z = 1.
Di conseguenza, il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo, a seconda della base a.
Pertanto: log a = 1, log $a^2 = 2$, log $a^3 = 3$; log $a^4 = 4$, ecc. dopodiché sappiamo quale base è stata scelta, cioè il numero il cui logaritmo è uguale a 1 è la base logaritmica.
Il logaritmo di un numero positivo minore di 1 sarà negativo, infatti:
log 1/a = -1
log $1/a^2 = -2$
log$1/a^3 = -3$, ecc.
mentre i logaritmi dei numeri negativi non saranno reali, bensì complessi, come già osservato.
ANALISI CONTENUTI
Il testo spiega il meccanismo alla base del logaritmo, mettendolo in relazione alla tipologia e al segno dei numeri coinvolti.
Il logaritmo è l'esponente al quale bisogna elevare un numero costante (base) per ottenere un determinato numero. Logaritmo ed esponenziale, infatti, sono funzioni inverse:
$a^z = y$ z = log y.
Partendo da questo presupposto, l'autore afferma che log 1 = 0. In effetti, 0 l'unico numero che può soddisfare l'uguaglianza: $n^x = 1$.
Dopodiché, le successive deduzioni dell'autore non riesco a capirle. Forse per un mio errore di traduzione, ma in alcuni punti non riesco proprio a capire il senso della frase.
L'ultima osservazione, però, mi incuriosisce molto: «i logaritmi dei numeri negativi non saranno reali, bensì complessi».

Franca riporta una sua traduzione del documento (è una delle due studentesse della classe ad averla scritta) che va a costituire una parte significativa del suo elaborato che altrimenti, al netto delle osservazioni sulle proprie difficoltà, risulterebbe piuttosto povero. La traduzione appare abbastanza fedele, a parte l'errore «z = log y, se y = 0 allora z = 1»; anche il suo «infatti» risulta discutibile in quanto sembra attribuire agli esempi che lo seguono la possibilità di dedurre l'affermazione sul logaritmo negativo, mentre Eulero appare riportarli come conseguenze di essa. Franca fa poi riferimento alle domande 1 e 5. Porta a tema il documento come oggetto su cui dare un giudizio complessivo; la sua attenzione e il suo coinvolgimento nella proposta dell'autore appaiono lacunosi. Dopo una chiara introduzione del concetto di logaritmo e del suo legame con l'esponenziale, scrive di non aver capito la seconda parte del documento ma non esplicita riguardo a quali punti («in alcuni punti non riesco proprio a capire il senso della frase»). Rinuncia a formulare domande di chiarimento rivolte all'insegnante. Menziona l'autore e dice di sé in merito a un possibile errore di traduzione; formula quello che ritengo possa essere interpretato come un implicito giudizio sulla chiarezza del testo, espresso dal suo «forse». Franca sembra rompere quello che Levinas chiama «Asimmetria dell'interpersonale», il titolo di un paragrafo di *Totalità e Infinito*: si stacca dall'itinerario indicato dall'autore, dalla possibilità di ricevere un insegnamento; al contrario porta a tema il proprio lavoro e quello dell'autore cosicché la sua relazione con il testo non appare irriflessa e affidata all'iniziativa dell'autore. Franca mostra curiosità per l'osservazione finale riguardante il logaritmo di un numero negativo, che Eulero non chiarisce all'interno del documento ma che nell'originale affronta ai punti che precedono il 103. Franca nota la mancanza di una spiegazione e con ciò conferma la sua curiosità intellettuale che però, durante

il lavoro individuale o con il resto della classe, tendeva a non essere sostenuta da una propensione all'analisi e all'approfondimento.
Durante l'intervista, a Franca è stato chiesto se potesse spiegare quali fossero quegli «alcuni punti» in cui non riusciva a capire il senso della frase. Ha risposto che si trattava della parte in cui Eulero riporta uguaglianze come $\log \frac{1}{a^2} = -2$ e che quando ha prodotto la sua interpretazione non ricordava il significato degli esponenti negativi.

4.6 L'elaborato di Marta

> In questo documento l'esponente, quindi il logaritmo dell'equazione è "z". (y =1 allora z = 0)
> Nei passaggi successi viene messo in mostra come i logaritmi siano gli stessi esponenti dei vari numeri; un logaritmo può risultare negativo quando l'esponente a cui corrisponde si trova al denominatore invece che al nominatore.
> Mi è stato difficile capire il documento, ma sono riuscita ad estrarre alcune regole di base, come:
> • Il logaritmo può essere negativo quando l'esponente è al denominatore
> • Il logaritmo di un numero è il suo esponente oppure un esponente che può aiutarci a raggiungere il numero che ci serve

Marta fa riferimento alle domande 1, 2, 4. Riguardo all'esponente del denominatore, individua una regola in base alla quale è possibile risolvere una gamma di esercizi. Sembra fare riferimento semplicemente alla struttura formale delle scritture riportate da Eulero. Con l'identificazione delle due regole nel breve elenco puntato, appare orientata a mettere in primo piano l'importanza della memorizzazione. Marta dice di sé e delle proprie difficoltà nel comprendere il documento: metaforicamente, appare "respinta" dal testo. Si noti che, diversamente da Franca, non riporta possibili cause di ciò: possiamo ritenere che le abbia attribuite a sé stessa. Avrebbe preso così atto della propria inadeguatezza che in tal caso sarebbe penalizzante: non premessa alla propria disponibilità a ricevere un insegnamento ma rinuncia a riceverlo. Nonostante le sue difficoltà, non riporta domande di chiarimento rivolte all'insegnante.
A Marta, durante l'intervista, è stata rivolta la domanda: «Per cosa ritieni utili le regole di base che hai riportato nella tua interpretazione?». La studentessa ha risposto che «le regole sono utili per risolvere gli esercizi in modo più semplice, con meno difficoltà». Ciò che Marta ricava dal testo appare finalizzato alla realizzazione del compito scolastico e in questo senso fa un uso strumentale del testo: non è il ragionamento proposto dall'autore che viene tenuto come riferimento ma l'idea che possa servire per il raggiungimento di uno scopo esterno. Marta aveva avuto forti difficoltà in matematica durante tutti gli anni della scuola secondaria di secondo grado. Le sue osservazioni suggeriscono una riflessione sul ruolo degli esercizi (intesi come utilizzo di un concetto indicato esplicitamente; non faccio riferimento ai problemi in cui il riferimento ai concetti è una questione aperta). Si diceva sopra (par. 3.3) che essi forniscono un «surplus d'essere». Contrariamente a quanto afferma la studentessa, gli esercizi sono in questo senso finalizzati a introdurre delle difficoltà per il solutore; superarle è indice di avanzamento nel processo di apprendimento. Gli esercizi hanno un ruolo fra le *performance* richieste dalla scuola nelle prove di verifica. Come nel caso di Marta, un alunno debole tende a finalizzare il proprio impegno all'assolvimento di tali richieste, bypassando l'apprendimento. Si ha così un esito paradossale: la situazione insoddisfacente determinata dalle difficoltà nella disciplina tende ad essere risolta dall'iniziativa dell'alunno, avendo come riferimento ciò che la scuola richiede. Le pratiche in atto nell'istituzione (le modalità di verifica su cui è basato l'avanzamento ai gradi successivi) consentono così alla scuola di autoassolversi dalla necessità di un intervento destinato ad affrontare le difficoltà degli alunni. Si genera evidentemente una contraddizione: la scuola ha come proprio fine costitutivo gli apprendimenti dell'alunno ma la sua struttura offre l'opportunità, previo assolvimento di determi-

nati atti, di non conseguire apprendimento. Detto con termini utilizzati nel presente articolo, la scuola crea le condizioni perché l'alunno viva la relazione etica di alterità da cui origina l'apprendimento, ma al contempo offre le condizioni perché venga disattesa.

4.7 L'elaborato di Anna

> Logaritmi
> In questo documento vediamo come si svolgono i logaritmi.
> Sappiamo che il logaritmo è l'esponente della potenza al quale la base deve essere elevata per ottenere un determinato numero.
> Esempio: 10^2= 100 (10 è la base, 2 è il logaritmo mentre 100 è l'argomento)
> Nel logaritmo $\log_2 16$= x dobbiamo trovare quel numero che, elevando 2^x sia uguale a 16. In questo caso quindi la x= 4 perchè 2^4= 16
> Grazie a questo ragionamento possiamo confermare perciò che qualsiasi log1 risulterà sempre 0 perché sappiamo che qualsiasi numero elevato alla 0 da 1. (x^0=1)
> In questo documento viene spiegata, in maniera molto chiara, il ragionamento che sta dietro al logaritmo e, dal mio punto di vista, è molto utile perchè viene spiegato sia in maniera scritta che in maniera numerica.
> La spiegazione numerica può risultare più complessa per chi non è portato per la matematica quindi la spiegazione scritta presentata è assolutamente efficace.
> Ovviamente, come accade in altre equazioni, sappiamo che il logaritmo di un numero inferiore a 1 risulterà un numero negativo.
> Esempio: log 1/3 3 = 1
> Cos'è un logaritmo e di quali parti è composto?
> Come si calcola un logaritmo? Spiega perché log1 sarà sempre uguale a 0.
> Il logaritmo di un numero minore di 1 è positivo? Se no perché?

Anna accenna a sé stessa riportando quello che definisce il proprio «punto di vista»; parla del testo esprimendo il proprio giudizio; insiste sulle domande che hanno risposta nel testo 1, 2 e 4. Produce esempi dello stesso tipo di quelli di Gaia e di Francesca (par. 4.1 e par. 4.2).
Formula poi domande che non sono però autentiche richieste di chiarimento rivolte all'insegnante, ma appaiono una sorta di schema della sua interpretazione, cioè domande che Gadamer cita come interrogativi che sostengono la ricerca di risposte all'interno del testo. Va notato che anche un'altra studentessa (della quale qui non viene riportato l'elaborato per esteso) aveva inteso che le domande che era stato suggerito di scrivere fossero di questo tipo: non richieste per avere un aiuto dall'insegnante nella comprensione, ma parte dell'esercitazione scritta che perciò le studentesse sembra abbiano considerato come fine a sé stessa. Dal punto di vista di un insegnante, questo tipo di domanda avrebbe potuto avere un senso se, ad esempio, fosse stato programmato un interscambio fra i compagni di classe e le domande fossero servite come aiuto per mettere in risalto i punti del documento ritenuti fondamentali. Questa particolare formulazione di interrogativi può essere intesa dunque come una sorta di resoconto dell'attività di porsi domande (quelle di cui hanno trovato risposta nel testo) che le studentesse hanno fatto durante l'interpretazione.
Per un altro verso, tramite la formulazione di quel tipo di domande, Anna mostra di voler dare all'insegnante un esplicito riscontro del successo della sua interpretazione. Con ciò, la relazione etica viene interrotta e interlocutore dell'alunna diventa l'insegnante nel suo ruolo istituzionale. Al contrario, formulare domande per raccogliere chiarimenti testimonia che l'insegnante viene riconosciuto come mediatore nella relazione etica – del resto, faceva già parte di questo suo ruolo l'atto di proporre il documento all'attenzione degli studenti. Considero il fatto che Anna abbia scritto quelle domande come specchio di ciò che avviene usualmente in classe, vale a dire del fatto che lo studente sostiene una prova di verifica

– un atto tangibile a conclusione di un lavoro – somministrata dall'insegnante nel suo ruolo di membro dell'istituzione scolastica. Nel suo elaborato, Anna mostra sia una fase di adesione etica al documento, sia una fase di attenzione al valore istituzionale del suo impegno scolastico. Questo evidenzia il delicato equilibrio in cui lo studente svolge in generale il suo lavoro: la dipendenza dalle richieste dell'istituzione e la necessità di rendere conto ad essa dei propri progressi, passando però per quella che abbiamo chiamato relazione etica che si instaura con persone come l'autore di un testo.

5 Discussione

Sopra (par. 3.2) si è detto delle motivazioni che hanno portato alla scelta del brano di Eulero e che si possono ricondurre a una domanda di senso, unificante, a cui il testo dà risposta. Brevemente, essa si può formulare attraverso l'interrogativo: come proporre agli studenti un lavoro per rivedere il concetto di logaritmo? Gadamer (1960/2006) riporta altre considerazioni che menziono come sintesi del ruolo della domanda nell'interpretazione. Dice della perplessità di fronte a un testo del passato (nel caso del testo matematico questo richiama il *dépaysement épistémologique*). Fa poi riferimento alla comprensione, che include la mediazione fra il presente e la tradizione. La relazione fra domanda e risposta può essere di fatto invertita: la voce che ci parla dal passato ci interpella e pone una domanda che determina in noi un'apertura di significato. Allo scopo di rispondere alla domanda postaci, noi stessi dobbiamo iniziare a porre domande. Queste non potranno però mai essere all'interno dell'orizzonte originario ma entro un orizzonte che abbraccia noi stessi. Questo ci riallaccia ai temi delle preconoscenze e della distanza storica affrontati sopra (par. 1).

Soffermiamoci sull'elaborato di Gaia che mostra più degli altri come si possa ritenere che la relazione etica si sia instaurata pur di fronte a evidenti difficoltà di ordine concettuale e linguistico. Dopo aver riconosciuto lo spaesamento che le ha procurato, la studentessa ha accettato progressivamente l'alterità del documento, l'ha affrontato attraverso un atteggiamento etico. Ha accolto il documento senza volersene servire, senza farsene strumento, senza *reificarlo*. Nell'abbandonare il tema iniziale riguardante sé e il documento, si è fatta carico di quanto Eulero propone e si è impegnata a seguirlo – con Levinas (1978/2002, p. 94) potremmo dire che si è fatta prendere dalla «ossessione per un altro che non si manifesta»: l'Altro non si manifesta direttamente nel testo, vi figura solo attraverso delle tracce ma arriva a determinare nello studente un ruolo passivo inteso come disponibilità a farsi guidare.

Il valore educativo in un documento storico ritengo possa essere attinente, in senso lato, alla promozione nello studente della sua disponibilità a mettersi in ascolto dell'Altro, a essere aperto alla novità di cui è portatore e ad affrontare le difficoltà prodotte dagli aspetti insoliti presenti nel documento. Gaia si è messa in gioco affrontando il rischio dell'insuccesso che l'interpretazione del documento comporta. Dopo aver parlato del documento "in terza persona" si è volta al merito del contenuto vale a dire è passata dalla palese esigenza di gestire il documento, di comprenderlo (dal latino *comprehendĕre* e *comprendĕre*, composizione di *con-* e *pre(he)ndĕre* "prendere"), alla condivisione con l'autore dell'analisi del contenuto matematico.

A seconda delle situazioni e del contesto, alcune obiezioni possono nascere riguardo al riconoscimento dell'eticità nella relazione di un lettore rispetto a un documento. Pensiamo al caso di uno studioso che, ad esempio, utilizzi un documento storico a soggetto matematico per indagini legate all'uso della lingua: possiamo supporre che non sia interessato a seguire il ragionamento esposto dall'autore. Stabilisce allora una relazione non etica con il documento, nel senso dell'etica levinasiana centrata sulla relazione Io-Altro (quella fra lo studente e l'autore che si espone attraverso un ragionamento matematico, e che ha costituito il punto di attenzione del presente articolo). Gli aspetti linguistici a cui lo studioso è interessato ritengo vadano inclusi fra gli elementi che l'autore lascia inconsapevolmente

nel documento e che pure aiutano a connotarlo. Nel definire "non etica" tale relazione, così, ancora una volta non faccio riferimento a principi di altra provenienza o a codici deontologici che possano portare a giudicare negativamente la scelta di quello studioso.
L'autore ha lasciato traccia nel documento scritto, così come l'insegnante che l'ha scelto e l'ha proposto ai suoi studenti. Sono quindi loro che determinano l'«ossessione» di cui parla Levinas – nel suo stile a volte iperbolico ma certo efficace. La mancanza di comprensione che Gaia riconosce è la dichiarazione di non aver individuato l'orizzonte entro cui l'autore si colloca. Lo individua nel momento in cui recupera le proprie preconoscenze e riesce ad associarle all'oggetto del documento. In quanto Gaia afferma («i logaritmi e le loro proprietà», da intendersi in senso lato e in questo caso non come quelle che tradizionalmente riguardano il logaritmo del prodotto, del quoziente o di una potenza) sembra trasparire quello che Gadamer (1960/2006, p. 294) chiama «pregiudizio di completezza» e si riferisce al fatto che solo ciò che costituisce un'unità di significato è intellegibile. Gaia sembra dichiarare che inizialmente andasse cercando questa struttura unitaria del testo; ha poi mostrato di averla trovata riportando una sorta di "titolo" per il documento.
Gaia ha colto le domande a cui il testo fornisce risposta elencate sopra, tranne quella sul logaritmo di un numero negativo. In effetti, a proposito di quest'ultima Eulero accenna a osservazioni fatte altrove, senza una trattazione analoga a quella del logaritmo di numeri maggiori di 1 o positivi minori di 1. Gaia appare in grado di rispondere a possibili domande sul contenuto del documento di Eulero, con forse l'eccezione di quella riguardante appunto il valore del logaritmo di un numero negativo.
Anche in vari elaborati degli studenti che non sono riportati nel presente articolo si è manifestata una sorta di "distanziamento" dal testo che si esprime nel soffermarsi, ad esempio, sulle proprie difficoltà o nell'indicare solo per sommi capi il contenuto. Non sembra che questi studenti si siano posti domande e che abbiano intrapreso una riflessione per trovarvi risposta nel testo. Gli elaborati di Doris o di Franca rendono plateale questo "distanziamento" dal testo. Considero alla stessa stregua anche una parte di ciò che ha proposto Chiara (che ha inserito nel proprio elaborato la proprietà del logaritmo di un prodotto senza poi utilizzarla in un ragionamento che seguisse quello di Eulero): lo considero un atto di estrema responsività ma non di responsabilità nei confronti del documento.
In precedenti attività a classe intera, la lettura di un testo aveva prodotto un interscambio con l'insegnante molto vivace, fatto di osservazioni e domande orali. L'elaborato scritto ha indubbiamente prodotto una significativa rarefazione delle domande di chiarimento degli studenti all'insegnante, nonostante siano state presentate come parte del compito stesso. Va considerato che la produzione di schemi e riassunti di testi, per le varie discipline, era una pratica consolidata nelle attività affrontate in classe dagli studenti ma non lo era la scrittura di domande di chiarimento rivolte all'insegnante.
L'interpretazione del testo richiede che gli studenti mobilitino le loro personali conoscenze, abilità e competenze e in questo viene ad avere una impronta di soggettività. La classe aveva già lavorato per circa due mesi sul logaritmo. Attraverso l'attività con il testo si è rilevato però che vari aspetti concettuali in molti studenti rimanevano non chiari. Sorge l'interrogativo riguardante il modo in cui questo abbia potuto ostacolare la loro ricerca di adesione al pensiero dell'autore. Per dare completezza, seppur molto sinteticamente, al quadro del lavoro della classe, utilizzando ancora pseudonimi qui di seguito vengono menzionati alcuni degli elaborati non riportati sopra; è tralasciato il riferimento a quelli che costituiscono sostanziali ripetizioni. Caterina ha scritto la traduzione in italiano, le «formule e la sintesi matematica» ed un commento su come ha svolto il lavoro. Emanuela ha prodotto uno schema con sintetici enunciati e scritture simboliche non sempre corrette. Michele ha prodotto una riformulazione del contenuto anche attraverso espressioni personali non precise come, ad esempio, «Il logaritmo di un numero è il suo esponente o l'esponente "ideale" che servirebbe per raggiungere il numero a destra dell'uguale»; ha tralasciato però quasi interamente le scritture simboliche. Corinna ha riportato un brevissimo elaborato contenente affermazioni errate: «Il logaritmo di un numero è sempre positivo quando la base è maggiore di 1», «Il logaritmo di un numero è negativo quando la base è minore di 1».

6 Conclusioni

Nell'articolo sono stati considerati alcuni elaborati prodotti dagli studenti relativamente all'interpretazione di un brano di Eulero sui logaritmi per discutere secondo quali aspetti si potesse rilevare che si era instaurata o meno una relazione "etica". Forse il termine *empatica* aiuta a comprendere meglio una parte del significato che ho desiderato attribuire al termine "etica", nel senso che suggerisce la presenza di una persona dietro al testo, con la quale si instaura un rapporto di partecipazione e che, attraverso il testo, indirizza l'impegno dello studente. Si produce un'immedesimazione nell'autore che però non può essere completa: non possiamo parlare di identificazione. Questo diventa particolarmente evidente pensando agli effetti che la distanza temporale produce nel caso di un documento storico: autore e lettore provengono da contesti culturali diversi e da esperienze di vita differenti, la loro preparazione matematica non è la stessa. È questo un caso che conferma come in un'autentica relazione di alterità non è possibile ridurre l'Altro a noi stessi, anche nel caso di una relazione pienamente responsiva e responsabile.
Nell'articolo si è insistito sull'esigenza che lo studente si mostri disposto a ripercorrere gli stessi ragionamenti dell'autore: come premessa per l'apprendimento, contro lo studio "mnemonico". Il rendere conto dei ragionamenti matematici dell'autore non esaurisce però l'interpretazione del documento. Non va esclusa la possibilità che gli studenti possano portare a tema altri aspetti e senza un'esplicita sollecitazione dell'insegnante si vogliano, ad esempio, soffermare su particolari espressioni linguistiche dell'autore o sulla sua collocazione storica: questa loro iniziativa costituirebbe una ulteriore problematizzazione riguardo all'instaurarsi della relazione che ho indicato come "etica".
Non va dimenticato che un lettore possiede un proprio bagaglio di «preconoscenze» o «pregiudizi» (termine utilizzato da Gadamer che non deve essere visto in un'accezione negativa) in base ai quali opera una propria personale attribuzione di significati al testo: non dovrà sembrare paradossale che questo avvenga anche se autore e lettore sono impegnati con lo stesso contenuto matematico. A questo proposito pensiamo a Gaia e Francesca e al richiamo delle loro preconoscenze riguardanti le potenze di 10 per dare significato alle scritture generali di Eulero.
Sono stati individuati alcuni punti nel passo dell'*Introductio* che sono andati a costituire uno schema di ragionamenti condivisi: alla luce di quanto appena detto, certamente non esauriva i possibili significati del documento. Tale schema è stato ricavato considerando le domande a cui il testo fornisce risposta, che lo studente può cogliere nella sua interpretazione e riportare nel suo resoconto scritto.
Quella con l'autore è una relazione di fiducia che porta lo studente ad affrontare il rischio dell'errore e dell'insuccesso. Dal punto di vista educativo ritengo questo tipo di relazione imprescindibile affinché lo studente ponga sé stesso dentro un cammino di crescita personale nell'apprendimento della matematica. La messa in atto di relazioni etiche può essere considerata anche una più generale testimonianza del coinvolgimento degli alunni nella proposta didattica, e questo è uno degli obiettivi che la scuola si pone: mantenere gli studenti all'interno dei percorsi che realizza è un atto prioritario rispetto all'apprendimento di specifici contenuti disciplinari.
Seguire i ragionamenti dell'autore di un testo è un modo per mettersi in ascolto dell'Altro – per imparare ad ascoltare – come documentano Arcavi e Isoda (2007) a proposito dell'uso didattico dei documenti storici. Ci si colloca così nell'ambito di una finalità educativa di notevole rilievo, rispetto alla quale la matematica è importante possa dare il proprio contributo come disciplina scolastica, andando oltre i valori che usualmente le vengono attribuiti quali, ad esempio, il rigore nel ragionamento o la correttezza nell'uso di linguaggi specifici.
In un momento successivo, informalmente, una studentessa ha manifestato le proprie perplessità riguardo all'uso del termine *etica* riferito al documento e si chiedeva quali principi etici si potessero violare rispetto a un testo matematico. Ritengo che questa osservazione possa essere lo spunto per

ribadire come la relazione di cui ci stiamo occupando nel presente articolo tragga origine, levinasianamente, dalla relazione con l'Altro e non dai principi di un'etica preesistente.

Riassumendo quanto è stato illustrato nell'articolo, possiamo dire che uno studente stabilisce una relazione etica con un documento se nella scrittura della sua interpretazione porta a tema il ragionamento dell'autore, se trascura sia il testo come oggetto (da memorizzare, da usare in vista di una prova di verifica) che la propria relazione con esso, se condivide con l'autore le domande a cui il documento fornisce risposta, se mostra di accettare un insegnamento anche a costo di incorrere nell'errore, se cerca di consolidare i legami fra il ragionamento dell'autore e il proprio, se formula richieste di chiarimento.

Nel caso degli studenti che hanno interpretato il testo di Eulero, il porre domande è risultato un atto parziale, incompiuto. Qui intendo riferirmi alla formulazione esplicita di domande di chiarimento rivolte all'insegnante. Porre domande ritengo costituisca la dimostrazione del riconoscimento dell'alterità del testo e l'accettazione della propria inadeguatezza. Penso però che nella quotidianità di classe esistano delle condizioni per le quali gli studenti non possano trovare la motivazione per manifestare questa inadeguatezza, in una scuola che non fa iniziare il proprio intervento da una discussione con gli studenti dei loro bisogni formativi e che non prevede poi il riconoscimento dei progressi rispetto ai personali livelli di partenza.

Quasi tutti gli elaborati prodotti dagli studenti hanno mostrato difficoltà di vario tipo nella gestione del concetto di logaritmo. L'analisi condotta nel presente articolo non intendeva focalizzare questi aspetti a proposito dei quali si rinvia a Dintarini (2018). Alcuni degli errori presenti negli elaborati riguardanti l'interpretazione del documento sono di natura linguistica, come ad esempio in Gaia: «Per trovare il logaritmo in base *n* di un numero *y* vuol dire trovare quel numero *x* che elevato alla base *n* mi dia *y*» per intendere che la base *n* va elevata all'esponente *x*. Per quanto riguarda lingua e linguaggi della matematica nell'insegnamento, si veda Ferrari (2020).

Dopo il lavoro di interpretazione del documento, considerare che queste funzioni logaritmiche sono crescenti ha aiutato a chiarire l'affermazione di Eulero: «From this [log 1 = 0] it follows that the logarithm of a number greater than 1 will be positive».

Il testo di Eulero sembra sia stato ritenuto dagli studenti adeguatamente chiaro, e la lingua inglese non ha introdotto difficoltà supplementari, ma negli elaborati e nelle indicazioni informali raccolte successivamente alla consegna del testo solo un numero molto limitato di studenti ha formulato dei rilievi e infatti solo due studentesse hanno messo in discussione la chiarezza del documento, anche se non in maniera netta. Si ricordi, ad esempio, l'affermazione di Franca riportata al par. 4.5 «Forse per un mio errore di traduzione», all'interno di un passo in cui sottolineava le proprie difficoltà di comprensione di alcune righe del documento.

Lavorare con i documenti storici è anche un modo per sperimentare la «fondamentale non-definitività dell'orizzonte in cui il comprendere si colloca» (Gadamer, 1960/2006, p. 366). Pensiamo, ad esempio, a come lo studente possa affrontare le varie fasi dello spaesamento che si ha nell'incontrare i diversi aspetti, anche di carattere pluridisciplinare, del documento. In generale, se lo studente considera quanto ha appreso come un atto concluso ritengo che corra il rischio di precludersi la possibilità di individuarne nuovi significati. Questo ritengo possa influire sulla possibilità di impiegarlo in ulteriori proposte di apprendimento, rivedendolo in quanto preconoscenza e sapendolo trasferire a nuove situazioni. Con questo intendo richiamare anche Paulo Freire (1970/2007, p. 75) quando, nel paragrafo dedicato a «L'uomo come essere inconcluso e la sua permanente ricerca di "essere di più"», parla della necessità di mantenersi in un «movimento di ricerca». Intendo anche fare riferimento all'insegnamento di Levinas che esorta ad andare oltre la conoscenza intesa come appropriazione dell'alterità di ciò che viene conosciuto, si veda Levinas (1982/1989). Nella relazione etica con il documento, la comprensione avviene nel desiderio di seguire l'Altro e quanto propone, l'Altro che si espone attraverso la propria opera.

Bibliografia

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 111–129.

Barbin, É. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, *37*(1), 20–25.

Barbin, É. (2012). L'histoire des mathématiques dans la formation : une perspective historique (1975–2010). In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Actes du congrès de l'Espace mathématique francophone 2012* (pp. 546–554). Université de Genève.

Barbin, E., Jankvist, U. T., Kjeldsen, T. H., Smestad, B., & Tzanakis, C. (Eds.). (2019). *Proceedings of the 8th European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*. Metropolitan University of Oslo.

Boyer, C. B. (1951). The foremost textbook of modern times. *The American Mathematical Monthly*, *58*(4), 223–226.

Calandri, F. (1491). *Aritmetica*. Morgiani & Petri.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2014). History in the mathematics laboratory: an exploratory study. In M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds.), *Ιστορία των Μαθηματικών καιΜαθηματική Εκπαίδευση – Special Issue of Education Sciences* (pp. 114–130). University of Crete.

Dilthey, W. (1996). *The rise of hermeneutics*. In R. A. Makkreel & F. Rodi (Eds.), *Hermeneutics and the Study of History: Selected Works* (Vol. IV, pp. 235–257). Princeton University Press. (Titolo originale: *Die Entstehung der Hermeneutik* pubblicato nel 1900).

Dintarini, M. (2018). Understanding logarithm: what are the difficulties that students have? *Proceedings of the 5th International Conference on Community Development (AMCA 2018) – Advances in Social Science, Education and Humanities Research* (pp. 239–241). Atlantis Press.

Dougan, M. J. (2016). *The Ethics of Reading: Levinas and Gadamer on encountering the other in literature*. Doctoral Thesis, University of Waikato, Hamilton, New Zealand.

Euler, L. (1988). *Introduction to analysis of the infinite, Book 1*. Springer. (Titolo originale: *Introductio in analysin infinitorum* pubblicato nel 1748).

Ferrari, P. L. (2020). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET Università.

Foucault, M. (1977). What is an Author? In M. Foucault (Ed.), *Language, counter-memory, practice* (pp. 113–138). Cornell University Press. (Titolo originale: *Qu'est–ce qu'un auteur?* pubblicato nel 1969).

Freire, P. (2007). *La pedagogia degli oppressi*. EGA Editore. (Titolo originale: *Pedagogia do oprimido* pubblicato nel 1970).

Gadamer, H.-G. (2006). *Truth and Method*. Continuum. (Titolo originale: *Wahrheit und Methode* pubblicato nel 1960).

Guillemette, D. (2018). The ethical subject of Levinas. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education – Otherness in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 95–123). PME.

Habermas, J. (1993). *Etica del discorso.* Laterza. (Titolo originale: *Moralbewußtsein und kommunikatives Handeln* pubblicato nel 1983).

Jahnke, H.-N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. A. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education, The ICMI Study.* Kluwer Academic Publishers.

King, C. (2019). Gadamer, Levinas, and the Hermeneutic Ontology of Ethics. *Philosophies*, *4*(3), 48. MDPI AG. http://dx.doi.org/10.3390/philosophies4030048

Levinas, E. (1979a). *La traccia dell'altro.* Tullio Pironti Editore. (Titolo originale: *La trace de l'autre* pubblicato nel 1963).

Levinas, E. (1979b). *Totality and Infinity – An Essay on Exteriority.* Martinus Nijhoff Publishers. (Titolo originale: *Totalité et Infini: essai sur l'extériorité* pubblicato nel 1961).

Levinas, E. (1989). *Ethics as First Philosophy.* In S. Hand (Ed.), *The Levinas Reader* (pp. 75–87). Basil Blackwell. (Titolo originale: *Éthique comme philosophie première* pubblicato nel 1982).

Levinas, E. (2002). *Altrimenti che essere o al di là dell'essenza.* Jaca Book. (Titolo originale: *Autrement qu'être ou au-delà de l'essence* pubblicato nel 1978).

Mason, J., & Pimm, D. (2008). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277–289.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 45 - 68, DOI: 10.33683/ddm.22.12.3

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Analisi del discorso di classe sul riconoscimento di altezze di un triangolo

Classroom discourse analysis on the identification of a triangle's heights

Giulia Lisarelli• e Elisa Miragliotta°
•Dipartimento di Matematica, Università di Pisa – Italia
°Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia – Italia

giulia.lisarelli@dm.unipi.it, elisa.miragliotta@unipv.it

Sunto / L'articolo presenta l'analisi del discorso matematico degli studenti di una classe II di scuola secondaria di primo grado, intrapreso durante una lezione sul riconoscimento di altezze di un triangolo. La lezione si è svolta dopo un percorso didattico durante il quale il discorso sull'oggetto matematico *altezza* si è costruito a partire da diverse realizzazioni possibili. Obiettivo principale di questo studio è documentare quali tra queste realizzazioni del significante *altezza* compaiono nel discorso di classe, descriverne le caratteristiche e osservare quali continuità o discontinuità presentano rispetto alle realizzazioni più comuni descritte dalla letteratura in didattica della matematica. L'analisi del discorso, accompagnata dalla costruzione e confronto tra l'albero di realizzazione atteso e l'albero della classe, consentiranno di mettere in luce sia la ricchezza del discorso di classe sia le interazioni tra realizzazioni diverse. Infine, si discuteranno le implicazioni teoriche e didattiche dello studio.

Parole chiave: albero di realizzazione; analisi del discorso; altezze; triangolo.

Abstract / This paper focuses on the mathematical discourse of a classroom of 7th-grade students, during a lesson concerning the identification of the heights of a triangle. The lesson took place after a sequence of activities during which the discourse on the mathematical object *height* has been constructed with students starting from its different possible realizations. The main goal of this study is to identify which of these realizations of the signifier *height* appear in the mathematical discourse of the classroom, to describe them, and to observe possible similarities or differences in relation to the most common realizations that the literature in Mathematics Education has reported on. The discourse analysis, combined with the construction and comparison of the expected realization tree and the students' realization tree, allows us to highlight both the richness of the mathematical discourse of the participants and the interactions between different realizations. Finally, we discuss possible theoretical and didactical implications of the study.

Keywords: realization tree; discourse analysis; heights; triangle.

1 Introduzione

Molte ricerche in didattica della matematica si sono occupate delle difficoltà degli studenti nel tracciare e riconoscere le altezze di un triangolo. Tali difficoltà, documentate da un gran numero di studi (Dreyfus, 2017; Gutiérrez & Jaime, 1999; Hershkowitz, 1987, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1980), sono ricorrenti, trasversali ai diversi livelli scolari e persistenti. Sebbene sia un tema di cui la ricerca nazionale ed internazionale si è tradizionalmente occupata, indagare le costruzioni personali degli studenti sviluppate attorno all'oggetto matematico "altezza" resta un problema affascinante e molto attuale, come dimostra la vivacità del dibattito anche in anni recenti (Sbaragli, 2017). Lo studio che presentiamo in questo articolo intende dare un contributo a questo filone di ricerche attraverso un'analisi del discorso di classe sul riconoscimento di altezze di un triangolo, adottando un punto di vista teorico inedito per questo tema di ricerca e, in generale, per studiare l'insegnamento-apprendimento della geometria.

1.1 Letteratura su altezze

La difficoltà nel riconoscere e tracciare altezze di un triangolo è largamente riconosciuta dalla ricerca in didattica della matematica. Il tema è stato tradizionalmente affrontato dal punto di vista cognitivo. Il riferimento principale è rappresentato dai lavori volti a riconoscere l'uso da parte degli studenti di *attributi critici* e *non-critici* per tracciare e riconoscere altezze (Hershkowitz, 1987, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1980). In generale, un concetto ha alcune caratteristiche rilevanti che derivano dalla sua definizione e sono quegli *attributi critici* che una sua rappresentazione deve avere per essere riconosciuta come istanza di quel concetto; un concetto possiede anche attributi *non-critici*, ovvero caratteristiche che solo alcune rappresentazioni del concetto possiedono. Ad esempio, nel caso dell'altezza di un triangolo, la perpendicolarità tra la retta su cui giace il lato del triangolo rispetto all'altezza relativa a quel lato è un attributo critico, mentre l'organizzazione spaziale del disegno del triangolo con una base orizzontale e la rispettiva altezza verticale rivela nella "verticalità dell'altezza" un attributo non-critico che tuttavia può diventare un elemento determinante per riconoscere una istanza di altezza.
Le difficoltà più comuni riguardano il caso dei triangoli ottusangoli e di quelli rettangoli e sono principalmente riconducibili all'influenza di due fenomeni strettamente intrecciati, noti come *effetto orientamento* (Fisher, 1978) ed *effetto prototipo* (Hershkowitz, 1989; Mariotti, 1995). Il primo riguarda l'influenza delle due direzioni verticale e orizzontale che gli studenti percepiscono come privilegiate (Mesquita, 1998). Tale concettualizzazione è frutto sia dell'interazione dell'individuo con l'ambiente esterno (per esempio, forza di gravità, misura della propria altezza appoggiandosi ad uno stipite, asse verticale del proprio corpo) sia delle esperienze scolastiche (per esempio, organizzazione del foglio di carta bianco o a quadretti). Il secondo riguarda l'influenza di particolari rappresentazioni di un concetto che diventano popolari e comuni al punto da diventare "*il concetto*" stesso (Hershkowitz, 1989, p. 67). Gli studi di Hershkowitz (1989) mostrano come solitamente il prototipo sia l'esempio che realizza l'elenco più lungo di caratteristiche, cioè tutti gli attributi critici del concetto e quegli attributi non-critici che hanno forti caratteristiche visive, come ad esempio le posizioni rispettivamente verticale e orizzontale dei cateti di un triangolo rettangolo.
Di conseguenza, l'altezza viene spesso pensata come un segmento interno al triangolo, verticale, non coincidente con un lato del triangolo. Oltre alla possibile difficoltà nel tracciare altezze di triangoli rettangoli e ottusangoli, troviamo in letteratura esempi di altezze sistematicamente disegnate come assi o mediane (Hershkowitz, 1989). Tali difficoltà e caratteristiche descritte si dimostrano trasversali rispetto ai livelli scolari (Gutiérrez & Jaime, 1999), sebbene via via meno pronunciate (Hershkowitz, 1989).

Nel panorama italiano Sbaragli (2017) sottolinea come, al termine della scuola primaria,[1] gli studenti sviluppino un concetto di altezza di un poligono fortemente legato a rappresentazioni stereotipate. Tali concezioni sono spesso frutto di una definizione di altezza univoca. Per esempio, la definizione più comunemente presentata a livello di scuola primaria è: «l'altezza è il segmento che "parte" da un vertice e "cade" perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento» (Sbaragli, 2017, p. 233).
Spesso tale definizione è «accompagnata a rappresentazioni stereotipate di tale concetto che non permettono di riconoscere rappresentazioni non convenzionali di altezze di poligoni» (Sbaragli, 2017, p. 233). In particolare, si osserva che segmenti non verticali o non passanti per alcun vertice non vengono considerati, o accettati, come possibili istanze di altezza.
Questo è abbastanza evidente guardando le illustrazioni di molti libri di testo o pensando alle rappresentazioni dell'altezza di triangoli che sfruttano manipolativi quali il filo a piombo. In generale, sia la pratica didattica più tradizionale che le esperienze spaziali collezionate durante le attività di tutti i giorni possono portare a una concettualizzazione dello spazio *spontanea* che potrebbe essere incoerente rispetto alla concettualizzazione geometrica (Mariotti, 2005). Nel caso delle altezze questo conduce spesso gli studenti a pensare i segmenti "perpendicolari" necessariamente disposti nella direzione verticale ed orizzontale, che è coerente con una concettualizzazione dello spazio spontanea ed esperita nel mondo fisico, ma non pienamente coerente con una concettualizzazione dello spazio euclideo in cui non si hanno direzioni privilegiate (Mariotti, 2005).
A partire da questo scenario, la nostra ricerca intende indagare gli effetti di un percorso di introduzione al concetto di altezza del triangolo, proposto a studenti del secondo anno di scuola secondaria di primo grado.[2] In particolare, l'insegnante ha lavorato in sinergia con le ricercatrici alla progettazione di tale percorso, condividendone i principi di base. Per operare proprio sulle criticità messe in luce dalla ricerca, si è deciso di offrire più di una caratterizzazione di altezza, accompagnate da molteplici rappresentazioni e con una grande attenzione a evitare il riferimento agli stereotipi più comuni, sfruttando il più possibile la discussione matematica collettiva intenzionalmente progettata e orchestrata dall'insegnante per favorire la costruzione da parte degli studenti del significato matematico di altezza.

1.2 Domande di ricerca generali

In questo articolo presentiamo e discutiamo le analisi di una lezione in cui è stato proposto agli studenti un adattamento di un noto quesito INVALSI[3] (rilevazione 2012-2013, grado 6) sul riconoscimento di altezze di un triangolo ottusangolo (si veda il **par. 3.2**), al termine del percorso didattico. La lezione è un espediente per cogliere nel discorso degli studenti gli elementi caratterizzanti il concetto di altezza al termine del percorso didattico, con l'ulteriore scopo di osservare quali delle caratteristiche presentate durante il percorso sono entrate a far parte dell'immaginario comune della classe. In particolare, l'articolo intende indagare:

– Quali elementi caratterizzanti il percorso didattico è possibile rintracciare nella discussione di classe, durante la risoluzione di un problema sul riconoscimento di altezze di un triangolo?
– Quali caratteristiche dell'altezza fanno parte dell'immaginario della classe?
– Quali stereotipi legati al concetto di altezza, che sono riportati in letteratura, sono persistenti e quali assenti?

Una volta introdotto il quadro teorico di questo studio, daremo una riformulazione più puntuale delle domande di ricerca e, nella metodologia, spiegheremo come abbiamo cercato risposte a esse.

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
3. Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

2 Quadro teorico

Abbiamo scelto di inquadrare questo studio dal punto di vista teorico all'interno dell'approccio discorsivo proposto da Sfard (2008). Partendo dall'assunzione che la comunicazione e la visualizzazione sono due processi fondamentali per l'apprendimento della matematica, e in particolar modo della geometria, abbiamo ritrovato in questo quadro teorico efficaci strumenti sia per la progettazione della ricerca sia per l'analisi dei dati.
A differenza di altri quadri cognitivi (Fischbein, 1993; Tall & Vinner, 1981) in cui i ricercatori costruiscono strumenti analitici per fare inferenze sulle *immagini mentali* e *concettualizzazioni* costruite e richiamate dagli studenti a partire dalle loro produzioni (verbali, diagrammatiche, gestuali) che sono manifestazioni "esterne" di processi "interni", l'approccio di Sfard ripensa queste due ultime dimensioni come una sola. Il discorso e il suo sviluppo vengono analizzati di per sé, come principali oggetti di ricerca piuttosto che come mezzi per esplorare altri costrutti.
Secondo l'approccio discorsivo, i processi cognitivi individuali e i processi di comunicazione interpersonale sono manifestazioni diverse di un fenomeno che è di fatto il medesimo. Il pensiero, infatti, è descritto come una versione individualizzata della comunicazione interpersonale e l'apprendimento è un processo per cui gli studenti diventano gradualmente capaci di comunicare su un determinato oggetto.
A nostro avviso, questa visione ha una ricaduta molto importante sulla nostra ricerca perché suggerisce di analizzare la "comunicazione" – e noi siamo proprio interessati al "discorso di classe" – cercando di rimanere il più possibile oggettivi e lasciando meno spazio possibile all'interpretazione.
Andiamo subito a chiarire alcuni termini alla luce del nostro quadro teorico.[4] La *comunicazione* è intesa come una struttura di azioni collettive in cui l'azione di un individuo è seguita da un'altra azione di un altro individuo e tali azioni/reazioni provengono da un repertorio ben definito.
Il discorso matematico è un tipo speciale di comunicazione, inter- e intra-personale, che si distingue per il suo repertorio di azioni e reazioni ammissibili. Secondo questa teoria, un oggetto matematico è quindi un oggetto discorsivo.
Uno dei principali elementi caratterizzanti il discorso matematico di una classe sono le *narrazioni*, cioè enunciati (scritti o parlati) formulati come descrizioni di oggetti, di relazioni fra oggetti o di processi, che sono soggetti a possibile approvazione o rifiuto. Le narrazioni condivise dalla classe sono quelle considerate vere e possono essere diverse da quelle accettate dalla comunità scientifica.
Inoltre, nel discorso matematico si fa uso di specifiche *routine*, ossia di modelli ripetitivi, che Sfard e i suoi colleghi hanno descritto operando una distinzione tra *rituali* ed *esplorazioni* (Lavie et al., 2018; Sfard & Lavie, 2005). Lo studente partecipa al discorso con una routine di tipo *rituale* quando riproduce rigidamente una procedura che ha osservato, con l'obiettivo principale di compiacere gli altri. Diversamente, la partecipazione costituita dall'esecuzione di routine *esplorative* si verifica quando lo studente produce le proprie narrazioni sugli oggetti matematici. L'obiettivo dello studente in questo caso è quello di risolvere un problema, non si limita quindi a riprodurre qualcosa che ha già visto o a manipolare simboli matematici, ma diventa lui stesso il protagonista dell'azione discorsiva.
A differenza dei discorsi colloquiali, in cui spesso la comunicazione è mediata da immagini di oggetti concreti (per esempio, l'affermazione "come è faticosa questa salita" verosimilmente è mediata dalla presenza di una strada caratterizzata da una pendenza notevole), un altro aspetto specifico del discorso matematico è che tale mediazione avviene attraverso oggetti di natura simbolica, iconica, gestuale (per esempio, l'affermazione "come è pendente questa retta" verosimilmente è mediata dalla presenza di un grafico cartesiano o dell'espressione algebrica di una retta con coefficiente angolare

4. Se non diversamente specificato nel testo, tutte le definizioni riportate di seguito si riferiscono alla Teoria della *Commognition* e sono riprese da Sfard (2008).

di valore assoluto significativamente maggiore di 0). Tali oggetti ai quali ci riferiamo nel discorso matematico sono chiamati *mediatori visivi*. Ad esempio, in ambito geometrico può essere un mediatore visivo il disegno di una figura sia in ambiente carta e penna che in ambienti di geometria dinamica.
Inoltre, la comunicazione matematica comporta continue transizioni dai *significanti*, che sono parole o simboli che hanno il ruolo di sostantivo negli enunciati del discorso, ad altre entità che chiamiamo *realizzazioni dei significanti*. La realizzazione di un significante può essere di natura linguistica, iconica, simbolica, gestuale, grafica ed è tale che è possibile tradurre ogni discorso su di essa in un discorso sul relativo significante. Per esempio, nel caso del significante "funzione", l'espressione algebrica, il grafico cartesiano, la tabella input-output sono tutte sue possibili realizzazioni. Per sottolineare il riferimento ad uno stesso significante, Sfard propone di organizzare le sue realizzazioni in *alberi di realizzazione* (Figura 1).

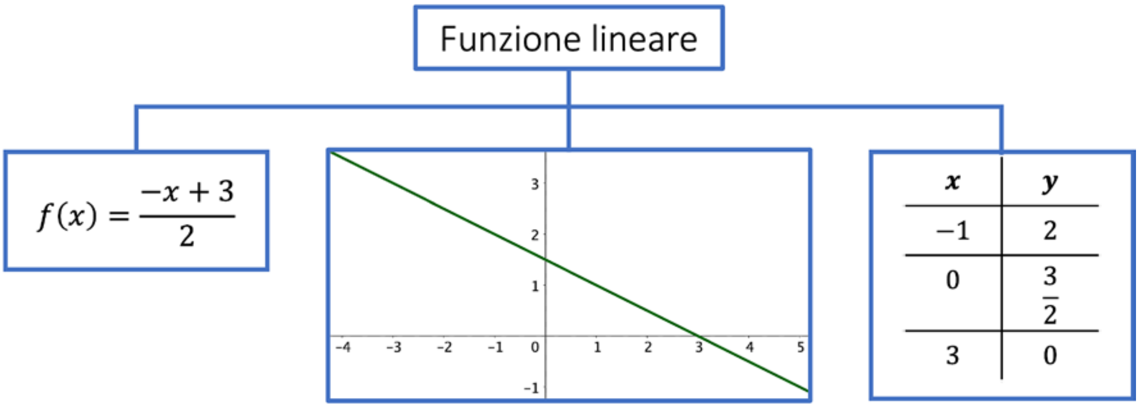


Figura 1. Esempio di albero di realizzazione del significante funzione lineare.

In questo articolo ci focalizzeremo su alberi di realizzazione del significante *altezza rispetto a un lato del triangolo*.
Durante le fasi iniziali dell'apprendimento di un oggetto matematico, gli studenti spesso usano separatamente diverse realizzazioni di uno stesso significante e solo più tardi arrivano a riferirsi ad esse all'interno di uno stesso discorso matematico, trattando ciascuna come possibile realizzazione delle altre. Questo processo, in cui gli studenti arrivano ad associare un significante a molte realizzazioni è chiamato *saming*[5] (Sfard, 2008).
I risultati delle ricerche che si sono esplicitamente occupate delle altezze di triangoli possono essere riletti alla luce del quadro teorico scelto.

2.1 Una proposta di lettura della letteratura di riferimento sulle altezze dei triangoli attraverso la lente teorica scelta

La ricerca nazionale ed internazionale in didattica della matematica riconosce alcune realizzazioni del significante *altezza di un triangolo* come più comuni, frequenti e privilegiate dagli studenti. Le riassumiamo di seguito.

5. Sfard (2008, p. 165) chiarisce come la possibilità di riconoscere in diverse realizzazioni istanze dello stesso oggetto matematico possa richiamare la nozione di catene di significazione in un approccio semiotico. Tuttavia l'uso di "alberi" piuttosto che "catene" vuole sottolineare la complessità e la gerarchia della struttura, piuttosto che restituire l'idea di linearità del processo che l'uso della parola "catene" può suggerire. Inoltre, il punto di vista è differente: per *rappresentazione* si intende generalmente una "incarnazione" materiale di un'entità astratta fondamentalmente intangibile (oggetto matematico), mentre la *realizzazione* appartiene alla stessa categoria ontologica del significante ovvero la categoria delle entità percettivamente accessibili (Sfard, 2008, p. 155). Per ulteriori approfondimenti si rimanda a Baccaglini-Frank et al. (2022).

L’altezza:

a. deve partire da un vertice (Sbaragli, 2017);
b. è interna al triangolo (Fischbein & Nachlieli, 1998; Hershkowitz, 1987, 1989; Sbaragli, 2017; Vinner & Hershkowitz, 1980);
c. è necessariamente o preferibilmente verticale (Fisher, 1978; Gutiérrez & Jaime, 1999; Sbaragli, 2017).

In quesiti in cui si chiede di tracciare l’altezza relativa ad un dato lato, le maggiori difficoltà si riscontrano nel caso di triangoli ottusangoli o rettangoli (Hershkowitz, 1989). Questo risultato è coerente con la caratterizzazione di altezza come segmento sempre interno al triangolo: nel caso del triangolo ottusangolo, la difficoltà nasce dalla necessità di tracciare o riconoscere un'altezza che “cade fuori” dal triangolo; nel caso del triangolo rettangolo la difficoltà risiede nel riconoscere l’altezza quando coincide con uno dei due cateti. In **Figura 2** riportiamo alcuni risultati relativi al triangolo ottusangolo in cui possiamo osservare come una realizzazione di altezza che sembra essere comune tra studenti di 14 anni è quella di un segmento che passa per un vertice ed è contenuto (almeno in parte) all’interno del triangolo.

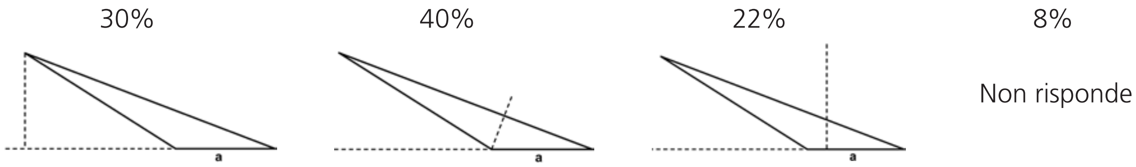


Figura 2. Risposte date da studenti israeliani di 14 anni coinvolti nello studio di Hershkowitz (1987) citati da Zan (2007, p. 85).

Altre realizzazioni ricorrenti che vengono proposte dagli studenti sono realizzazioni di significanti diversi: Hershkowitz (1987, 1989) riporta risposte di studenti che sistematicamente identificano l’altezza relativa a un certo lato del triangolo con la sua mediana oppure con il suo asse. Gli stessi risultati sono stati trovati anche in vari altri studi (Fischbein & Nachlieli, 1998; Gutiérrez & Jaime, 1999).
In riferimento alle realizzazioni di *altezza di un triangolo* più comuni sopra elencate, dalle indagini di Sbaragli (2010) con studenti al termine della classe V di scuola primaria emerge che descrivere l’altezza come un segmento che parte da un vertice del triangolo (punto (a) dell’elenco), conduce gli studenti a non riconoscere come realizzazione di altezza un segmento come quello riportato in **Figura 3a**; la (b) invece impedisce di riconoscere come realizzazione di altezza un segmento che, pur passando per un vertice del triangolo, è in parte esterno al triangolo stesso (**Figura 3b**). Infine, gli studenti che privilegiano la realizzazione (c) non riconoscono come realizzazione di altezza un qualsiasi segmento non verticale rispetto al proprio sistema di riferimento egocentrico (**Figura 3c**).

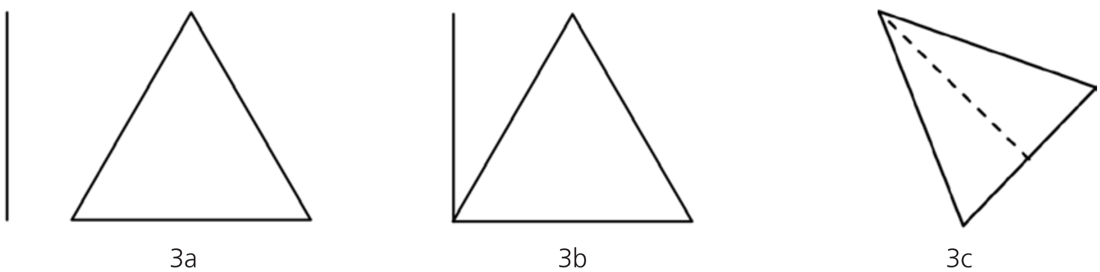


Figura 3. Realizzazioni di altezza proposte da Sbaragli (2010, 2017) a studenti della classe V della scuola primaria.

2.2 Riformulazione delle domande di ricerca

Alla luce del quadro teorico le domande di ricerca possono essere riformulate come segue.

1. (a) Quali realizzazioni del significante altezza di un triangolo compaiono nel discorso degli studenti?
   (b) Come compaiono tali realizzazioni?
   (c) Ci sono interazioni tra realizzazioni diverse? Se sì, in quali casi?
2. Quali similarità e/o differenze rispetto a comportamenti comuni descritti in letteratura sul riconoscimento di possibili realizzazioni del significante *altezza di un triangolo* possono essere identificate?

3 Metodologia

In questo paragrafo presenteremo e discuteremo le principali scelte metodologiche. Dopo una breve descrizione del percorso didattico, analizzeremo il quesito proposto al fine di mostrare il processo che ci ha condotte alla costruzione dell'albero di realizzazione atteso rispetto al quesito dato. Nell'ultimo paragrafo presenteremo lo schema analitico progettato per questo studio ed utilizzato per l'analisi dei dati.

3.1 Partecipanti e breve presentazione del percorso didattico

I dati sono stati raccolti in una classe seconda di scuola secondaria di primo grado (18 studenti) del nord Italia, durante una lezione sul riconoscimento di altezze di un triangolo dato (16 studenti presenti). La lezione si è svolta alla fine di un percorso didattico inserito all'interno di un progetto di ricerca-azione[6] a cui ha partecipato l'insegnante.

La scelta didattica che è stata operata consiste nell'introduzione dell'oggetto matematico altezza attraverso diverse realizzazioni possibili. Gli studenti avevano già trattato le altezze in geometria alla scuola primaria ma non ancora alla scuola secondaria di primo grado; l'insegnante ha scelto di avviare il discorso sulle altezze di poligoni con questo percorso. La scelta di usare più realizzazioni è motivata dalla condivisione con Sbaragli (2017) dell'assunto che

> «[…] la maggior parte delle misconcezioni rilevate risultano conseguenza delle proposte scolastiche avvenute in classe per questo sapere, basate su una definizione univoca data a priori e non negoziata con gli allievi e da rappresentazioni stereotipate del concetto».
>
> (Sbaragli, 2017, p. 233)

In particolare, per quanto riguarda l'altezza rispetto a un lato di un triangolo, durante il percorso sono state proposte agli studenti due realizzazioni principali che chiamiamo di *Tipo 1* e di *Tipo 2* e che riportiamo di seguito:

1. Segmento perpendicolare ad un lato o al suo prolungamento che passa per il vertice non contenuto in quel lato (opposto).
2. Altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo.

6. Istituto provinciale per la ricerca e la sperimentazione educativa (IPRASE) - "Le nuove frontiere del diritto all'istruzione. Rimuovere le difficoltà d'apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro - Fase 2", cofinanziato dal Fondo Sociale Europeo nell'ambito del PO 2014-2020 della Provincia autonoma di Trento.

La realizzazione di *Tipo 1* è molto simile alla definizione che si trova comunemente nei libri di testo. È stato tuttavia osservato in classe che tale realizzazione può essere a sua volta realizzata in due modi: come un segmento tracciato a partire dal vertice (*Tipo 1a*) o a partire dalla retta su cui giace il lato (*Tipo 1b*). L'insegnante ha anche promosso la costruzione di altezze utilizzando sia artefatti fisici (riga non graduata e una squadra da disegno) che digitali (GeoGebra). L'uso di riga e squadra ha coinvolto gli studenti in specifiche routine per disegnare altezze di triangoli. Il software GeoGebra è stato utilizzato per discutere quali possano essere comandi (per esempio, rette perpendicolari), e quindi proprietà geometriche, utili per costruire altezze al fine di promuovere la transizione tra la dimensione pragmatica dell'attività di disegnare altezze e una dimensione più teorica.
La realizzazione di *Tipo 2* è ripresa da un'idea di Ferrari (2016) che parla di altezza di un poligono in termini di altezza della "striscia" in cui si può inscrivere il poligono: «perché un poligono abbia una altezza deve verificare due condizioni: essere tutto contenuto in una striscia ed avere tutti i suoi vertici distribuiti sui lati della striscia» (Ferrari, 2016, p. 481).
Una *striscia* è determinata da due lati che sono due rette parallele: una retta contiene un lato del triangolo e l'altra il vertice che non appartiene al lato scelto (un esempio è riportato in **Figura 4**). Osserviamo quindi che nel caso specifico del triangolo è sempre possibile identificare questa striscia, che è univoca per ciascun lato.

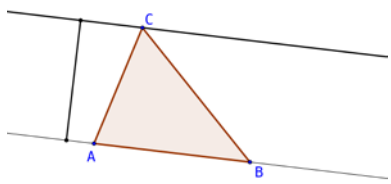


Figura 4. Altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo ABC.

Durante la lezione oggetto della nostra indagine è stato proposto agli studenti un quesito INVALSI che descriviamo nel dettaglio nel paragrafo seguente. La lezione, della durata di un'ora, è stata condotta dalla prima autrice dell'articolo e dall'insegnante di matematica ed è stata videoregistrata.

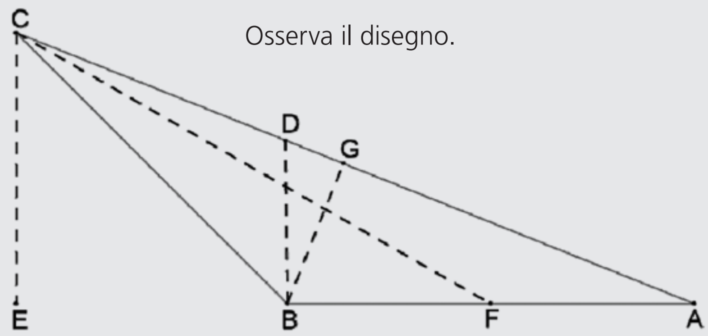
3.2 Descrizione del quesito proposto

Il quesito proposto è un adattamento del quesito assegnato durante le rilevazioni INVALSI 2012-2013 per la classe prima della scuola secondaria di primo grado.
Il quesito riporta il disegno di un triangolo ottusangolo ABC e quattro segmenti tratteggiati: CE, BD, BG e CF. Si richiede di riconoscere quali tra questi segmenti sono altezze del triangolo ABC (**Figura 5**).
Nelle intenzioni dell'estensore, la domanda è messa in relazione all'obiettivo delle *Indicazioni Nazionali* (Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca [MIUR], 2012) «Utilizzare e distinguere tra loro i concetti di perpendicolarità, orizzontalità, parallelismo, verticalità» posto al termine della scuola secondaria di primo grado. Scopo della domanda è «Riconoscere le altezze dei triangoli» e il processo prevalente è «Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica». Inoltre

> «Il quesito è utile per verificare se lo studente ha chiaro il concetto di altezza come segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto e non come segmento necessariamente verticale. Inoltre lo studente deve anche riconoscere che un'altezza in un triangolo può anche essere esterna ad esso».
>
> (INVALSI, 2013, p. 22)

La domanda originale era posta in forma chiusa a scelta multipla, chiedendo al solutore di scegliere una coppia di segmenti tra le quattro proposte: CE e CF, BD e BG, CE e BG, CF e BD. Di seguito riportiamo il nostro adattamento del quesito (**Figura 5**).

Osserva il disegno.



I quattro segmenti tratteggiati sono tutti altezze del triangolo?
Spiega perché.

Figura 5. Traccia del quesito proposto alla classe.

Il quesito è stato proiettato sulla LIM e gli studenti hanno lavorato prima individualmente alla risoluzione, per circa 20 minuti, e poi l'insegnante ha chiesto loro di condividere opinioni e riflessioni, favorendo la discussione di classe.
La domanda è stata riformulata in modo da promuovere il riconoscimento di altezze da parte degli studenti e allo stesso tempo supportare la produzione di argomentazioni a sostegno delle proprie risposte per ogni segmento, sia esso un'altezza oppure no. Si richiede in sostanza di argomentare sia il "perché sì" che il "perché no". Questa scelta consente di osservare il discorso sulle altezze sviluppato dalla classe durante la risoluzione del quesito, per poi descrivere le realizzazioni di altezza richiamate dalla classe. Ci aspettavamo che anche il discorso attorno a segmenti come CF e BD (che non sono altezze) potesse offrire informazioni utili a descrivere le realizzazioni di altezza condivise nella classe.

3.2.1 Analisi a priori del quesito

Descriviamo adesso alcuni aspetti che pensavamo potessero emergere nel discorso di classe, stimolati dalla richiesta di risoluzione del quesito proposto. Innanzitutto, osservando il disegno (**Figura 5**) è possibile riconoscere che:

- CE è altezza del triangolo rispetto al lato AB;
- CF è mediana del triangolo rispetto al lato AB e non è altezza;
- BD è un segmento perpendicolare ad AB e passante per il vertice B e non è altezza;
- BG è altezza del triangolo rispetto al lato AC.

In base ai comportamenti comuni descritti dalla letteratura, è possibile che gli studenti abbiano difficoltà a riconoscere il segmento CE come realizzazione dell'altezza relativa al lato AB poiché l'estremo E è un punto esterno al triangolo. Sebbene CE sia verticale e quindi rimandi a una realizzazione comunemente accettata di altezza, gli studenti potrebbero guardare più favorevolmente al segmento CF come possibile altezza del triangolo, se legati più a realizzazioni di altezza in cui essa è interna al triangolo.
Anche il segmento BD potrebbe essere riconosciuto come realizzazione di altezza poiché è perpendi-

colare ad un lato del triangolo e passa per un suo vertice; inoltre, l'orientamento verticale rispetto al lato orizzontale AB potrebbe supportare ed influenzare questa interpretazione, impedendo anche il riconoscimento di BG come altezza a causa del suo orientamento. Per considerare o meno i segmenti BG o BD come realizzazioni di altezze del triangolo, diventa cruciale la scelta del lato del triangolo rispetto al quale guardare questi segmenti. Rispetto a quest'ultimo punto ci aspettavamo che l'uso di realizzazioni di *Tipo 2* potessero essere particolarmente efficaci.

3.3 Costruzione dell'albero di realizzazione atteso

Occorre osservare che, per il modo in cui il quesito è stato proposto alla classe, gli studenti hanno a disposizione un mediatore visivo comune dato dal disegno contenuto nella traccia e sempre visibile durante la discussione. Dunque, non si chiede loro di produrre realizzazioni di altezza, ma di riconoscerle. Per tale ragione nelle foglie dell'albero di realizzazione ci aspettiamo di trovare realizzazioni di altezza che coinvolgono essenzialmente i soli segmenti CE e BG. In generale, alla luce del percorso seguito dalla classe ci aspettiamo che gli studenti facciano riferimento sia a realizzazioni di *Tipo 1* che a realizzazioni di *Tipo 2*.

La Figura 6 mostra l'albero di realizzazione atteso. Nella parte sinistra dell'albero atteso sono riportate le realizzazioni di altezza di *Tipo 1* (*a*, *b*) che è possibile riconoscere nel disegno del triangolo ABC dato nel quesito. Nella parte destra dell'albero atteso sono invece riportate le realizzazioni di altezza di *Tipo 2* riconoscibili nel disegno.

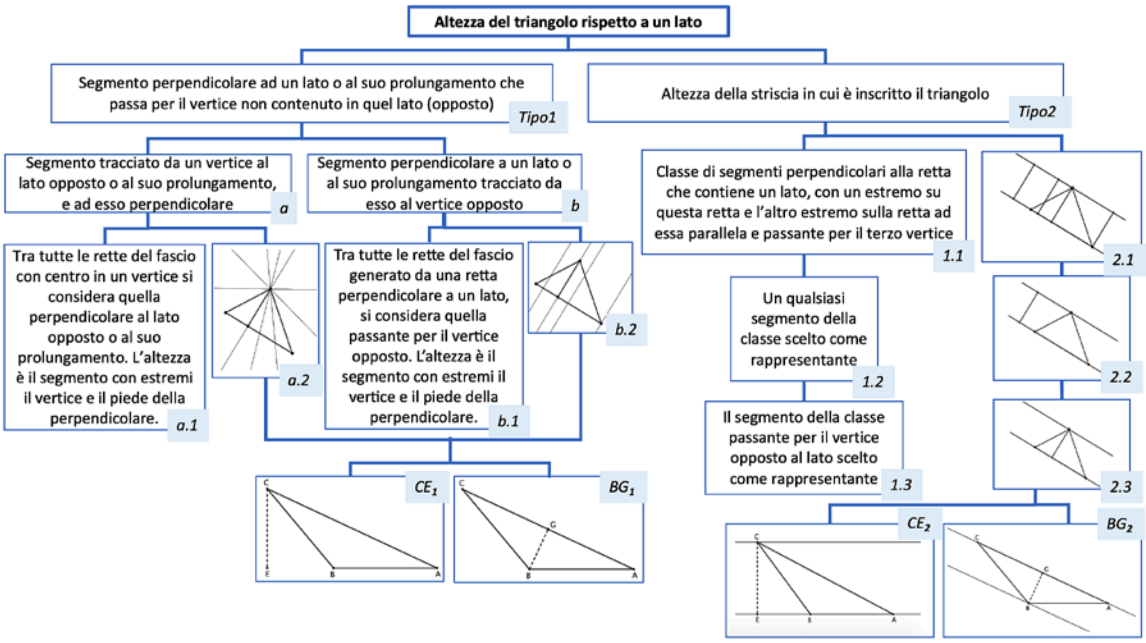


Figura 6. Albero di realizzazione atteso del significante altezza rispetto ad un lato del triangolo ABC dato dal quesito.

3.3.1 Realizzazioni di Tipo 1

Le realizzazioni di *Tipo 1a* caratterizzano l'altezza a partire da tutte le rette passanti per un vertice. Tra queste rette si sceglie quella che interseca perpendicolarmente la retta su cui giace il lato del triangolo a cui il vertice non appartiene, determinando così il secondo estremo dell'altezza. Nell'albero atteso (Figura 6), abbiamo riportato questa realizzazione in riferimento al fascio di rette centrato in un vertice del triangolo. *Rituali* di costruzione dell'altezza che viene disegnata ruotando una squadra attorno al vertice del triangolo sino a che essa non forma un angolo retto con il lato a cui il vertice non appartiene generano questa realizzazione di altezza. Nel disegno dato nella traccia del quesito è possibile distinguere segmenti passanti per vertici diversi del triangolo ABC:

– due segmenti tratteggiati passanti per il vertice C. Per riconoscere CE come realizzazione di altezza occorre tenere conto della possibilità che l'altezza intersechi il prolungamento del lato AB, ovvero la retta su cui giace AB. Il segmento CF, invece, non è un'altezza poiché, pur giacendo su una retta che appartiene al fascio proprio di rette con centro in C, non interseca perpendicolarmente il lato AB.
– Due segmenti tratteggiati passanti per il vertice B. Con considerazioni analoghe si può concludere che solo il segmento BG è un'altezza rispetto al lato AC.

Le realizzazioni di *Tipo 1b* caratterizzano l'altezza a partire dalle rette perpendicolari alla retta su cui giace un lato del triangolo e scegliendo tra queste quella passante per il vertice non adiacente al lato. Nell'albero atteso (**Figura 6**), abbiamo riportato queste realizzazioni in riferimento al fascio di rette improprio generato da una retta perpendicolare al lato scelto. Tali realizzazioni corrispondono a *rituali* di costruzione dell'altezza basati sul movimento di una squadra lungo una riga o un'altra squadra appoggiata sul lato scelto del triangolo, mantenendo la perpendicolarità durante tale movimento (**Figura 7**).

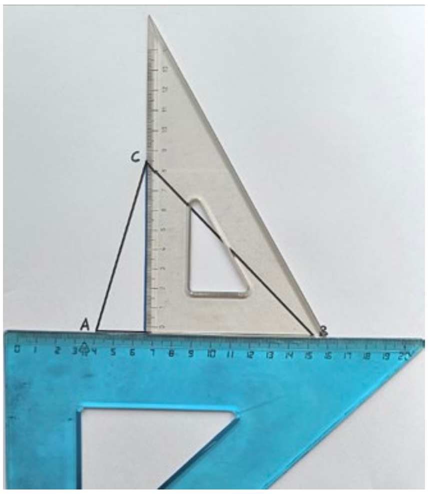


Figura 7. Costruzione dell'altezza con l'uso delle squadre.

Nel disegno dato nella traccia del quesito è possibile individuare segmenti con caratteristiche di seguito descritte:

– quattro segmenti che hanno un estremo sul lato AB o sul suo prolungamento. Tra questi solo CE e BD sono perpendicolari ad AB ma solo CE è un'altezza perché passa per il vertice C (che non appartiene al lato AB).
– Quattro segmenti che hanno un estremo sul lato CB. Tra questi nessuno è perpendicolare a CB, dunque, non sono realizzazioni di altezza.
– Quattro segmenti che hanno un estremo sul lato CA. Tra questi solo BG è perpendicolare a CA ed inoltre passa per il vertice B (che non appartiene al lato CA), realizzando quindi l'altezza del triangolo relativa a CA.

3.3.2 Realizzazioni di Tipo 2

Le realizzazioni di *Tipo 2* caratterizzano l'altezza rispetto ad un lato a partire dalla striscia in cui il triangolo è inscritto (Ferrari, 2016). Ciascuna altezza del triangolo coincide con l'altezza della corrispondente striscia, la quale determina una classe di segmenti. Un qualsiasi rappresentante di questa classe è una realizzazione di altezza del triangolo; tale realizzazione è sempre perpendicolare al lato del triangolo scelto, ha un estremo sulla retta che contiene il lato e ha il secondo estremo non necessariamente coincidente con il vertice opposto al lato. Quando tale vertice coincide con l'estremo dell'altezza, la realizzazione di altezza di *Tipo 2* appare simile alla realizzazione di *Tipo 1*, al netto della presenza della striscia. Per quanto riguarda il triangolo del quesito proposto, sono due le strisce in cui è possibile inscriverlo che risultano utili per riconoscere le altezze tra i segmenti tratteggiati.

– Una striscia determinata dalla retta passante per AB e dalla parallela passante per C. Appare subito evidente che l'unica realizzazione di altezza rispetto ad AB è rappresentata dal segmento CE. Il segmento CF, pur essendo contenuto nella striscia, non è una realizzazione di altezza della striscia non essendo perpendicolare alle rette che la determinano. Il segmento BD pur essendo perpendicolare ad AB non è contenuto nella striscia poiché l'estremo D non appartiene a una delle due rette che determinano la striscia.
– Una striscia determinata dalla retta passante per AC e dalla parallela passante per B. In questo caso troviamo due segmenti contenuti nella striscia: BG e BD. Tra di essi solo BG è realizzazione di altezza poiché perpendicolare alle rette che delimitano la striscia o, equivalentemente, ad AC.

Il riconoscimento di CE come realizzazione di altezza è particolarmente immediato in questo caso poiché l'orientamento del triangolo con un lato orizzontale supporta l'individuazione della striscia che contiene il triangolo. Potrebbe risultare più difficile sfruttare la striscia per riconoscere altezze rispetto a lati non orizzontali né verticali. Questo è il caso del lato AC rispetto al quale i due segmenti candidati a essere realizzazioni di altezza sono entrambi contenuti nella striscia e dunque discriminabili solo in base alla relazione di perpendicolarità.
All'interno di realizzazioni di altezza di questo tipo la scelta del segmento tratteggiato è univoca rispetto al disegno dato, ma non in generale: gli studenti potrebbero richiamare nel loro discorso altri segmenti equivalenti a quelli presenti nel disegno (con gli estremi sulla striscia ma non necessariamente coincidenti con un vertice del triangolo). Teniamo conto di questa possibilità nel ramo più a destra dell'albero.

3.3.3 Albero atteso

L'analisi appena descritta e le caratteristiche dell'attività didattica centrata sulla promozione di diverse realizzazioni di altezza del triangolo sono confluite nell'albero di realizzazione del significante "altezza del triangolo rispetto ad un lato" mostrato in **Figura 6**. Per questo studio ci siamo ispirate all'uso degli alberi di realizzazione proposto da Weingarden et al. (2019), e l'albero atteso (**Figura 6**) è costruito *a priori* sulla base delle realizzazioni di altezza di cui ci aspettiamo di trovare traccia nel discorso degli studenti.
L'albero ha radice nel significante *altezza del triangolo rispetto ad un lato* e si dipana in due rami principali: a sinistra le realizzazioni di *Tipo 1* e a destra le realizzazioni di *Tipo 2*.
Il primo livello al di sotto della radice riporta le realizzazioni promosse durante l'attività didattica svolta precedentemente. In particolare, la realizzazione di *Tipo 1* è molto comune tra gli studenti al termine della scuola primaria e promossa dalla stragrande maggioranza dei libri di testo; la realizzazione di *Tipo 2* è stata proposta per la prima volta dall'insegnante curricolare.
Percorrendo il ramo di sinistra, il nodo del primo livello si dipana in due rami che tengono conto delle due diverse realizzazioni di *Tipo 1*. Il livello sottostante riporta realizzazioni (*a.1, a.2, b.1, b.2*) che sono legate alle routine utilizzate per tracciare le altezze. Per chiarezza puntualizziamo che il riferimento al fascio di rette proprio e improprio è una nostra rilettura di queste routine di costruzione proposte e utilizzate dagli studenti per disegnare altezze.
Le foglie situate più in basso nell'albero esplicitano le realizzazioni di altezza presenti nel quesito proposto. Esse riportano realizzazioni visuali poiché il discorso della classe si sviluppa attorno al media-

tore visivo fornito dal quesito che è sempre a disposizione degli studenti, ma in realtà tengono conto anche di realizzazioni verbali come "CE" o "BG".
Percorrendo il ramo di destra, il nodo del primo livello si divide in due rami che contengono rispettivamente una realizzazione verbale e una visiva. Si può osservare come, partendo da una realizzazione in cui ci è possibile parlare di una pluralità di altezze (*1.1, 2.1*), si possa giungere ad una realizzazione del tutto simile a quella più consueta (*1.3, 2.3*). La convivenza di queste diverse realizzazioni presuppone un processo di *saming* completato, come avviene per il matematico esperto.

3.4 Schema analitico

I dati raccolti constano di video-registrazioni della discussione di classe sviluppatasi attorno al quesito prima descritto durante una lezione in presenza in cui il ricercatore era collegato da remoto su piattaforma *Google Meet*.[7] Di conseguenza i dati sono stati raccolti con una telecamera fissa.
L'analisi dei dati si è svolta ciclicamente in più fasi che di seguito descriviamo nel dettaglio.

Fase 1 - Trascrizione

La prima fase consiste nella trascrizione fedele delle produzioni verbali di tutti gli interventi dei partecipanti al discorso. Questa fase consente di esplicitare tutte le componenti (verbali e non verbali) del discorso che saranno oggetto della codifica successiva.

Fase 2 - Etichettatura

In questa fase i dati vengono analizzati più volte per identificare le realizzazioni di altezza richiamate dagli studenti e descrivere come esse compaiono nel discorso. Questa fase si sviluppa in più round di analisi con finalità diverse; il loro insieme consente di raccogliere informazioni utili a rispondere alla prima domanda di ricerca e, in particolare, ai punti (a) e (b) che attengono alla descrizione delle realizzazioni di altezza introdotte dagli studenti nel loro discorso.

- Il primo round è volto a identificare all'interno del discorso della classe le sole istanze di realizzazioni di altezza. Questo round consente di identificare i passaggi salienti della trascrizione che saranno oggetto della successiva analisi più fine.
- Il secondo round si concentra sulle parti del discorso (parole, gesti, disegni, mediatori visivi) in cui abbiamo rintracciato riferimenti a realizzazioni di altezza. L'analisi mira a identificare elementi del discorso che descrivono il tipo di realizzazione che lo studente richiama tra quelle proposte durante l'attività didattica: *Tipo 1* o *Tipo 2*. Questo round consente di descrivere qualitativamente le caratteristiche di ciascuna realizzazione e dunque fornisce informazioni utili a rispondere ai punti (a) e (b) della prima domanda di ricerca.
- Il terzo round mira a rintracciare all'interno del discorso sulle realizzazioni di altezza elementi statici o dinamici. Quest'ultimo round intende indagare il processo di oggettificazione del significante altezza: la presenza di elementi dinamici nel discorso è indice di un significante non ancora del tutto oggettificato; di contro, il significante altezza, per essere proprio di un *oggetto matematico*, dovrà essere caratterizzato dall'assenza di riferimenti ad aspetti temporali e a processi, cioè dev'essere a-temporale (come qualsiasi altro oggetto matematico). Questo round arricchisce la descrizione delle realizzazioni di altezza che compaiono nel discorso, contribuendo così a rispondere in particolare al punto (b) della prima domanda di ricerca.

Nella seguente tabella (**Tabella 1**) sono riportate e descritte le etichette usate per l'analisi, accompagnate da alcuni esempi.

7. Questa non è stata una scelta di design, ma una necessità dovuta alle limitazioni all'ingresso a scuola del personale non docente causate dall'emergenza sanitaria da COVID-19.

Round	Descrizione delle etichette
I	Realizzazioni di altezza rispetto ad un lato del triangolo: *"[Numero progressivo]"*
	Istanze nel discorso degli studenti in cui è possibile identificare una realizzazione di altezza. Ad esempio, riconosciamo una realizzazione di altezza in affermazioni come le seguenti: «*CE è altezza*», «*Se metti il righello sulla retta di BA fai anche l'altezza E*». «*Noi facciamo così [prende le squadre in mano], se esploriamo fino a trovare il vertice opposto*». Eventualmente accompagnate da gesti come quelli nelle **Figure 8a** e **8b**:  **Figure 8a, 8b.** Alcuni esempi di gesti degli allievi.
II	*Tipo*: *"1" – "1a" – "1b" – "2"*
	Si esplicita il tipo di realizzazione in base alla vicinanza con una delle seguenti descrizioni di altezza. – *Tipo 1*: segmento perpendicolare ad un lato o al suo prolungamento che passa per il vertice non contenuto in quel lato (opposto). – *Tipo 1a*: segmento tracciato da un vertice al lato opposto o al suo prolungamento, e ad esso perpendicolare. – *Tipo 1b*: segmento perpendicolare a un lato o al suo prolungamento tracciato da esso al vertice opposto. – *Tipo 2*: Altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo. La vicinanza è stabilita anche sulla base di inferenze del ricercatore che conosce le narrazioni condivise e sviluppate dalla classe durante l'attività didattica. Ad esempio, un'affermazione del tipo «*è un'altezza perché va al vertice opposto*» è considerata una realizzazione di *Tipo 1*, verbale, del segmento tracciato dal lato al vertice. Il riferimento al movimento verso il vertice opposto ci consente di etichettarla come realizzazione di *Tipo 1b*. Sono invece considerate realizzazioni di *Tipo 2* tutte quelle in cui compare un riferimento alla striscia o alla retta parallela o alla classe di segmenti.
III	Dimensione statica o dinamica: *"S" – "D"*
	Si analizza il discorso riferito alla singola realizzazione per evidenziare elementi statici o dinamici. «*CE è altezza*» è un esempio di discorso con una dimensione statica. «*L'altezza va al vertice opposto*» è un esempio di discorso con una dimensione dinamica.

Tabella 1. Elenco e descrizione delle etichette utilizzate per le analisi dei dati.

Fase 3 - Albero di realizzazione della classe

Le fasi precedenti di analisi hanno consentito di compiere passi significativi verso le risposte ai punti (a) e (b) della prima domanda di ricerca. Tali risultati parziali delle analisi forniscono informazioni essenziali che saranno reinvestite nella fase 3. Essa consentirà di rispondere al punto (c) della prima domanda di ricerca.

In questa fase si parte dallo scheletro dell'albero atteso con le foglie svuotate. La trascrizione codificata viene ripercorsa e, sulla base delle precedenti fasi di analisi, le realizzazioni numerate vengono riportate nella corrispondente foglia dell'albero nella forma *"[Numero progressivo] Pseudonimo studente"*. Nel caso di realizzazioni non previste dall'albero atteso, viene aggiunta una foglia.

Al termine di questa fase di analisi potremo osservare a colpo d'occhio la distribuzione delle realizzazioni di altezza richiamate dagli studenti e le loro eventuali interazioni. Inoltre, questa fase consente di osservare quali tipi di realizzazioni di altezza sono entrate a far parte del discorso di classe e quali non ancora. In questo modo, oltre a visualizzare le realizzazioni emerse durante la discussione di classe, riusciamo a tener traccia dello sviluppo temporale della lezione e degli studenti che hanno partecipato al discorso matematico.

Infine, alla luce delle risposte date alla prima domanda di ricerca, potremo rispondere alla seconda domanda di ricerca, mettendo a confronto i nostri risultati con quelli riportati dalla letteratura. In questo senso, l'albero di realizzazione, che sarà un risultato di questa ricerca, diventa esso stesso strumento di analisi.

4 Analisi del discorso di classe e dell'albero di realizzazione

Riportiamo in **Tabella 2** un breve estratto per mostrare come abbiamo usato gli strumenti analitici appena descritti. Nell'ordine le colonne riportano: il tempo riferito al video trascritto, lo pseudonimo[8] di chi interviene nel discorso, la trascrizione delle componenti verbali e gestuali del discorso, il numero progressivo dell'istanza di realizzazione, il tipo di realizzazione, la dimensione statica o dinamica, il commento del ricercatore.

Tempo	Chi	Cosa dice [Cosa fa]	#	*Tipo*	Statico/Dinamico	Commento
14:42.14	Ettore	L'altezza relativa al lato AB è EC, perché una altezza non parte dal vertice opposto, ma parte dal lato relativo.	[26] [27]	1b	S: "è EC" D: "non parte dal", "parte dal"	Ettore spiega perché a suo parere BD non può essere una altezza rispetto al lato AB.
15:20.07	Ettore	Però se Lavinia dice che BD è l'altezza di AB non va bene.				
15:26.05	Lavinia	È una delle altezze, non è l'unica altezza.	[28]	2	S	L'altezza relativa ad un lato non è unica. Questo discorso si riferisce a realizzazioni di tipo 2 che prevedono più di una altezza per ogni lato.
15:28.27	Ins.	Non va bene perché?				Sollecita spiegazioni da parte di Ettore.
15:30.17	Ettore	Perché parte dal punto… dal vertice opposto.	[29]	1b	D: "parte dal"	L'aspetto dinamico del "partire dal lato" sembra fondamentale per Ettore per riconoscere realizzazioni di altezza.

Tabella 2. Esempio di codifica di un estratto del discorso di classe tra i minuti 14:42 e 15:30.

8. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i nomi sono stati cambiati.

L'estratto inizia quando la classe sta discutendo la possibilità che BD sia una altezza relativa al lato AB. Ettore interviene per comunicare che a suo parere il segmento CE, visibile nel disegno proiettato a tutta la classe, è l'altezza relativa al lato AB. Rintracciamo nel suo discorso una realizzazione di altezza, la numero [26] dall'inizio della discussione. Il discorso ha una dimensione inizialmente a-temporale ("l'altezza relativa al lato AB è EC"). Il contesto dell'intervento di Ettore suggerisce che la realizzazione è di *Tipo 1*. Infatti, Ettore interviene per esprimere l'idea che il segmento BD vada scartato, poiché CE è già una altezza rispetto al lato AB. Dunque, questa realizzazione verrà riportata nell'albero di classe come foglia del ramo sinistro. Nella spiegazione che segue riconosciamo una realizzazione di altezza, la [27], chiaramente di *Tipo 1b*. Il discorso ha una dimensione dinamica. Osserviamo che anche discorsi come quello di Ettore, volti a giustificare perché un segmento non sia una altezza, ci danno informazioni sulle caratteristiche delle realizzazioni di altezza che sono entrate nel discorso degli studenti. Questa realizzazione verrà riportata nell'albero di classe come foglia del ramo sinistro. Nell'intervento di Lavinia rintracciamo una nuova realizzazione di altezza. La studentessa sottolinea che è possibile considerare più di una altezza rispetto allo stesso lato. Questo è un discorso coerente all'interno di realizzazioni di *Tipo 2*, dunque all'interno dell'albero di classe verrà riportata come foglia del ramo destro. L'estratto mostra interventi tipici dell'insegnante volti a facilitare il discorso di classe e a promuovere l'esplicitazione di argomentazioni da parte degli studenti.

4.1 Analisi del discorso di classe

Discutiamo adesso alcuni spunti di riflessione di carattere generale, emersi dalle analisi, e che offrono una panoramica su ciò che è accaduto in classe.
Come ci aspettavamo sulla base del percorso intrapreso con la classe, il significante *altezza* ancora non è un oggetto matematico per tutti gli studenti. Questo aspetto lo inferiamo dal discorso di alcuni studenti che si riferiscono all'altezza come il prodotto di un processo di costruzione. Per esempio:

Ale.: «Adesso servirebbe la squadra e farla scorrere sul righello».
L.: «Se metti il righello sul segmento AB, ok, ci sei? E poi prendi la squadra. Inizi a disegnare delle altezze e BD è una di quelle tipo…».

Per questi studenti l'uso della parola altezza, e quindi il significante stesso, sembra essere legato a una routine di tipo rituale (nell'esempio, il rituale di costruzione con riga e squadra). Tuttavia, ci sono alcuni studenti che parlano in maniera oggettificata di altezza. Per esempio:

G.: «L'altezza relativa al lato AB è CE. Mentre la mediana al lato AB è CF. L'altezza relativa al lato AC è G. E la mediana relativa al lato AC è D».

L'uso delle parole e la costruzione del discorso da parte di studenti come Giulio evidenziano l'oggettificazione del significante altezza e, in questo caso, anche della mediana. Affermazioni come "l'altezza *è* CE" sono stati interpretati come indicatori di un processo di oggettificazione completato. Osserviamo inoltre che il discorso di Giulio è caratterizzato dall'assenza di una dimensione dinamica, che invece è molto evidente nel discorso di Lavinia e Alessio ("scorrere", "prendi", "inizi a"). La dimensione *statica* o *dinamica* che possiamo riconoscere nel discorso matematico degli studenti intorno al significante altezza apre una finestra sul loro processo di oggettificazione: per Lavinia e Alessio l'altezza è ancora legata al processo di costruzione e l'aspetto dinamico è evidente nel loro discorso; Giulio si riferisce al mediatore visivo come realizzazione dell'oggetto matematico altezza. La realizzazione proposta da Alessio, come prodotto del processo di costruzione, sembra tuttavia essere legata a una routine non puramente di tipo rituale ma in transizione verso una routine esplorativa. Infatti, la costruzione dell'altezza con riga e squadra viene richiamata dallo studente con l'obiettivo di rintracciare l'altezza muovendo la squadra lungo il lato del triangolo, non riproduce fedelmente il rituale di costruzione, ma è lui stesso il protagonista dell'azione discorsiva.

In generale, possiamo dire che la classe sta ancora costruendo delle realizzazioni del significante altezza attraverso diverse routine. Il focus iniziale del discorso di classe è principalmente sul riconoscere o meno un segmento come realizzazione di altezza riferendosi a realizzazioni sia di *Tipo 1* che di *Tipo 2*. Un esempio di realizzazione di *Tipo 2* si trova nel discorso di Ciro:

C.: «Secondo me G e B è un'altezza perché tipo se giri il disegno e consideri il metodo di Paolo metti una retta su B tipo [braccio dritto sul banco, vedi gesto riportato in Figura 8a] è un'altra altezza».

L'espressione "metodo di Paolo" è stata culturalmente sviluppata all'interno della classe ed è quindi una narrazione condivisa sulle altezze all'interno di realizzazioni di *Tipo 2*. In sostanza si tratta del rituale che consente di tracciare le altezze del triangolo come altezze della striscia entro cui il triangolo è inscritto.
L'interazione tra le realizzazioni di *Tipo 1* e di *Tipo 2* viene promossa a un certo punto da un altro studente, Roberto, e accolta dal discorso della classe. Questo è un momento cruciale nello sviluppo del discorso di classe: l'intervento di Roberto, che discuteremo nel dettaglio nel par. 4.3, ha stimolato un'evoluzione nel discorso degli studenti che dalla dicotomia essere/non essere altezza si è spostato sulle caratteristiche che renderebbero un certo segmento un'altezza. In particolare, gli studenti descrivono le caratteristiche utili a rendere il segmento BD una realizzazione possibile di altezza del triangolo ABC relativa al lato BA. Ritroviamo evidenza di questo passaggio, molto interessante dal punto di vista matematico, nel discorso di Alice:

Ali.: «Allora CE è una altezza del lato BA. E praticamente se vuoi farne un'altra che parta dal punto B, praticamente devi fare una retta parallela al punto BA, cioè al segmento BA, parallela a BA, deve passare per il punto C. [...] E quindi BD non può essere una altezza, perché deve arrivare almeno fino a... all'intersezione».

La Figura 9 mostra il disegno ottenuto aggiungendo gli elementi grafici suggeriti da Alice che consentono di modificare il segmento BD affinché sia un'altra realizzazione dell'altezza relativa al lato AB.

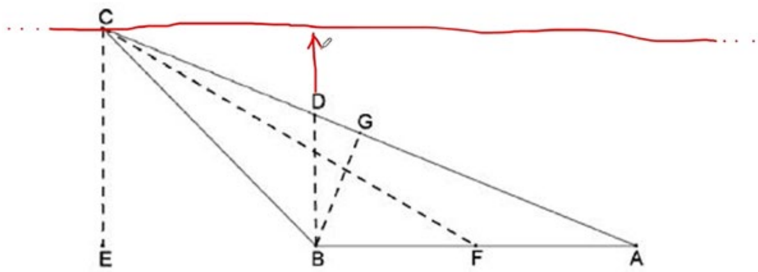


Figura 9. Disegno fatto alla lavagna dal ricercatore secondo le indicazioni di Alice.

Infine, osserviamo come la scelta di introdurre nel percorso didattico realizzazioni di *Tipo 2* si rifletta nel discorso degli studenti, i quali considerano non necessariamente "un segmento" ma "una classe di segmenti" come realizzazione di altezza relativa a un certo lato del triangolo. Nel primo esempio riportato in questo paragrafo già si può notare come Lavinia parli di altezze al plurale ("delle altezze", "una di quelle"), vediamo altri due interventi della stessa studentessa:

L.: «Allora BA è il segmento. Tu hai presente che puoi fare un sacco di altezze infinite?»
L.: «I segmenti, puoi fare un sacco di segmenti, ok? Non devono andare al vertice opposto».

Da questi brevi estratti non solo emerge che l'altezza relativa a un lato del triangolo non è unica e se ne possono tracciare infinite, ma la studentessa sottolinea anche che tra tutti i segmenti che identificano l'altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo si possono considerare realizzazioni di altezza anche quelli che non hanno un estremo coincidente con un vertice del triangolo.

4.2 Confronto tra l'albero della classe e l'albero atteso

Analizzando il discorso di classe e seguendo lo schema analitico descritto nel **par. 3.4**, abbiamo ricostruito l'albero di realizzazione mostrato in **Figura 10**.

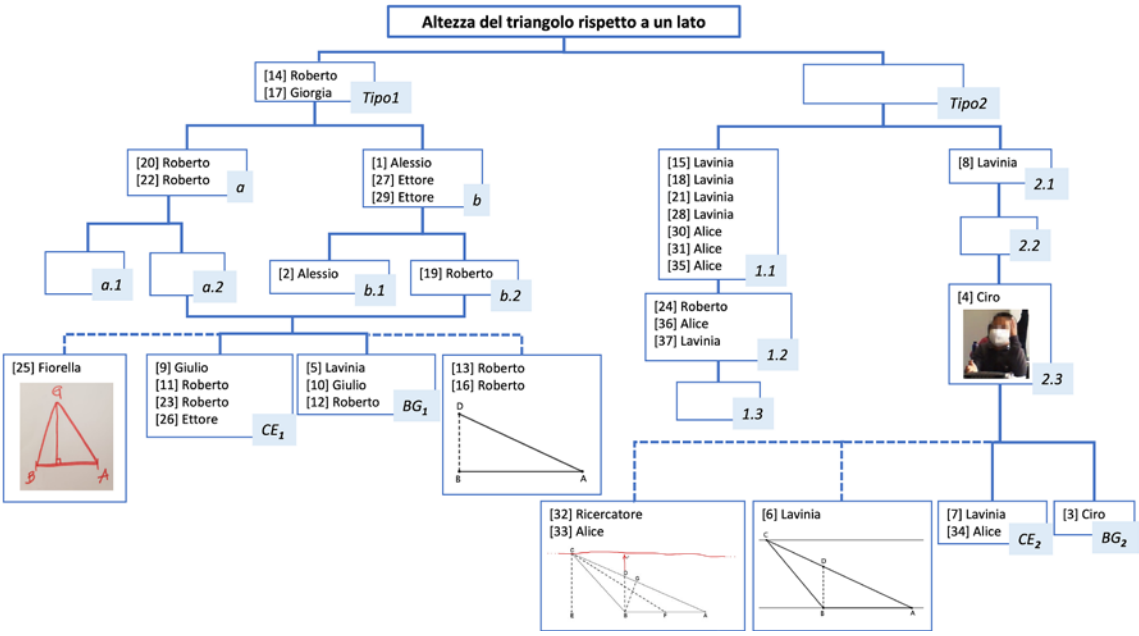


Figura 10. Albero di realizzazione della classe del significante altezza rispetto ad un lato del triangolo ABC dato dal quesito.

Il primo aspetto che si nota osservando l'albero della classe è che non compaiono alcune delle realizzazioni presenti nell'albero atteso (**Figura 6**) e, allo stesso tempo, che sono emerse nuove foglie (si vedano i rami tratteggiati in **Figura 10**) con possibili realizzazioni del significante altezza secondo gli studenti.

Rispetto alle realizzazioni attese ma non presenti nel discorso di classe, osserviamo in particolare l'assenza della coppia di realizzazioni costituita dal fascio proprio centrato nel vertice del triangolo (di *Tipo 1a*). Gli studenti fanno riferimento a realizzazioni di altezza tracciate a partire dal vertice verso il lato del triangolo, per esempio Roberto ([20] e [22] in **Figura 10**):

R.: «Perché deve partire da questo, deve partire dal vertice un'altezza Lavinia».

R.: «Sai come si fa una altezza? Devi mettere un righello con la squadra, dal vertice opposto devi tracciare una linea al lato opposto o al suo prolungamento, per questo c'è il lato CE».

Tuttavia, nel discorso dello studente non rintracciamo elementi che facciano pensare alla scelta della perpendicolare tra le molte rette passanti per il vertice. Questo aspetto può essere giustificato dallo stretto legame tra la realizzazione di altezza e il suo processo di costruzione per mezzo di riga e squadra (nella quale è insita la perpendicolarità), presentato dalla docente durante l'attività didattica. All'interno delle realizzazioni di *Tipo 1*, il rituale di costruzione sposta gran parte dell'attenzione della classe su realizzazioni che implicitamente coinvolgono il fascio improprio, profondamente legato alle rette tra loro parallele che è possibile disegnare con riga e squadra. Infatti, guardando l'albero di realizzazione della classe (Figura 10), possiamo osservare che il ramo corrispondente a realizzazioni di *Tipo 1b* contiene realizzazioni richiamate da diversi studenti: Alessio, Ettore e Roberto.

Rispetto a nuove realizzazioni non attese, troviamo realizzazioni di altezza rispetto al lato AB diverse dal segmento CE e realizzazioni di altezze di triangoli diversi da ABC dato.

Nel primo caso l'attenzione è rivolta in particolare al segmento BD, attorno a cui si sviluppa il discorso di diversi studenti. Questo discorso viene introdotto da Lavinia ([6] in Figura 10) che si riferisce a una realizzazione di *Tipo 2*, con il triangolo inscritto nella striscia, e considera BD come una possibile altezza relativa al lato BA. Roberto riprende la proposta di Lavinia di considerare BD come possibile altezza ma si riferisce al sotto-triangolo ABD, come si può leggere di seguito ([13] e [16] in Figura 10):

R.: «Ma... se noi guardiamo il triangolo ABD, BD è l'altezza».
R.: «Secondo me tu stai guardando tipo un triangolo nascosto ABD e pensi che BD sia una altezza».

Questo intervento ha portato all'inserimento nell'albero di un'ulteriore realizzazione promossa dallo studente, che si inserisce nel ramo delle realizzazioni di *Tipo 1* in quanto nel suo discorso lo studente non fa riferimento alla striscia. La realizzazione proposta da Lavinia viene raffinata da Alice che propone un'altra realizzazione di altezza ([33] in Figura 10) all'interno delle realizzazioni di *Tipo 2*. Supportati dal ricercatore che arricchisce il mediatore visivo su indicazione di Alice, gli studenti propongono una nuova realizzazione di altezza relativa al lato AB coerente con realizzazioni di *Tipo 2* che ammettono l'esistenza di più di un'altezza relativa allo stesso lato.

Un'ultima realizzazione inattesa è quella proposta da Fiorella. La studentessa considera un sotto-triangolo: disegna alla lavagna il triangolo BAG riportato nell'albero ([25] in Figura 10). In particolare, la studentessa usa questo nuovo mediatore visivo per giustificare la possibilità che il segmento BD possa essere accettato come realizzazione di un'altezza, ma, in linea con ciò che aveva espresso Roberto, sottolinea la necessità di cambiare il triangolo di riferimento. Tuttavia, Fiorella non sembra essere d'accordo col compagno rispetto a quale triangolo debba essere considerato.

4.3 Gestione del passaggio da realizzazioni di *Tipo 1* a realizzazioni di *Tipo 2*

I numeri progressivi assegnati agli interventi degli studenti in cui abbiamo ritrovato istanze di realizzazioni del significante altezza consentono di osservare la distribuzione, all'interno dell'albero, delle realizzazioni di *Tipo 1* o di *Tipo 2*.

Ciascuno studente sembra rimanere legato ad un certo tipo di realizzazione. Infatti, nel corso della lezione il focus del discorso è su una realizzazione di *Tipo 1*, come nel caso di Alessio, Roberto e Giulio, oppure di *Tipo 2*, come nel caso di Lavinia e Ciro. In altre parole, uno stesso studente non sembra passare nel suo discorso da una realizzazione di *Tipo 1* a una realizzazione di *Tipo 2*, o viceversa.

Dopo aver riconosciuto CE e BG come due altezze del triangolo ABC, e aver scartato CF, la discussione in classe si accende sul segmento BD. Abbiamo descritto nel par. 4.1 come a innescarla sia Lavinia la quale, sostenendo che BD sia un'altezza, ne parla riferendosi a sue realizzazioni di *Tipo 2* ([15] in Figura 10). Sebbene anche Lavinia introduca la squadra per descriverne l'uso guidato dalla routine rituale al fine di disegnare l'altezza, osserviamo come nella sua descrizione venga utilizzata per tracciare "delle altezze" (realizzazione di *Tipo 2*) e non segmenti che individueranno un'altezza solo quando intercetteranno il vertice del triangolo (realizzazione di *Tipo 1b*).

I compagni in generale sostengono invece che BD non sia un'altezza, portando argomentazioni che si basano su realizzazioni di *Tipo 1* di altezza. A tale proposito è interessante lo scambio tra Lavinia e Roberto:

L.: «Allora BA è il segmento. Tu hai presente che puoi fare un sacco di altezze infinite?»
R.: «Ma se non vanno al vertice opposto».
L.: «Ma cosa c'entra! Non devono andare!»

La svolta nel discorso della classe avviene quando Roberto cambia prospettiva e passa dalla parte sinistra dell'albero alla parte destra, cioè quando nel suo discorso entra la realizzazione di altezza che si basa sulla striscia ([24] in **Figura 10**). Questo passaggio è molto evidente guardando l'albero della classe: a colpo d'occhio vediamo come tra le battute etichettate con [23] e [24] Roberto cambi ramo dell'albero. Di seguito il discorso corrispondente:

R.: «Sai come si fa una altezza? Devi mettere un righello con la squadra, dal vertice opposto devi tracciare una linea al lato opposto o al suo prolungamento, per questo c'è il lato CE».

R.: «Se vuoi fare proprio una altezza qua [indica un punto su AB], almeno devi usare il metodo di Paolo».

Il riferimento al "metodo di Paolo" è l'elemento del discorso di Roberto che sposta l'attenzione della classe sulle realizzazioni di *Tipo 2*. Infatti, dopo l'intervento di Roberto troviamo una serie di interventi che fanno riferimento a realizzazioni di *Tipo 2*: [28], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36] e [37] in **Figura 10.** Roberto a questo punto cerca di convincere Lavinia che, anche riferendosi a realizzazioni di *Tipo 2*, affinché il segmento BD sia altezza gli mancano alcune caratteristiche, ad esempio il punto D non intercetta il bordo della striscia.

R.: «E grazie, ma allora DB non è una altezza se non arriva là».

Dunque, le realizzazioni proposte da Roberto in un primo momento mettono in evidenza la caratteristica dell'altezza come quel segmento che ha gli estremi in un vertice e sul lato opposto. Infatti, troviamo i suoi interventi tutti nel ramo sinistro dell'albero. Poi lo studente sembra includere nel suo albero di realizzazione di altezza, attraverso un processo di *saming*, anche dei segmenti che non passano per alcun vertice del triangolo, e questo accade quando inizia a partecipare al discorso di Lavinia, che ritroviamo nel lato destro dell'albero. Quindi è proprio il passaggio dalla realizzazione di *Tipo 1* alla realizzazione di *Tipo 2* che sembra giocare un ruolo fondamentale nel discorso di classe. Rimanendo ancorati a un discorso che coinvolge solo realizzazioni di altezza *Tipo 1*, gli studenti non riescono a convincere Lavinia che BD non sia accettabile. Solo quando il focus del discorso di Roberto si sposta sulle realizzazioni di *Tipo 2*, gli altri studenti diventano dei partecipanti al discorso di Lavinia e iniziano ad usare le stesse parole e gli stessi mediatori visivi. L'albero di realizzazione mostra come, dopo l'intervento "ponte" di Roberto, anche Alice partecipa al discorso sulle altezze richiamando realizzazioni di *Tipo 2*, appoggiata da altri componenti della classe. I discorsi di Lavinia e Roberto trovano una sintesi nella realizzazione costruita dal ricercatore sotto la guida di Alice (**Figura 9**).

5 Discussione e conclusioni

5.1 Risposta alle domande di ricerca

Alla luce delle analisi possiamo rispondere alle nostre domande di ricerca.
Le analisi del discorso della classe ci consentono di concludere che, durante la discussione, gli studenti richiamano spontaneamente sia realizzazioni di *Tipo 1* che realizzazioni di *Tipo 2*. L'albero di realizzazione della classe permette di cogliere, a colpo d'occhio, la ricchezza e vivacità del discorso della classe che ha toccato diverse realizzazioni di altezza: gli studenti hanno fatto riferimento a gran parte delle realizzazioni attese e ne hanno introdotte di nuove. Osserviamo che ciascuno studente è rimasto essenzialmente legato a un tipo solo di realizzazione; di conseguenza, non osserviamo nel discorso

del singolo studente interazioni tra tipi diversi di realizzazioni; possiamo invece osservare come l'interazione sia promossa dal tentativo di conciliare discorsi che fanno riferimento a realizzazioni diverse. Questo è evidente nel discorso che si sviluppa tra Roberto e Lavinia: la ricerca di una narrazione condivisa sulla possibilità di rendere BD un'altezza a partire da due realizzazioni diverse promuove l'interazione tra realizzazioni. Possiamo notare che il cuore di tale interazione sta proprio nella dinamica del discorso che si sviluppa tra gli studenti. Nella transizione tra i due tipi di realizzazione gioca un ruolo chiave Roberto: sebbene sia partito da realizzazioni di *Tipo 1*, riesce a muoversi verso realizzazioni di *Tipo 2*, con lo scopo di trovare un terreno comune con Lavinia su cui confrontarsi, e ad accompagnare la classe verso questa prospettiva.

Sebbene durante la lezione sia stata sempre proiettata l'immagine riportata in Figura 5, che ha quindi giocato il ruolo di mediatore visivo nel discorso degli studenti, abbiamo potuto cogliere diverse differenze nel modo in cui gli studenti hanno sfruttato tale mediazione e hanno richiamato le varie realizzazioni di altezza. In particolare, in alcuni casi il discorso è caratterizzato da affermazioni, parole e gesti statici («Se metti il righello su BA hai anche l'altezza CE»), mentre in altri casi tali aspetti sono di natura più dinamica («L'altezza relativa al lato AB è EC, perché un'altezza non parte dal vertice opposto, ma parte dal lato relativo»). In maniera simile, ritroviamo nel discorso istanze di dinamismo legate alla routine di costruzione del segmento altezza con la squadra e la riga richiamata come rituale o come esplorazione.

I riferimenti nel discorso degli studenti alla "squadra" e al "metodo di Paolo" mettono in luce narrazioni condivise che fanno riferimento a rituali che sono stati culturalmente costruiti dalla classe e sono legati rispettivamente a realizzazioni di *Tipo 1* e *2*. Come abbiamo messo in evidenza nelle analisi, la presenza di elementi dinamici nel discorso della classe evidenzia come il processo di oggettificazione del significante altezza non sia ancora completo per tutti gli studenti.

Per quanto riguarda la seconda domanda di ricerca, non sono emerse dall'analisi del discorso di classe molte delle difficoltà comuni descritte in letteratura e riportate nel par. 2.1. Per esempio, gli studenti non si riferiscono all'altezza come un segmento che deve necessariamente partire da un vertice (Sbaragli, 2017). Infatti, questa realizzazione viene richiamata esplicitamente solo da uno studente ([20] e [22] in Figura 10). In particolare, esemplificativo di questo punto è lo scambio tra Roberto e Lavinia riportato nel par. 4.3.

Inoltre, nel discorso di classe non emerge affatto la realizzazione di altezza come segmento tutto contenuto nel triangolo (Fischbein & Nachlieli, 1998; Hershkowitz, 1987, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1980). Un risultato a nostro avviso molto incoraggiante e positivo rispetto agli effetti delle scelte didattiche operate riguarda il riconoscimento immediato del segmento CE come realizzazione dell'altezza relativa al lato AB ([9], [11], [23] e [26] in Figura 10). Sebbene CE sia disegnata come un segmento verticale e quindi rimandi a una realizzazione comunemente accettata di altezza (Fisher, 1978; Gutiérrez & Jaime, 1999; Sbaragli, 2017), l'estremo E, e di fatto tutto il segmento, sono esterni al triangolo. Dalla letteratura sappiamo che altezze come CE sono difficili da riconoscere per la maggior parte degli studenti;[9] invece, nel discorso di classe da noi analizzato il riconoscimento di CE come altezza viene subito condiviso e mai messo in discussione.

Altri due aspetti emersi che si discostano dai comportamenti suggeriti dall'analisi della letteratura sono: il riferimento immediato nel discorso di tutti gli studenti a BG come realizzazione di altezza, nonostante il segmento non sia verticale (Fisher, 1978; Gutiérrez & Jaime, 1999; Sbaragli, 2017) e il riconoscimento di CF come realizzazione della mediana rispetto al lato AB che non coincide con l'altezza in questo caso. Un esempio di questo fenomeno si trova nel discorso di Giulio (vedi par. 4.1):

> G.: «L'altezza relativa al lato AB è CE. Mentre la mediana al lato AB è CF. L'altezza relativa al lato AC è G. E la mediana relativa al lato AC è D».

9. I risultati rilasciati da INVALSI a commento delle prove del 2013 registrano la difficoltà degli studenti rispetto al quesito: solo il 34,8% del campione individua CE e BG come realizzazioni di altezza.

In linea invece con i risultati noti dalla letteratura, alcuni studenti hanno considerato la possibilità che il segmento BD possa realizzare un'altezza; tuttavia, il focus del discorso si è presto spostato sulla scelta del lato del triangolo rispetto al quale guardare tale segmento. Questa considerazione ha portato gli studenti a richiamare nel discorso il "metodo di Paolo" e quindi grazie alla mediazione della striscia (realizzazione di *Tipo 2*), che ha portato al confronto con il segmento CE, sono emerse le caratteristiche necessarie perché BD potesse diventare la realizzazione di un'altezza, non tutte soddisfatte.

5.2 Possibili implicazioni didattiche e teoriche

Dal confronto tra l'albero di realizzazione della classe (Figura 10) e l'albero atteso (Figura 6) si può notare che gran parte delle realizzazioni proposte durante il percorso didattico, precedentemente svolto, sono presenti nel discorso di classe. Questo è a nostro avviso molto interessante dal punto di vista didattico perché, rispetto a un percorso più tradizionale in cui si introduce l'altezza solo attraverso realizzazioni di *Tipo 1*, avere un albero di realizzazione più ricco permette l'accesso al discorso matematico da parte di un maggior numero di studenti. Le prime analisi sembrano suggerire che questo approccio favorisca la scelta da parte del singolo studente del tipo di realizzazione che ritiene più funzionale, superando gli ostacoli generati da rappresentazioni stereotipate.
Riteniamo che la varietà di realizzazioni che compaiono nel discorso degli studenti, visibili nella ricchezza dell'albero di classe, sia frutto proprio delle scelte di progettazione del percorso didattico. Aver guidato la partecipazione degli studenti al discorso sulle altezze lavorando con diverse realizzazioni e, in particolare, affiancando alla realizzazione più tradizionale (che abbiamo chiamato di *Tipo 1*) quella che fa riferimento alla striscia (di *Tipo 2*), sembra aver contribuito in maniera sostanziale al raggiungimento di questi risultati.
Sebbene esuli dagli scopi di questo articolo, osserviamo che l'insegnante ha giocato un ruolo cruciale. Infatti, durante il percorso didattico l'insegnante ha promosso lo sviluppo del discorso di classe intorno alle altezze assicurandosi che tutti gli studenti prendessero parte alla discussione, facendo eco agli interventi senza interferire con il proprio punto di vista, ma ponendosi come facilitatore del discorso. In generale, riteniamo che il clima di confronto e scambio che l'insegnante ha saputo creare abbia contribuito in maniera significativa alla partecipazione degli studenti al discorso.
Dal punto di vista teorico, in questo studio abbiamo utilizzato l'albero di realizzazione come strumento di osservazione e di analisi, ispirandoci al lavoro di Weingarden et al. (2019), ma applicandolo per la prima volta al contesto della geometria. Pensiamo che questo possa diventare un valido strumento per analizzare lo sviluppo delle realizzazioni di un significante, che tuttavia può essere ancora affinato. In particolare, un aspetto che potrebbe essere oggetto di ulteriori riflessioni riguarda l'identificazione e l'analisi degli intrecci con alberi di realizzazione di altri significanti. Nel caso dell'altezza, l'albero sembra essere influenzato e sembra influenzare a sua volta l'albero di realizzazione del significante *perpendicolare*. Più precisamente, la perpendicolarità sembra essere incapsulata nella routine di costruzione con riga e squadra. Infatti, la parola "perpendicolare" viene usata solo da una studentessa ([17] Giorgia in Figura 10), ma troviamo altre tracce dell'influenza delle realizzazioni di perpendicolare nel discorso degli studenti. Un esempio su tutti è il gesto realizzato da Ciro ([4] Ciro in Figura 10).
Infine, rispetto al task-design meritano un ulteriore approfondimento le possibili conseguenze della caratterizzazione di altezza attraverso la striscia quando si passa ai poligoni convessi in generale. Nel caso del triangolo è sempre possibile identificare questa striscia, univoca per ciascun lato; invece, nel caso del poligono, occorre valutare quando la figura può essere inscritta in una striscia rispettando la caratterizzazione data da Ferrari (2016). Questo è un punto delicato che può risultare complesso per gli studenti, poiché nuovamente si scontra con una naturale concettualizzazione di altezza come "massimo ingombro" che conduce a includere – ma non inscrivere – il poligono in una striscia.
In conclusione, lo studio mostra come nel discorso della classe sul significante altezza siano presenti diverse realizzazioni, frutto di precise scelte didattiche intenzionalmente mirate a lavorare su alcune delle difficoltà ampiamente documentate in letteratura. Alcuni risultati sono in linea con ricerche

precedenti, ma sono stati messi in luce anche aspetti che se ne discostano, a supporto dell'efficacia del percorso didattico.
Sebbene lo studio presentato in questo articolo sia di carattere esplorativo, senza alcuna ambizione di generalità, ci auguriamo possa essere un primo passo verso un approccio differente ad un tema di ricerca tra i più tradizionali e studiati in didattica della matematica.

Ringraziamenti
Ringraziamo di cuore la prof.ssa Anna Baccaglini-Frank, che ci ha incoraggiate ad esplorare il tema di ricerca affrontato in questo articolo, per non averci mai fatto mancare i suoi preziosi suggerimenti e commenti sia teorici che metodologici. Grazie a Federica Poli per aver progettato, sperimentato e documentato il percorso, permettendoci di realizzare nelle sue classi l'esperienza didattica. Ringraziamo tutti gli studenti coinvolti, per l'impegno e la curiosità che ci hanno mostrato.

Bibliografia

Baccaglini-Frank, A., Finesilver, C., & Tabach, M. (2022). Representations in mathematics education - a shift in perspectives. *ERME column. Eur. Math. Soc. Mag.*, *123*, 45–51. https://doi.org/10.4171/MAG/74

Dreyfus, T. (2017). What are solid findings in mathematics education? In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3952–3959). DCU Institute of Education and ERME.

Ferrari, M. (2016). Sua altezza. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *39*(4A), 465–488.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193–1211. https://doi.org/10.1080/0950069980201003

Fisher, N. (1978). Visual influences of figure orientation on concept formation in Geometry. In R. Lesh (Ed.), *Recent Research Concerning the Development of Spatial And Geometrical Concepts* (pp. 307–321). ERIC/SMEAC.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1999). Pre-service Primary Teachers' Understanding of the Concept Of Altitude of a Triangle. *Journal of Mathematics Teacher of Education*, *2*(3), 253–275. https://doi.org/10.1023/A:1009900719800

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry – or when "a little learning is a dangerous thing.". In J. Novak (Ed.), *Proceedings of the 2nd International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol. III, pp. 238–251). Cornell University.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry: Two Sides of the Coin. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 61–76.

Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2013). *Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2012/13. Guida alla lettura Rilevazioni Nazionali sugli apprendimenti 2012-13 - Prova di Matematica Classe prima Scuola secondaria di I grado.* https://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/2013_I_Sec_Primo_grado_GUIDA_MATEMATICA.pdf

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (Vol. 138, pp. 97–116). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_7

Mariotti, M. A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria.* Pitagora.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183–195. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80058-5

Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale.* Le Monnier. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf/1f967360-0ca6-48fb-95e9-c15d49f18831?version=1.0&t=1480418494262

Sbaragli, S. (2010). Qui cade sua...altezza. *La Vita Scolastica*, *18*, 25–27.

Sbaragli, S. (2017). Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *40*(2A-B), 227–248.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why Cannot Children See as the Same What Grown-ups Cannot See as Different? Early Numerical Thinking Revisited. *Cognition and Instruction*, *23*(2), 237–309. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2302_3

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth PME Conference* (pp. 177–184). University of California.

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool – examining explorative participation in mathematics lessons. *Journal of Mathematical Behavior*, *56*, 100717. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100717

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Springer-Verlag.

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 70 - 92, DOI: 10.33683/ddm.22.12.4 OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

I cerchi nel grano

Crop circles

David Lognoli
Scuola media annessa all'Educandato Statale "SS. Annunziata" di Firenze – Italia

david.lognoli@gmail.com

Sunto / La matematica alimenta lo spirito critico e democratico alla base di una cittadinanza consapevole. A tal fine la contestualizzazione è una risorsa per costruire un atteggiamento positivo degli allievi. L'intreccio della matematica con altre abilità è una necessità didattica per conseguire gli obiettivi del curriculum e uno strumento per mobilitare le diverse competenze per una valutazione personalizzata.
Nella pratica d'aula questo approccio permette di superare la riproposizione di esercizi stereotipati e di mobilitare più competenze, consente inoltre di coinvolgere l'intera classe nel dialogo educativo e di valorizzare ogni contributo.
L'idea sperimentata in aula, all'interno dell'unità didattica dedicata al cerchio e alla circonferenza, ha preso spunto da una famosa burla dei cerchi nel grano risalente agli anni '70. L'attività si è conclusa con una sfida creativa: il progetto di un cerchio nel grano. Oltre a richiedere la misura delle parti del cerchio ha sollecitato la progettazione di vere e proprie istruzioni operative per realizzare un cerchio nel grano.

Parole chiave: misura; cerchio; compito di realtà; creatività.

Abstract / Mathematics nourishes the critical and democratic essence at the foundation of conscious citizenship. For this purpose, contextualization is a resource for building a positive attitude from the students' point of view. The concurrency of mathematics with other active skills is an educational necessity to achieve the targets of the curriculum and to mobilize different skills to be able to give a personalized assessment.
In classroom practice, this approach allows to overcome the repetition of stereotyped exercises. At the same time, mobilizing more skills, gives the chance to involve the whole class in the educational dialogue enhancing every contribution.
The idea experimented with the students, within the didactic unit dedicated to the circle and circumference, was inspired by a famous crop circles hoax of the seventies. The activity ended with a creative challenge: the drawing of a crop circle. In addition to requiring the measurement of the parts of the disk, the activity involved the design of real operating instructions to create a crop circle.

Keywords: measure; circle; authentic task; creativity.

1 Introduzione

Il presente lavoro illustra un'attività svolta in una classe terza di una scuola secondaria di primo grado italiana,[1] corrispondente all'ottavo anno di istruzione. L'attività è stata inserita all'interno dell'unità didattica dedicata alla circonferenza, al cerchio e alla loro misura. In conseguenza delle misure per il contenimento della pandemia Covid-19 parte del lavoro si è svolto a distanza su piattaforma G-Suite for Education.
L'intera unità didattica, così come i tre anni di insegnamento, è stata condotta intrecciando i contenuti disciplinari della matematica con aspetti della esperienza quotidiana, della storia, della cultura al fine di porre i contenuti oggetto di apprendimento in un contesto reale. Questo approccio consente da una parte di corroborare i processi di astrazione, dall'altra di legare il rigore della matematica con esigenze della situazione reale (o simulata) piuttosto che al formalismo matematico proprio del successivo livello di studi. L'obiettivo è quello di offrire agli studenti, sia a quelli che proseguiranno seguendo studi liceali sia a quelli che sceglieranno studi tecnico-professionali, gli strumenti per raggiungere i traguardi previsti nelle Indicazioni nazionali italiane (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012) per lo sviluppo delle competenze imprescindibili alla fine del primo ciclo di istruzione. In particolare, l'esperienza didattica qui presentata ha avuto per oggetto il noto e intrigante fenomeno dei cerchi nel grano.

2 I cerchi nel grano

I *cerchi nel grano*, o agroglifi, comparvero per la prima volta in Inghilterra meridionale alla fine degli anni '70 del secolo scorso. Gli agroglifi sono porzioni di campi di cereali in cui parte delle coltivazioni appaiono appiattite in modo uniforme formando così delle figure geometriche ben visibili dall'alto. Da fenomeno inizialmente sporadico, si arrivarono a contare alcune centinaia di esemplari negli anni '80 (De Santis, 2011). Nel tempo nacquero sull'argomento numerose ipotesi scientifiche più o meno fondate e vere e proprie teorie del complotto e della cospirazione. Nel 1991 Doug Bower e Dave Chorley, gli autori dei primi agroglifi, svelarono la burla e l'anno dopo ottennero uno dei primi Ig-Nobel (Ridley, 2002), il noto riconoscimento satirico assegnato a ricerche strane, divertenti, e perfino assurde; insomma, quel tipo di lavori improbabili che prima fanno ridere e poi danno da pensare.
La storia dei cerchi nel grano coinvolge più aspetti connessi con la cultura matematica e scientifica applicabili nel contesto scolastico. Da una parte coniugano creatività (alcuni cerchi nel tempo hanno assunto l'aspetto di vere e proprie opere d'arte temporanee), matematica e tecnologia (la tecnica costruttiva non è trascurabile); dall'altra permettono di avventurarsi in modo critico nel campo molto attuale delle teorie del complotto e più in generale del ruolo del sapere scientifico nella società attuale. La matematica è infatti disciplina fondamentale per una cittadinanza piena e consapevole (Guerraggio, 2017; Honsell, 2015).
L'attività sui cerchi nel grano è stata strutturata per affrontare in ambito scolastico, sfruttando un contenuto scevro dalle specifiche contese di quel periodo, il dibattito pubblico sulle *fake news* e sui complotti, al fine di contribuire al raggiungimento delle competenze previste al termine del primo ciclo di istruzione della Repubblica Italiana.[2] In particolare, questa attività voleva contribuire a sottolineare l'importanza del pensiero razionale nell'interpretazione della realtà rimanendo al contempo legata

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. Il primo ciclo di istruzione in Italia dura otto anni: cinque anni di scuola primaria e tre anni di scuola secondaria di primo grado, che corrispondono alla scuola elementare e ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

ai contenuti disciplinari dell'insegnamento della matematica. Un approccio in linea con le Indicazioni Nazionali per il Curricolo dove si auspica che lo studente in uscita abbia acquisito

> «[…] conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche [che] gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il possesso di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche».
>
> (MIUR, 2012, p. 16)

Si tratta di un obiettivo particolarmente importante il cui raggiungimento richiede, in coerenza con il principio generale che muove l'insegnamento della matematica e delle scienze, il primato della persuasione razionale su quella emotiva. Primato che deve essere inteso non come soppressione delle emozioni dello studente, da cui l'attenzione agli aspetti artistici e al gioco, ma come superamento di un approccio in cui le emozioni inducono esclusivamente alla formulazione di un giudizio morale semplificato (Preti, 1968). La burla dei cerchi nel grano aveva nella sua storia travalicato la volontà dei suoi autori mostrando come la nostra società sia facilmente percorribile da complotti: un esempio di ciò che nel più tragico e pregnante terreno della politica è rappresentato dal legame tra il complotto QAnon, di grande attualità sociale, e il Luther Blissett Project (Wu Ming 1, 2018a, 2018b, 2021).

3 Il percorso

La scuola di riferimento è situata in un contesto rurale, territorialmente marginale, con un'articolazione sociale costituita da famiglie in diverse condizioni economiche, sociali e culturali.
La zona, tradizionalmente meta di turismo e immigrazione di alto livello socioculturale, negli ultimi quindici-venti anni ha accolto una nuova ondata migratoria per soddisfare le richieste dei lavori agricoli, dei lavori manuali nel settore dell'accoglienza e della ristorazione, del lavoro di cura e dei lavori nel campo dell'edilizia. La scuola è l'unica nel contesto territoriale, accoglie quindi studenti di ogni condizione.
La classe era composta da 24 studenti e studentesse, bilanciati nella ripartizione per sesso. Nessuno era ripetente, due alunni neo-immigrati erano stati aggiunti al gruppo classe l'anno precedente, trascorso purtroppo in *lockdown*. 21 allievi erano nati nel 2007, 1 nel 2006 e i 2 studenti di recente immigrazione nel 2005. Circa il 40% degli allievi aveva entrambi i genitori italofoni, il 12% aveva un genitore italofono, i rimanenti entrambi i genitori non italofoni. In classe era presente uno studente con certificazione di disturbo specifico dell'apprendimento.
L'unità didattica complessiva, riportata schematicamente in Figura 1, ha preso avvio con l'introduzione della circonferenza mediante la sua costruzione. In questa prima parte, sono state individuate le relazioni tra la circonferenza e gli altri enti geometrici. Nella seconda parte, la relazione tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo diametro è stata ottenuta mediante un'attività pratica di misura di più oggetti circolari (Castelnuovo, 2005) seguita dall'osservazione della proporzionalità mediante un grafico cartesiano. Nella terza parte, la misura dell'estensione della superficie del cerchio è stata affrontata mediante la rappresentazione di tre metodi tradizionali (approssimazione con poligoni regolari, trasformazione del cerchio in triangolo, metodo di MonteCarlo) con il software di geometria dinamica GeoGebra (Lognoli, 2017). Nella quarta parte, la misura delle parti della circonferenza e del cerchio (i.e. lunghezza di archi di circonferenza, area di settori e corone circolari), di cui l'attività dedicata ai cerchi nel grano è parte conclusiva, è stata introdotta mediante situazioni concrete (si veda il ramo blu nella Figura 1), in cui era necessario prendere una frazione della figura così come definita dalla situazione

problematica assegnata. In questa ultima parte le situazioni problematiche introdotte, di cui vengono illustrati alcuni esempi in **Figura 2**, prendono spunto da circostanze legate a elementi architettonici, sport, giocattoli ecc. più o meno allacciate al vissuto, anche extrascolastico, degli allievi.
L'attività "I cerchi nel grano" è stata pensata come un'azione di consolidamento della parte del percorso didattico dedicato alla misura delle parti del cerchio e della circonferenza. Nell'attività, posta al termine del percorso subito prima della verifica sommativa finale in cui è stata coerentemente proposta anche una situazione problematica contestualizzata, gli aspetti contestuali e narrativi erano preponderanti e la difficoltà esecutiva era accentuata rispetto alla parte precedente del percorso didattico.
Nelle situazioni problematiche presentate nella quarta parte dell'unità didattica (ramo blu nella **Figura 1**), il contesto e le domande proposte richiedevano una manipolazione dei valori numerici volta a soddisfare esigenze di precisione: si richiedeva l'utilizzo del valore di π, coerentemente con gli obiettivi delle attività, ed era fortemente sconsigliato l'uso dei risultati numerici parziali. Compatibilmente con le misure di contenimento della pandemia di Covid-19 in vigore, alcune attività sono state svolte a coppie o in piccolo gruppo, per altre, invece, le circostanze hanno permesso una lezione dialogata a grande gruppo.

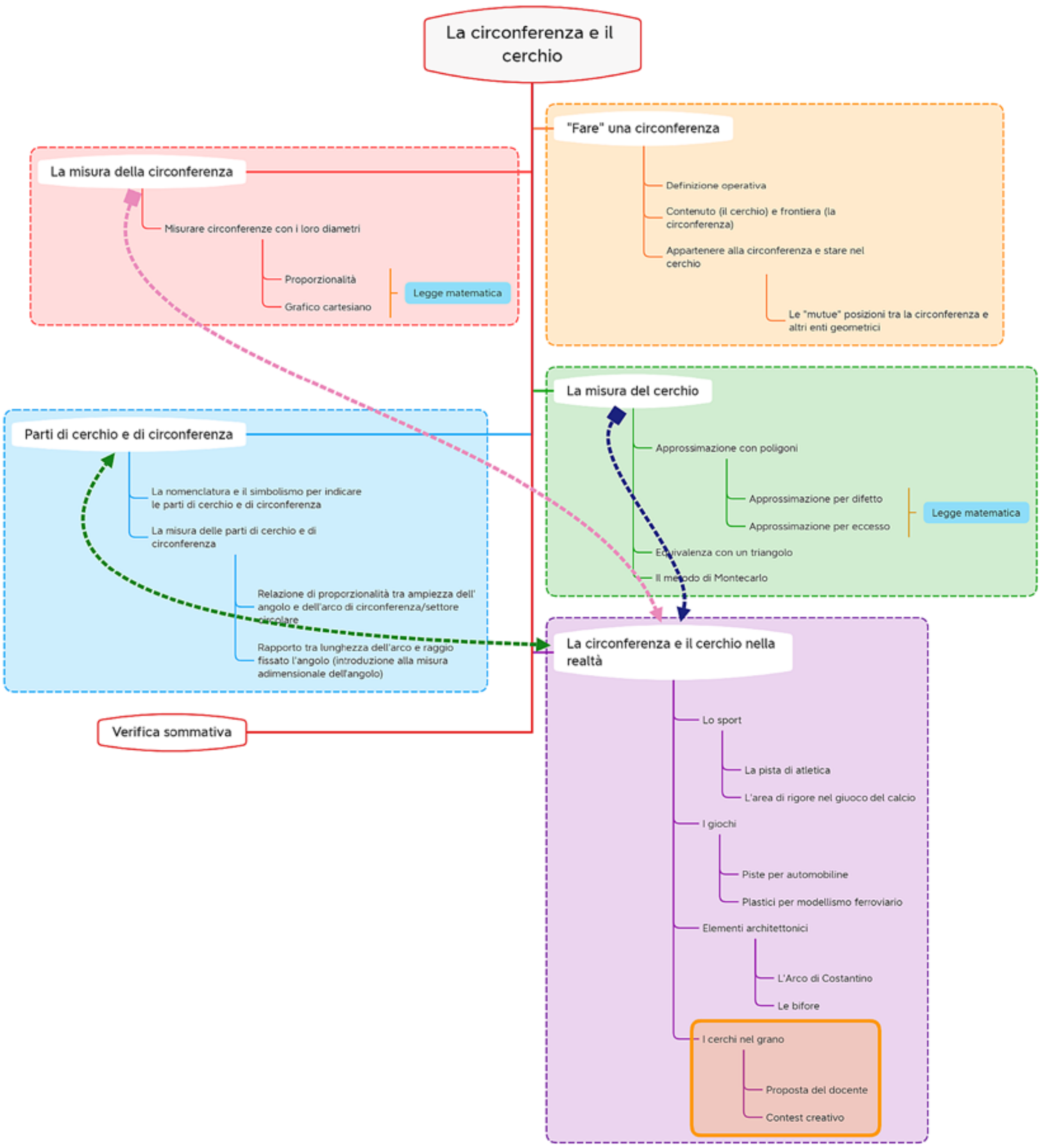


Figura 1. Mappa dell'unità didattica "La circonferenza e il cerchio", in cui è riquadrata in arancione l'ultima attività "I cerchi del grano", oggetto dell'articolo.

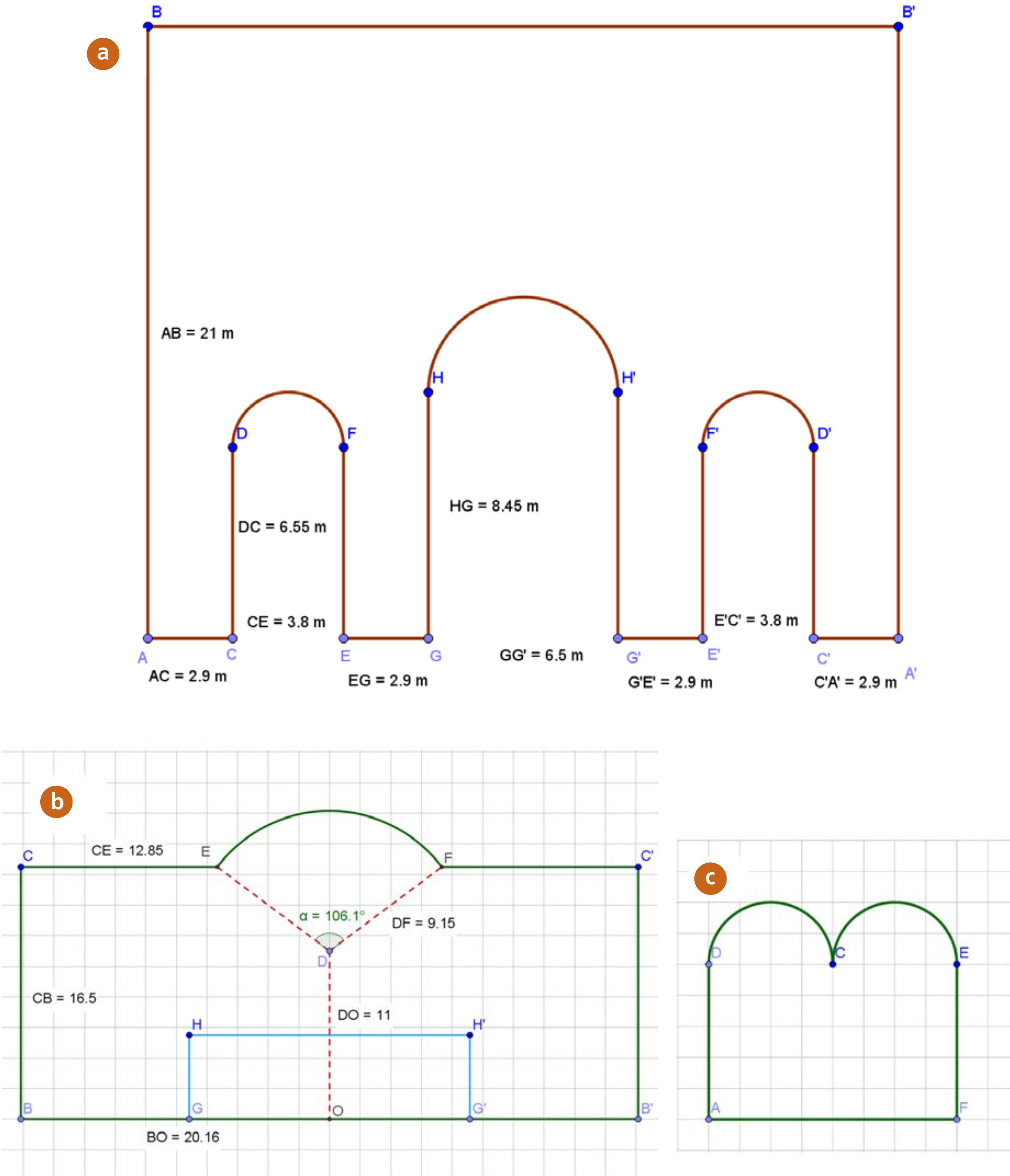


Figura 2. Esempi di situazioni problematiche utilizzate per affrontare la misura delle parti di circonferenza e del cerchio: **a.** rappresentazione dell'Arco di Costantino; **b.** l'area di rigore nel giuoco del calcio (con le misure in metri); **c.** rappresentazione di un elemento architettonico (le misure effettive dipendono dalla lunghezza del lato di un quadretto).

4 Attività "I cerchi nel grano"

L'attività sui cerchi nel grano è stata proposta alla classe nel mese di novembre 2020 quando la società era attraversata dal dibattito pubblico sulle *fake news* e sui complotti, dibattito amplificato dalle scelte politiche relative alla gestione della pandemia.
Oltre agli obiettivi di cittadinanza del contesto generale riportati nel par. 1, l'attività proposta aveva

lo scopo di lavorare su e valutare il conseguimento di alcuni specifici obiettivi di apprendimento,[3] in particolare:

1. In ambito matematico (MIUR, 2012, p. 64):
   a. Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).
   b. Descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri.
   c. Determinare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari.
   d. Conoscere il numero π, e alcuni modi per approssimarlo.
   e. Calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza, conoscendo il raggio, e viceversa.
   f. Esprimere misure utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative.
2. In ambito tecnologico (MIUR, 2012, p. 81):
   a. Leggere e interpretare semplici disegni tecnici ricavandone informazioni qualitative e quantitative.
   b. Pianificare le diverse fasi per la realizzazione di un oggetto impiegando materiali di uso quotidiano.

L'attività proposta agli studenti è stata articolata in tre fasi:

– la presentazione del fenomeno dei cerchi nel grano inquadrandolo nel proprio contesto storico culturale;
– una situazione problematica in cui gli studenti dovevano affrontare un cerchio progettato dal docente;
– una situazione aperta in cui gli studenti dovevano proporre loro un cerchio e assieme al progetto fornire anche indicazioni sulla sua realizzazione.

Il materiale dell'attività (si vedano gli Allegati 1 e 2) è stato fornito come scheda fronte-retro, disponibile in versione cartacea per gli studenti in classe e in versione digitale per le lezioni a distanza. In entrambi i casi la consegna del lavoro è stata richiesta su piattaforma digitale, un solo studente ha consegnato parte del lavoro in forma cartacea (più fogli di carta millimetrata A3 giustapposti).
Il fronte della scheda (Allegato 1) è interamente dedicato alla presentazione della vicenda dei cerchi nel grano. La lettura individuale è stata integrata da una discussione collettiva in classe dedicata anche al fenomeno delle burle, argomento apprezzato dagli studenti.

4.1 Il problema proposto dal docente

La prima parte del lavoro degli studenti è consistita nell'affrontare un problema in cui l'agroglifo era stato progettato e disegnato dal docente (Allegato 2). Nel testo sono stati coinvolti alcuni personaggi, il professor Mathematicus[4] e i gemelli Marco e Mirko,[5] che fin dal primo anno di scuola secondaria di primo grado hanno ricoperto il ruolo di protagonisti in alcuni esercizi proposti alla classe. Parte integrante del testo è il disegno associato (**Figura 3**). Ecco il testo del problema:

> Il professor Mathematicus, noto burlone, ha individuato vicino alla scuola in cui insegna un bel campo di grano in cui realizzare un cerchio. Decide quindi di realizzare un progetto preliminare del lavoro e poi affida a Marco e Mirko, il compito di fare alcuni calcoli sul suo lavoro.
> Il professor Mathematicus consegna ai due gemelli terribili uno schizzo del suo proget-

3. Nel prosieguo dell'articolo gli obiettivi saranno indicati come 1a, 1b ecc., 2a e 2b seguendo lo schema di questo elenco.
4. Il professor Mathematicus è un calco del professor Grammaticus, personaggio ideato da Gianni Rodari (Rodari, 1964) e protagonista della didattica dell'errore (Roghi, 2020).
5. Marco e Mirko, gemelli terribili, sono protagonisti di alcuni racconti di Gianni Rodari (Rodari, 2012). I personaggi compaiono per la prima volta nel biennio 1967-68 sul Corriere dei Piccoli.

to, lo puoi vedere in figura. In colore chiaro le spighe da piegare, in colore scuro quelle che devono rimanere in piedi.
Il professor Mathematicus chiede a Marco e Mirko di misurare l'area della superficie del campo da piegare, stimare il numero di spighe di grano che saranno piegate e calcolare il danno che produrrà al contadino, non sia mai che poi venga scoperto che dovrà ovviamente ripagarlo. Per questo fa notare ai ragazzi che il lato di un quadretto del reticolo corrisponde a 5 m.
Aiuta Marco e Mirko a:

a. Trovare l'area della superficie (al dm^2) della parte di campo in cui le spighe saranno piegate, in colore chiaro in figura.
b. Stimare, con la precisione dell'unità, il numero di spighe di grano che saranno piegate, per questo sappi che (in media) ogni m^2 si contano ben 200 spighe.
c. Stimare, con la precisione di 1 kg, il danno nella produzione di grano noto che la produzione del grano è $3{,}5 \cdot 10^3$ kg⁄ha. Non scordare che in prima il professor Mathematicus ha spiegato ai gemelli che la superficie di un ettaro (ha) corrisponde a quella di un campo quadrato con lato di 100 m (1 ha = 100 m × 100 m).
d. Stimare il danno economico, noto che nel 2020 il prezzo del grano al quintale è di 29 €. Ricorda che 1 quintale sono 100 kg e fai attenzione nelle equivalenze.

Al testo è associata la **Figura 3** dove è riportato il progetto sopra una quadrettatura; nella didascalia veniva ricordata agli studenti la possibilità, mediante la versione digitale del testo, di ingrandire adeguatamente l'immagine in modo da poter mettere in rilievo la quadrettatura.

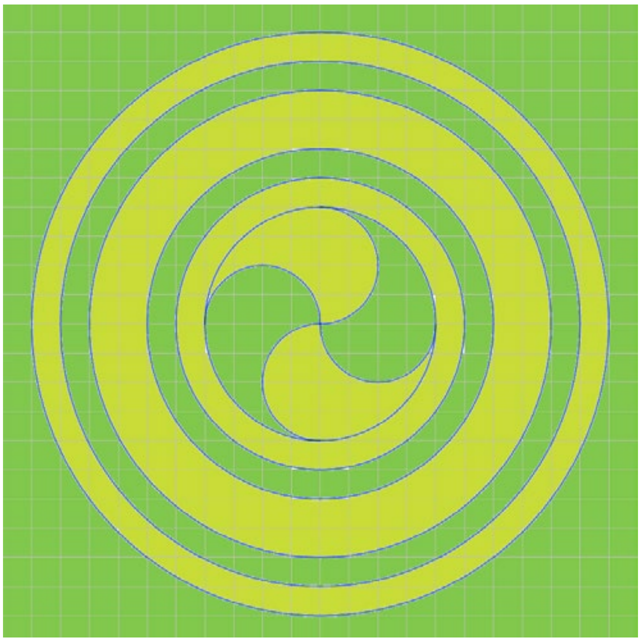


Figura 3. La figura presente nel testo proposto, corrispondente al progetto elaborato dal professor Mathematicus.

Il testo rimandava infine a una nota a piè di pagina dove si informavano gli studenti, tramite un registro ironico, delle norme di legge circa la distruzione delle coltivazioni agricole, sia mai che avessero preso poi troppo gusto nell'attività.
Data la complessità dell'attività, è stata adottata una modalità di lavoro a gruppi, scelti dagli allievi, da svolgersi asincronicamente offrendo loro un adeguato tempo di risoluzione: la consegna era richiesta

dopo dieci giorni. L'attività asincrona è stata interrotta da periodici passaggi in modalità sincrona per discutere con i diversi gruppi le difficoltà incontrate.
Gli elementi chiave dell'attività sono i seguenti:

- un testo lungo, circa 2000 caratteri, da affrontare pertanto con calma e necessariamente leggere per intero poiché fornisce le informazioni utili allo svolgimento del problema in un contesto narrativo (Demartini & Sbaragli, 2019);
- una serie di quesiti articolati per punti in maniera sequenziale;
- una serie di richiami impliciti (i nomi dei personaggi) ed espliciti alle attività pregresse affrontate dalla classe;
- il richiamo nel testo del significato di alcune grandezze e unità di misura coinvolte (la densità superficiale, l'ettaro, il quintale);
- la necessità di estrapolare le misure, con il proprio fattore di scala riportato nel testo, a partire dall'osservazione del disegno;
- la necessità di scomporre la figura in elementi più semplici e poi procedere con addizione e sottrazione delle aree;
- l'opportunità di abbreviare notevolmente la manipolazione della parte centrale della figura spostando opportunamente alcune sezioni della figura;
- il coinvolgimento di una grandezza derivata quale la densità e in generale una serie di rapporti tra grandezze non omogenee;
- la precisione del valore numerico richiesta nelle risposte.

I diversi elementi chiave dell'attività rimandano a traguardi e obiettivi delle Indicazioni Nazionali. In particolare, l'uso della lingua è fortemente intrecciato con la necessità di sviluppare argomentazioni al fine di poter comprendere e risolvere il problema (Viale, 2019).
Questa attività comportava una serie di azioni attese dall'allievo per risolvere il problema che meritano ciascuna una propria analisi:

- (A1) l'interpretazione della figura e l'eventuale individuazione di alcune semplificazioni possibili per l'esecuzione del problema (obiettivi di apprendimento 1a e 1b);
- (A2) l'individuazione delle misure delle grandezze considerate a partire dal fattore di scala (obiettivi di apprendimento 2a e 2b);
- (A3) l'individuazione delle parti di cerchio da manipolare per la risoluzione del problema, e il calcolo della loro misura (obiettivi di apprendimento 1c e 1e);
- (A4) la manipolazione dei calcoli con l'uso di π in forma algebrica e/o in forma numerica (obiettivo di apprendimento 1d);
- (A5) la manipolazione simbolica (relativa alle unità di misura) e numerica dei calcoli che coinvolgono valori numerici (punti b, c e d, Allegato 2) nel testo (obiettivo di apprendimento 1f).

Gli elaborati consegnati dai vari gruppi sono stati analizzati e classificati secondo un sistema di indicatori articolato su cinque livelli per ciascuna delle azioni attese individuate. Gli indicatori, riportati in **Tabella 1**, sono costruiti in analogia con quelli proposti per analizzare le prove del Rally Matematico Transalpino (Grugnetti, 2001). Per quanto la volontà sia stata quella di costruire un sistema indipendente a priori è possibile osservare che sono sicuramente presenti relazioni tra le diverse caselle del sistema di valutazione, per esempio un livello inferiore a 2 nell'indice A1 comporta l'impossibilità di superare il livello 2 nell'indice A3. A questo limite corrisponde sia la stretta relazione tra la comprensione del testo e l'abilità matematica sia il fatto imprescindibile della interconnessione dei saperi umani e del sapere matematico in particolare (Dehaene, 2012).

Azione attesa	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3	Livello 4
A1 Obiettivi 1a, 1b, 2a	Assoluta incomprensione del problema.	Rappresenta tentativi coerenti ma inconcludenti di comprensione della figura.	Individua solo le parti essenziali della figura (parte a cerchi concentrici).	Compie errori nell'individuare la parte centrale della figura.	Comprensione completa ed esecuzione corretta.
A2 Obiettivo 2a		Non individua il fattore di scala e svolge l'esercizio con valori casuali.	Sbaglia ad individuare il fattore di scala.	Individua correttamente il fattore di scala ma sbaglia la sua applicazione.	
A3 Obiettivi 1c, 1e		Non riesce a misurare le aree.	Non comprende come comporre le aree.	Compie errori esecutivi nella misura delle aree o nella loro sottrazione o addizione.	
A4, A5 Obiettivi 1d, 1f		La trattazione numerica dei calcoli ha errori sostanziali.	Trattazione scorretta con errori sostanziali nel simbolismo o nella esecuzione dei calcoli.	Trattazione corretta con errori nel simbolismo o nella esecuzione dei calcoli.	

Tabella 1. Indicatori utilizzati per la classificazione dell'azioni attese dagli allievi e la valutazione degli elaborati.

L'associazione dei livelli raggiunti nelle attività attese da parti degli studenti con gli obiettivi di apprendimento ha permesso di classificare e conseguentemente di valutare gli elaborati. Le azioni attese A2 e A5 sono associate anche ad altri obiettivi di apprendimento che non sono direttamente riferibili allo spazio e alle figure. L'attività ha permesso di verificare il loro consolidamento.

4.2 Il contest

Al problema proposto dal docente è stato affiancato un contest, ossia un concorso a gruppi o squadre in cui assieme ai contenuti matematici erano valorizzati anche quelli tecnici e artistici. La scadenza di consegna dell'elaborato per partecipare al contest era successiva al primo lavoro che nel frattempo era stato corretto e restituito dal docente ai diversi gruppi e poi brevemente discusso in classe. Il contest è stato assegnato mediante un vero e proprio volantino (Figura 4) con alcune istruzioni, lasciando assoluta autonomia e libertà ai partecipanti fatta eccezione per poche e semplici regole. Agli studenti, che potevano lavorare da soli, a coppie o a gruppi di tre, è stato chiesto di proporre un loro progetto di cerchio nel grano illustrando la tecnica costruttiva e stimando il danno alla coltura.

Gli elementi chiave del contest erano i seguenti:

– una sfida alla capacità degli studenti in grado di coinvolgere, con la necessità di equilibrarle tra loro, le competenze tecniche e quelle artistiche e di attivare intrinsecamente le riflessioni metacognitive (Benzi, 2020);
– la piena libertà nella composizione dei gruppi, nella scelta dei soggetti, nel livello di affinamento del lavoro;
– la necessità di associare al progetto delle istruzioni per la sua concreta realizzazione, attività che richiedeva una ricerca delle informazioni;
– la valorizzazione dei diversi contributi nella fase di valutazione;
– la piena liberà nell'uso di strumenti anche informatici.

Figura 4. Il volantino relativo al contest.

La richiesta di istruzioni per la concreta realizzazione di un cerchio nel grano permette di sviluppare competenze tecnologiche e contemporaneamente di affrontare competenze pratiche mediante le istruzioni necessarie alla sua realizzazione. Tra gli obiettivi didattici di questa richiesta vi era anche lo stimolo di una analogia con la definizione operativa della circonferenza, così come introdotta nella prima parte della unità didattica.

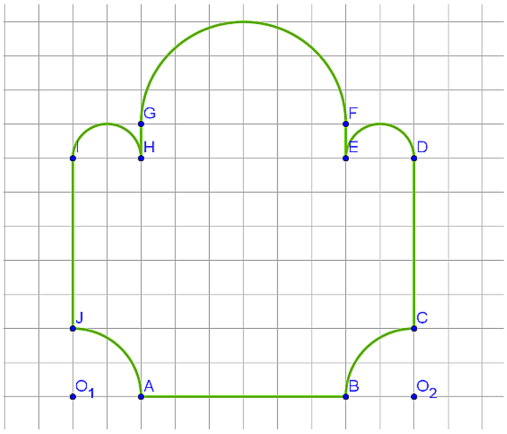
I criteri, illustrati nella Tabella 2, per la valutazione dei prodotti del contest sono stati costruiti per valorizzare originalità, complessità e completezza dei prodotti proposti. Questa griglia è il riadattamento di una griglia di valutazione in uso per le attività di laboratorio di scienze. Si tratta di uno strumento ben noto alla classe così come la consuetudine di usare questa griglia per le attività laboratoriali di matematica in cui è di rilievo il peso della parte creativa.

Voce		Massimo punteggio possibile
Progetto grafico	Originalità e giudizio estetico.	10
	Complessità e conseguente difficoltà.	20
	Presentazione (chiarezza e cura del disegno, presenza di una interpretazione artistica).	10
Misure	Impostazione del calcolo (correttezza della procedura seguita, presenza della trattazione simbolica).	20
	Esecuzione del calcolo (svolgimento del calcolo, trattazione delle unità di misura, uso corretto dei decimali).	10
Descrizione	Qualità dei materiali e loro descrizione.	5
	Qualità delle istruzioni per realizzare l'opera.	15
Organizzazione generale	Presentazione generale del lavoro, la sua fruibilità, la chiarezza e la completezza.	10
Totale		100

Tabella 2. Griglia di valutazione del contest.

4.3 La valutazione sommativa

Al termine dell'unità didattica alla classe è stata proposta una verifica sommativa costruita coerentemente con le attività svolte in classe. Un esercizio, riportato in Figura 5, era relativo proprio alla gestione di una figura geometrica complessa in cui si alternavano tratti lineari e parti di circonferenza.



5) Il professor Mathematicus ha un giardino recintato da una siepe di bosso. Poiché è giunto il tempo di far tagliare la siepe e rasare l'erba chiama un giardiniere e chiede un preventivo per sapere la spesa a cui andrà incontro.

Il professore consegna al giardiniere una mappa del giardino e ricorda che il lato di ogni quadretto è lungo **5** m.

Osservato (riportalo sul foglio a protocollo) il complesso disegno il giardiniere si rivolge ai propri figli e chiede loro di aiutarlo rispondendo alle seguenti domande:

a) Quanto è lunga la siepe di bosso lasciando π indicato?___________

b) Quanto è lunga la siepe con la precisione di 1 dm?__________

c) Quanto misura l'area erbosa delimitata dalla siepe con la precisione di 1 m^2?___________

d) Quanto costa il taglio della siepe se il giardiniere chiede 0,25 €\m? Approssima il prezzo a 1 €._________

e) Quanto costa il taglio dell'erba se il giardiniere chiede 0,15 €\m^2? Approssima il prezzo a 1 €.

Figura 5. Estratto dalla verifica sommativa.

Si è deciso di differenziare la prova a seconda delle competenze degli allievi. Per quanto riguarda l'estratto riportato in Figura 5, la differenziazione messa in atto riguardava la lunghezza del lato di ogni quadretto, ovvero il rapporto di scala che determina i diversi risultati numerici. In alcune prove individuali, inoltre, in considerazione delle specificità delle persone a cui erano rivolte, è stata proposta una figura meno complessa mantenendo la necessità di dover comporre figure diverse, di cui alcune parti di circonferenza, per la sua soluzione. Agli studenti neo-immigrati, infine, è stata proposta la traduzione del testo della prova (realizzata con l'ausilio dei servizi gratuiti online) nella loro lingua di origine e un sistema a scelte multiple per l'invio delle risposte.

5 I risultati

L'attività e il contest sono state analizzati e valutati in coerenza con gli specifici obiettivi di apprendimento a cui miravano.

5.1 Il problema proposto dal docente

La classe, dopo aver discusso collettivamente la scheda consegnata, ha affrontato in modalità asincrona il problema proposto dal docente. Gli elaborati proposti analizzati in questo contributo presentano alcune strategie esecutive che permettono di individuare difficoltà e punti di forza degli studenti. Per questa attività, l'analisi dei protocolli e la valutazione del lavoro sono state elaborate in riferimento agli obiettivi di apprendimento individuati.
Le difficoltà relative all'interpretazione della figura (azione attesa A1) sono dovute sia alla complessità della figura sia alla configurazione della parte centrale; questi ostacoli hanno indotto ad alcuni errori messi ben in evidenza nelle riproduzioni della figura proposta.

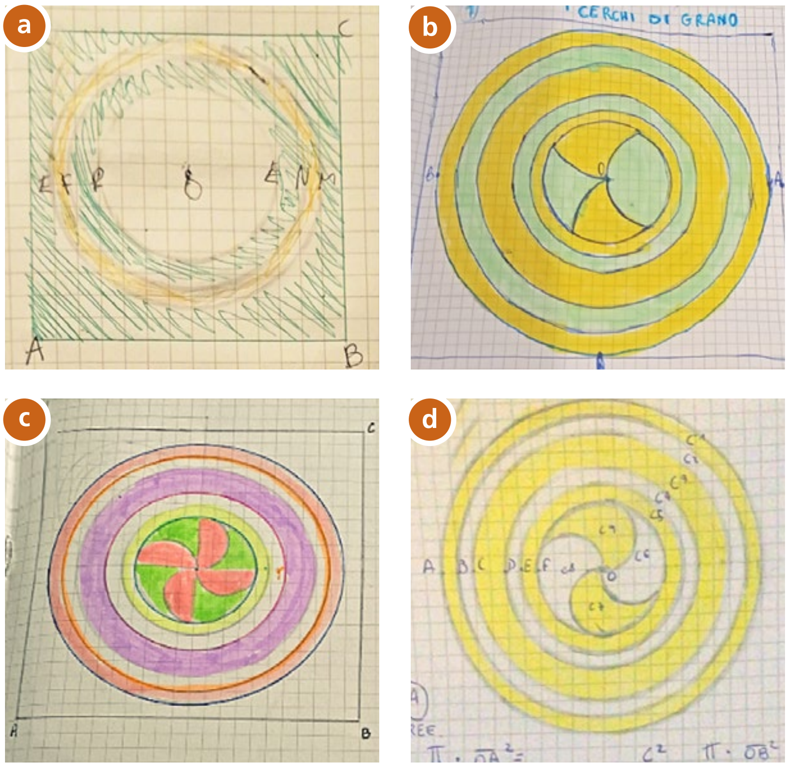


Figura 6. Alcune delle riproduzioni proposte dagli studenti: **a.** esempio di problema affrontato in modo parziale rinunciando alla rappresentazione della parte interna; **b.** tentativo di rielaborazione della parte interna che porta a una situazione più complessa; **c.** reinterpretazione del problema con semplificazione della parte interna della figura; **d.** esempio di protocollo con rappresentazione corretta del problema.

In **Figura 6** si possono confrontare tra loro alcuni degli elaborati proposti dagli studenti. Nella **Figura 6d** troviamo un protocollo in cui la figura è riprodotta correttamente. Il problema mostra infatti una relazione stretta tra la riproduzione corretta della figura e l'interpretazione delle sue parti. Gli studenti che hanno rappresentato accuratamente la figura e non hanno lavorato sulla stampa del *file*, o sul *file* stesso messo a disposizione sulla piattaforma, hanno successivamente interpretato correttamente le sue parti. Del resto, per disegnare correttamente la figura utilizzando il compasso è necessario individuare i centri dei cerchi e delle parti di cerchio rappresentati. Le due soluzioni proposte nelle **Figure 6b** e **6c** rappresentano due interessanti modifiche alla configurazione dell'area centrale che si può supporre siano dovute alla non comprensione della sua costruzione. Nella prima (**Figura 6b**), il disegno è stato eseguito a mano libera e l'approssimazione del tratto rende difficile dipanare la volontà dello studente per quanto riguarda la reinterpretazione della parte centrale. L'idea sembra essere quella della costruzione di cerchi centrati sulla prima circonferenza completa, forse un sistema di procedere reminiscenza di alcune costruzioni affrontate nelle lezioni di disegno tecnico. La via scelta conduce a dover affrontare un problema assai più difficile di quello dato. Nella **Figura 6d**, invece, la parte interna della figura assegnata viene sostituita con un'altra figura, anch'essa complessa ma con altre caratteristiche rispetto a quella assegnata. La manipolazione delle figure è tale da poter supporre che gli studenti abbiano intenzionalmente suddiviso la parte centrale in sezioni equiestese, nessuna spiegazione era però offerta nell'elaborato. Si può però osservare che la figura costruita dagli studenti è stata ideata proprio a partire da quella proposta dal problema, suddividendo opportunamente le aree. Nella **Figura 6a** troviamo invece un elaborato in cui lo studente rinuncia ad affrontare la parte interna, valutata probabilmente come troppo complicata per le proprie capacità. La difficoltà nel dipanare la figura originaria ha analogie con alcune delle difficoltà che si possono incontrare nella comprensione di un testo complesso, in particolare alla necessità di articolarlo nelle sue parti senza perdere il senso generale: a una figura non comple-

ta corrisponde sempre una esecuzione parziale delle fasi successive del problema. In Figura 6 tre dei quattro elaborati riportano "un confine" per la figura (rappresentato dal quadrilatero ABCD nelle Figure 6a e 6c a sinistra), confine che non era presente nel testo e a cui il testo non faceva riferimento, ma che lo studente potrebbe aver indotto dalla sola osservazione della figura.
Alcuni studenti, si veda, per esempio, quanto riportato nella Figura 7 hanno riarticolato la parte centrale della figura. In particolare, chi ha seguito questa strada ha compreso che si può manipolare la parte centrale della configurazione rendendola più facile da analizzare: invertendo i colori delle semicirconferenze, evidenziate in Figura 7, si ottiene una suddivisione in quarti del cerchio centrale, due quarti di spighe calpestate e due quarti no. In questa brillante proposta di soluzione, i quarti di circonferenza sono ulteriormente associati in modo da comporre due semicirconferenze e agevolare ulteriormente il lavoro.

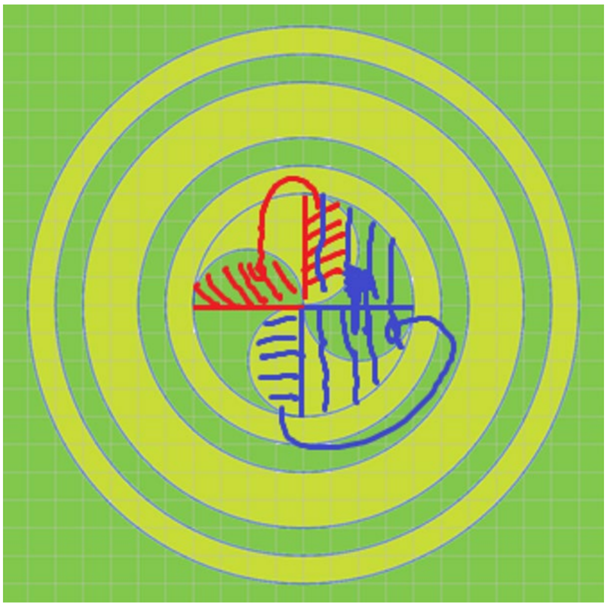


Figura 7. Esempio di elaborato in cui viene riconosciuta l'equivalenza delle aree delle porzioni del cerchio centrale.[6]

L'indicatore associato alla seconda azione attesa (A2), l'individuazione e l'uso di un corretto fattore di scala, non ha mostrato particolari criticità seppur con alcune eccezioni: alcuni studenti hanno utilizzato 1 m come lunghezza del lato del quadretto. I valori ottenuti sono in prima approssimazione realistici rispetto allo scenario dato, ossia la figura ha comunque una dimensione dell'ordine della decina di metri. Solo una riflessione sulla realizzazione concreta del cerchio avrebbe messo in evidenza una certa problematicità.
Il terzo indicatore (A3) coinvolgeva la misura del cerchio e delle sue parti e la loro manipolazione per individuarne i diversi contributi. Per quanto riguarda il primo punto, la difficoltà maggiore ha riguardato il calcolo della misura unidimensionale in luogo di quella bidimensionale: la lunghezza della circonferenza invece che l'area del cerchio. Dietro a questo genere di errori può nascondersi sia un'assoluta incomprensione del concetto di misura della superficie sia, più semplicemente, un uso non adeguatamente supervisionato delle relazioni che legano il raggio con la misura della circonferenza o del cerchio. In Figura 8 è riportato un esempio di questo tipo di difficoltà. È chiaro, sia dal simbolismo incerto in cui compare l'elevazione al quadrato, sia dalla trasformazione arbitraria dell'unità di misura dal metro al metro quadrato, che lo studente fosse alla ricerca di una misura bidimensionale.

6. La figura è stata ottenuta modificando direttamente il file fornito dal docente.

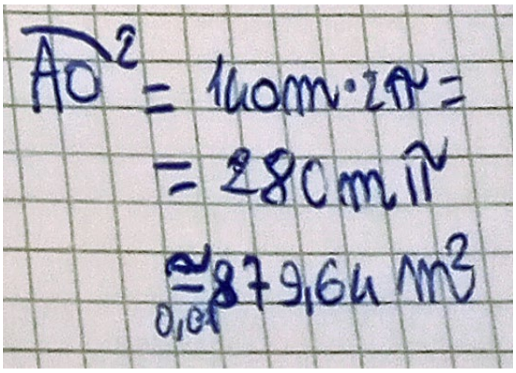


Figura 8. Esempio di utilizzo di una misura lineare in luogo di una misura bidimensionale con tentativo di auto-correzione nello svolgimento dei passaggi.[7]

La gestione della complessità della figura proposta ha portato gli studenti a scegliere differenti registri semiotici; alcuni esempi sono riportati in **Figura 9**. Alcuni studenti (**Figura 9a**), hanno demandato la spiegazione dello svolgimento al testo narrativo; seppur con il pregio della compattezza e della chiarezza metodologica, queste risoluzioni non tengono però traccia della corrispondenza tra la figura e il calcolo. Altri studenti hanno preferito il ricorso al colore come strumento per tracciare e comunicare la relazione tra il calcolo e la figura, un esempio completo e felicemente riuscito si trova nella **Figura 9b** a cui corrisponde l'esempio in **Figura 6c**. Infine, altri studenti ancora hanno utilizzato in maniera propria il simbolismo indicando correttamente ciascuna parte di cerchio, come nella **Figura 9c**. Per quanto impeccabile, quest'ultimo approccio riesce a comunicare esclusivamente a chi ha solida confidenza con il formalismo matematico. In altri protocolli, si osserva un utilizzo parziale del registro del colore e di quello simbolico in maniera sinergica e con un esito efficace ma di faticosa lettura. In particolare, questi studenti sono ricorsi all'utilizzo del colore quando il registro simbolico scelto non era univoco.

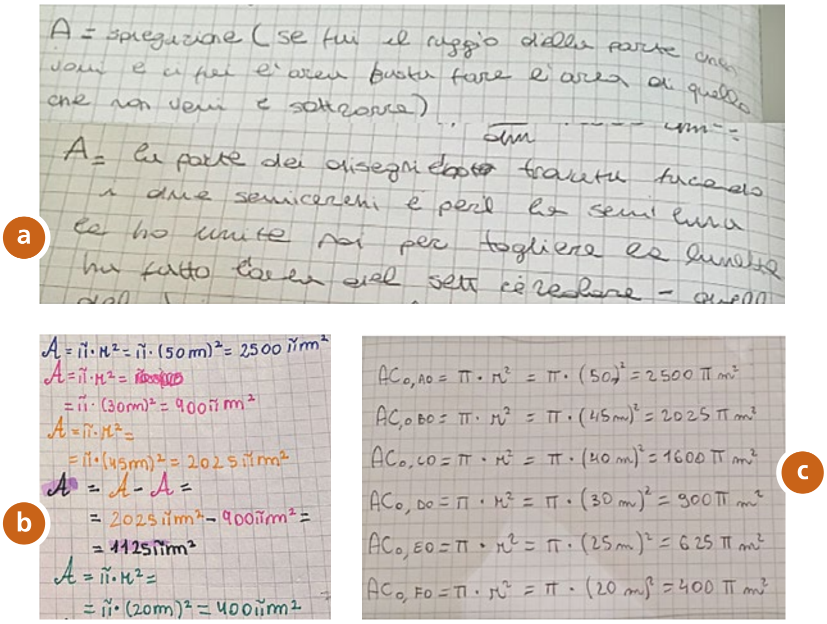


Figura 9. Alcune delle esecuzioni proposte dagli studenti relative al calcolo dell'area delle diverse parti del cerchio: **a.** spiegazione verbale di come si è proceduto per ricavare le misure delle diverse parti di cerchio; **b.** spiegazione basata sull'utilizzo del colore, lo svolgimento fa riferimento alla **Figura 6c**; **c.** spiegazione basata su un corretto approccio simbolico.

7. AO nel disegno corrispondente è il raggio del cerchio massimo.

La possibilità di usare la calcolatrice ha ridotto la frequenza dei meri errori numerici nell'esecuzione dei calcoli e l'indicatore A4 è quindi risultato utile per classificare e valutare la coerenza nell'uso dei decimali e la solidità del calcolo simbolico. Gli studenti che hanno realizzato protocolli utilizzando un linguaggio più formale nello svolgimento del problema hanno mostrato poi maggior confidenza anche con la corretta gestione del calcolo simbolico e successivamente dei decimali.
In **Figura 10** si mostrano alcuni esempi che illustrano i diversi approcci scelti dagli studenti per il calcolo dell'area delle diverse parti del cerchio. Nella **Figura 10c**, l'assoluta assenza di riferimenti simbolici rende più difficile seguire il ragionamento dello studente, le approssimazioni fatte e gli effetti nella propagazione dell'incertezza. Nella **Figura 10a**. l'esempio mostra un approccio in cui, seppur con una svista nell'uso delle unità di misura in un passaggio e pur in assenza di una univoca identificazione dei valori numerici, vi è traccia di approssimazione dei valori numerici. Nella **Figura 10b**, si può osservare che grazie a un adeguato supporto simbolico è possibile identificare in figura ciò che corrisponde ai valori numerici considerati; le approssimazioni, in questo caso, sono esplicitate.

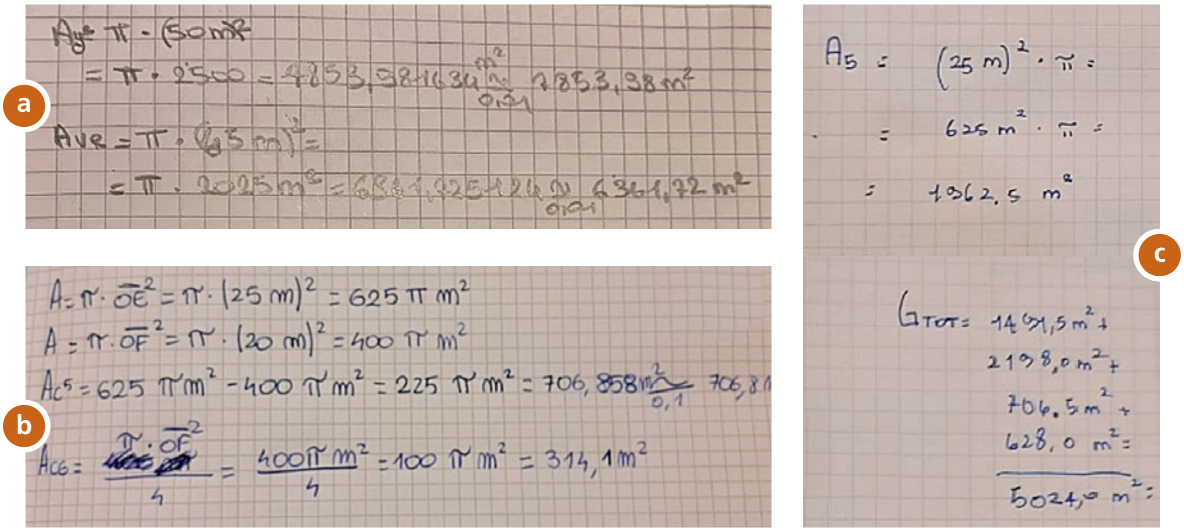


Figura 10. Alcune esecuzioni proposte dagli studenti relative al calcolo dell'area delle diverse parti del cerchio:
a. calcoli svolti in assenza di simbolismo; b. utilizzo del simbolismo adeguato con una gestione trasparente delle approssimazioni;
c. calcoli svolti in assenza di simbolismo, utilizzo dei decimali senza traccia delle approssimazioni.

In **Figura 11** abbiamo invece un esempio di svolgimento dei calcoli in cui la trasformazione di π in valore numerico avviene dopo aver eseguito la sottrazione tra le diverse aree calcolate. In nessun protocollo consegnato vi è una trattazione completa dell'esercizio lasciando π in forma simbolica fino all'ultimo passaggio. In sede di discussione in classe, è stato sottolineato come questo avesse influito nella precisione dei risultati numerici ottenuti. Questa è stata una occasione per riaffrontare e consolidare gli aspetti legati alla propagazione delle incertezze nei passaggi del calcolo, tema già affrontato l'anno precedente al momento dell'unità didattica sulla estrazione di radice.

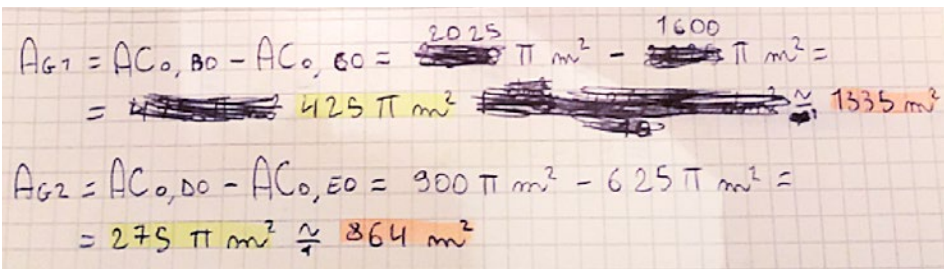


Figura 11. Esempio di trattazione in cui, correttamente, la conversione del π in valore numerico avviene dopo la sottrazione.

Gli ultimi quesiti, che prevedevano di affrontare rapporti non omogenei e di gestire correttamente le unità di misura nel procedere del calcolo, sono stati affrontati solo da alcuni studenti e portati a termine correttamente in appena un quarto degli elaborati. Una corretta gestione del simbolismo è stata, in queste circostanze, fondamentale per un corretto procedere del lavoro come evidenziato dagli esempi riportati in **Figura 12**.

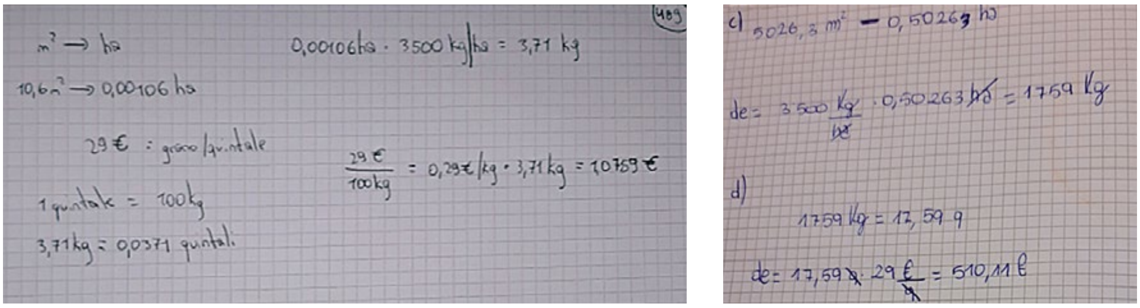


Figura 12. Due esempi di procedure di conversione svolte correttamente grazie alla gestione trasparente delle unità di misura, nonostante gli studenti siano partiti da valori scorretti frutto dei risultati precedenti.

Nella **Tabella 3** è riportato l'esito della valutazione degli elaborati per le diverse azioni attese dagli studenti così come ottenuto secondo i livelli descritti nella **Tabella 1**.

	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3	Livello 4
A1	5%	5%	15%	20%	55%
A2	5%	5%	10%	5%	75%
A3	0%	15%	15%	30%	40%
A4	25%	5%	35%	10%	25%
A5	25%	5%	35%	10%	25%

Tabella 3. Gli esiti degli elaborati secondo la classificazione illustrata in Tabella 1.

5.2 Il contest

Il contest è stato affrontato come attività aggiuntiva, o "compito a casa". Fissata una scadenza sulla piattaforma della classe virtuale e sul registro di classe niente era stato detto circa l'obbligatorietà o meno della attività. In questo caso, l'analisi e la valutazione degli elaborati hanno avuto come riferimento non solo gli obiettivi relativi alle abilità matematiche ma si sono focalizzate anche sui contenuti tecnologici, artistici e comunicativi del progetto proposto.

Oltre il 75% degli studenti ha partecipato, da solo o in gruppo, all'attività del contest consegnando un elaborato più o meno completo. Complessivamente sono stati consegnati 12 elaborati di cui 4 con tre autori, 1 con due autori e i rimanenti individuali. Viste le misure di contenimento della pandemia in essere i lavori collettivi sono stati svolti da remoto.

Per l'analisi e la valutazione del contest sono stati usati criteri differenti separando l'attribuzione di una valutazione docimologica dall'analisi. L'analisi degli elaborati, riportata in **Tabella 4**, è stata comunque utilizzata a supporto di alcune voci della valutazione docimologica. Tutti gli elaborati hanno visto la presenza di corone circolari, il 78% ha visto la presenza di settori circolari, dal 44% degli elaborati è risultata la necessità di trovare la misura di figure piane che presentavano un contorno parzialmente a tratti rettilinei e parzialmente curvilineo, il 78% ha riportato uno sviluppo del calcolo, il 67% ha riportato alcune considerazioni sulla concreta costruzione del cerchio nel grano e infine nel 44% dei casi la progettazione è avvenuta con il supporto di GeoGebra. Il software di geometria dinamica GeoGebra fin dalla prima ha accompagnato il lavoro della classe, agli studenti era sempre stata offerta la possibilità di corredare il lavoro di geometria con disegni realizzati con GeoGebra. In alcune circostanze sono state svolte, fino alle limitazioni introdotte dalle misure di contenimento della pandemia, attività con GeoGebra per tutta la classe, nell'aula di informatica dove ognuno disponeva del proprio elaboratore elettronico.

Descrittore	Percentuale
Presenza di corone circolari.	100%
Presenza di settori circolari.	78%
Presenza di poligoni.	67%
Presenza di tratti lineari e conseguentemente di figure piane con lati curvilinei.	44%
Sviluppo completo del calcolo.	78%
Considerazioni sulle modalità costruttive.	67%
Utilizzo di GeoGebra.	44%
Presenza di uso artistico del colore.	11%

Tabella 4. Analisi dei progetti proposti dagli studenti.

Gli studenti hanno proposto figure di diversa complessità. In taluni casi (si vedano le **Figure 13b** e **13c**), risultano molto complesse e influenzano la loro successiva gestione. Altre scelte (si vedano le **Figure 13a** e **13d**) hanno conciliato l'originalità artistica e l'attualità (nel caso della emoticon) con progetti che richiedevano minori risorse nelle fasi di successiva elaborazione. Nello specifico, sono mostrati: nella **Figura 13a** un progetto realizzato senza l'ausilio di GeoGebra che coinvolge semplici figure piane curvilinee; nella **Figura 13b** un progetto disegnato su GeoGebra; nella **Figura 13c** un progetto su carta millimetrata in cui sono coinvolte figure piane curvilinee; nella **Figura 13d** un progetto realizzato su GeoGebra in cui è presente un poligono composto.

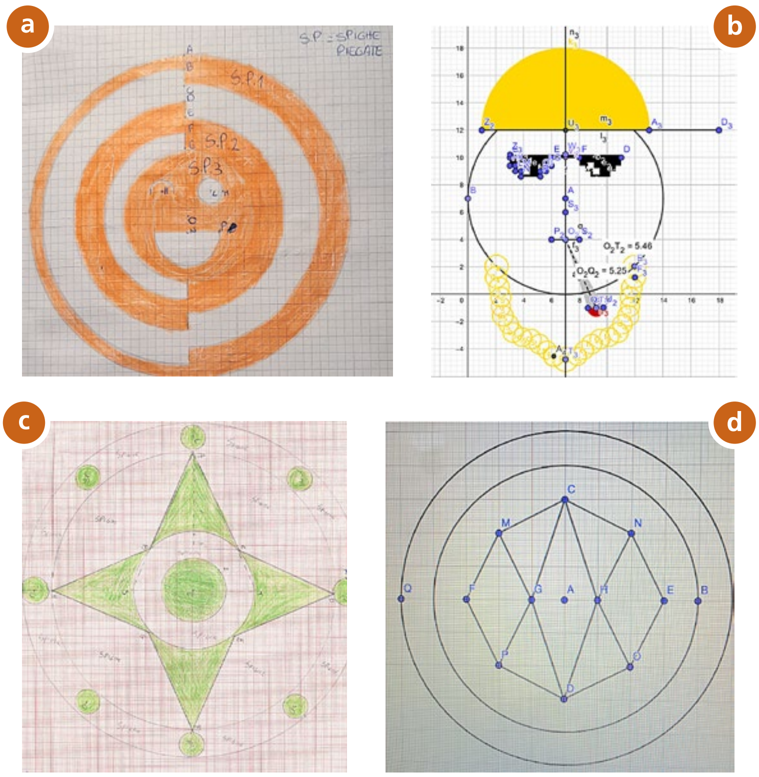


Figura 13. Esempi di alcuni progetti originali proposti dagli studenti.

Altri elaborati (**Figura 14**), presentano progetti meno originali con riferimento a immagini di attualità, per esempio un progetto che richiama il coronavirus (**Figura 14b**), oppure a immagini note, per esempio il simbolo dello Yin e Yang (**Figura 14c**) e una libera interpretazione del simbolo della pace (**Figura 14a**). Due elaborati sono stati corredati di un'interpretazione artistica della figura proposta realizzata in più colori, quello esteticamente più interessante è riportato nella **Figura 14d**. In questo caso, il cerchio di grano risulta assai difficile da riprodurre realmente sul campo.

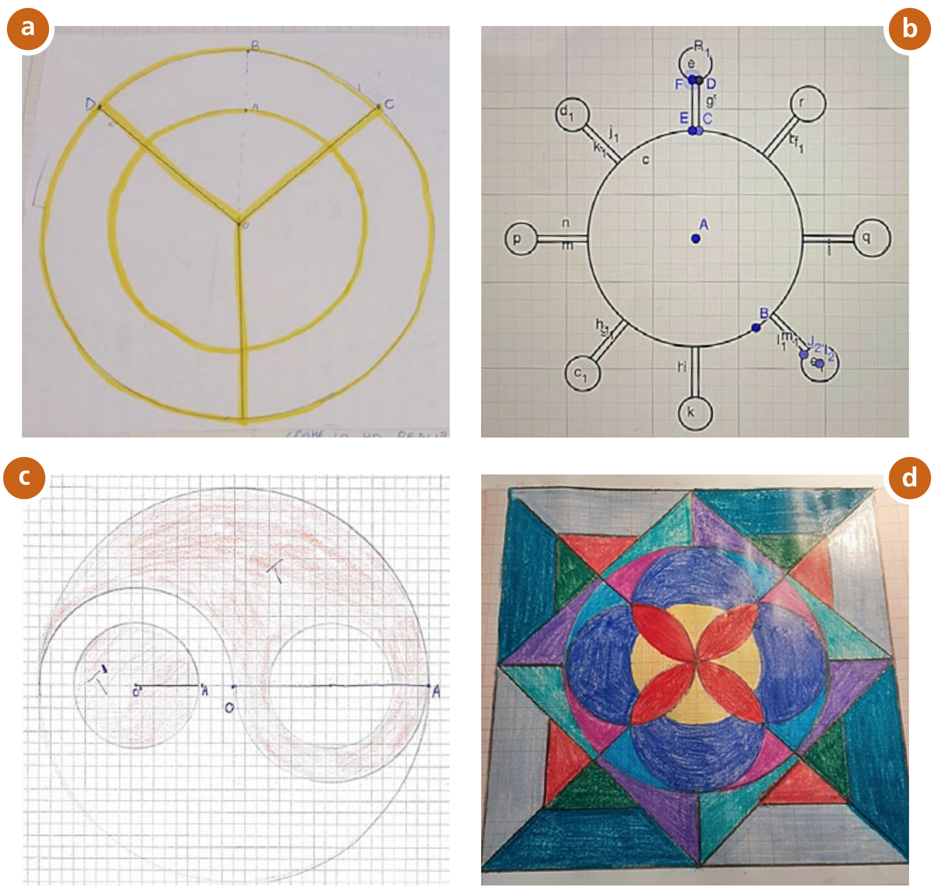
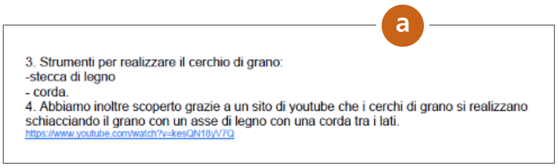


Figura 14. Alcuni progetti proposti dagli studenti associati a iconografia nota (**a** e **c**), temi di attualità (**b**), o dominati dalla dimensione artistica (**d**).

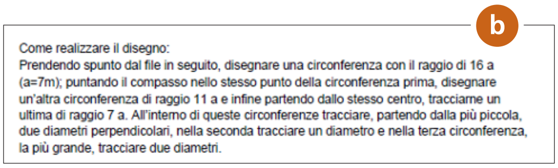
La trattazione matematica delle figure proposte dagli studenti ha presentato, in linea di massima, minori difficoltà rispetto al problema assegnato dal docente. L'aver prodotto autonomamente la figura ha rimosso la difficoltà conseguente alla sua interpretazione. Sono rimasti alcuni errori di esecuzione di non particolare importanza e, in un caso, un'incapacità di gestire una figura così complessa.
Importante nella consegna del contest era la richiesta di alcune considerazioni sulle modalità necessarie per realizzare un cerchio nel grano a partire dal progetto ideato. Questa consegna richiedeva un'autonoma azione di documentazione, ricerca, riflessione e poi scrittura. Tutti gli elaborati consegnati contenevano una parte dedicata a questa richiesta, seppur redatta in modi diversi, tranne un elaborato che è stato consegnato senza questa parte. Nella **Figura 15a** troviamo un esempio di risposta sintetica in cui si viene genericamente rimandati a un video presente sul portale YouTube. Per quanto l'attività svolta sia una semplificazione dell'attività assegnata, comunque lo svolgimento ha richiesto una riflessione sulle modalità operative che ha aiutato gli studenti a consolidare il concetto di cerchio e delle sue parti. Nella **Figura 15b** è mostrato invece un esempio di trattazione completa e approfondita in cui però viene spiegata la realizzazione del disegno ma non dell'agroglifo. La **Figura 15c**, infine, mostra una trattazione completa e approfondita.

a



3. Strumenti per realizzare il cerchio di grano:
-stecca di legno
- corda.
4. Abbiamo inoltre scoperto grazie a un sito di youtube che i cerchi di grano si realizzano schiacciando il grano con un asse di legno con una corda tra i lati.
https://www.youtube.com/watch?v=kesQN18yV7Q

b



Come realizzare il disegno:
Prendendo spunto dal file in seguito, disegnare una circonferenza con il raggio di 16 a (a=7m); puntando il compasso nello stesso punto della circonferenza prima, disegnare un'altra circonferenza di raggio 11 a e infine partendo dallo stesso centro, tracciarne un ultima di raggio 7 a. All'interno di queste circonferenze tracciare, partendo dalla più piccola, due diametri perpendicolari, nella seconda tracciare un diametro e nella terza circonferenza, la più grande, tracciare due diametri.

c

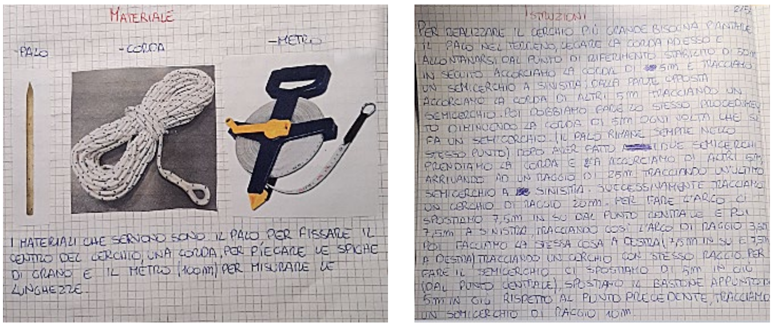


Figura 15. Alcuni esempi di elaborati riguardanti le istruzioni operative per la realizzazione concreta del cerchio nel grano:
a. esempio in cui le istruzioni sono generiche; b. esempio di trattazione completa;
c. esempio in cui le istruzioni riguardano non l'esecuzione del manufatto ma quella del progetto.

La valutazione del contest, seguendo la griglia presentata precedentemente (Tabella 2), è stata indirizzata a premiare e valorizzare il lavoro svolto, fermo restando la penalizzazione per eventuali "errori" esecutivi (si veda la Tabella 5 per una visione d'insieme). Per ogni elaborato è stata restituita una scheda di valutazione analitica con uno specifico commento che motivava il valore attribuito.
Per quanto riguarda l'originalità e il giudizio estetico, l'idea iniziale era quella di procedere con una valutazione collettiva. Il passaggio alle lezioni a distanza ha comportato la decisione di attribuire un giudizio agli elaborati solamente da parte del docente, sia per evitare una discussione collettiva che a distanza poteva essere più sbilanciata (la qualità della connessione e l'uso dello strumento informatico tendevano a incrementare le difficoltà in una classe così eterogenea) sia per recuperare un po' di tempo in una situazione critica. Per valutare gli aspetti legati alla complessità e alla presentazione (secondo e terzo indicatore della voce "Progetto grafico") è stato utilizzato il lavoro di classificazione presentato precedentemente in Tabella 4.

Voce		Punteggio medio degli elaborati	Massimo punteggio possibile
Progetto grafico	Originalità e giudizio estetico.	8	10
	Complessità e conseguente difficoltà.	17	20
	Presentazione (chiarezza e cura del disegno, presenza di un'interpretazione artistica).	8	10
Misure	Impostazione del calcolo (correttezza della procedura seguita, presenza della trattazione simbolica).	12	20
	Esecuzione del calcolo (svolgimento del calcolo, trattazione delle unità di misura, uso corretto dei decimali).	6	10
Descrizione	Qualità dei materiali e loro descrizione.	3	5
	Qualità delle istruzioni per realizzare l'opera.	7	15
Organizzazione generale	Presentazione generale del lavoro, la sua fruibilità, la chiarezza e la completezza.	7	10
Totale		68	100

Tabella 5. Griglia di valutazione del contest e punteggi medi ottenuti dagli elaborati.

5.3 La valutazione sommativa

In Figura 16 sono riportati gli esiti della valutazione sommativa riferiti all'esercizio presentato in Figura 5 (si veda il par. 4.3). L'esercizio, il numero 5 nella successione della verifica, più attinente a testare l'attività sui cerchi nel grano, ha sortito esiti valutativi molto variegati. Evidentemente, le difficoltà incontrate non hanno permesso a una parte della classe di affrontarlo positivamente. Va osservato inoltre che era il penultimo esercizio e che probabilmente, lo scadere del tempo a disposizione e la stanchezza alla fine della prova hanno influito sul risultato.

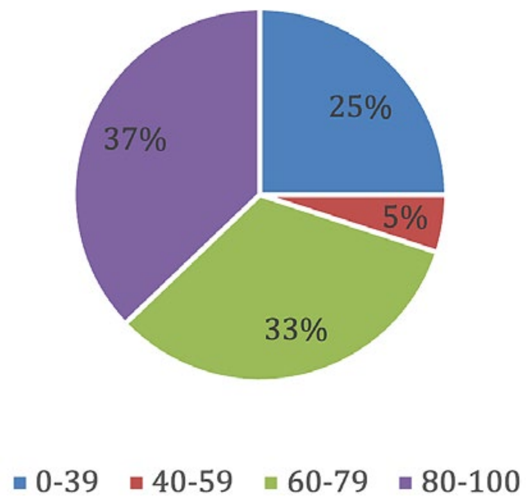


Figura 16. Esito della valutazione dell'esercizio 5 (Figura 5). Le fasce di valutazione in legenda corrispondono al punteggio in centesimi ottenuto dallo studente nella esecuzione.

6 Conclusioni

Le attività proposte, seppur limitate dalle difficili condizioni legate alle misure di contenimento della pandemia da Covid-19, hanno visto un'ampia e positiva partecipazione da parte della classe. La possibilità di organizzarsi in gruppo per il contest ha permesso di sfruttare sinergicamente le diverse competenze presenti. Al fianco delle abilità matematiche gli studenti hanno fatto ricorso a conoscenze tecnologiche e ad attitudini artistiche ed emotive proponendo progetti originali o comunque legati alla attualità e/o a codici espressivi di larga diffusione con richiamo a temi di loro interesse generale (la pace, il simbolo dello Yin e Yang) o contingente (il virus SARS-COV-2).

Gli studenti hanno lavorato su figure geometricamente molto complesse riuscendo a conservare l'abilità di riconoscimento nelle figure stesse e delle loro parti e misure significative; la comprensione della figura li ha successivamente guidati nello svolgimento dei calcoli. Talvolta il controllo richiesto per lo sviluppo del calcolo si è mostrato andare oltre alle loro capacità, ma la gestione algebrica delle unità di misura e la gestione dei decimali nei vari passaggi ha consentito lo sviluppo e il consolidamento di abilità matematiche che sono alla base di competenze essenziali nella futura attività lavorativa e in generale nella vita.

Benché per alcuni studenti i contenuti matematici coinvolti in questa attività potessero risultare di difficile comprensione e gestione, la loro partecipazione attiva al contest nonché l'esito positivo della verifica sommativa rispetto a tali argomenti sono un indizio positivo di sviluppo delle competenze mirate con l'attività proposta.

L'obbligo di svolgere gran parte dell'attività a distanza non ha permesso di curare adeguatamente gli aspetti comunicativi. Avendo l'occasione di riproporre l'attività e il contest dei cerchi nel grano in presenza potrebbe essere proficuo definire e valutare insieme dei criteri relativi alle descrizioni e spiegazioni fornite per accompagnare il disegno in modo da sviluppare adeguatamente la parte argomentativa. Una soluzione da sperimentare potrebbe essere lo scambio tra gruppi della descrizione del progetto con la riproduzione in scala del cerchio di grano proposto nel contest su carta o su altro materiale e la conseguente discussione delle istruzioni fornite in modo da completarle e migliorarle. Questo ulteriore sviluppo dell'attività aiuterebbe a tornare ancora una volta sugli obiettivi generali di questo percorso e dell'intero processo di insegnamento-apprendimento: una cittadinanza consapevole che si interroga, si documenta, propone, argomenta e ascolta.

Bibliografia

Benzi, A. (2020). Matematica creativa in classe: attività sfidanti, cooperative, autovalutabili. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace* (pp. 25–26). Pitagora.

Castelnuovo, E. (2005). *La Matematica* (Vol. Figure Piane B). La Nuova Italia.

De Santis, S. (2011). *HOAX! (Q13). Storie di imbroglioni, burloni, truffatori e semplici bugiardi.* CICAP.

Dehaene, S. (2012). *Il pallino della matematica.* Raffaello Cortina Editore.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 9–43. https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.1

Grugnetti, L. (2001). RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici-Evolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques. *Atti delle giornate di studio sul Rally Matematico Transalpino.* Siena 1999 - Neuchâtel 2000. Pitagora.

Guerraggio, A. (2017). Matematica, scienza, democrazia. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Matematica, didattica e scuola: tra ricerca e prassi quotidiana* (pp. 31–32). Pitagora.

Honsell, F. (2015). Metodo scientifico e metodo democratico: un'endiadi per il progresso dell'umanità. *PRISTEM/Storia - Note di Matematica, Storia e Cultura*, 1–30.

Lognoli, D. (2017). The area of the disk in middle school grade by GeoGebra. *International Journal of Emerging Technology in Learning*, *12*(11), 28–40.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero speciale.* Le Monnier.

Preti, G. (1968). *Retorica e Logica. Le due culture.* Einaudi.

Ridley, M. (2002). Crop Circle Confession. *Scientific American*, *278*(2), 25. https://www.jstor.org/stable/26059914

Roghi, V. (2020). Per una didattica degli errori. A cento anni dalla nascita di Gianni Rodari. *Pensare la didattica. Novecento.org.* http://www.novecento.org/pensare-la-didattica/per-una-didattica-degli-errori-a-cento-anni-dalla-nascita-di-gianni-rodari-6771/

Rodari, G. (1964). *Il libro degli errori.* Einaudi.

Rodari, G. (2012). *Storie di Marco e Mirko.* Einaudi.

Viale, M. (2019). *I fondamenti linguistici delle discipline scientifiche. L'italiano per la matematica e le scienze a scuola.* Cleup.

Wu Ming 1. (2018a). Come nasce una teoria del complotto e come affrontarla, prima parte. *Internazionale.* https://www.internazionale.it/reportage/wu-ming-1/2018/10/15/teorie-complotto-qanon

Wu Ming 1. (2018b). Come nasce una teoria del complotto e come affrontarla, seconda parte. *Internazionale.* https://www.internazionale.it/reportage/wu-ming-1/2018/10/29/teoria-complotto

Wu Ming 1. (2021). *La Q di Qomplotto.* Alegre.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 93 - 116, DOI: 10.33683/ddm.22.12.5

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

I bambini e le rappresentazioni degli "oggetti" della geometria

Children and the representations of the "objects" of geometry

Ines Marazzani
Nucleo di Ricerca Didattica della matematica, Università di Bologna – Italia

marazzaniines@gmail.com

Sunto / Nell'articolo vengono descritte alcune esperienze didattiche effettuate nella scuola dell'infanzia (con bambini di quattro e cinque anni) e nella scuola primaria (con alunni di classe prima, quarta e quinta) sia per conoscere le rappresentazioni di oggetti della geometria scelte e usate spontaneamente dai bambini, sia per favorire la visualizzazione e il passaggio dal modo di vedere *iconico* al modo di vedere *non iconico* richiesto in geometria.

Parole chiave: visualizzazione; rappresentazioni; vocabolario tecnico; interazione sociale; attività geometriche classiche.

Abstract / The article describes some didactic experiences carried out in kindergarten (with four and five year old children) and primary school (with first, fourth and fifth grade students) both to learn about the representations of geometrical objects chosen and used spontaneously by children and to encourage visualization and the transition from the *iconic* way of seeing to the *non-iconic* way of seeing required in geometry.

Keywords: visualization; representations; technical vocabulary; social interaction; classical geometric activities.

1 Premessa

Come sappiamo, rispetto ad altre forme di conoscenza, la matematica ha una sua specificità: è impossibile poter entrare in contatto in modo diretto con l'oggetto matematico perché gli oggetti della matematica non sono accessibili percettivamente (Duval, 1993). In un famoso articolo che aprì la strada, anche in senso critico, a molte successive riflessioni, Chevallard (1991) definisce un *oggetto della matematica* come

> «[...] un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli, …), vale a dire, registro della scrittura».
>
> (Chevallard, 1991, p. 8, traduzione dell'autore)

In base a questo, la sola possibilità di avvicinamento a un oggetto matematico avviene attraverso artefatti e segni che, in situazione di insegnamento-apprendimento in una *comunità di pratica* (D'Amore, 2005; D'Amore & Godino, 2006), vengono scelti da chi è preposto a operare una *trasposizione didattica* (D'Amore, 1999) e proposti a chi è in fase di apprendimento. Non possiamo pensare, però, che chi si trova in fase di apprendimento non abbia la possibilità di ricorrere a rappresentazioni semiotiche spontanee per esprimere l'immagine che si è già costruito relativamente all'oggetto matematico di cui si discute. Potrebbe essere un'immagine completa, un'immagine parziale, un'immagine iniziale, un'immagine che possiamo conoscere, come dicevamo, grazie alle rappresentazioni che l'allievo può usare spontaneamente per comunicare le proprie idee relativamente a un oggetto della matematica. Didatticamente, quindi, appare di fondamentale importanza conoscere le rappresentazioni spontanee scelte e usate dagli allievi e basare su queste le proposte didattiche volte a far emergere l'oggetto matematico sia se si tratta delle rappresentazioni che ogni singolo allievo sceglie fra tutte quelle che vengono proposte da altri (ad esempio dagli insegnanti) e condivise in una classe intesa come comunità di pratica, sia se si tratta delle rappresentazioni che ogni singolo allievo propone come sue proprie rappresentazioni dell'oggetto.
Possiamo, quindi, dire che, per rappresentare esternamente gli oggetti della matematica, abbiamo a disposizione artefatti e segni, chiamati *mezzi semiotici di oggettivazione* della conoscenza (gesti, parole, simboli matematici, grafici ecc.) (Radford, 2008), i quali permettono di percepire l'oggetto matematico a diversi livelli di generalità – in base al mezzo semiotico che oggettiva il significato culturale che l'oggetto rappresenta – solo grazie a situazioni didattiche ricche e significative e nella continua interazione sociale con gli altri. È importante inoltre tener presente che individui in fase di apprendimento non sempre dimostrano di ricorrere spontaneamente alle rappresentazioni disponibili e non sempre riconoscono l'oggetto matematico in gioco se rappresentato attraverso l'uso di diversi registri semiotici contemporaneamente.
In linea con tali considerazioni, uno degli scopi delle esperienze didattiche proposte sia a bambini di quattro e cinque anni sia a bambini di sei-sette anni (classe prima) e di nove e dieci (classi quarta e quinta) e qui descritte è, quindi, quello di conoscere le rappresentazioni di oggetti della geometria scelte e usate spontaneamente dai bambini per poter basare l'azione didattica su ciò che ognuno ha costruito nel *fare matematica in modo ingenuo* (D'Amore, 2021) e per continuare a farlo collettivamente.
Le esperienze didattiche descritte sono state proposte a distanza di anni e a gruppi diversi di bambini delle età indicate: l'analisi delle prime esperienze realizzate ha portato a progettare ulteriori esperienze didattiche che man mano si sono articolate grazie all'analisi delle risposte date dai bambini coinvolti che via via venivano raccolte. Allo sviluppo delle esperienze proposte ha inoltre contribuito

un’analisi delle potenzialità offerte dalle costruzioni con riga e compasso, artefatti storico-sociali che mediano il pensiero (Radford, 2008), nell’avviare i bambini al ragionamento matematico e in particolare alla dimostrazione (Asenova, 2018; Asenova & Marazzani, 2020). Le esperienze realizzate, basandosi sulle rappresentazioni spontanee scelte dai bambini, hanno avuto due ulteriori scopi: favorire la visualizzazione intesa «come un modo di rappresentare esternamente, cioè al di fuori di noi, gli oggetti matematici» (Fandiño Pinilla & D’Amore, 2020, p. 43) e promuovere il passaggio dal modo di vedere iconico al modo di vedere non iconico richiesto in geometria (Duval, 2005).

2 Processi di oggettivazione e modi di vedere in geometria

I processi di oggettivazione, teorizzati all’interno della teoria dell’oggettivazione, «una teoria dell’apprendimento e dell’insegnamento» (Radford, 2015, p. 549, traduzione dell’autore), e l’approccio relativo alle condizioni cognitive all’apprendimento della geometria di Duval (2005) hanno guidato le analisi delle rappresentazioni spontanee usate dai bambini e le progettazioni delle successive esperienze didattiche proposte nelle classi sia della scuola dell’infanzia, sia della scuola primaria.

2.1 Processi di oggettivazione

Per entrare nell’idea di *processo di oggettivazione*, inteso, nella teoria dell’oggettivazione, come trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza, seguiamo la definizione che ne dà Radford:

> «Il termine oggettivazione è composto di due parole: *ogget+tivazione*. La prima viene da *obietare*, che significa “mettere qualcosa davanti a qualcuno”. *Facere* significa “fare”, di modo che, etimologicamente oggettivazione significa “far mettere qualche cosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire”. Nel nostro contesto, oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l’oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un’intenzione e per condurre a termine un’azione».
>
> (Radford, 2005, p. 203)

Il *processo di oggettivazione* ci permette, quindi, di mostrare un oggetto della matematica a qualcuno che, nel nostro caso, è in fase di apprendimento, affinché possa entrare in contatto e interagire con questo e apprendere.

Seguendo Radford (2008) pensiamo l’apprendimento come un processo legato alle pratiche sociali culturalmente mediate dai mezzi semiotici di oggettivazione, un processo grazie al quale è possibile entrare in contatto con oggetti della matematica, rappresentare oggetti della matematica, acquisire sempre più familiarità con essi per entrare di nuovo in contatto con questi a livelli diversi di generalità in processi in continua evoluzione, in processi di trasformazione attiva di oggetti culturali in oggetti di coscienza. Tali azioni, dunque, determinano processi di apprendimento chiamati *processi di oggettivazione* (Radford, 2002, 2005).

L’oggettivazione è un *processo* incompiuto e senza fine, che effettuiamo *con gli altri*, «indipendentemente dal fatto che gli altri siano presenti, faccia a faccia, o a distanza, virtualmente, o attraverso il linguaggio, o artefatti (libri o altri elementi culturali mediatori)» (Radford, 2015, p. 551, traduzione dell'autore), nel corso del quale chi è in fase di apprendimento viene progressivamente a conoscenza di significati culturali e forme di ragionamento e di azione storicamente costituiti, in un continuo dialogo tra soggetto e oggetto che si modificano reciprocamente. A proposito di quest’ultimo elemento, Radford (2015) precisa quanto segue:

> «Nel corso dell’apprendimento, il soggetto entra in contatto con il sapere culturale e, così facendo, da un lato incide sul sapere culturale attraverso l’evento sempre nuovo della sua attualizzazione e, dall’altro arriva a conoscere e riconoscersi in un processo riflessivo che chiamiamo soggettivazione. La soggettivazione è il farsi del soggetto, la creazione di una particolare (e unica) soggettività resa possibile dall’attività in cui si realizza l’oggettivazione».
>
> (Radford, 2015, p. 553, traduzione dell’autore)

2.2 Modi di “vedere” in geometria: modo *iconico*

Se i processi di oggettivazione sono focalizzati ad oggetti geometrici, occorre considerare quelli che Duval (2005) chiama “modi di vedere” in geometria. Le prime esperienze geometriche che permettono agli allievi di riconoscere oggetti bidimensionali, nominarli, descriverli notando somiglianze e differenze, e identificando alcune loro caratteristiche avvengono a livello percettivo e richiedono all’alunno un modo *iconico* (Duval, 2005) di vedere in geometria. Tale modo di vedere si caratterizza con l’operazione di riconoscimento delle forme a partire da qualità visuali come, ad esempio, quella di un contorno. Infatti, a guidare lo sguardo in quella che Duval (2005) chiama *visualizzazione iconica* sono gli aspetti topologici, legati alla percezione delle forme degli oggetti nella realtà, e gli aspetti metrici. Per fare un esempio, nel quadrato, la congruenza dei lati può essere verificata solo se se ne conosce la misura e attira l’attenzione di chi osserva non per dedurre altre caratteristiche del quadrato, ma solo perché, grazie a questa, è possibile conoscere la misura del perimetro e della superficie.
Il lungo processo storico di oggettivazione delle figure geometriche passa anche attraverso la necessità pratica, legata alla vita di tutti i giorni, di misurare: misura di distanze, misura dell’estensione della superficie di terreni, misura dell’ampiezza di angoli per poter ricostruire confini distrutti da inondazioni di fiumi, misura della lunghezza dei lati di una figura disegnata come schema per la costruzione di templi ecc.
Le esperienze *sensuali* e *pratiche* (Radford, 2008) di misurazione hanno accompagnato l’uomo fin dalle più antiche civiltà, si sono saldate nel linguaggio e hanno contribuito da sempre a sostenere le argomentazioni nella risoluzione di problemi pratici. Ne abbiamo esempi nelle tavolette babilonesi e nei papiri egizi (D’Amore & Sbaragli, 2017).
Fra le attività scolastiche proposte anche ad alunni molto piccoli ci sono quelle che prevedono l’apprendere a misurare; per esempio, capire che cosa significa “unità di misura”, capire “come” si misura, “che cosa” si può misurare ecc. Tra queste troviamo anche quelle attività che trattano la scelta della procedura e dello strumento più adatto a seconda del tipo di misurazione considerata (D’Amore et al., 2021).
Ma in attività che richiedono di misurare (la lunghezza dei lati di un quadrato, ad esempio), le proprietà delle figure vengono mobilizzate come «criteri di selezione per le misurazioni da effettuare. Sono utili solo se si riferiscono a una formula che consente un calcolo» (Duval, 2005, p. 9, traduzione dell’autore) e non per dedurre altre proprietà.
La modalità di *visualizzazione iconica* non permette, quindi, di stabilire relazioni tra le differenti proprietà degli oggetti geometrici. È per questo che, secondo Duval (2005), tale modo di vedere non può essere considerato proprio della geometria, anche se le forme osservate sono chiamate “euclidee”. Tuttavia, per l’importanza che racchiudono le riflessioni topologiche e metriche, possiamo considerare il modo *iconico* di vedere in geometria come un primo passaggio, fondamentale per la costruzione di competenze geometriche; competenze che non possono essere legate, però, alla sola visualizzazione iconica. Infatti, se le richieste di azioni sulle figure fossero sempre e solo relative alla visualizzazione del contorno delle figure, gli alunni si troverebbero in difficoltà nella gestione delle proprietà concettuali e matematiche degli oggetti della geometria.

È per questo che al modo di vedere iconico deve presto essere affiancato il modo di vedere in geometria che Duval (2005) chiama *non iconico* che non focalizza lo sguardo sugli aspetti topologici o metrici, ma sulle proprietà delle figure. È, infatti, possibile proporre esperienze didattiche che guidano lo sguardo verso la *visualizzazione non iconica* (Duval, 2005) anche a bambini di giovane età in quanto tale modo di vedere non è legato all'età degli allievi, poiché «è il compito che il soggetto deve svolgere a imporre la necessità di interpretare gli oggetti geometrici in un modo determinato o in un altro» (Asenova, 2018, p. 177).

2.3 Modi di “vedere” in geometria: modo *non iconico*

Il modo *non iconico* (Duval, 2005) di vedere in geometria «non richiede particolari competenze matematiche, esso è, al contrario, secondo Duval, un passaggio obbligato per accedere a tali conoscenze» (Asenova, 2018, p. 179).
Tale modo di vedere in geometra richiede un processo di decostruzione dimensionale delle figure geometriche in unità figurali di dimensione inferiore e permette di focalizzare lo sguardo sulle proprietà geometriche delle figure che, a loro volta, guideranno lo sguardo nell'attività di ricostruzione della figura stessa.
Per esempio, il quadrato, oggetto 2D che osserveremo anche negli esempi delle attività proposte ai bambini, può essere decostruito in enti di dimensione inferiore come proposto in Figura 1. I vertici sono enti 0D: punti ottenuti come intersezioni di rette. Le diagonali sono enti 1D: segmenti appartenenti a rette, enti 1D, e il loro punto d'intersezione è il punto medio. Gli assi di simmetria sono enti 1D: segmenti appartenenti a rette, enti 1D. I lati sono enti 1D: segmenti appartenenti a rette, enti 1D, parallele a due a due e perpendicolari fra loro.

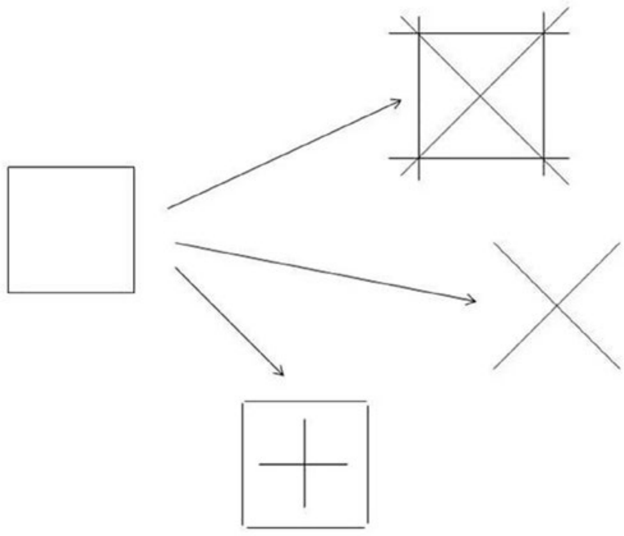


Figura 1. Decostruzione dimensionale del quadrato.

Inoltre, nella «rete di linee tracciate ci sono tante forme quanti sono i contorni chiusi possibili» (Duval, 2018, p. 217, traduzione dell'autore), riconoscibili sia per sovrapposizione sia per giustapposizione, che permettono alla figura stessa di svolgere un ruolo euristico nella risoluzione di un problema.
Continuando con il nostro esempio: la decostruzione dimensionale del quadrato ci permette di scomporre il quadrato stesso in quattro quadrati che possono essere riconfigurati in un rettangolo (Duval, 2018), oppure di scomporlo in due triangoli che possono essere riconfigurati in un parallelogrammo, oppure in otto triangoli che possono essere riconfigurati in un trapezio, oppure in quattro triangoli che possono essere riconfigurati in un triangolo (Figura 2).

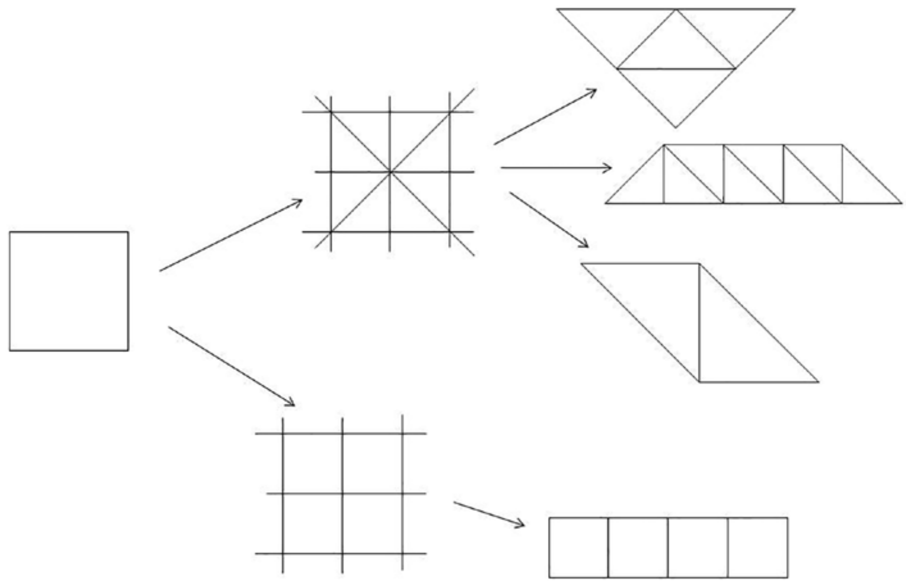


Figura 2. Possibili riconfigurazioni del quadrato.

Per fare in modo che l'allievo adotti il modo *non iconico* di vedere in geometria occorre, innanzi tutto, permettergli di cimentarsi in attività di decostruzione delle figure geometriche in tracciati principali e ausiliari che si possono disegnare con strumenti e in attività di descrizione dell'ordine delle azioni necessarie per poter ricostruire tali figure.
Ciò è possibile perché le figure geometriche, con le quali gli alunni di giovane età (intendiamo: fin dalla scuola dell'infanzia) si rapportano, corrispondono a figure euclidee elementari e a configurazioni di figure elementari, e possono essere costruite grazie a determinati strumenti [*artefatti storico-sociali* (Radford, 2008)]: la riga (non graduata) e il compasso (con i più piccoli il compasso Bullseye Safe-T e il compasso per scultura), artefatti senza i quali sarebbe impossibile verificare le proprietà delle figure. Il compasso, per esempio, è un artefatto che «media il concetto di circonferenza in quanto incorpora strumentalmente e culturalmente la sua definizione sintetica come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro» (Asenova et al., 2020, p. 13).

2.4 Il vocabolario tecnico

Per poter discutere delle figure della geometria, anche a livello elementare, occorre inoltre possedere un buon *vocabolario tecnico*, formato da termini che sono oggetti della geometria, che permettono a chi li possiede di sostenere le argomentazioni. Infatti, la ricchezza di termini capaci di supportare la visualizzazione permette di affinare lo sguardo e di organizzare le ipotesi che lo accompagnano creando un processo a spirale che favorisce la visualizzazione geometrica fin dai primi anni di scolarità. È per questo che, nel lungo processo in cui la lingua (anche infantile) sostiene la visualizzazione geometrica, si collocano attività didattiche che portano all'uso di termini della geometria; ed è sempre per questo che a scuola si pone estrema attenzione sia nel (ri)proporre tali termini ai bambini, disambiguandoli e caricandoli di significati condivisi in matematica, sia nel richiedere di usarli in modo sempre più corretto e coerente da un punto di vista matematico e semantico. Sicuramente, però, «ciò non significa scimmiottare la lingua formale della matematica: che la lingua resti quella infantile» (D'Amore, 2020, p. 40).
Come sostiene Duval (2005) possiamo introdurre il vocabolario tecnico della geometria, fondamentale per poter esprimere ciò che è necessario discernere visualmente in una figura, grazie ai 23 ορoι (Euclide, 2007) che aprono il *Libro I* degli Elementi che «sembrano essere le descrizioni (non definizioni) degli oggetti di cui l'opera tratta» (D'Amore & Sbaragli, 2017, p. 241) e che «costituiscono l'inven-

tario del corpus semantico necessario per tutto il lavoro di Euclide» (Duval, 2005, p. 31, traduzione dell'autore).
I 23 ορoι euclidei accompagnano lo sguardo verso le proprietà invarianti delle figure osservate lasciando da parte ciò che riguarda le grandezze misurabili. «La loro funzione è quella di sostenere l'articolazione del discorso matematico con l'organizzazione della percezione visiva delle forme» (Duval, 2005, p. 31, traduzione dell'autore).
I termini del *vocabolario tecnico* della geometria decisamente complesso vengono proposti agli alunni fin dai primi anni di scolarità ma, a volte, già fanno parte delle parole conosciute e usate in modo intuitivo dai bambini, parole che hanno appreso grazie a varie esperienze di vita (giochi con i compagni più grandi, gite con i genitori e i nonni ecc.). I bambini, per esempio, sentono e usano le parole *punto*, *retta*, *piano* ecc. anche se a volte i significati attribuiti a tali termini hanno poco a che fare con la matematica. E ancora, *lato*, *quadrato*, *angolo*, *cerchio* sono termini che i bambini usano in modo spontaneo sin dai primi tentativi condivisi per poter descrivere una figura geometrica a sé stessi e per poter discutere fra loro e con l'insegnante.

3 Attività

Le esperienze a cui facciamo riferimento in questo articolo sono il risultato di attività geometriche *classiche*, ossia fondamentali, tradizionali, di base (D'Amore et al., 2021), e di attività con software geometrici che sono state possibili grazie alle prime. Sono state scelte attività in cui si realizza il *processo di oggettivazione*: non un semplice fare qualche cosa che ha a che fare con la matematica, ma attività di problem solving e problem posing che hanno lo scopo di attualizzare la conoscenza (Radford, 2015), sapientemente progettate dall'insegnante.
Nelle varie attività gli alunni coinvolti sono passati dall'osservazione del reale e dalla manipolazione di oggetti tridimensionali, alla rappresentazione nel registro linguistico e nel registro grafico degli oggetti osservati [descrizioni orali, trascritte dagli insegnanti e/o dagli stessi bambini, disegni di oggetti tridimensionali (3D) sul foglio di carta (2D), costruzioni con riga e compasso], alla discussione, al confronto fra pari e con l'insegnante, allo scambio di idee e di interpretazioni, al parlare di geometria, alla costruzione e all'arricchimento del *vocabolario tecnico* (Duval, 2005) e, di nuovo, all'osservazione del reale che poteva essere visto con "occhi nuovi". La costruzione e l'arricchimento del vocabolario tecnico sono necessari per poter parlare di geometria, infatti, la ricchezza di termini capaci di supportare la visualizzazione ha permesso agli alunni coinvolti nelle esperienze qui descritte in parte, di affinare lo sguardo e di organizzare le ipotesi che lo accompagnano, creando quel processo a spirale che sostiene la visualizzazione geometrica fin dai primi anni di scolarità.
Per la costruzione di tale *vocabolario tecnico*, che non può essere costituito da definizioni imparate a memoria, gli alunni con i quali abbiamo lavorato, sono stati impegnati in lavori di decostruzione delle figure e di costruzione delle figure con strumenti adeguati (riga, compasso e software di geometria dinamica) nei quali ogni linea prodotta è stata accompagnata da un'espressione in lingua che ha permesso di riconoscere ciò che era stato tracciato. Le descrizioni di tracciati che hanno accompagnato il lavoro di costruzione sono diventate un gioco in classe che ha spinto gli alunni a voler giocare sempre di più con le figure della geometria.
Si è scelto di proporre delle attività matematiche che non prevedono la ripetizione mnemonica di una definizione, ma che, come dicevamo, hanno impegnato gli alunni in lavori di decostruzione delle figure e di costruzione delle figure. Le figure sono state costruite inizialmente a mano libera, poi con riga e compasso, infine con software di geometria dinamica. Ogni disegno, ogni linea tracciata, ogni costruzione sono stati accompagnati da una descrizione fatta dal bambino che eseguiva il lavoro;

ogni descrizione è stata condivisa e discussa in classe, è stata vagliata ed è stata accettata come descrizione soddisfacente per quel momento e per quel gruppo classe.

3.1 Scelte progettuali

Nelle sezioni di quattro e cinque anni della scuola dell'infanzia e nelle classi quarte e quinte della scuola primaria[1] con le quali abbiamo agito, la progettazione delle attività ha seguito un iter di lavoro indirizzato dalle *conoscenze ingenue* e dalle *strategie ingenue* messe in atto dagli alunni; tali conoscenze e strategie sono emerse dai singoli soggetti, sono state condivise e sono diventate patrimonio comune da cui evolvere nel processo di oggettivazione.
In base ai saperi ingenui osservati, sono stati selezionati alcuni problemi da proporre agli alunni delle diverse sezioni e delle diverse classi; problemi che, tenendo conto delle conoscenze ingenue pregresse dei bambini, avrebbero permesso loro di apprendere qualcosa di nuovo e avrebbero offerto la possibilità di riflettere matematicamente in modi diversi. In base alle soluzioni date ai problemi sono stati selezionati nuovi problemi da proporre, i quali, come i primi, potessero permettere un'evoluzione nel processo di oggettivazione facendo incontrare l'oggetto a un nuovo livello di generalità.
Gli insegnanti coinvolti hanno proposto il problema selezionato ai bambini e hanno affidato loro il compito di risolverlo accettando sia risposte date dal singolo, sia risposte date da gruppi costituiti e/o costituitisi in sezione/classe.
Nelle diverse esperienze fatte, spesso i bambini hanno iniziato il lavoro individualmente; poi, in modo autonomo, si sono confrontati con gli altri.
Gli insegnanti hanno seguito le discussioni chiedendo chiarimenti, ponendo domande, fornendo feedback, tentando continuamente di svincolarsi e svincolare dalle maglie del contratto didattico (Brousseau, 1980) gli alunni che rispondevano alle domande e che venivano reindirizzati dai feedback forniti.
In molti casi, sia gli alunni sia gli insegnanti coinvolti hanno contribuito a creare un clima di collaborazione e interazione volto all'accoglienza, alla cura dell'altro e alla valorizzazione dei contributi di ognuno. Essere protagonisti del lavoro in classe, modificare le proprie convinzioni e le proprie condizioni rispetto al sapere, accogliendo e facendo propri i punti di vista degli altri, essere coinvolti in discussioni nelle quali il contributo di ognuno è prezioso, ha portato alla possibilità di mostrare il proprio pensiero senza il timore di sbagliare. Per ottenere questo clima, nelle classi di scuola primaria, è stato fondamentale tentare di affrancare gli alunni dall'attesa della valutazione individuale: il "voto", richiesto da molti bambini sin dai primi giorni di scuola nelle classi prime della scuola primaria, come fosse un trofeo (se positivo) da riportare a casa perché presumibilmente atteso in famiglia, è stato man mano dimenticato.
Tuttavia, la ricerca di consenso e di stima da parte dei compagni di classe e/o dell'insegnante ha avviluppato insegnanti e alunni, mostrando che anche nella scuola dell'infanzia «il contratto didattico esiste già, legato non tanto alla necessità di valutazione positiva, quanto al desiderio di conseguire, ottenere, il consenso degli adulti o l'omologazione al resto della classe» (D'Amore, 2021, p. 31).
Alcuni alunni hanno continuato a cercare consensi degli adulti e degli altri bambini e hanno orientato su questo il loro agire. Per loro è stata forte la necessità di avere indicazioni su quali fossero le risposte valide e quali no; quali fossero gli artefatti da usare, quali no; quali le domande permesse, quali no ecc. In questi casi, la possibilità di fare matematica in modo ingenuo è venuta meno e sono venute meno le risposte spontanee, compromettendo un apprendimento significativo.

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.

4 Alcune esperienze con i bambini

In questo paragrafo si riportano alcune delle attività di problem solving e problem posing proposte: dalla costruzione del vocabolario tecnico passeremo alla descrizione di attività che hanno avuto come oggetto di discussione il quadrato, infine alla descrizione di attività che hanno avuto come oggetti di discussione il triangolo equilatero e il rombo.

4.1 Costruzione del vocabolario tecnico

Gli alunni, osservando le costruzioni di figure geometriche che loro stessi avevano fatto, spinti dalla volontà di comunicare agli altri ciò che avevano in mente e di farlo capire nel modo da loro ritenuto più semplice possibile, hanno dato descrizioni dei termini usati; ne riportiamo alcune date da alunni di nove-dieci anni, relative alla seconda delle quattro categorie in cui Duval (2005) suddivide i termini specifici usati nelle costruzioni euclidee in base alla eterogeneità semantica e alla dimensione nella quale si trovano, ossia «termini denotativi degli oggetti di studio (elementi 1D: *retta*, *segmento*, *curva*; elementi 2D: *triangolo*, *quadrato*, *parallelogramma*, *poligono*, *circonferenza*; 3D: *piramide*, *tetraedro*, *cubo*, *prisma*, *poliedro*, *sfera*)»; inseriremo alcuni nostri commenti.
I termini che riportiamo di seguito a mo' d'esempio sono *retta*, *segmento*, *poligono*.

Retta. Il primo termine di cui riportiamo la descrizione data da un'alunna di classe quarta primaria è *retta*.

E.[2]: «È una linea dritta che posso prolungare quanto voglio».

Tale descrizione è stata accolta dalla totalità degli alunni della classe ed è stata usata nelle discussioni successive. Per questo, esaminando la successione di concezioni provvisorie relativamente al concetto di *retta* proposta da D'Amore (2001), possiamo affermare che gli alunni hanno superato la concezione provvisoria di «*retta primitiva*: segmento (le sue caratteristiche sono: l'esser dritto e sottile, e la sua indipendenza nominale dalla lunghezza)» (D'Amore, 2001, p. 311) e, per un passaggio di tipo superposizione,[3] sono nella concezione provvisoria di retta euclidea, che nell'ορος V del Libro I di Elementi viene descritta come segue: «Linea retta è quella che è posta ad uguale livello rispetto ai punti su sé stessa» (Euclide, 2007, p. 779).
C'è da notare che, come afferma Frajese nel commento agli Elementi (Euclide, 1970, p. 48), «la linea retta non viene concepita da Euclide come *attualmente* infinita, ma come infinita *potenzialmente*: cioè nel senso che qualunque retta limitata [segmento] può sempre essere prolungata» (Euclide, 1970, p. 48).
Il cammino da fare per la costruzione del concetto di *retta* è lungo. Siamo quasi alla fine della scuola primaria e molto si parlerà ancora di *retta* sia nella scuola primaria sia nei successivi ordini scolastici.

Segmento. Il secondo termine di cui riportiamo la descrizione data da un alunno, anch'egli di classe quarta primaria, è *segmento*.

G.: «È una parte della linea retta: ha un inizio e ha una fine. Quando devi disegnare un segmento con il righello puoi disegnare una linea retta e poi puoi prendere due punti, uno per l'inizio del segmento e uno per la fine del segmento. Se vuoi li puoi chiamare A e B così so che cosa vuoi dire».

2. Vengono utilizzate le lettere maiuscole per indicare il nome di bambini che hanno preso parte all'esperienza.
3. «[…] superposizione: ogni concezione provvisoria aggiunge e integra la precedente cioè la comprende e le aggiunge qualcosa sovrapponendosi ad essa» (D'Amore, 2001, p. 310).

L’alunno descrive la figura presa in esame immaginando di disegnarla e descrive il disegno immaginato nel registro della lingua per permettere a chi ascolta di rappresentare mentalmente l’oggetto della matematica di cui si sta parlando.

Poligono. Un alunno di classe quarta primaria fornisce la seguente descrizione relativa al terzo termine che riportiamo come esempio: *poligono*.

F.: «È una linea spezzata chiusa che puoi disegnare con il righello. Quando lo disegni non ti devi preoccupare… disegna linee rette che si incrociano; se vuoi puoi chiamare i vertici A, B, C, e anche D, E… finché ti servono».

Anche questo alunno descrive la figura presa in esame immaginando di disegnarla e descrive il disegno immaginato nel registro della lingua per permettere a chi ascolta di rappresentare mentalmente l’oggetto della matematica di cui si sta parlando.
La descrizione intuitiva proposta da F. ci conduce direttamente a quella euclidea.
Ορος XIX: «Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, trilatere quelle da tre, quadrilatere quelle da quattro, polilatere quelle comprese da più di quattro rette» (Euclide, 2007, p. 781).
Inoltre, grazie alla sua descrizione, possiamo ipotizzare che si stia avvicinando al superamento della prima legge dell’organizzazione e del riconoscimento percettivo delle forme, che Duval (2005, p. 23, traduzione dell’autore) indica come «la priorità immediata e stabile delle unità figurative 2D rispetto alle unità figurative 1D» e àncora lo sguardo al contorno delle figure.

> «Ciò significa non solo che si vede un parallelogrammo prima di vedere quattro lati, ma anche che tutte le linee che sono percepite all’inizio come forma del contorno della superficie, rimangono, in un certo senso, inseparabili da questo riconoscimento visivo elementare. I lati di un poligono rimangono i bordi non separabili della superficie del contorno».
>
> (Duval, 2005, pp. 23–24, traduzione dell’autore)

Il mancato superamento di questa fase, quindi, àncora lo sguardo al contorno della figura e «rende inconcepibile e invisibile il processo di decostruzione dimensionale delle forme» (Duval, 2005, p. 24, traduzione dell’autore), ma la descrizione data da F. e riportata sopra ci mostra che un bambino frequentante la classe quarta della scuola primaria è avviato al suo superamento.
C’è da notare, ancora, la rassicurazione che propone a chi dovrebbe/potrebbe essere impegnato nell’operazione di costruzione della figura suggerendo di disegnare linee rette che si incrociano. Consiglia, quindi, di tracciare le linee che non appartengono alla figura da costruire: i “tracciati ausiliari” (Duval, 2005) che sono di supporto, vanno tracciati e non vanno cancellati. Troviamo lo stesso suggerimento nella descrizione del *segmento* fatta da G. quando invita chiunque volesse disegnarlo a tracciare una retta, poi a prendere due punti, gli estremi del segmento.
L’analisi di tale suggerimento ci porta ad affermare che gli alunni dimostrano di non avere quella che Duval (2005, p. 17, traduzione dell’autore) indica come la «disastrosa abitudine di cancellarli, una volta ottenuta la figura da costruire».

4.2 Che cos’è un quadrato?

A bambini di quattro-cinque anni che frequentano la stessa sezione di scuola dell’infanzia è stata posta la domanda: «Che cos’è un quadrato?».
Per rispondere alla domanda alcuni bambini hanno spontaneamente usato i gesti e il movimento per rendere visibile l’oggetto in questione.

A.: «È una forma così… [alza il dito indice a tracciare nel vuoto quattro tratti di linea consecutivi a formare la figura]».

J.: «È come quello [indica un cartellone rettangolare appeso alla parete], ma un po’ più “compatto” [pronunciando la parola “compatto” alza le mani portandole davanti al viso, le mette una di fronte all’altra e le avvicina senza farle toccare]».

D.: «È come questo [prende un pezzo a forma di cubo dalla scatola delle costruzioni e lo mostra agli altri]».

La stessa domanda è stata posta anche ad altri bambini di quattro-cinque anni e anche loro hanno scelto spontaneamente i gesti e il movimento per rappresentare l’oggetto quadrato, ma l’insegnante, per aiutare i bambini nel processo di oggettivazione, ha proposto una nuova situazione; si è rivolta loro dicendo: «Una mia amica ha sentito parlare di quadrato, non sa che cos’è e vorrebbe tanto saperlo; potete aiutarla?».
I gesti e il movimento sono stati giudicati dai bambini mezzi non idonei perché la persona a cui si stavano rivolgendo (l’amica dell’insegnante) non era presente, sono quindi passati a usare il disegno e il linguaggio.
F. propone due disegni e commenta:

F.: «Questo non è un quadrato [indica il primo disegno, Figura 3a]. Un quadrato ha 4 lati uguali come questo e ha 4 “punte” uguali [lo disegna di nuovo, Figura 3b]».

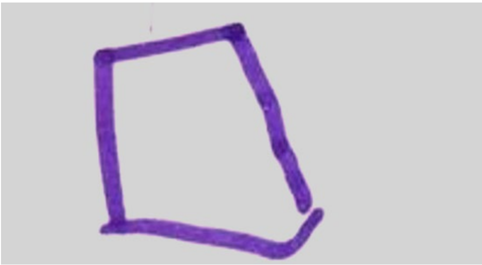


Figura 3a. Primo disegno di F.

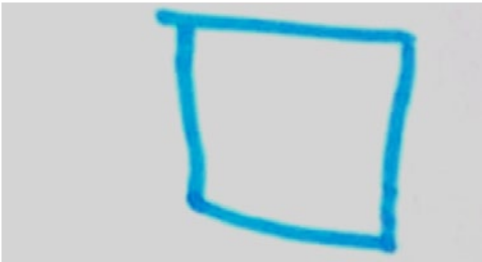


Figura 3b. Secondo disegno di F.

L.: «È un quadrato e ha 4 lati uguali [disegna quattro tratti di linea vicini, Figura 4a]. Ma questi sono diversi; allora lo disegno di nuovo» (Figura 4b).

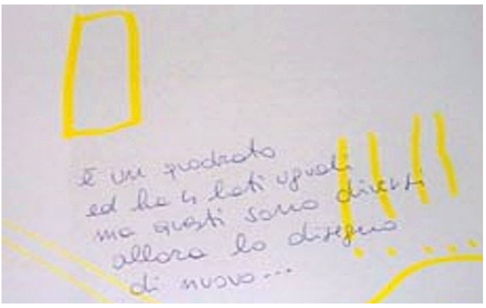


Figura 4a. Primo disegno di L.

Figura 4b. Secondo disegno di L.

P.: «Questo è un quadrato e ha 4 lati uguali e 4 angoli uguali» (Figura 5).

Figura 5. Disegno di P. in cui vengono indicati gli angoli.

R., un bambino di 4 anni, propone la sua risposta:

R. : «La tua amica non lo sa? Allora glielo spiego. Il quadrato ha quattro righine e quattro angoli uguali. Te lo disegno» (**Figura 6a**).

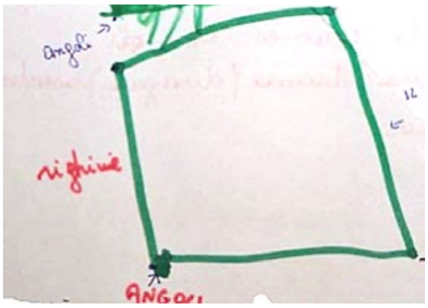


Figura 6a. Primo disegno di R. Mentre R. indica le righine e gli angoli l'insegnante scrive e indica con la freccia ciò che sta indicando il bambino.

R.: «Non è tanto bellino, vero? Le righine non sono proprio uguali. Gli angoli sono questi. Diciamo che ti faccio un quadrato, ma piccolo [disegna il "quadrato piccolo"] ecco, questo sì, è un quadrato! (Figura 6b). E questo [indica il primo disegno fatto (Figura 6a)], dì alla tua amica che un rettangolo».

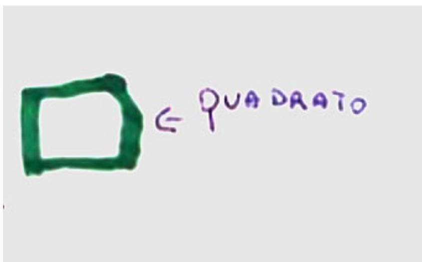
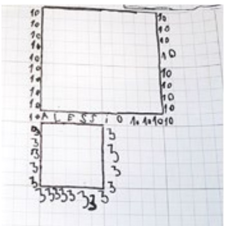


Figura 6b. Il quadrato disegnato da R.

Dalle dichiarazioni dei bambini emerge l'individuazione di alcune proprietà dell'oggetto matematico in questione, su una di queste focalizziamo l'attenzione: avere i lati della stessa lunghezza. È una proprietà del quadrato appresa in gruppi sociali diversi: la scuola, la famiglia, gli amici…, ma non appare ancora la necessità di verifica né la ricerca di strumenti idonei per farlo.

La necessità di tenere sotto controllo tale proprietà dell’oggetto geometrico *quadrato* evidenziata è emersa, nel nostro caso, in bambini dell’ultimo anno di scuola dell’infanzia, dello stesso gruppo di cui abbiamo appena riportato le dichiarazioni, perché sollecitati dall’insegnante con una nuova sfida: «Che cosa si può fare per far capire alla mia amica che i lati del quadrato sono tutti uguali?».
La soluzione scelta dai bambini è stata quella di misurare personalmente, in qualche modo, la lunghezza dei lati del quadrato (**Figure 7-10**).



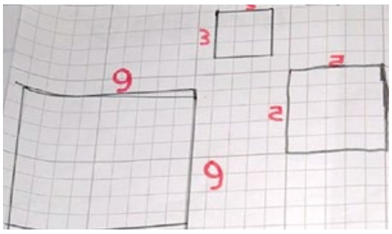


Figure 7, 8. I bambini contano i lati-quadretti del foglio usato per rappresentare il quadrato.

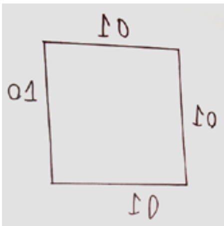


Figura 9. Il bambino chiede all’insegnante di aiutarlo a misurare i lati del quadrato e sceglie il righello come oggetto per effettuare questa misura; dopo aver misurato insieme all’insegnante, il bambino scrive il numero che corrisponde alla misura del lato.

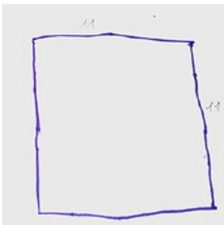


Figura 10. Il bambino segna su ogni lato del quadrato dei punti ritenendo che siano alla stessa distanza uno dall’altro, poi li conta e chiede all’insegnante di scrivere il numero che, a suo avviso, corrisponde alla lunghezza dei lati.

Misurare i lati del quadrato è stata la soluzione scelta anche dagli alunni di una classe quinta primaria a cui è stata posta la stessa domanda (**Figura 11**).

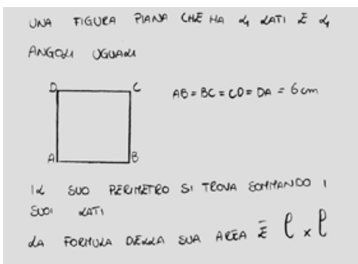


Figura 11. Risposta di un’alunna della classe quinta della scuola primaria alle domande: «Che cos’è un quadrato?», «Come si fa a capire che i lati del quadrato sono tutti uguali?».

Possiamo osservare che sia gli alunni della scuola dell’infanzia, sia gli alunni della classe quinta della scuola primaria intervistati, sono fermi al modo di vedere in geometria che, come abbiamo detto, Duval chiama *iconico*. Infatti, per gli alunni della classe quinta primaria a cui abbiamo fatto riferimento, la congruenza dei lati del quadrato non è rilevante per dedurre altre proprietà, ma solo perché conoscendone la misura è possibile misurarne il perimetro o calcolare la sua area.

4.3 Disegno di un quadrato

A bambini di cinque anni frequentanti l’ultimo anno di scuola dell’infanzia e a bambini di sei anni nei primi giorni di frequenza della classe prima primaria è stato mostrato il disegno di un quadrato costruito con riga e compasso (Figura 12) ed è stato chiesto loro che cosa vedessero.

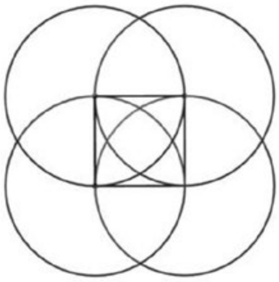


Figura 12. Disegno di un quadrato costruito con riga e compasso proposto ai bambini.

Riportiamo il confronto che ha visto protagonisti tre alunni di classe prima primaria.

M.: «C’è una stella».
A.: «Sì! È il simbolo cristallo. Vedi c’è il simbolo cristallo dentro alla forma».
G. [in risposta al commento di A.]: «È vero. È dentro al quadrato».

Dopo G., tutti i bambini hanno affermato che la forma contenente il simbolo cristallo è il quadrato; quindi, l’insegnante ha chiesto loro di colorare quello che vedevano e ha tentato di seguirli nella loro discussione che ha prodotto una storia elaborata dai bambini stessi. Si è aperto un mondo fantastico nel quale personaggi strabilianti sono in grado di fare magie con il “simbolo cristallo”. In questo mondo, descritto dai bambini, la magia più spettacolare è possibile solo se si apre il “simbolo cristallo” inserendo al centro un diamante.
L’insegnante ha preso spunto dalla storia e ha chiesto a tutti i bambini di trasformarsi in “aiuto-mago” con la necessità di risolvere un problema: «Come possiamo trovare il centro del quadrato?».

Dopo alcuni tentativi i bambini sono giunti a due soluzioni (Figura 13).

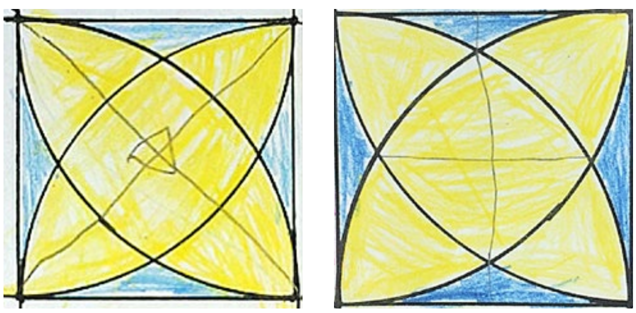


Figura 13. Le due soluzioni date dai bambini per trovare il centro del quadrato.

Fra i bambini c'è stato chi come prima soluzione ha tracciato le diagonali del quadrato, chi gli assi di simmetria, ma tutti hanno risolto il problema proponendo entrambe le soluzioni.
Una volta trovato il centro del "simbolo cristallo", i bambini hanno ritagliato il quadrato e, seguendo le linee tracciate, lo hanno scomposto in quattro triangoli, nel primo caso, e in quattro quadrati nel secondo; poi, usando le figure ottenute come pezzi di un puzzle, le hanno ricombinate in configurazioni analoghe a quella di partenza (Figura 14).

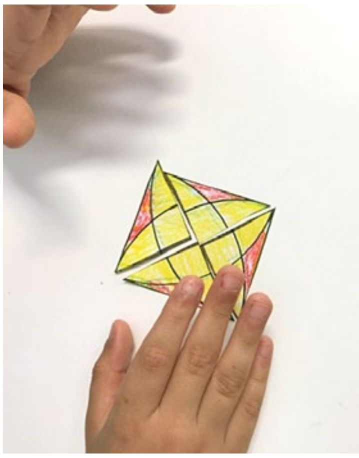


Figura 14. Esempio della prima configurazione proposta, analoga a quella di partenza.

Infine, complici i personaggi del mondo fantastico e le loro avventure, i bambini hanno ricombinato i pezzi in configurazioni diverse da quella di partenza (Figura 15).

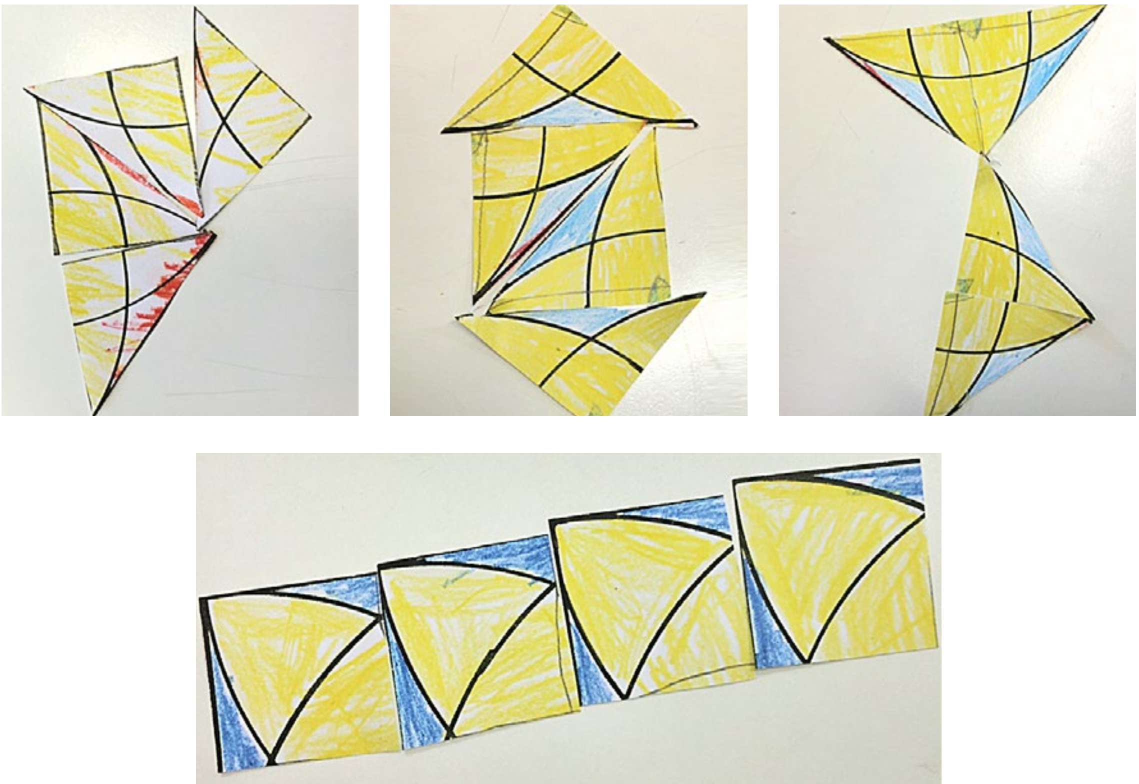


Figura 15. Alcune configurazioni realizzate dai bambini.

4.4 Descrivere e costruire un quadrato

Agli stessi bambini, frequentanti l'ultimo anno di scuola dell'infanzia e la classe prima primaria (si veda il par. 4.3), e a bambini di classe seconda della scuola primaria è stato proposto di osservare e descrivere il quadrato costruito sovrapponendo opportunamente 4 fogli di carta da lucido in ognuno dei quali era stata disegnata una circonferenza di stesso raggio (Figura 16).

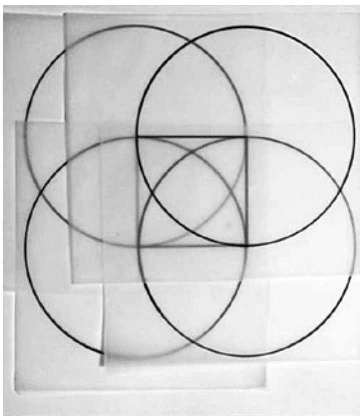


Figura 16. Costruzione del quadrato con i 4 fogli di carta da lucido sovrapposti.

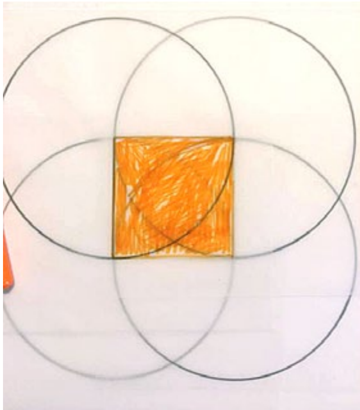


Figura 17. Quadrato colorato da un bambino di 6 anni.

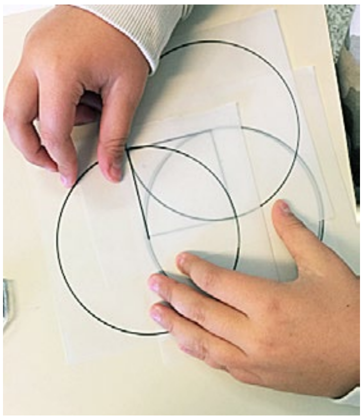


Figura 18. Costruzione del quadrato da parte di un bambino di classe 2ª primaria.

Alcuni bambini di cinque-sei anni hanno posizionato un nuovo foglio di carta da lucido sopra la costruzione e hanno colorato il quadrato (Figura 17). La stessa strategia per individuare il quadrato è stata trovata da alcuni bambini di classe seconda primaria.
Hanno poi smontato la costruzione e l'hanno rimontata diverse volte (Figura 18).
Inizialmente non è stato semplice ricostruire il quadrato. Per risolvere i problemi di costruzione, alcuni bambini hanno preso il foglio di carta da lucido usato per colorare il quadrato e l'hanno usato come base su cui posizionare correttamente le 4 circonferenze, poi lo hanno tolto, giungendo a una conclusione: «Per fare un quadrato i cerchi non li puoi mettere come ti pare, li devi mettere con i lati "a quadrato"».
Lato, *quadrato*, *angolo*, *cerchio* sono termini che i bambini hanno usato in modo spontaneo sin dalle prime descrizioni condivise.

4.5 I lati del quadrato sono uguali: verifica

In una classe prima della scuola primaria l'insegnante ha chiesto di disegnare un quadrato verificando l'uguaglianza dei lati.

R.: «Per disegnare un quadrato posso fare con le mani» (Figura 19).

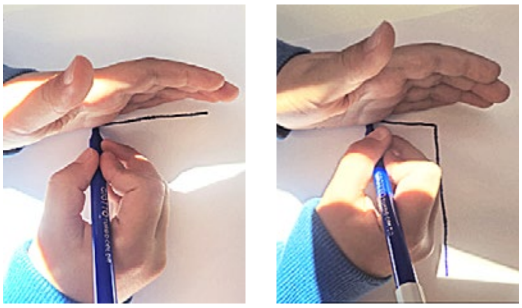


Figura 19. Il bambino, usando la mano sinistra come riga, traccia due "lati".

R.: «Però così non so se i lati sono uguali. Per saperlo devo fare in un modo che so io».

L'insegnante chiede spiegazioni e il bambino, con la mano sinistra aperta a mo' di compasso, punta il pollice su un'estremità del segmento disegnato e l'indice sull'altra estremità, poi muove la mano tracciando una circonferenza con il dito indice (**Figura 20**) e dichiara: «È così, a modo mio. Però non è proprio giusto, perché la mano un po' si muove e non va più bene. Io non riesco a farla stare proprio ferma e non so se sono lunghi uguale».

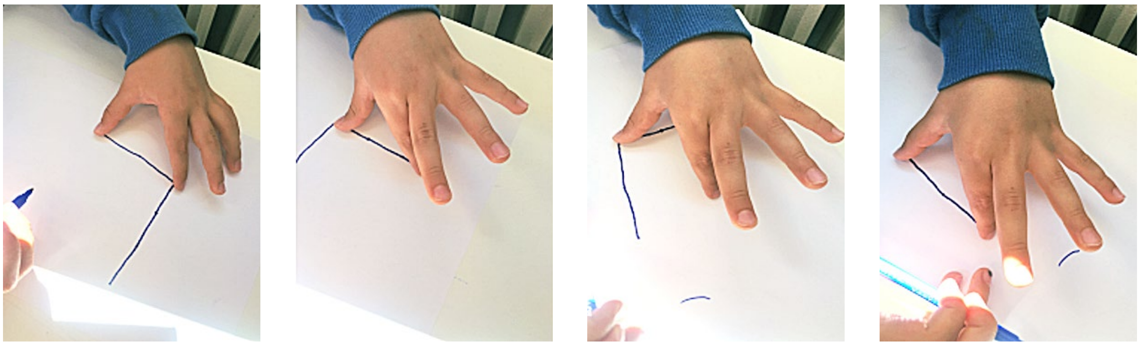


Figura 20. Immagini, in sequenza, del movimento che il bambino fa compiere alla mano mentre verifica l'uguaglianza dei "lati" disegnati.

L'insegnante propone un compasso per scultura spiegando come funziona e lui: «Ecco! Mi serve questo qui!».
Usa il compasso per verificare l'uguaglianza dei due segmenti (**Figura 21**) e conclude: «Ecco! Non sono uguali. Ora ne sono sicuro».

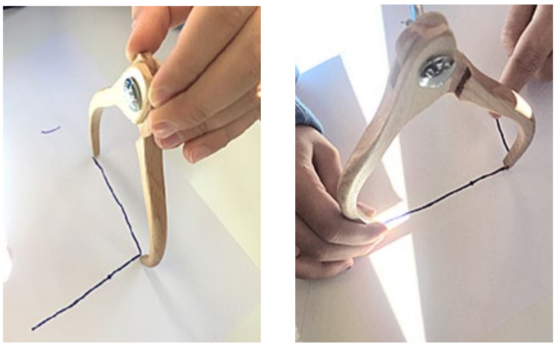


Figura 21. Indagini, in sequenza, del movimento che il bambino fa compiere al compasso.

I pennarelli, il compasso da scultura, i fogli di carta da lucido «sono artefatti che mediano il pensiero. Non sono solo aiuti: il loro ruolo di mediazione è tale da orientare e materializzare il pensiero e, in tal modo, diventare parte integrante di esso» (Radford, 2008, p. 219, traduzione dell'autore).

4.6 Triangolo equilatero e rombo

Riportiamo due discussioni interessanti avvenute in una classe quarta primaria relativamente alla costruzione del triangolo equilatero con riga e compasso. Il primo momento di discussione verte sul triangolo equilatero e ha coinvolto l'intera classe in seguito alla costruzione riprodotta. Il secondo momento di discussione, invece, si è svolto con un allievo che era stato assente durante la prima discussione e si è focalizzata, a partire dalla costruzione e dalle sue proposte, sul rombo.

4.6.1 Il triangolo equilatero

La costruzione del triangolo equilatero con riga e compasso è stata riprodotta sulla lavagna dall'insegnante con Cabri-Géomètre seguendo le istruzioni contenute in Asenova (2018) e riadattate: sono state proposte in forma orale e comunicate una dopo l'altra alla classe mentre veniva fatta la costruzione.

Gli alunni erano liberi di intervenire in qualsiasi momento e di porre domande.

Proponiamo, di seguito, la successione delle operazioni di costruzione fatte sulla lavagna così come è stata vista dagli alunni e alcune domande poste dagli alunni stessi durante il lavoro di costruzione.

Ins.: «Prendiamo due punti A e B a piacere [gli alunni hanno scelto i punti da prendere] e disegniamo il segmento AB» (Figura 22).

Figura 22. Punti A e B scelti dai bambini e segmento AB.

Ins.: «Disegniamo la circonferenza con centro in A e raggio AB, poi la circonferenza con centro in B e raggio BA» (Figura 23).

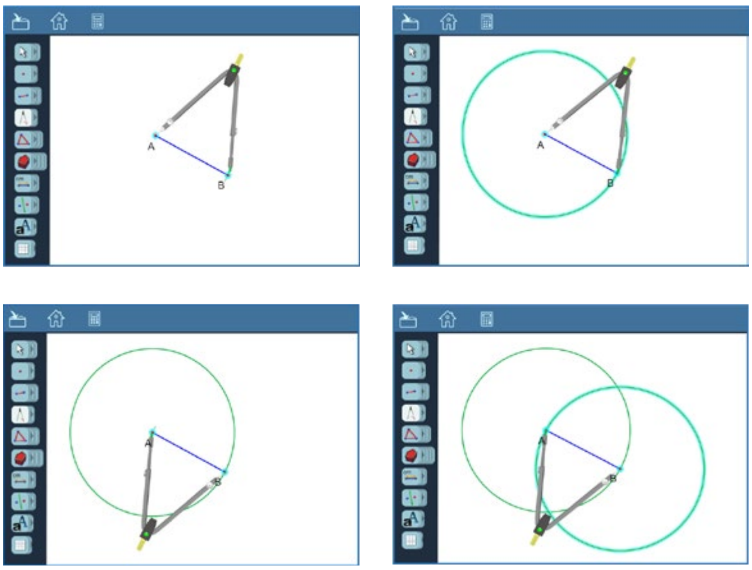


Figura 23. Disegno della circonferenza con centro in A e raggio AB e della circonferenza con centro in B e raggio BA.

Ins.: «Chiamiamo C uno dei due punti di intersezione delle due circonferenze» (**Figura 24**).
Ins.: «Disegniamo i segmenti AC e CB» (**Figura 25**).

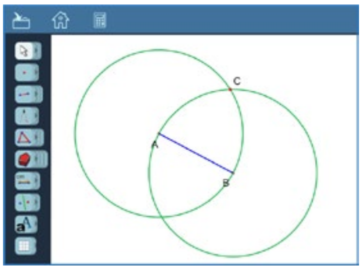


Figura 24. Individuazione del punto C.

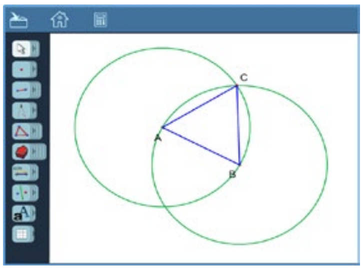


Figura 25. Disegno del segmento AC e del segmento CB.

Al termine della costruzione, gli alunni hanno chiesto: «Che cosa vuol dire *punto di intersezione*?» e l'insegnante ha proposto loro di dare una risposta a questa stessa domanda, descrivendo ciò che vedevano sulla lavagna. Riportiamo la descrizione data da F., descrizione che è stata accolta da tutti gli altri alunni.

F.: «È il punto dove si incontrano le due circonferenze. È il punto dove c'è la circonferenza uno e dove c'è anche la circonferenza due. È un punto, ma ci sono due circonferenze. È come il punto dove si incontrano due rette quando sono perpendicolari; anche lì c'è solo un punto, ma ci sono due rette».

Successivamente, gli alunni hanno posto un'altra domanda: «Che cosa significa *raggio*?». Tale domanda ha dato l'avvio a una discussione in classe trascritta fedelmente e riportata di seguito.
Anche in questo caso l'insegnante non ha fornito una risposta e, dopo aver posto agli alunni la stessa domanda, ha lasciato loro piena libertà di discussione, intervenendo solo nel momento finale.

Ins.: «Ditemi voi. Secondo voi che cosa significa *raggio*?».
A.: «Tu dici *raggio*, ma è un segmento».
B.: «Non è vero che è un segmento. È una linea. Il segmento è un'altra cosa. Qui non c'è nessuna retta».
A.: «Non c'è nessuna retta disegnata, ma se tu la immagini vedi una retta e quello è un segmento perché tu immagini una retta e prendi due punti della retta e quelli sono A e B e allora quello è un segmento».
B.: «Ma quale retta? Non ci sono rette».
A.: «Te la devi immaginare».
C.: «Se tu prolunghi da A per dritto e se tu prolunghi da B per dritto vedi il disegno che facevamo l'anno scorso. Te lo ricordi?».
B.: «Se è un segmento, perché lo chiama *raggio*?».
A.: «Per non confondersi».
D.: «È come con l'altezza che è un segmento, ma lo chiamiamo *altezza*».
C.: «Ma questo è un'altezza?».
B.: «Sarà l'altezza del cerchio».
D.: «Di quale cerchio? Ce ne sono due».
C.: «Di tutti e due. È la stessa apertura del compasso».
A.: «Possiamo farne altre [altezze]? Possiamo scrivere D sull'altro punto dove si incontrano le due linee dei cerchi e unire D con A e D con B. Possiamo farlo, così disegniamo un triangolo uguale a quello di prima».

A.: [disegna i segmenti AD e BD sulla lavagna interattiva] (**Figura 26**).
B.: «Allora possiamo unire anche C con D».
A.: «Perché? Non è un segmento come gli altri perché non è della stessa apertura del compasso».
B.: «Allora no!».
A.: «Possiamo disegnarlo lo stesso, ma sappiamo che non è la stessa apertura [mentre parla A. disegna sulla lavagna interattiva il segmento CD, **Figura 27**]».

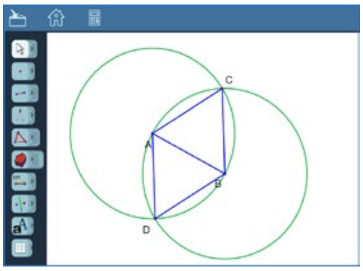


Figura 26. Disegno fatto sulla lavagna da A.

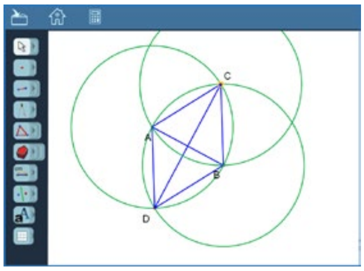


Figura 27. Disegno del segmento CD fatto sulla lavagna interattiva da A.

Eseguire la costruzione del triangolo equilatero sulla lavagna nel modo descritto ha portato a riflessioni su alcuni termini non conosciuti dagli alunni ma necessari per descrivere oralmente gli oggetti geometrici che venivano visualizzati nella successione delle operazioni di costruzione. La scelta fatta dall'insegnante è stata quella di non dare definizioni, ma di accogliere le descrizioni fatte dagli alunni stessi, descrizioni che evidenziano che la costruzione e l'arricchimento del vocabolario tecnico sono basilari per la decostruzione dimensionale delle figure e, allo stesso tempo, la decostruzione dimensionale delle figure è possibile grazie all'acquisizione di un vocabolario tecnico adeguato a descrivere gli oggetti geometrici.
Il lavoro costante di costruzione del vocabolario tecnico unito al lavoro di decostruzione dimensionale delle figure ha offerto agli alunni la possibilità di dare un significato condiviso a termini non noti e di risolvere problemi che man mano emergevano dalle loro osservazioni durante la discussione in classe.
Dopo qualche giorno, è stato chiesto agli alunni di costruire un triangolo equilatero con riga e compasso e, per ricordare i vari momenti della costruzione, è stato consegnato agli alunni il testo con le istruzioni utilizzate dall'insegnante per la costruzione del triangolo equilatero fatta sulla lavagna interattiva.
Durante il lavoro in classe F. ha dichiarato di non poter costruire il triangolo equilatero per uno scambio di compassi, argomentando sull'impossibilità di costruire il triangolo come richiesto.

F.: «Non posso costruire il triangolo equilatero perché io ho disegnato i punti A e B e ho disegnato il segmento AB, poi ho aperto il compasso come c'è scritto e ho disegnato la circonferenza. Poi ho prestato il compasso a S. e quando dovevo disegnare l'altra circonferenza S. non aveva finito, allora mi ha prestato il compasso E., io ho disegnato la circonferenza, però… guarda!» (**Figura 28**).

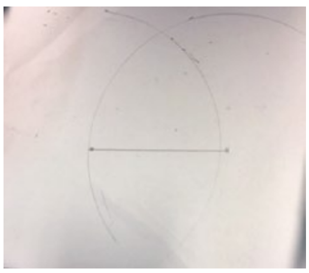


Figura 28. Costruzione di F.

F.: «Si può disegnare un triangolo, ma non è equilatero perché il compasso di E. aveva un'apertura diversa e questo triangolo non è equilatero».

F. cerca una soluzione al suo problema e per dichiarare che non sta disegnando un triangolo equilatero punta l'attenzione sull'apertura del compasso. Non usa il termine *raggio* perché non fa parte del suo vocabolario tecnico, ancora in costruzione, ma le sue parole ci portano a osservare che vede i lati del triangolo come i raggi di due circonferenze aventi lo stesso raggio i cui centri sono coincidenti con gli estremi del segmento che ha disegnato all'inizio della costruzione.
La soluzione finale scelta da F. è stata quella di ricominciare la costruzione dall'inizio, ma la situazione che si era creata è stata usata per risolvere problemi nuovi: «Se si cambia l'apertura del compasso dopo aver tracciato il segmento, è possibile costruire un triangolo? Come sarà questo triangolo?».

4.6.2 Il rombo

Con G., un alunno assente il giorno della costruzione sulla lavagna, il lavoro è stato impostato in modo un po' diverso. Dopo aver ripercorso le istruzioni e la costruzione, l'insegnante ha colto l'occasione per chiedergli di osservare il disegno con il quale si era conclusa la discussione finale alla quale G. non aveva partecipato (Figura 29).

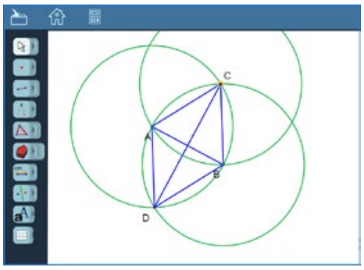


Figura 29. Costruzione fatta sulla lavagna interattiva e proposta a G.

Ins.: «Che cosa vedi?».
G.: «La figura disegnata alla lavagna è un rombo. Perché si vede che è un rombo».
Ins.: «Non capisco che cosa vuoi dire. "Si vede che è un rombo", che cosa significa? Perché è un rombo? Fammi capire».
G.: «È un rombo perché è un quadrilatero con le diagonali perpendicolari che si dividono a metà».
Ins.: «I lati sono uguali?».
G.: «Sì!».
Ins.: «Come puoi esserne sicuro?».
G.: «Il segmento AC e il segmento AD sono della stessa lunghezza perché sono stati disegnati con la stessa apertura del compasso perché i punti A, C e D stanno sullo stesso cerchio. Anche i segmenti DB e BC sono della stessa lunghezza perché sono stati segnati con la stessa apertura del compasso perché i punti B, C e D stanno sullo stesso cerchio. Poi, i segmenti AC e BD sono uguali perché non è stata modificata l'apertura del compasso per fare i due cerchi perché i punti C e D stanno in tutti e due i cerchi».

Per poter spiegare all'insegnante che il quadrilatero che lui vede disegnato sulla lavagna interattiva (Figura 29) è un rombo, G. non tenta di misurare i lati e non si riferisce a una figura o a un oggetto della realtà al quale può assomigliare, non si basa, cioè, sugli aspetti metrici o topologici della figura che sta osservando, ma la descrive focalizzando lo sguardo sulle proprietà della figura.
G. è di fronte alla lavagna e mentre descrive la figura muove la mano sopra la figura toccando man

mano gli oggetti di cui parla. Descrive i lati mettendone in relazione due alla volta: sia la prima, sia la seconda coppia di lati vengono descritte come i raggi di una circonferenza il cui centro coincide con uno dei tre punti presi in esame. Inizia descrivendo i segmenti AC e AD: mentre parla appoggia il pollice della mano destra sopra il punto A indicandolo come centro della circonferenza, poi allunga l'indice inizialmente verso il punto C e, in un secondo momento, verso il punto D. Propone la stessa descrizione per i segmenti BC e BD: appoggia il pollice della mano destra sopra il punto B che indica come centro della circonferenza, allunga l'indice verso il punto C e, in un secondo momento, verso il punto D.
Successivamente analizza i segmenti AC e BD poiché li visualizza come coppia di raggi non appartenente alla stessa circonferenza e ne dichiara la congruenza: afferma che i punti C e D sono punti della stessa circonferenza e appoggia il pollice sopra il punto A indicandolo come centro della circonferenza e conclude affermando che, per questo, i lati sono uguali.
Come F., G. non usa il termine *raggio*, ma *apertura del compasso*, ma come F. nel descrivere la figura geometrica che sta analizzando, focalizza lo sguardo sulle sue proprietà geometriche e non sui suoi aspetti metrici o topologici, utilizzando un modo di vedere *non iconico* in geometria.

5 Conclusioni

Il lavoro descritto ha preso l'avvio dalla necessità di conoscere le rappresentazioni di oggetti della geometria scelte e usate spontaneamente dai bambini per poter basare su queste le successive proposte di esperienze didattiche necessarie per favorire la visualizzazione e il passaggio dal modo di vedere *iconico* al modo di vedere *non iconico* richiesto in geometria.
Le risposte date dagli alunni hanno mostrato che proporre esperienze didattiche che allontanano lo sguardo dagli aspetti metrici e topologici delle figure e lo focalizzano sulle loro proprietà geometriche rende possibile superare la visualizzazione iconica e rende possibile avviare gli alunni di giovane età a adottare il modo di vedere *non iconico* richiesto in geometria. Grazie alle risposte date dagli alunni possiamo affermare, in linea con l'inquadramento teorico presentato, che senza un lavoro di decostruzione dimensionale delle figure in unità figurali di dimensione inferiore, di descrizioni delle figure, di costruzione e arricchimento del vocabolario tecnico necessario per descriverle, di costruzione delle figure con riga e compasso questo non sarebbe stato possibile.
Viene da ipotizzare l'importanza di rendere questo tipo di esperienze costanti nel tempo, al fine di rendere naturale per i bambini, anche di giovane età, il ricorrere alla coppia di artefatti riga-compasso per disegnare oggetti della geometria (nei nostri esempi: quadrato, triangolo equilatero e rombo) e al vocabolario tecnico costruito, ampliato e arricchito nel tempo per descriverli.
Concludiamo dicendo che le competenze costruite dai bambini attraverso le attività proposte, e qui descritte in parte, hanno portato i bambini a discutere di oggetti della geometria con un linguaggio ricco di termini sempre più vicini al *senso teorico* che gli adulti (matematici) hanno assegnato loro nel corso di un lungo processo storico che ha consegnato a noi l'oggetto e il senso.

Bibliografia

Asenova, M. (2018). Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 173–210.

Asenova, M., D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell’oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 7–61.

Asenova, M., & Marazzani, I. (2020). Discussioni fra alunni della scuola primaria sul concetto di altezza di un poligono. In B. D’Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace.* Atti del Convegno Incontri con la matematica XXXIV, 6-8 novembre 2020, Castel San Pietro Terme (Bo) (pp. 43–44). Pitagora.

Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs en mathématiques dans l’enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie*, *101*(3–4), 107–131.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l’activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l’Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Pitagora.

D’Amore, B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001.* Pitagora.

D’Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività della classe intesa come società. *La matematica e la sua didattica*, *19*(3), 325–336.

D’Amore, B. (2020). *Matematica: didattica, storia, epistemologia e arte.* Pitagora.

D’Amore, B. (2021). Riflessioni sull’apprendimento della Matematica nella Scuola dell’Infanzia ... e anche prima. *Bambini*, *37*(5), 28–33.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Marazzani, I. (2021). *Attività e giochi con la geometria per la scuola primaria.* Pitagora.

D’Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punto di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco.* Vol. I. Edizioni Dedalo.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2018). Per l’educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 211–245.

Euclide. (1970). *Elementi.* A cura di A. Frajese & L. Maccioni. UTET.

Euclide. (2007). *Tutte le opere.* A cura di F. Acerbi. Bompiani.

Fandiño Pinilla, M. I., & D’Amore, B. (2020). *Geometria. Storia, epistemologia e didattica per la scuola di base.* Pitagora.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 191–213.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 215–234). Sense Publishers.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 547–567.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 117 - 128, DOI: 10.33683/ddm.22.12.6
OPEN ACCESS

Storia di una ricerca

History of a research

Domingo Paola•, Riccardo Franchi•• e Lorenzo Ravera••
•Liceo Statale "G. Bruno" di Albenga – Italia
••studente del Liceo Statale "G. Bruno" di Albenga – Italia

domingo.paola56@gmail.com, richi.franchi2004@gmail.com, lorenzoravera187@gmail.com

Sunto / L'attività didattica descritta ha avuto origine da un classico problema di calcolo combinatorio e probabilità che si sono posti due studenti di una quinta liceo scientifico, che sono anche due degli autori di questo articolo. Si descrivono i primi tentativi di risoluzione, l'uso della simulazione al computer per cercare di ottenere informazioni sulla soluzione, due diversi approcci per la ricerca di regolarità che aiutassero a risolvere il problema, la ricerca di conoscenze matematiche che aiutassero a dare un senso ai risultati delle simulazioni, il tentativo di spiegare alle compagne e ai compagni tutto il lungo e articolato processo di approccio al problema, che si configura come una vera e propria attività di ricerca.

Parole chiave: calcolo combinatorio; giustificazione; problem posing; problem solving; simulazione.

Abstract / The didactic activity described originated from a classic combinatorial and probabilistic problem that two fifth-year students of a scientific high secondary school, who are also two of the authors of this article, happened to deal with.
This paper describes the first attempts to solve the problem, as well as the use of computer simulation to try to get some information about the solution. Furthermore, it presents also two different approaches to the search for patterns that would help to solve the problem and the search for mathematical knowledge that would help to give meaning to the results provided by the simulation. The attempt to explain the other classmates the long and complex process of addressing the problem, which appears to be a real research activity, is also explained.

Keywords: combinatorial calculus; justification; problem posing; problem solving; simulation.

1 Introduzione

Quella che viene descritta in questo articolo si configura a pieno titolo come attività di problem posing e di problem solving, relativa a un problema classico del calcolo combinatorio, noto come *problema delle concordanze o dei punti fissi*. Per una sua trattazione si veda, per esempio, il testo di Baclawski et al. (1990, Capitolo 5). Due sono i principali motivi di interesse dell'attività che, sebbene riguardi un problema classico, è in ogni caso non usuale rispetto ai problemi in genere affrontati in classe:

– l'attività è nata da alcune domande che si sono autonomamente posti due studenti di una quinta liceo scientifico,[1] Lorenzo e Riccardo, che sono anche due tra gli autori di questo articolo e che erano del tutto ignari sia della formulazione, sia, a maggior ragione, della risoluzione del problema dei punti fissi;
– la motivazione a risolvere questo problema ha portato i due studenti a una vera e propria attività di ricerca matematica, che hanno poi voluto esporre alle compagne e ai compagni di classe: ciò ha consentito loro di avviare una riflessione assai interessante sui punti di forza delle strategie risolutive attivate e anche sul ruolo della scoperta e della giustificazione in matematica.

Le attività di problem solving e problem posing sono considerate centrali, già da alcune decadi, nei curricoli scolastici di diversi Paesi. Come precisa Silver (2013), negli USA, per esempio, i *Principles and Standards for School Mathematics*, pubblicati nel 2000 dal National Council of Teachers of Mathematics, affermano che il curricolo scolastico dovrebbe offrire occasioni agli studenti per formulare problemi interessanti e coinvolgenti, basati su varie situazioni che favoriscano attività di produzione di congetture e successiva validazione. Sempre Silver (2013) porta come ulteriore esempio il *National Statement on Mathematics for Australians Schools*, pubblicato nel 1991 dall'Australian Education Council, in cui si afferma che gli studenti dovrebbero essere impegnati in attività matematiche che incoraggino il problem posing, il pensiero divergente, la riflessione consapevole e critica sulle proprie conoscenze e sulle strategie intraprese per risolvere problemi. Anche in Italia l'attenzione verso il problem posing e il problem solving sta crescendo: ne sono testimonianza alcuni passi delle indicazioni nazionali curricolari dei vari livelli scolari, ma anche il progetto PP&S del MIUR[2] che ha fra i suoi proponenti l'AICA, il CNR, Confindustria, il Politecnico e l'Università di Torino.

2 Il problema e il primo approccio risolutivo

Una mattina, nella nostra classe formata da 28 studenti, si doveva stabilire l'ordine delle interrogazioni programmate per il mese successivo. Per evitare lunghe discussioni, si è deciso di stabilire l'ordine con un'estrazione casuale, senza rimpiazzo, simulata mediante un foglio di calcolo: ottenuto il risultato, ci siamo accorti che il decimo studente che avrebbe dovuto essere interrogato era proprio lo studente che si trovava nella decima posizione dell'elenco del registro di classe.

Ci siamo chiesti allora quale fosse la probabilità di questo evento, cioè che il decimo studente dell'elenco fosse il decimo a essere interrogato; la risposta è sembrata relativamente semplice: immaginiamo di estrarre, a partire dal primo studente dell'elenco, successivamente e senza rimpiazzo, bigliettini numerati da 1 a 28 per stabilire l'ordine degli interrogati. Se vogliamo che il decimo studente dell'elenco estragga il numero 10, i primi nove studenti possono estrarre qualunque numero tranne il 10

1. In Italia, il liceo scientifico è una scuola secondaria di secondo grado; quest'ultima dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e agli anni di scuola media superiore o scuole professionali nel Cantone Ticino.
2. https://miur.gov.it/progetto-pp-s

e il decimo studente deve estrarre il numero 10. Questa successione di eventi, poiché le estrazioni avvengono senza rimpiazzo, ha probabilità $\frac{27}{28} \cdot \frac{26}{27} \cdot \frac{25}{26} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{21}{22} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{28}$.
Molto più interessante porsi un problema maggiormente sfidante: qual è la probabilità che, considerato un elenco ordinato di numeri da 1 a 28, dopo averli mischiati a caso, si ottenga un nuovo elenco in cui sia presente almeno un numero nella stessa posizione dell'elenco iniziale?
Il problema può essere riformulato chiedendosi qual è la probabilità che, estraendo a caso fra tutte le permutazioni di 28 oggetti, se ne ottenga una che lasci fisso almeno uno degli oggetti.
Per esempio, nell'elenco di 5 numeri, 1, 2, 3, 4, 5, una permutazione che fa parte dei *casi favorevoli* è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, perché lascia inalterati il primo e il terzo numero, mentre non lo è la permutazione $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ che modifica la posizione di tutti i numeri.
Il problema è sembrato subito molto complesso per poter essere affrontato utilizzando le tecniche di calcolo combinatorio trattate in classe, che riguardavano essenzialmente il calcolo delle permutazioni di n elementi, quello delle disposizioni semplici e con ripetizione di classe k e quello delle combinazioni semplici di classe k. Per questo motivo abbiamo pensato a un primo approccio risolutivo fondato sulla simulazione. Perché, ci siamo chiesti, non provare ad avere una risposta e poi, eventualmente, provare a spiegare il *perché* della risposta fornita dalla simulazione? In fondo si tratta di un procedimento che caratterizza certi momenti delle scienze sperimentali: quando possibile, si esegue un esperimento e si cerca poi di comprendere il *perché* del risultato dell'esperimento. La simulazione consente, talvolta, di operare in questo modo anche in matematica.
Uno di noi, Lorenzo, avendo un po' di esperienza con la programmazione in Python, ha scritto il seguente programma:

```python
from random import shuffle
n = int(input("Quanti numeri? "))
m = int(input("Quanti tentativi? "))
sum = 0
list_r = []
for l in range(n):
   list_r.append(l)
for i in range(m):
   shuffle(list_r)
   for k in range(n):
       if k == list_r[k]:
           sum += 1
           break
print("La probabilità empirica è all'incirca di " + str(sum/m))
```

Il programma si basa sull'idea di ripetere diverse volte il seguente esperimento:
– creare una lista di numeri;
– permutarla casualmente;
– verificare se la permutazione mantiene almeno un elemento fisso.

Al termine di un congruo numero di esperimenti, si esegue il rapporto fra il numero delle permutazioni che mantengono almeno un elemento fisso (*casi favorevoli*) e il numero totale delle permutazioni (*casi possibili*).
All'aumentare del numero di ripetizioni dell'esperimento ci si attende, in media, una stima sempre migliore della probabilità dell'evento.
Le prime istruzioni del programma permettono all'utente di inserire il numero n di elementi da permutare e il numero m di esperimenti da realizzare. Il primo ciclo *for* consente di creare la lista di n elementi; il comando *shuffle* consente di realizzare le permutazioni degli elementi della lista. In seguito,

si controlla se vi è almeno un elemento della lista permutata che è nella stessa posizione della lista originaria; in caso positivo si aggiorna il contatore *sum*, in caso negativo, si procede con l'esperimento fino a raggiungere il valore *m* assegnato dall'utente. Alla fine, il programma esegue il rapporto $\frac{sum}{m}$ che dà, in media e al crescere di *m*, una stima della probabilità dell'evento considerato.
Si osservi che il comando *break* è utile per evitare che una permutazione, che lascia più elementi fissi, venga contata più volte: il comando, infatti, blocca la ricerca di elementi della lista permutata che si trovano nella stessa posizione della lista originaria non appena ne sia stato trovato uno.
All'aumentare del numero *m* degli esperimenti e del numero *n* degli elementi della lista il programma fornisce un numero che tende, in media, a stabilizzarsi su 0,63.
Questo è il risultato dell'esperimento, ma come essere sicuri che le cose stiano proprio in questi termini e che all'aumentare di *n* la convergenza si mantenga? Ma, soprattutto, se le cose stanno così, *perché* stanno così?
Come suggerisce Impedovo (2005), da un numero fornito da una simulazione si può essere motivati a cercare di capire perché la simulazione fornisca proprio quel risultato e arrivare, gradualmente, a considerazioni teoriche che gli studenti possono intuire e scoprire anche da soli.
Si osservi che la proposta del problema è del tutto autonoma e non è legata ad attività esplicitamente attinenti al percorso scolastico; sembra, invece, più vicina alle attività di carattere ludico e, comunque, motivate dalla ricerca di questioni sfidanti, che impegnino nella ricerca di una soluzione che non si vede immediatamente.
Uno degli obiettivi di questo articolo è anche quello di mostrare come sia possibile, in classe, cogliere spunti spontaneamente suggeriti dagli studenti per favorire attività di ricerca autonoma da parte degli studenti stessi. Naturalmente, soprattutto quando il problema è di elevata difficoltà e complessità, il coinvolgimento attivo degli altri studenti non è un obiettivo facilmente conseguibile; però, e non è poco, un'attività di questo tipo mostra che anche gli studenti possono condurre attività di risoluzione di problemi e costruzione di conoscenze matematiche indipendentemente da indicazioni specifiche del docente. È bene precisare che, nell'affrontare il problema descritto in questo articolo, i due studenti hanno lavorato del tutto autonomamente, sia in fase di proposta, sia in fase di risoluzione del problema. Anche la descrizione alle compagne e ai compagni di classe del problema che Lorenzo e Riccardo si erano posti, delle strategie risolutive messe in atto per affrontarlo e della soluzione ottenuta è stata condotta in modo del tutto autonomo: il docente si è limitato ad assecondare la loro richiesta di presentare alla classe il problema, invitandoli, però, a non limitarsi a presentare la soluzione, ma a descrivere in dettaglio tutto il processo risolutivo.

3 Inizia la ricerca: i primi approcci strutturati per capire *perché* è così

La ricerca delle ragioni che verifichino la correttezza della soluzione fornita dall'esperimento e ne spieghino i motivi non può essere condotta senza modalità di conteggio organizzate, perché il problema è complesso. Può, intanto, essere di aiuto una riformulazione del problema, suggerita dalla considerazione che, in casi come questi, è in genere più semplice calcolare la probabilità dell'evento contrario. Si tratta di una strategia che era stata utilizzata più volte nella risoluzione di problemi di probabilità proposti in classe, come, per esempio, il classico problema dei compleanni.
Quindi, è meglio chiedersi qual è la probabilità *p* che, estraendo a caso una permutazione dall'insieme delle permutazioni di 28 oggetti, se ne ottenga una che non lasci fisso alcun elemento e poi calcolare $1 - p$. La riformulazione del testo è uno dei suggerimenti che Polya (1945/2016) dà per elaborare un buon piano di risoluzione di un problema.
Se si pensa all'approccio alla probabilità come rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi

possibili (in questo caso i casi possibili sono equiprobabili), appare chiaro che la difficoltà del problema consiste nel conteggio dei casi favorevoli: è infatti immediato affermare che il numero di quelli possibili è 28!, che ha, come ordine di grandezza, 10^{29}. Tra l'altro, appare altresì chiaro che ragionare su permutazioni di 28 oggetti o, più in generale, su permutazioni di n oggetti non comporta grandi cambiamenti o semplificazioni. Anzi, forse il passaggio al caso generale aiuta a liberarsi da quello che si potrebbe chiamare il "labirinto del concreto" e a cercare tecniche di conteggio efficaci, magari di carattere ricorsivo. Questa osservazione porta a una seconda riformulazione del testo del problema: qual è la probabilità che, estraendo a caso una permutazione fra l'insieme delle permutazioni di n oggetti, se ne trovi una che non lascia fisso alcun oggetto?
Ora il testo del problema sembra formulato in modo abbastanza chiaro per avviare le prime vere e proprie strategie risolutive.
Stabilito che si tratta di individuare strategie efficaci ed efficienti di conteggio per il numero dei casi favorevoli, può essere conveniente ritornare a considerare casi particolari, con piccoli numeri, gestibili, ma con l'obiettivo ormai chiaro che è necessario individuare regolarità che suggeriscano come utilizzare il conteggio relativo al caso di k oggetti, per risolvere il problema di contare nel caso in cui gli oggetti diventino $k + 1$.
Vengono qui presentate due strategie, una utilizzata da Riccardo e l'altra utilizzata, indipendentemente, da Lorenzo. In entrambi i casi viene subito dato un nome alle permutazioni che non lasciano fisso alcun elemento: *dismutazioni* (*derangements*, in inglese).
In realtà, solo molto tempo dopo la proposta del problema gli studenti hanno saputo che queste permutazioni sono chiamate dismutazioni e, come prima si è già accennato, che il problema che avevano affrontato e risolto è un classico problema di calcolo combinatorio. Attribuire un nome agli oggetti di un discorso è, però, di grande aiuto per articolare in modo più chiaro e comprensibile il discorso e quindi verrà già utilizzato nella descrizione delle strategie risolutive messe in atto da Riccardo e Lorenzo.
Nel prosieguo, inoltre, si indicano con a_1, a_2, a_3, a_4, …, a_n gli elementi su cui agiscono le permutazioni, mentre 1, 2, 3, 4, …, n indicano le posizioni, dalla prima all'n-esima.
Infine, con lo stesso simbolo D_n, si indica sia una dismutazione di n elementi, sia il numero delle dismutazioni di n elementi.
Un'avvertenza, per meglio comprendere i due paragrafi successivi: la ricerca di strategie risolutive di un problema complesso è spesso un processo tortuoso, sicuramente non lineare.
Nei due paragrafi seguenti si è cercato di dare un'idea, più che della soluzione del problema, dei processi risolutivi messi in atto da Riccardo e Lorenzo. Il lettore che dovesse ritenere non del tutto chiari certi passaggi, potrebbe giovarsi della scelta di passare prima alla lettura del par. 3.3 relativo alla dimostrazione della formula ricorsiva e poi ritornare alle strategie risolutive attuate dai due studenti.

3.1 La strategia di Riccardo

Per $n = 2$ si ha una sola dismutazione: $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

Per $n = 3$ si hanno due dismutazioni $D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$, che si possono rappresentare, più sinteticamente, con la Tabella 1.

1	**2**	**3**
a_2	a_3	a_1
a_3	a_1	a_2

Tabella 1. Dismutazioni di 3 elementi.

Per n = 4, si hanno nove dismutazioni: lo si può verificare, ancora abbastanza agevolmente, in modo diretto, scrivendole tutte. Oppure le si può contare più agevolmente aiutandosi con la **Tabella 2**, che aiuta a organizzare il conteggio.
Nella seconda, terza e quarta cella della prima colonna sono stati inseriti, rispettivamente, gli elementi che possono comparire in prima posizione: a_2, a_3, e a_4 (cioè tutti tranne a_1, che non può comparire nella prima posizione, se si vogliono delle dismutazioni).
Si fissi ora l'attenzione sul caso in cui è l'elemento a_2 che si trova in prima posizione (seconda riga della tabella, evidenziata in grigio): ci sono tre possibili dismutazioni con a_2 in prima posizione. Lo stesso ragionamento lo si può ripetere nei due casi in cui siano gli elementi a_3 e a_4 a trovarsi in prima posizione (ultime due righe della tabella). Quindi le dismutazioni di 4 elementi sono 3·3 = 9.

1	**2**	**3**	**4**
a_2	a_1, a_3, a_4	a_1, a_4	a_1, a_3
a_3	a_1, a_4	a_1, a_2, a_4	a_1, a_2
a_4	a_1, a_3	a_1, a_2	a_1, a_2, a_3

Tabella 2. Dismutazioni di 4 elementi.

La scrittura dell'elenco delle dismutazioni di cinque elementi inizia a essere piuttosto complessa: si rischia di dimenticarne qualcuna. L'uso di una rappresentazione come quella della **Tabella 3** può essere d'aiuto. Analogamente a quanto già visto nella **Tabella 2**, nella seconda, terza, quarta e quinta cella della prima colonna sono stati inseriti gli elementi che possono comparire in prima posizione: a_2, a_3, a_4, a_5.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
a_2				
a_3				
a_4				
a_5				

Tabella 3. Per rappresentare le dismutazioni di 5 elementi.

Però, come suggerisce la **Tabella 4**, il numero delle dismutazioni di cinque elementi, in cui l'elemento a_2 è stato inserito nella prima posizione, è dato dalla somma delle dismutazioni dei tre elementi a_3, a_4, a_5 (terza, quarta e quinta cella delle prime due righe della **Tabella 4**), dove a_1 è stato inserito nella seconda posizione e delle dismutazioni dei quattro elementi a_1, a_3, a_4, a_5 (celle evidenziate in grigio nella **Tabella 4**) dove a_1 può essere inserito in ciascuna posizione, tranne che, ovviamente, nella prima e nella seconda. Si osservi, inoltre, che il contenuto delle celle evidenziate in grigio nella **Tabella 4** è lo stesso contenuto della **Tabella 2**, se in luogo delle dismutazioni degli elementi a_1, a_2, a_3, a_4 si considerano le dismutazioni degli elementi a_1, a_3, a_4, a_5.

1	2	3	4	5
a_2	a_1	a_4	a_5	a_3
	a_1	a_5	a_3	a_4
a_2	a_3	a_1, a_4, a_5	a_1, a_5	a_1, a_4
a_2	a_4	a_1, a_5	a_1, a_3, a_5	a_1, a_3
a_2	a_5	a_1, a_4	a_1, a_3	a_1, a_3, a_4

Tabella 4. Traccia del calcolo del numero di dismutazioni di 5 elementi.

Il ragionamento appena fatto nel caso in cui a_2 è stato inserito nella prima posizione, può essere ripetuto negli altri tre casi, in cui, rispettivamente, a_3, a_4 e a_5 sono inseriti nella prima posizione.
Quindi $D_5 = 4 \cdot (D_4 + D_3) = 4 \cdot (9 + 2) = 44$.
A questo punto si può quindi congetturare che, per ogni $n \geq 2$, valga la formula ricorsiva

$$\begin{cases} D_2 = 1 \\ D_3 = 2 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$

3.2 La strategia di Lorenzo

Inizialmente si potrebbe pensare che sia sufficiente organizzare i dati come nella **Tabella 5**, per individuare una regola di calcolo per le dismutazioni, ma le attese sono destinate ad andare presto deluse: i numeri crescono troppo rapidamente e dopo i quattro elementi è in pratica impossibile evitare di sbagliare nel conteggio.

Elenco iniziale	Numero di elementi	Dismutazioni	Numero di dismutazioni
a_1	1	/	0
a_1, a_2	2	a_2, a_1	1
a_1, a_2, a_3	3	a_2, a_3, a_1; a_3, a_1, a_2	2
a_1, a_2, a_3, a_4	4	a_2, a_3, a_4, a_1 ; a_2, a_1, a_4, a_3 a_2, a_4, a_1, a_3; a_3, a_1, a_4, a_2 a_3, a_4, a_2, a_1; a_3, a_4, a_1, a_2 a_4, a_1, a_2, a_3; a_4, a_3, a_1, a_2 a_4, a_3, a_2, a_1	9
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5	5	Troppe!	…

Tabella 5. Alla ricerca del numero di dismutazioni.

Il fallimento di questa strategia ha portato a cercare una legge ricorsiva. La ricerca non è stata lineare, ma, anzi, lunga e tortuosa. Qui di seguito si cerca di dare un'idea del processo che ha portato Lorenzo a formulare la legge ricorsiva per il calcolo del numero delle dismutazioni di n elementi.
Si consideri il caso $n = 5$, cioè il numero delle dismutazioni dei cinque elementi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
Una dismutazione è, per esempio, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1; in ogni caso, qualunque dismutazione si consideri l'elemento a_1 non potrà mai comparire nella prima posizione. A questo punto, qualunque sia la

dismutazione considerata, si scambia l'elemento a_1 con quello che si trova in prima posizione. Nell'esempio preso in considerazione si avrebbe a_1, a_3, a_4, a_5, a_2. Qualunque cinquina si ottenga, si potrà tornare, con la sostituzione inversa di quella appena effettuata, alla dismutazione originaria; nel caso dell'esempio, si potrà tornare ad a_2, a_3, a_4, a_5, a_1.
È però necessario comportarsi in modo diverso a seconda di quello che si ottiene:

a) se solo l'elemento a_1 ritorna nella posizione iniziale (come nell'esempio considerato) allora si hanno dismutazioni di quattro elementi e questo ragionamento fatto per l'elemento a_1 può essere ripetuto tale e quale per ciascuno degli altri quattro elementi a_2, a_3, a_4, a_5;
b) può invece capitare che, oltre ad a_1, ci sia anche un altro elemento che torna nella posizione originaria. Ciò accade, per esempio, nel caso in cui si consideri la dismutazione a_5, a_3, a_4, a_2, a_1, quando si sposta a_1 in prima posizione scambiandolo con a_5. Si ottiene a_1, a_3, a_4, a_2, a_5, in cui due elementi sono nella posizione originaria. In questo caso si hanno le dismutazioni di tre elementi e questo ragionamento fatto ora per l'elemento a_1 si può ripetere per gli altri quattro elementi.

Mettendo insieme le considerazioni ai punti a) e b) precedenti, si può concludere che:
$D_5 = 4 \cdot (D_4 + D_3) = 4 \cdot (9 + 2) = 44$. Infine, è possibile congetturare che la formula ricorsiva

$$\begin{cases} D_2 = 1 \\ D_3 = 2 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$ valga per ogni $n \geq 2$.

3.3 La dimostrazione della formula ricorsiva

Si osservi che le due strategie risolutive proposte da Riccardo e Lorenzo possono essere ricondotte, anche se non immediatamente, al seguente ragionamento che costituisce una dimostrazione della formula ricorsiva ottenuta dai due studenti.
Si considerino le dismutazioni che operano sugli n elementi $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$. Si osservi, innanzitutto, che l'elemento a_1 può stare solo in seconda, terza, quarta … n-esima posizione. Si supponga di inserirlo nella n-esima posizione e di pensare a dove posizionare ora l'elemento a_2, tenendo ben presente che esso non potrà essere inserito nella seconda posizione. Si hanno due possibilità:

a) l'elemento a_2 sta nella prima posizione
b) l'elemento a_2 sta nella terza, quarta, …, $(n-1)$-esima posizione (l'n-esima è già occupata dall'elemento a_1).

Nel caso a) si sono già fissati due elementi su n; quindi si è ricondotti alle dismutazioni di $n-2$ elementi.
Nel caso b) è stato fissato solo l'elemento a_1; quindi si è ricondotti alle dismutazioni di $n-1$ elementi.
Questo stesso ragionamento lo si può fare per ciascuna delle $n-1$ posizioni in cui può stare l'elemento a_1.
Quindi $D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2})$.

Possiamo quindi dare la formula ricorsiva $$\begin{cases} D_2 = 1 \\ D_3 = 2 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$ per ogni $n \geq 2$ o, equivalentemente,

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 1 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$ per ogni $n \geq 1$.

3.4 Il confronto con la simulazione

Le soluzioni proposte da Riccardo e da Lorenzo non solo sono convincenti perché portano allo stesso risultato, ma anche perché sono state ottenute con strategie controllabili, che, una volta comprese, danno adito a pochi dubbi. Eppure, come sa bene chi è esperto nella risoluzione di problemi, spesso dietro alle convinzioni più profonde si nascondono insidie esiziali, difficili da individuare, in particolare nei problemi di probabilità. È così nata l'esigenza di un'ulteriore verifica di correttezza della congettura, mediante il confronto del risultato fornito dalla formula ricorsiva con il risultato fornito dalla simulazione al computer. È stato quindi costruito un foglio di calcolo che restituisse, al variare di n, il numero $1-\frac{D_n}{n!}$; ciò ha consentito di verificare una forte coerenza con il risultato della simulazione: già con n = 11 le prime sei cifre decimali si stabilizzano e si ottiene, a meno di 10^{-6}, il numero 0,632121.

4 Alla ricerca di una formula chiusa per D_n

La convinzione della correttezza di una congettura è spesso condizione importante per essere motivati a dimostrarla: prima ci si convince e poi si dimostra, cioè si spiega perché quella congettura funziona e si precisa il nesso di conseguenza logica tra quella congettura e le conoscenze già disponibili. L'attività di risoluzione del problema è servita proprio a convincersi, sia mediante considerazioni di carattere teorico, sia mediante veri e propri esperimenti, che consistono nelle simulazioni al computer, della correttezza della soluzione trovata. Ci sono quindi tutte le condizioni per essere motivati a spiegare, ancora più approfonditamente, che cosa sta dietro alla soluzione numerica restituita dalle simulazioni. Naturalmente la spiegazione va ricercata nel sapere teorico: è proprio nella teoria che si possono dare risposte alle domande del tipo *perché* è così?

Non sempre, però, l'attività dimostrativa ha successo nello spiegare *perché* una congettura funziona. Per esempio, in questo caso, la dimostrazione della formula ricorsiva fornita nel par. 3.3 e proposta dall'insegnante nella fase di presentazione alla classe (vedere par. 5) come sistemazione delle strategie risolutive proposte da Lorenzo e Riccardo, non ha aggiunto molto alla comprensione del procedimento che ha portato i due studenti a congetturare la legge ricorsiva. Quindi non ha soddisfatto, a detta degli studenti della classe, l'esigenza di capire meglio, sia le strategie risolutive messe in atto da Lorenzo e Riccardo per trovare la formula ricorsiva, sia *perché* il numero fornito dalla simulazione è una corretta approssimazione della soluzione trovata. In fondo, parafrasando Thurston (1995), i progressi nella conoscenza matematica non si ottengono solo grazie al processo di costruzione di definizioni, teoremi, dimostrazioni: è molto più importante la produzione di congetture, la loro validazione e spiegazione con tecniche che non sono solo legate al pensiero deduttivo. Insomma, ciò che è importante, per il progredire della conoscenza matematica, è capire e farsi capire.

Per esempio, Lorenzo e Riccardo, per *capire meglio* sia il risultato fornito dalla simulazione al computer, sia la formula ricorsiva costruita, sentivano l'esigenza di trovare una formula che definisse esplicitamente D_n in funzione di n; per questo motivo hanno pensato di utilizzare la rete per la ricerca di conoscenze di calcolo combinatorio che consentissero di affrontare in altro modo il problema.

Anche questa fase è stata condotta autonomamente: l'intervento del docente si è realizzato solo nella fase di presentazione alla classe per sistemare o precisare alcuni passaggi dell'esposizione con l'obiettivo di aiutare le compagne e i compagni di Lorenzo e Riccardo a comprendere meglio il valore e il contenuto dell'attività.

È proprio in questa ricerca che Lorenzo e Riccardo si sono imbattuti nel concetto di dismutazione e hanno trovato la formula $D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$, che può essere dimostrata per induzione, come per esempio propone Modica (2008, pp. 45–46) oppure utilizzando il principio di inclusione ed esclusione, come per esempio propone Foschi (2012, pp. 19–20).

Quando Lorenzo e Riccardo hanno presentato alle compagne e ai compagni i processi che hanno messo in atto per affrontare e risolvere il problema, hanno anche accennato al principio di inclusione ed esclusione per giustificare la formula che dà D_n in funzione di n. Però ciò che maggiormente ha catturato l'attenzione, sia degli studenti che ascoltavano il racconto dell'esperienza, sia dei due stessi autori, è stato il riconoscere, nella formula trovata, un collegamento del tutto inatteso con uno degli argomenti da poco introdotti in classe. Naturalmente, dal fatto che il numero di permutazioni di n elementi è $n!$, segue immediatamente che $\frac{D_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$. La sommatoria a secondo membro ha rinviato allo sviluppo in serie di e^x, studiato proprio pochi giorni prima della risoluzione del problema. Infatti, $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, quindi, per n che tende a infinito, il rapporto $\frac{D_n}{n!}$ (che fornisce la probabilità che, estraendo a caso una permutazione fra l'insieme delle permutazioni di n oggetti, se ne trovi una che non lascia fisso alcun oggetto) è uguale a e^{-1}.
Quindi $1 - e^{-1} \approx 0{,}632121$ a meno di 10^{-6}, è la probabilità che, estraendo a caso una permutazione fra l'insieme delle permutazioni di n oggetti, se ne trovi una che lascia fisso almeno un oggetto. Insomma, tutto torna!

5 Condividere soddisfazione e bellezza: la presentazione alla classe

La scoperta che la probabilità cercata, espressa come $\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n!}$, converge a e^{-1}, i collegamenti di un problema, che appariva così lontano dalla prassi didattica, con gli argomenti svolti in classe proprio poco prima della risoluzione del problema, la matematica scoperta e appresa per risolverlo, hanno causato stupore, meraviglia che, insieme alla soddisfazione per il successo ottenuto, hanno portato all'esigenza di condividere con le compagne e i compagni di classe questa piccola attività di ricerca matematica.
Il passo successivo è stato quindi quello di riorganizzare il processo di scoperta e di risoluzione del problema in modo da renderlo comprensibile a tutte le compagne e i compagni di classe. Come già detto, anche la preparazione della presentazione è stata autonomamente condotta dagli studenti. L'insegnante si è limitato a suggerire di non limitarsi a presentare la soluzione del problema, ma a descrivere nei dettagli tutto il processo risolutivo, riorganizzandolo in una sequenza logica piuttosto che temporale, con l'obiettivo di aiutare i compagni a comprendere. Ciò ha richiesto una profonda riflessione critica sulle varie strategie adottate e anche sulle modalità più adeguate a rendere comprensibile e coinvolgente il racconto.
Per esempio, nella presentazione, si è deciso di partire dalla strategia risolutiva messa in atto da Riccardo, perché è stata ritenuta più semplice da spiegare e da essere compresa: si è insistito molto sulla costruzione di tabelle strutturate, evitando l'uso di diapositive, ma realizzando le tabelle alla lavagna, in modo tale che tutti gli studenti potessero vedere e seguire con calma la costruzione passo-passo.
Si è deciso che si sarebbe presentata, dopo quella di Riccardo, la strategia risolutiva di Lorenzo, mettendo in evidenza le differenze di approccio rispetto alla precedente. Per coinvolgere gli studenti della classe è stato chiesto loro, fin dall'inizio della presentazione, di seguire attentamente per dare poi una valutazione su quale delle due strategie ritenessero più semplice da seguire e da capire. Tra l'altro, quasi tutte le compagne e i compagni hanno ritenuto più semplice e chiara la strategia risolutiva adottata da Riccardo, confermando l'efficacia della scelta progettuale di partire dalla presentazione di questa strategia risolutiva.
L'insegnante ha poi proposto la dimostrazione della congettura di Lorenzo e Riccardo, nel modo in cui è stata presentata nel par. 3.3, ma, come già accennato in precedenza, la dimostrazione non ha avuto molto successo per aiutare le studentesse e gli studenti della classe a capire meglio *perché* la congettura funziona.
Per ultimo si è deciso di descrivere la simulazione e la successiva ricerca di una formula chiusa, anche

se la fase di simulazione era stata realizzata quasi all'inizio dell'attività di risoluzione del problema da parte di Lorenzo. Per catturare l'attenzione delle studentesse e degli studenti si sono riportati, su un file Excel, diversi valori della successione $\frac{D_n}{n!}$ e si è chiesto agli studenti di avanzare ipotesi sul numero a cui sembrava convergere al crescere di n.
La parte più coinvolgente, per la sorpresa che ha creato, è stato il collegamento del problema e del risultato della simulazione con lo sviluppo in serie di e^x, argomento affrontato pochi giorni prima della presentazione della risoluzione del problema.

6 Conclusioni

L'esperienza ci sembra fornire spunti suggestivi su come si possa tenere conto di quelli che potremmo chiamare "bisogni educativi delle eccellenze", che rischiano di non essere adeguatamente soddisfatti se non si utilizzano spazi di produzione e di riflessione che vadano al di là dell'orario scolastico. Naturalmente un punto di forte criticità sta nel fatto che, a parte Lorenzo e Riccardo, il resto della classe è stato coinvolto solo nella fase di presentazione. Il coinvolgimento di tutta la classe in un'attività di questo tipo, però, richiede una sapiente e attenta progettazione didattica da parte del docente, che deve necessariamente partire dalla scelta di problemi di minore complessità e difficoltà, per i quali, se non la soluzione, almeno la proposta e la discussione in piccoli gruppi di strategie risolutive adeguate ad affrontarli siano alla portata della classe. Per un esempio che ci sembra interessante in tal senso si veda l'articolo di Paola (2019).
Riteniamo che l'interesse di quanto esposto non stia tanto nel problema, che è classico, anche se non del tutto usuale per quel che riguarda la prassi didattica. L'interesse ci sembra dovuto alla modalità della proposta, del tutto autonoma e, soprattutto, alle strategie di approccio, che hanno portato a successive riformulazioni del testo e a una miscela sapientemente dosata di approcci di carattere empirico e teorico, prima di sentire l'esigenza di spiegare *perché* quelle strategie funzionano. La fase di condivisione dell'attività con il resto della classe ha fatto nascere un'ulteriore questione assai interessante. Molti studenti hanno osservato che la fase di dimostrazione della correttezza della soluzione ha aggiunto poco alla loro convinzione della correttezza della soluzione o alla comprensione della soluzione stessa. La maggior parte degli studenti della classe ha apprezzato soprattutto la parte più empirica e induttiva del processo risolutivo e non ha avvertito alcuna esigenza di ulteriori spiegazioni. Lorenzo e Riccardo, sia nel processo risolutivo, sia nell'esposizione ai compagni, hanno utilizzato a loro volta proposizioni non dimostrate. In altri termini, nella fase di spiegazione del *perché* l'approccio risolutivo ha funzionato, hanno seguito un approccio simile a quello suggerito da Lakatos (1976/1979) che pensa alla dimostrazione come a un processo euristico in cui una congettura viene scomposta in altre sotto-congetture utilizzate per corroborare la congettura di partenza e in cui l'attenzione si sposta verso la logica della scoperta, più che verso la deduzione formale. In fondo, forse proprio questo è il processo di giustificazione più adatto a un contesto, quale è quello in cui lavorano studenti di una scuola secondaria di secondo grado, in cui circolano e si condividono molte conoscenze, ma quasi mai queste sono già organizzate e sistemate in una teoria esplicita e condivisa. Si può anzi dire che l'obiettivo primario di un processo giustificativo, in un contesto come questo, sia proprio quello di iniziare a fare acquisire il ruolo e il significato di una teoria come ambiente nel quale si precisi il significato stesso delle domande del tipo *perché*?

Bibliografia

Baclawski, K., Cerasoli, M., & Rota, G. C. (1990). *Introduzione alla probabilità.* Unione Matematica Italiana. Pitagora.

Foschi, L. (2012). *Alcune statistiche sulle permutazioni*, Relazione finale in Matematica Discreta, Università di Bologna. https://amslaurea.unibo.it/4996/1/foschi_lorenzo_tesi.pdf

Impedovo, M. (2005). Modelli, algoritmi, simulazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *28*(6A+B), 685–707.

Lakatos, I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica.* Feltrinelli. (Titolo originale: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery* pubblicato nel 1976).

Modica, G. (2008). *Note di Calcolo Combinatorio.* http://www.dma.unifi.it/~modica/2007-08/matdiscreta/cc.pdf

Paola, D. (2019). Un'esperienza di avvio al pensiero probabilistico nella prospettiva di educare alla razionalità. In F. Morselli, G. Rosolini & C. Toffalori (A cura di), *Educare alla razionalità – Tra Logica e Didattica della Matematica.* Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.

Polya, G. (2016). *Come risolvere i problemi di matematica.* UTET Università. (Titolo originale: *How to solve it* pubblicato nel 1945).

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 157–162.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29–37.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 129 - 141, DOI: 10.33683/ddm.22.12.7
OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Ci sono tanti modi per essere aleatori

Randomness is such a fickle notion

Anna Perrotta• e Enrico Rogora°
•Liceo Scientifico "Plinio Seniore", Roma – Italia
°Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma – Italia

annaxrotta@gmail.com, enrico.rogora@uniroma1.it

Sunto / Possiamo immaginare dei criteri che ci aiutino a distinguere sequenze binarie finite generate dal lancio ripetuto di una moneta da altre immaginate da un agente umano o simulate con una calcolatrice che usa un algoritmo deterministico? Si possono individuare proprietà caratteristiche delle sequenze delle diverse classi considerate?
Intorno a queste domande abbiamo costruito un percorso, proposto in una classe terza di liceo scientifico, che ha stimolato gli alunni a riflettere criticamente sulle loro convinzioni relative alla probabilità e al caso.

Parole chiave: probabilità; sequenze aleatorie; sequenze binarie; didattica laboratoriale.

Abstract / Is it possible to imagine criteria that may help to distinguish finite binary sequences generated by the repeated tossing of a coin from those imagined by a human agent or simulated by a calculator using a deterministic algorithm? Is it possible to identify characteristic properties of the sequences of these different classes?
Around these questions we built a learning path, proposed in an 11th grade class, that stimulated students to critically reflect on their beliefs about probability and chance.

Keywords: probability; random sequences; binary sequences; laboratory activities.

1 Introduzione

L'incertezza è la condizione abituale in cui ci si trova quando si devono prendere decisioni. Governare l'incertezza è quindi un'esigenza primaria della vita umana, che la scuola può e deve considerare. I meccanismi e le strategie, spesso inefficaci o addirittura controproducenti, che mettiamo in atto quando dobbiamo prendere una decisione sono oggetto di studio di psicologi, economisti e sociologi (Kahneman et al., 1982). È quindi di particolare interesse comprendere come sia possibile migliorare l'uso ottimale delle informazioni disponibili e le strategie per selezionare e cercare le informazioni più rilevanti. Il calcolo delle probabilità offre un utile strumento per evitare errori grossolani nel trasformare e combinare le informazioni disponibili al fine di ridurre l'incertezza. Purtroppo, la probabilità è un argomento intrinsecamente difficile e poco intuitivo (Gage & Spiegelhalter, 2016). L'interpretazione stessa della probabilità non è univoca e mescola indistricabilmente elementi di carattere *statistico* ed *epistemico*. I primi riguardano, ad esempio, il riconoscimento di caratteri quantificabili nell'osservazione di sequenze generate da processi aleatori e di regole matematiche che li collegano. I secondi riguardano, ad esempio, il processo di costruzione di misure capaci di esprimere il grado di fiducia che un soggetto attribuisce al verificarsi di un evento incerto. La teoria matematica della probabilità specifica le proprietà formali di queste misure e da esse procede a dedurne le conseguenze, ma la difficoltà di comprendere l'oggetto stesso di queste misure rende difficile capire quali calcoli vanno fatti e insidiose le applicazioni a problemi reali. L'equilibrio delicato tra l'oggettività di una misura (la probabilità) e la soggettività del suo contenuto (il grado di fiducia) è a nostro avviso cruciale nei processi di insegnamento e apprendimento della probabilità, ma nei curricula non trova l'attenzione che meriterebbe.
Oggi esiste un crescente interesse nei confronti di una introduzione sperimentale al calcolo delle probabilità che faccia debito uso di esperimenti con monete, dadi o trottole (spinner) e di simulazioni con il calcolatore o con la calcolatrice. L'uso combinato di questi strumenti permette di costruire facilmente processi aleatori complessi (Capone et al., 2017).
L'importanza di queste costruzioni si può paragonare, per certi versi e con le dovute cautele, a quella delle costruzioni con riga e compasso nei processi di apprendimento/insegnamento della geometria euclidea. Ad esempio, un'importante somiglianza riguarda il fatto che le attività legate alla costruzione o ricostruzione di un processo possono essere di grande aiuto nel facilitare l'acquisizione di concetti teorici. Un'importante differenza è, d'altra parte, che un processo aleatorio è più elusivo di una costruzione geometrica. Per esempio, una costruzione geometrica produce sempre (a meno di errori dovuti all'imprecisione degli strumenti utilizzati) la stessa figura a partire dagli stessi dati, mentre un processo aleatorio produce manifestazioni sperimentali, che variano ad ogni ripetizione. Ciò rende più difficile comprendere quello che può essere descritto in maniera matematicamente precisa e come questo si leghi al risultato sperimentale, cioè in cosa consistano esattamente le leggi matematiche di un processo stocastico.
Per la sua importanza nei processi di apprendimento è necessario inoltre, a nostro avviso, prestare particolare attenzione al processo di strumentazione e strumentalizzazione dell'artefatto (calcolatrice o calcolatore) che viene usato nelle applicazioni al fine di poterlo trasformare in un utile strumento per l'insegnamento/apprendimento del calcolo delle probabilità. Il presente lavoro è dedicato a un aspetto molto particolare di questo processo e precisamente a far emergere e a rimuovere le misconcezioni degli studenti sulla natura dei processi costruibili con uno strumento deterministico (calcolatore o calcolatrice) in confronto a quelli costruibili lanciando monete o dadi, estraendo palline da urne ben mescolate o facendo girare trottole.
Nel laboratorio proposto viene richiesto di produrre, analizzare e confrontare diverse tipologie di sequenze binarie aleatorie. Si tratta di attività progettate per essere svolte prima che l'insegnante decida di usare la calcolatrice o il calcolatore per simulare processi aleatori. Non necessita di alcun

prerequisito ma richiede molta attenzione da parte del docente nelle discussioni con gli studenti.
Le proprietà matematiche delle sequenze binarie sono infatti difficili da caratterizzare (Chaitin, 2000) e richiedono un linguaggio e una consapevolezza dei termini impiegati molto elevata. Per esempio, è delicato esprimere cosa ci aspettiamo di osservare, anche nel caso più semplice di una successione di lanci di una moneta non truccata. L'affermazione: «[...] all'aumentare del numero di lanci di una moneta non truccata la frequenza assoluta ("il numero di teste e di croci") dell'esito T tende a essere sempre più uguale alla frequenza assoluta dell'esito C» è un esempio di un errore in cui cadono frequentemente gli studenti e gli insegnanti interpretando in modo scorretto la legge empirica del caso o la legge dei grandi numeri. In realtà quello che si può dire è che "mediamente", all'aumentare del numero di lanci, ci si attende che la frequenza relativa dell'esito T converga alla frequenza relativa dell'esito C, dove quel "mediamente" vuol dire che si tratta di una "convergenza in probabilità" e cioè (detto in modo non del tutto preciso, ma, speriamo, chiaro) che tende a 1 la probabilità che, per il numero di lanci che tende a infinito, la frequenza relativa dell'esito T sia uguale alla frequenza relativa dell'esito C.[1]
Questo genere di errori e di imprecisioni nell'uso e nell'interpretazione dei concetti fondamentali della probabilità esemplificano chiaramente la difficoltà di descrivere in maniera matematicamente precisa ciò che ci aspettiamo di vedere nella realizzazione di un processo aleatorio. Il laboratorio mira a stimolare negli studenti una maggiore consapevolezza nell'uso del linguaggio e a evidenziare la sua importanza nella costruzione di appropriate immagini concettuali (Tall & Vinner, 1981) su cui basare la teoria.

2 Presentazione del laboratorio

Le attività descritte nel presente lavoro sono state inizialmente sperimentate da un gruppo di docenti appartenenti a scuole di differente ordine e grado in un laboratorio dal titolo "Governare l'incertezza" che si è svolto nell'a.s. 2018/19 presso il Polo romano del progetto "Con la mente e con le mani" dell'Accademia dei Lincei. Successivamente le attività sono state rielaborate e proposte nell'a.s. 2020/21 a una classe terza di liceo matematico[2] dell'ITIS Galilei di Roma composta da 13 studenti. Queste attività, inizialmente pensate per essere svolte in presenza, sono state per la maggior parte[3] proposte a distanza per le limitazioni didattiche imposte dall'emergenza COVID, modificandone solo parzialmente la struttura ma non gli obiettivi didattici che sono i seguenti:

- sviluppare una «base intuitiva» relativa ai fenomeni aleatori che aiuti gli studenti a evitare errori dovuti ad una loro scorretta interpretazione e a precisare il linguaggio con cui ci si riferisce ad essi;
- cercare possibili differenze tra collezioni di sequenze generate dal lancio di una moneta, da lanci immaginati dai partecipanti al laboratorio, da lanci simulati con una calcolatrice,[4] e riflettere sulla possibilità di quantificare queste differenze per distinguere i diversi meccanismi di produzione;
- esplorare alcune caratteristiche delle stringhe di simboli generate da fenomeni aleatori che a prima vista possono sembrare poco intuitive o «inaspettate»;
- indagare se esistono preconcetti che impediscono agli studenti di accettare che sequenze binarie prodotte da un calcolatore possano essere indistinguibili da quelle prodotte con il lancio di una moneta.

1. L'errore e il successivo commento ci sono stati suggeriti da uno dei referee, che ringraziamo.
2. Per una descrizione del progetto del Liceo Matematico, si veda Capone et al. (2017).
3. Solo la prima attività è stata svolta in presenza.
4. Le calcolatrici utilizzate nel laboratorio sono le fx-991EX CLASSWIZ della CASIO.

Non è stata ipotizzata alcuna conoscenza pregressa di calcolo delle probabilità da parte degli alunni ma si è partiti dalle loro conoscenze sui fenomeni aleatori acquisite nel precedente ciclo di studi e dalle convinzioni, più radicate delle precedenti e molto difficili da mettere in discussione, che si sono formate attraverso televisione, reti di comunità virtuali o discussioni con i propri genitori o tra pari.

3 Descrizione del laboratorio

Di seguito verranno descritte le attività del laboratorio e riportate e commentate alcune delle risposte degli studenti che a nostro avviso sono particolarmente significative.

3.1 Prima attività

È stata consegnata ad ogni alunno una scheda (Allegato 1) chiedendogli di svolgere le consegne in essa descritte e di riportare su di essa le risposte.
Lo scopo di questa attività era quello di produrre con tre diversi meccanismi le sequenze binarie che sarebbero state successivamente analizzate.

3.1.1 Consegne della prima attività

L'allievo si è confrontato individualmente con le seguenti consegne.

– Immagina di lanciare 20 volte una moneta non truccata e di riportare nella tabella seguente i risultati ottenuti (T = testa e C = croce).

– Lancia una moneta 20 volte e riporta la successione di teste (T) e croci (C) che osservi.

– Simula ora con la calcolatrice una serie di 20 lanci di moneta[5] trascrivendo sulla scheda T quando esce 0 e C quando esce 1.

5. È possibile simulare il lancio di una moneta con una qualsiasi calcolatrice scientifica avanzata. Con quella utilizzata nel laboratorio abbiamo ripetuto l'istruzione RandInt#(0,1) nell'applicazione foglio elettronico. Le istruzioni da seguire per produrre la sequenza con la calcolatrice, riportate nell'Allegato 1, non hanno creato difficoltà agli alunni.

3.1.2 Considerazioni sulla prima attività

Durante questa prima attività gli alunni hanno fatto numerose osservazioni, a nostro avviso particolarmente interessanti. Alcuni hanno notato che effettuando il lancio con la moneta uscivano "troppe croci" di seguito, altri che qualcosa non andava perché non venivano fuori i risultati "aspettati" nel senso che specificheremo più avanti.
In **Figura 1** viene riportato un esempio delle sequenze prodotte da un alunno:

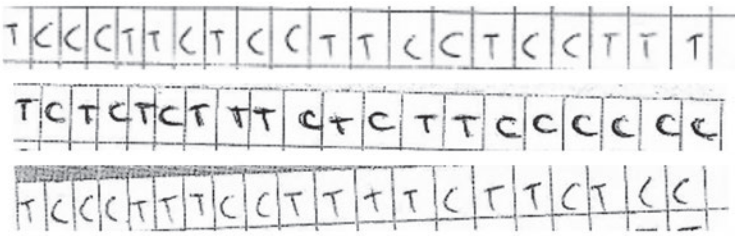


Figura 1. Risultati ottenuti rispettivamente nel caso di lancio immaginato, lancio della moneta e simulazione con la calcolatrice.[6]

3.2 Seconda attività

Senza fare osservazioni sui risultati ottenuti dagli allievi nella prima attività, l'insegnante ha quindi chiesto loro di raccogliere le sequenze ottenute in tre tabelle (Allegato 2, Fase 1): nella prima dovevano riportare tutte le sequenze immaginate, nella seconda quelle ottenute lanciando la moneta e nella terza quelle simulate con la calcolatrice.
Riportiamo in **Figura 2** la tabella delle sequenze immaginate.[7]

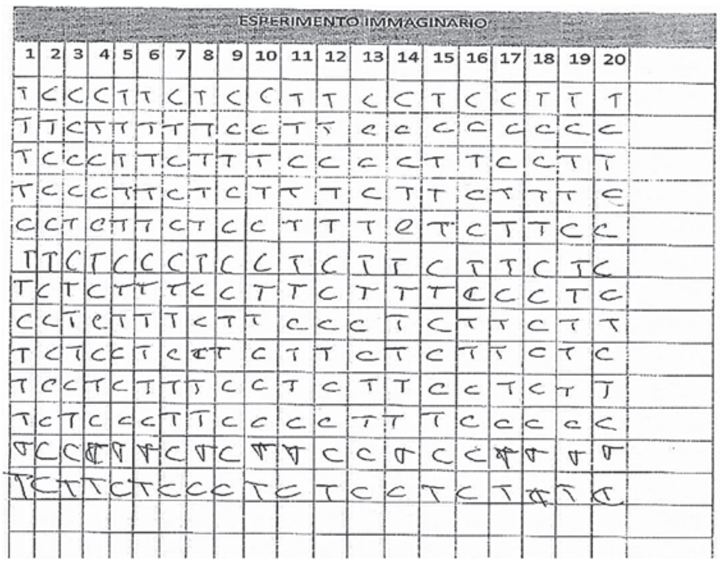


Figura 2. Tabella delle sequenze immaginate dai 13 alunni che hanno partecipato al laboratorio.

Abbiamo quindi proposto una seconda fase in cui chiedevamo di osservare attentamente le tabelle prodotte e di rispondere alle due domande presenti nella scheda (Allegato 2, Fase 2) che riportiamo qui sotto. Le schede, a partire dalla seconda attività, sono state compilate in forma scritta, singolarmente e, come già precedentemente specificato, a distanza.

6. La seconda stringa è stata ripassata dall'insegnante per renderla più leggibile.
7. Le altre due tabelle sono riportate nell'Allegato 3 e possono essere utilizzate in sostituzione di quelle raccolte nel caso in cui, nella ripetizione di un esperimento, non si dovessero presentare chiaramente i fenomeni che abbiamo evidenziato.

Gli obiettivi che ci eravamo proposti nella progettazione di questa attività erano: far riflettere gli alunni sulle differenze tra diversi possibili meccanismi di produzione di sequenze binarie, sulla possibilità di individuarne il meccanismo a partire dalle sequenze prodotte ed infine verificare se queste riflessioni erano adatte a mettere in luce le convinzioni pregresse relative a caso e probabilità e ad offrire, insieme a quelle raccolte nella terza attività, elementi efficaci per ripensare criticamente queste convinzioni.

3.2.1 Consegne della seconda fase della seconda attività

Gli allievi hanno risposto individualmente alle seguenti domande:

1. Riesci ad individuare qualche elemento che possa permettere di distinguere le sequenze immaginate da quelle ottenute lanciando una moneta o usando la calcolatrice?
2. È possibile trovare un criterio per individuare le sequenze generate in modo casuale?[8]

3.2.2 Considerazioni sulla seconda attività

Nella formulazione della prima domanda abbiamo volutamente evitato riferimenti al "caso", pensando di sollecitare i ragazzi a osservare le sequenze indipendentemente dai meccanismi che le avevano generate per poi ritornare su questi nella seconda domanda. Le risposte però sono risultate sostanzialmente sovrapponibili. Infatti, i ragazzi hanno introdotto già nelle risposte alla prima domanda i riferimenti alle loro idee di caso e casualità.
Otto ragazzi hanno ritenuto le sequenze indistinguibili mentre cinque di loro hanno osservato delle differenze nelle tre classi. Come vedremo, proseguendo il laboratorio gli studenti hanno progressivamente modificato le loro idee, sulla base delle discussioni sulle attività che abbiamo proposto.
Nelle risposte, come ci aspettavamo, i ragazzi non sono stati concordi nell'intendere il significato della parola "casuale".[9] Per molti, tutte le sequenze sono casuali e indistinguibili. Per gli altri ci sono gradi diversi di casualità ma l'ordinamento non è lo stesso per tutti. A titolo d'esempio riportiamo alcune risposte, ciascuna seguita da un breve commento:

> «Immaginate: senza un criterio ben definito, del tutto casuali, infatti, sono tutti diversi tra loro. Lancio della moneta: più "schematico" sembrerebbe quasi seguire un criterio di probabilità (forse). Calcolatrice: segue una sequenza precisa ad esempio 2 *c*, 3 *t*, 1 *c*».

In questa risposta, le tre tipologie sono state così ordinate per casualità decrescente: Agente umano; Moneta; Calcolatrice. Inoltre, massima casualità è descritta come "assenza di criterio"; media casualità come "criterio probabilistico"; non casualità, come "criterio preciso".

> «Nella sequenza immaginata, le lettere T e C si ripetono molte volte vicine fra loro (es. CCCTTCCTTTTC). Nella sequenza con la calcolatrice la cosa è più casuale, anche se qui molte volte si ripetono vicine fra loro le lettere (es. CCTTTCCTCTTCT). Nella sequenza con la moneta il risultato mi sembra puramente casuale, con poche ripetizioni di doppie (es. CTCTTCTCCTCCCTCTT)».

In questa risposta, le tre tipologie sono state così ordinate per casualità decrescente: Moneta; Calco-

8. Questa domanda è stata volontariamente posta in modo ambiguo in quanto, non avendo mai definito cosa si intendesse per "sequenza generata in modo casuale", volevamo capire come gli studenti avrebbero interpretato questa frase.
9. Uno degli scopi principali del laboratorio è quello di aiutare i ragazzi a usare in maniera "appropriata" alcuni termini fondamentali del calcolo delle probabilità. Tra questi, il termine "casuale" è uno dei più critici. Vista la confusione e la varietà di significati associati alla parola, crediamo che sarebbe più opportuno, come suggerito da De Finetti, evitare l'uso della parola casuale e sostituirla, dopo averne messo in evidenza tutte le criticità, con aleatorio (De Finetti, 1970, p. 38).

latrice; Agente umano. Massima casualità è stata descritta come "poca ripetizione di doppie".

> «Nelle sequenze immaginate si possono notare più frequentemente sequenze da 3 perché spesso le inseriamo cercando di rendere la sequenza il più casuale possibile. Nelle sequenze fatte alla calcolatrice si può notare che c'è una relazione del 50% tra testa e croce. Nelle tabelle fatte effettivamente con il lancio della moneta è molto difficile riconoscere una sequenza perché a volte si alternano T e C mentre altre volte si trovano gruppi di più T o C di fila».

In questa risposta le tre tipologie non sono ordinate, ma si osservano delle differenze per caratterizzarle. In particolare, abbiamo osservato che la sequenza generata dalla calcolatrice viene considerata da alcuni una sequenza casuale (come nel secondo dei brani riportati) da altri no (come nel primo).
Alla fine della seconda attività l'insegnante ha letto le risposte, senza fare commenti, e ha stimolato i ragazzi a discutere su quanto avevano scritto. In particolare, in seguito alla discussione, alcuni ragazzi si sono convinti che la presenza di successioni lunghe di teste o croci consecutive sono caratteristiche delle sequenze prodotte dal lancio della moneta.

3.3 Terza attività

Sono state fornite agli studenti tre nuove tabelle (Allegato 3) precedentemente riempite dai docenti partecipanti al laboratorio "Governare l'incertezza". In esse gli insegnanti avevano trascritto sequenze di teste e croci prodotte con le stesse procedure indicate agli studenti nella prima attività. Gli scopi prefissi nel proporre questa attività erano: osservare nuove sequenze per stimolare ulteriormente la formulazione di criteri di riconoscimento dei meccanismi che le hanno prodotte ed osservare come venivano eventualmente modificate le loro convinzioni su caso e casualità in un'attività in cui, a differenza della precedente, gli alunni non conoscevano i meccanismi di produzione delle diverse sequenze.

3.3.1 Consegna della terza attività

Lo studente si è confrontato individualmente con la seguente richiesta.

> Ti vengono fornite tre tabelle (si veda l'Allegato 3) nelle quali sono state trascritte delle sequenze ottenute: lanciando 20 volte una moneta non truccata; immaginando di lanciare 20 volte una moneta non truccata; utilizzando la calcolatrice.
> Associa ad ogni tabella il tipo di esperimento da cui secondo te è ottenuta motivando la scelta.

3.3.2 Considerazioni sulla terza attività

Tra le riflessioni che abbiamo raccolto, ci sembrano particolarmente interessanti quelle, circa un terzo del totale, che associano due meccanismi, distinguendoli dal terzo. Delle tre possibili associazioni – Calcolatrice e Moneta, Moneta e Lancio immaginato, Calcolatrice e Lancio immaginato – gli studenti hanno preso in considerazione solo la terza.
La calcolatrice viene associata al lancio immaginato perché è in grado di «esercitare un controllo».
Il lancio della moneta invece è sempre definito "casuale". Un solo studente definisce la successione prodotta dal lancio della moneta «meno casuale di quella immaginata».
Diversi studenti avanzano l'idea che le sequenze prodotte dalla calcolatrice possano essere distinte in base a uno schema/criterio logico, mentre quelle prodotte dal lancio della moneta possono essere riconosciute perché possono contenere una successione "molto" lunga di tutte teste o tutte croci consecutive.
Di seguito vengono riportate alcune delle riflessioni che riteniamo più significative tra quelle prodotte

dagli allievi, che abbiamo sintetizzato nelle osservazioni riportate in precedenza. Per rendere immediatamente riconoscibili le osservazioni relative alle diverse modalità di produzione delle sequenze abbiamo usato **il grassetto per mettere in evidenza le osservazioni relative alle sequenze prodotte con la calcolatrice**, *l'italico per quelle prodotte dal lancio della monet*a e ***l'italico grassetto per quelle prodotte dal lancio immaginato.***

- «Secondo me la prima è la calcolatrice perché segue un ordine più **logico** e **lineare** e sembra quella più **ordinata** tra le altre».
- «Nella prima è la calcolatrice poiché la sequenza è abbastanza **lineare** e **poco casuale**, alla fine le lettere tornano quasi uguali. La seconda è reale poiché le lettere *si ripetono molte* volte di seguito e *cambiano poche* volte. La terza è immaginata poiché ***non ha un senso logico*** la sequenza, e le lettere si ripetono in modo ***casuale*** e ***senza un motivo***».
- «La prima è la calcolatrice perché sembra **troppo precisa**. La seconda è inventata dato che ***sembra seguire un criterio*** e l'ultima *non segue nessuna logica*».
- «Tabella 1: lancio, ci sono *grandi gruppi di C o T sparsi* per la tabella. Tabella 2: calcolatrice, sembra la più **schematica** di tutte. Tabella 3: immaginato, ***non segue alcun "criterio"***».
- «La tabella 1 è immaginata perché come aspetto visivo sembrerebbe quella *con più alternanza*. La tabella 2 calcolatrice poiché sembra **seguire una sequenza**. Tabella 3 è il lancio della moneta non truccata poiché se fosse stata immaginata, non ci sarebbero state *3 C attaccate o otto T*, questo perché ***quando il nostro cervello immagina una cosa casuale alterna le due lettere per farlo sembrare tale*** e non potrebbe essere la calcolatrice per lo stesso motivo **le lettere sarebbero più alternate**».
- «Tabella 3: lancio della moneta perché ad esempio *in una serie c'erano 8 C* di fila e dubito che qualcuno o anche la calcolatrice possano aver fatto una serie del genere. Tabella 2: immaginata perché ci sono ***un sacco di serie da 3*** e quindi penso che sia immaginata».
- «No perché sono tutte sequenze casuali».

Ancora una volta la maggior parte degli alunni riferisce di non avere trovato elementi per distinguere le tabelle ma alcuni di loro, che avevano già individuato nel lancio della moneta delle singolarità che non si aspettavano, propongono di caratterizzare la tabella prodotta con il lancio della moneta con la presenza di sequenze che contengono lunghe ripetizioni dello stesso simbolo. Abbiamo inoltre osservato che in alcuni casi gli alunni individuano una stessa caratteristica nelle tabelle che però associano a due esperimenti differenti.

Nel corso dell'attività la classe ha utilizzato diversi termini per esprimere le caratteristiche di un fenomeno aleatorio (caos, casuale, mancanza di logica, mancanza di motivazione) e di un fenomeno non aleatorio (ordine, regolarità, alternanza, schema, logica, motivazione, linearità). Nella quinta attività l'insegnante ha discusso con i ragazzi l'uso di questi termini, mettendo in evidenza l'aspetto contraddittorio (per esempio, la possibilità di osservare regolarità in fenomeni aleatori), gli impliciti assegnati a tali termini (per esempio, caos come mancanza di qualunque tipo di ordine) e l'utilità di introdurre nuovi termini (per esempio, aleatorio e aleatorietà) che non siano già usati quotidianamente e quindi potenzialmente ambigui. Nella riflessione sull'uso delle parole nella descrizione dei risultati prodotti da questi semplici esperimenti, sulla necessità di impiegare queste parole con maggior precisione e sulla possibilità di usare le attività fatte in classe come guida per un uso più consapevole delle parole, ci è sembrato di ravvisare l'aspetto più interessante del laboratorio.

Nella discussione che ha seguito questa attività, la maggior parte degli allievi è stata concorde nell'osservare che c'erano troppi dati per cui era impossibile individuare una regola seppure dovesse esserci. Si è arrivati quindi alla conclusione che era il caso di individuare degli indici sintetici che permettessero di chiarire meglio se esistono delle caratteristiche distintive delle varie sequenze. Si è proposto quindi di contare il numero di teste e croci delle varie sequenze e di contare il numero di facce uguali che si presentavano consecutivamente. Avevamo in effetti progettato la scheda della successiva quarta attività per fissare l'attenzione degli studenti sulla presenza di sequenze di simboli uguali consecutivi di lunghezza significativa e volevamo che nella discussione emergesse, in maniera condivisa e possibilmente partendo dai suggerimenti degli studenti stessi, la proposta di guardare a questo tipo di sequenze. Ciò si è verificato puntualmente e senza forzature.

3.4 Quarta attività

Nella quarta attività (Allegato 4) si è chiesto di completare le ultime quattro colonne delle tre tabelle fornite nella terza attività, inserendo:

1. il numero di teste in ogni sequenza;
2. il numero medio di teste di ogni tabella;
3. per ogni sequenza, "SÌ" se sono presenti 5 T consecutive, "NO" altrimenti;
4. per ogni sequenza, "SÌ" se sono presenti 5 C consecutive, "NO" altrimenti.

Lo scopo di questa quarta attività era quello di stimolare una discussione sulla possibilità che i suggerimenti emersi dalle riflessioni sulla terza attività potessero essere impiegati per "misurare" la distanza tra diversi meccanismi di produzione di sequenze binarie o comunque potessero indicare una strada per introdurre una tale misura.
Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti per la tabella dei lanci immaginati (Figura 3) e per quella dei lanci realmente effettuati (Figura 4).[10]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	N. Teste	Media	TTTTT	CCCCC
T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	C	T	11	10,1	NO	NO
T	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	11		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	T	T	C	C	C	C	T	C	T	C	C	T	C	9		NO	NO
T	C	C	T	C	T	T	C	C	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	9		NO	NO
T	T	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	C	T	C	C	C	C	C	9		NO	SI
T	T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	T	T	C	C	T	T	T	T	C	13		NO	NO
T	T	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	C	C	C	T	C	T	C	T	10		NO	NO
C	T	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	C	C	T	T	T	T	C	10		NO	NO
C	C	T	T	T	C	C	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
T	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	T	10		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	C	T	T	C	T	10		NO	NO
C	C	T	C	T	C	T	T	T	C	T	C	C	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
C	T	T	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	9		NO	NO
T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	T	C	C	T	11		NO	NO
T	T	T	C	C	T	C	T	T	T	T	T	C	C	C	C	T	T	C	T	12		SI	NO

Figura 3. Tabella relativa ai lanci immaginati.

10. Le ragazze e i ragazzi hanno analizzato, assieme a quelle riportate in Figura 3 e Figura 4, anche la tabella ottenuta considerando le sequenze generate con la calcolatrice. Per non appesantire la lettura dell'articolo, quest'ultima viene fornita nell'Allegato 5.

T	T	T	C	C	C	T	T	C	T	T	C	T	C	C	C	C	C	T	T	10	9,9	NO	SI
T	C	C	C	T	C	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	T	C	T	9		NO	NO
T	C	T	C	C	T	T	C	T	T	T	C	C	C	C	C	C	C	T	C	8		NO	SI
T	T	C	C	T	T	T	T	T	T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	C	13		SI	NO
T	C	C	T	C	T	C	T	T	T	C	C	T	C	C	T	C	T	T	T	11		NO	NO
T	T	C	C	C	C	C	T	C	C	C	C	C	C	C	T	C	C	T	C	5		NO	SI
T	T	C	T	C	T	T	T	C	C	T	C	C	C	C	T	T	C	T	C	10		NO	NO
T	C	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	T	T	C	C	T	T	T	C	11		NO	NO
C	C	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	T	T	C	14		NO	NO
T	T	C	C	C	C	T	T	T	C	C	C	T	C	C	T	T	T	C	C	9		NO	NO
C	T	T	C	C	T	C	C	C	C	C	T	T	C	T	T	C	T	C	T	9		NO	SI
C	C	C	T	C	T	C	C	T	T	T	T	C	T	C	T	T	T	T	T	12		SI	NO
C	C	C	C	T	C	C	C	T	T	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	11		SI	NO
C	T	T	T	T	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	T	T	T	T	8		NO	SI
C	C	T	T	C	T	T	C	C	C	T	C	C	T	T	T	C	C	T	C	9		NO	NO
C	T	T	C	T	C	T	T	C	T	C	C	T	T	T	C	T	C	C	C	10		NO	NO
C	C	T	C	T	T	C	C	T	C	C	T	T	C	T	C	C	T	C	T	9		NO	NO

Figura 4. Tabella relativa ai lanci della moneta realmente effettuati.

Una volta completate le tabelle, abbiamo chiesto se, sulla base del contenuto delle nuove colonne, fosse possibile fare nuove osservazioni in merito alla possibilità di distinguere i tre meccanismi di produzione di sequenze binarie. Alcuni alunni hanno scritto che il numero di sottostringhe di lunghezza almeno 5 di simboli adiacenti uguali che si osservano nelle sequenze della tabella (tutte teste o tutte croci) è un indicatore che sembra in grado di distinguere tra le sequenze prodotte lanciando la moneta da quelle prodotte dai lanci immaginati. Per esempio: «Nella tabella fatta con il lancio della moneta ci sono molte più serie da 5 di T o C mentre nella tabella della calcolatrice, ce ne stanno poche. Nella tabella fatta con l'immaginazione invece, ne sono presenti ancora di meno».

3.5 Quinta attività

Nella quinta attività abbiamo tirato le fila del laboratorio con una discussione tra gli alunni orchestrata dall'insegnante. L'obiettivo era quello di chiarire come sia possibile affrontare il problema di distinguere i diversi meccanismi di produzione di sequenze binarie, senza entrare nei dettagli degli strumenti del calcolo delle probabilità, ma appoggiando la discussione su quanto era stato sperimentato nelle quattro attività descritte.
I punti principali emersi nella discussione tra i ragazzi, che l'insegnante ha messo in evidenza e chiarito in maniera più rigorosa, sono stati i seguenti.

1. Lanciando una volta una moneta non truccata la fiducia, prima di effettuare il lancio, in un esito (testa) piuttosto che nell'altro (croce) è la stessa.
2. È possibile che in alcune particolari sequenze di lanci ripetuti della moneta non truccata (20 lanci nelle nostre attività) si possano osservare forti sbilanciamenti tra il numero di teste e di croci. Ripetendo più volte la sequenza dei lanci ci aspettiamo però che il numero totale delle

teste non sia significativamente diverso da quello delle croci, o più precisamente che la probabilità di osservare un numero di teste significativamente diverso da quello delle croci tenda a diventare nulla al crescere della lunghezza della sequenza. L'eventuale squilibrio osservato in una particolare sequenza si può interpretare come una "variabilità casuale". La nostra aspettativa che i risultati di altri esperimenti tendono a bilanciare questi numeri, non si spiega con l'ipotesi di un meccanismo volontario o meccanicamente determinato, ma per una "legge generale del caos" relativa alla nostra aspettativa sul comportamento di una lunga serie di eventi indipendenti.[11]

3. Anche gli altri meccanismi di produzione di sequenze binarie che abbiamo considerato producono, nelle tabelle riassuntive, lo stesso bilanciamento tra teste e croci osservato per il lancio della moneta. Questi meccanismi esercitano però un controllo di carattere diverso sulla produzione delle sequenze. Le sequenze immaginate sono controllate da chi le immagina, che interviene, di norma, quando si rende conto di uno sbilanciamento, cioè che stanno uscendo troppe croci o troppe teste. Le sequenze prodotte dalla calcolatrice sono invece controllate da un algoritmo. Conoscendo l'algoritmo e i dati iniziali, la successione prodotta dalla calcolatrice è completamente determinata. Ma guardando solo le sequenze prodotte, è possibile distinguerle da quelle prodotte dai lanci immaginati? E da quelle prodotte dal lancio della moneta? L'insegnante ha messo in evidenza come non sia possibile dare una risposta secca a domande di questo genere ma solo, data una sequenza, assegnare maggiore o minore fiducia all'ipotesi che sia stata prodotta da un meccanismo piuttosto che da un altro.
4. Siccome il controllo sulle sequenze immaginate si esercita a piccola scala, è naturale pensare che questo meccanismo eviti di produrre lunghe successioni di simboli uguali. Come suggerito dagli alunni si può cercare di cogliere la particolarità di questo meccanismo osservando la scarsa presenza di *sottostringhe omogenee* (costituite cioè da tutte teste o tutte croci) di lunghezza cinque.
5. Ipotizzando che nei lanci immaginati, chi immagina i lanci tenda a evitare di produrre sottostringhe omogenee di lunghezza cinque, si è quindi pensato di misurare la differenza tra le tabelle introducendo un indice che calcola il numero di sottostringhe omogenee di lunghezza cinque, come fatto nella quarta attività. Se si nota una grande differenza tra gli indici di due tabelle, possiamo ragionevolmente dubitare che il meccanismo di controllo sia lo stesso. Questa semplice idea non è così facile da realizzare. Innanzitutto, perché le differenze devono essere *statisticamente significative* in un senso che va specificato rigorosamente e che è fuori dagli obiettivi del laboratorio e poi perché questi indici non danno risposte certe ma solo probabili. In altre parole, una differenza statisticamente significativa tra gli indici associati a due tabelle non dà la certezza che queste siano prodotte da meccanismi diversi ma solo un'alta probabilità che ciò sia accaduto.
6. Nel nostro caso il conteggio delle sottostringhe omogenee di lunghezza cinque, permetterebbe di concludere, con il calcolo delle probabilità, che l'indice di una delle tabelle è significativamente minore di quello delle altre. Questa tabella si può quindi ragionevolmente identificare con quella prodotta dai lanci immaginati, come è in realtà. Il confronto degli indici delle altre due tabelle non dà invece sufficiente evidenza statistica per distinguerle, cioè non permette di distinguere le stringhe ottenute con il lancio della moneta da quelle ottenute con la calcolatrice.

11. Si veda anche la parte finale dell'introduzione dove abbiamo utilizzato le parole di uno dei referee per aiutarci ad esprimere meglio questo punto essenziale che, pur avendo necessità di usare strumenti avanzati per essere espresso in maniera chiara necessita a nostro avviso uno sforzo per cominciare ad essere affrontato anche all'inizio di un percorso di apprendimento/insegnamento della probabilità.

4 Conclusioni

Le attività descritte hanno permesso agli alunni di riflettere sul concetto di probabilità, mettendo in discussione alcune convinzioni molto comuni e difficili da superare e scoprendo che le sequenze aleatorie possono avere proprietà sorprendenti ed inaspettate (Chaitin, 2000).
Ad esempio, all'inizio del laboratorio, nell'effettuare 20 lanci di una moneta, gli alunni si aspettavano che:

1. Il numero di teste e croci dovesse *sempre* essere circa lo stesso.
2. Non si potessero *mai* presentare lunghe sequenze di croci o teste consecutive.

Al termine delle attività invece hanno modificato le loro aspettative rendendosi conto del fatto che:

1. Si *possono* osservare sequenze con molte più teste che croci.
2. Si *possono* osservare lunghe sequenze di croci o teste consecutive.

Questo laboratorio ha invitato e, noi crediamo, aiutato, gli studenti a prendere consapevolezza di alcuni aspetti elementari dei fenomeni aleatori, che risultano insidiosi e difficili da descrivere. Riteniamo particolarmente efficace la richiesta di riportare in forma scritta la descrizione dei fenomeni presi in considerazione e quello che ci si aspettava di osservare. Il lavoro sul linguaggio svolto dall'insegnante durante le discussioni collettive delle schede compilate dai ragazzi, cioè la discussione sul significato attribuito ai termini impiegati e l'adeguatezza delle descrizioni proposte, potrebbe risultare ancora più produttivo coinvolgendo attivamente l'insegnante di italiano.
Il laboratorio proposto non ha la pretesa di indicare un percorso esaustivo per comprendere la complessità delle sequenze binarie generate da modelli probabilistici, anche molto semplici. Si tratta soltanto di un primo tentativo di trattare questa problematica all'inizio di un percorso di insegnamento/apprendimento del calcolo delle probabilità, che spesso, a nostro avviso, viene ridotto a mero calcolo combinatorio. L'argomento delle sequenze binarie è particolarmente adatto allo scopo di mettere in luce alcuni aspetti caratteristici e insidiosi della probabilità.
Un aspetto interessante che è emerso dall'analisi delle schede, e che non avevamo previsto si manifestasse in maniera così evidente, riguarda la difficoltà di accettare che la calcolatrice possa produrre sequenze indistinguibili da quelle prodotte lanciando una moneta. Si è notato che la maggior parte degli alunni sono convinti che le sequenze prodotte dalla calcolatrice seguano necessariamente uno schema ben preciso e si avvicinino a quelle generate dalla mente umana (forse perché associano il calcolatore a programmi costruiti seguendo procedure ben definite) mentre in realtà le sequenze prodotte dalla calcolatrice, attraverso il generatore di numeri (pseudo) casuali, hanno una distribuzione di frequenze praticamente indistinguibile da quella generata dalle monete. La calcolatrice usa un algoritmo deterministico per simulare il lancio della moneta. Questi algoritmi sono stati sempre più raffinati nel corso degli anni e sono in grado di produrre sequenze che risultano praticamente indistinguibili da quelle ottenute con il lancio di una moneta non truccata, nel senso che nessuno dei test ideati per distinguerle, che generalizzano in modi sofisticati l'idea di contare le sottostringhe omogenee di lunghezza fissata, sono in grado di rilevare differenze statisticamente significative.[12] Possiamo quindi concludere che la fiducia nella possibilità di simulare il lancio di una moneta (e di molti altri fenomeni aleatori) con il calcolatore è ben riposta. Si tratta di una questione della massima importanza, che è per noi necessario ben chiarire prima di usare il calcolatore per fare simulazioni. Su questa fiducia che,

12. Sarebbe interessante approfondire le modalità di generazione di sequenze (pseudo) aleatorie anche con la collaborazione del docente di informatica, nelle scuole in cui è presente.

come abbiamo visto nelle riflessioni degli allievi, è tutt'altro che scontata a priori, si fonda la possibilità di utilizzare il calcolatore o la calcolatrice per simulare con un algoritmo deterministico un processo aleatorio e pertanto, rafforzare questa fiducia ci sembra un obiettivo didattico di primaria importanza nel processo di apprendimento/insegnamento della probabilità.

Bibliografia

Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società*, *2*(1), 293–304.

Chaitin, G. J. (2000). Casualità e dimostrazione matematica. *Le Scienze, Quaderni*, *98*, 10–15.

De Finetti, B. (1970). *Teoria della Probabilità.* Einaudi.

Gage, J., & Spiegelhalter, D. (2016). *Teaching Probability.* Cambridge University Press.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristic and biases.* Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Recensioni

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 143 - 157 OPEN ACCESS

Recensioni[1]

Bolondi, G., & D'Amore, B. (2020). *La matematica non serve a nulla*. Pitagora.

Come si formano i pregiudizi sulla matematica?

Nell'immaginario comune, la matematica, si sa, risente di una serie di pregiudizi ormai radicati, tra i quali spicca la convinzione diffusa e semplicistica che riduce la matematica al "saper fare i conti" e che, detta altrimenti, identifica una disciplina ampia e variegata con un suo aspetto marginale. L'importanza della scuola ai fini del progresso personale e sociale è ormai largamente condivisa, ma non si può dire altrettanto del ruolo che in questo senso è riconosciuto alla matematica, spesso considerata una disciplina estremamente complessa e inaccessibile a tanti (basti pensare a quanti adulti, alcuni dei quali ricoprono cariche istituzionali, si vantano con orgoglio di non sapere o di non capire questa disciplina). L'idea della matematica viene solitamente diffusa attraverso una serie di altri canali, alcuni legati alla scuola (musei, libri), altri fuorvianti, spesso diffusi dai media, che contribuiscono a creare una certa idea pubblica della matematica. Per esempio, al cinema i matematici sono diventati popolari negli ultimi decenni, ma l'immagine generalmente veicolata risulta stereotipata, perché caratterizzata da una genialità innata che spesso sfocia nella follia, valicando una linea di demarcazione decisamente sottile.

Nella visione comune, il matematico viene visto come *nerd*, una persona isolata dal mondo che si disinteressa delle necessità materiali. Nonostante si reputi una disciplina noiosa e ripetitiva, in cui tutto è deciso e in cui tutto è già stato scoperto, la matematica è una scienza in perenne evoluzione soprattutto grazie alle innovative scoperte realizzate da tanti matematici contemporanei.

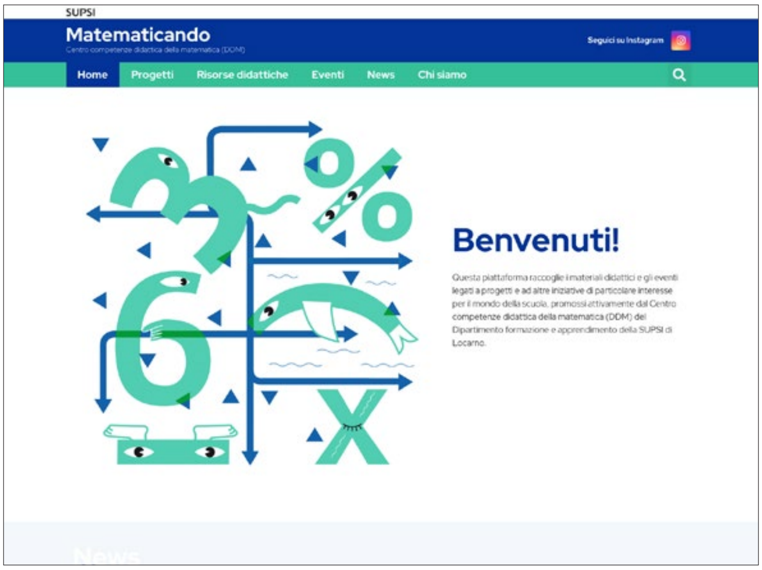
A onore del vero, va detto che i matematici solitamente non si interessano della loro immagine pubblica o della fama di cui gode la disciplina che studiano e rappresentano. Il diffondersi di atteggiamenti negativi e poco propositivi verso la materia sta però avendo ripercussioni importanti, sia a

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

livello scolastico che accademico; basti pensare che la matematica è la materia che genera più ostilità a tutti i livelli scolastici e vanta il più grande numero di fallimenti effettivi. A livello universitario, oltre a rappresentare il principale elemento demotivante per le iscrizioni ai corsi di profilo scientifico, è la principale disciplina che registra performance accademiche ritenute insufficienti. Dal punto di vista culturale, il ruolo ricoperto dalla matematica sta diventando una questione sempre più rilevante.
Nonostante sia alla base di tutto ciò che fa parte della nostra quotidianità e il mestiere del matematico pervada oggi tutti i settori, il pregiudizio più diffuso è che la matematica non serva a nulla. Ed è proprio un graffito con questa scritta, fotografato in piazza del Baraccano a Bologna nella primavera 2006, a pochi passi da una scuola media, che ha spinto Giorgio Bolondi e Bruno D'Amore, due matematici interessati anche agli aspetti storici, culturali, epistemologici e pedagogici della materia, a confutare quella frase che dà anche il titolo al libro stesso.
Alternando citazioni e discussioni, a volte provocatorie, ricorrendo a temi e personaggi con punti di vista differenti, gli autori cercano di sfatare i tanti e diffusi pregiudizi sulla matematica, sul suo insegnamento e sul suo apprendimento.
La maggior parte delle citazioni riportate non appartengono a matematici di mestiere; la scelta provocatoria, e più che mai appropriata, è quella di dare spazio ai non matematici. Il racconto è un susseguirsi di commenti e riflessioni a citazioni di personaggi di vario genere, in cui non mancano spunti pedagogici e didattici. Si passa da parole e scene di personaggi come Pinocchio, Peppone e don Camillo (Guareschi fa un sacco di citazioni matematiche di cui non è facile accorgersi), a frasi di poeti e scrittori come Dante Alighieri (nella *Divina Commedia* compaiono impliciti riferimenti all'aritmetica e alla geometria che Alighieri non spiega al lettore dando per scontato che il lettore li comprenda).
Alcuni personaggi citati sono matematici di grande rilievo di cui viene anche riportata una breve biografia; vengono commentati pensieri di matematici dell'antica Grecia come Euclide e Aristotele, fino ad arrivare alle riflessioni teoriche di alcuni dei matematici più famosi del secolo scorso come Hardy, Weil, Dedekind, Groethendieck, passando per Galilei, Eulero, Lagrange, solo per citarne alcuni.
Tutte le citazioni e i relativi approfondimenti diventano pretesti per rispondere a quesiti fondanti della matematica e del suo insegnamento. Perché la matematica è così complicata? Perché il suo linguaggio è così formale tanto da renderla diversa dalle altre scienze? Perché è difficile apprendere la matematica? Cosa c'è da scoprire ancora in matematica?
Queste e tante altre domande guidano il lettore nell'esplorazione di una disciplina che non gode di tanta popolarità, nell'intento di liberare il campo da quei pregiudizi che hanno indotto il presunto studente graffitaro a scrivere che «la matematica non serve a nulla».

Alessandro Gambini
Dipartimento di Matematica
Università "La Sapienza" di Roma, Italia

Centro competenze didattica della matematica (2018-...). ***Piattaforma Matematicando*****. SUPSI.**
https://www.matematicando.supsi.ch



Matematicando è un sito che si rivolge principalmente al mondo della scuola, offrendo agli insegnanti di tutti gli ordini scolastici una raccolta di materiali didattici ed eventi legati a progetti e iniziative promosse dal Centro competenze didattica della matematica (DDM) del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno. Il sito nasce nel 2018 come risultato del progetto *Communicating Mathematics Education* (CME), finanziato dal programma Agora del Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica (FNS), con l'obiettivo di divulgare iniziative per creare occasioni di condivisione e di incontro tra insegnanti, allievi, genitori e tutta la popolazione, attorno a temi matematici. Alcune iniziative hanno previsto la realizzazione di materiali didattici che spaziano da schede didattiche pensate per un apprendimento attivo della matematica, a video a tema matematico e fumetti che raccontano la storia della matematica. La piattaforma Matematicando non si è chiusa con il progetto CME, conclusosi a livello di fondi ad agosto 2021, ma ne prosegue l'obiettivo, inglobando anche altri progetti del Centro e aprendo al grande pubblico le iniziative promosse nel corso degli anni. Dal giorno della sua apertura ad oggi la piattaforma è stata visitata da oltre 75'000 utenti, indice del fatto che essa rappresenta un punto di riferimento e di interesse.
Dalla homepage del sito Matematicando https://www.matematicando.supsi.ch è possibile accedere alle sezioni "Home", "Progetti", "Risorse didattiche", "Eventi", "News" e "Chi siamo".
La prima e l'ultima sezione ("Home" e "Chi siamo") offrono il benvenuto agli utenti e presentano l'equipe di insegnanti e ricercatori che ha contribuito alla realizzazione dei materiali reperibili nelle restanti sezioni.
I "Progetti" del DDM, alcuni dei quali finanziati o cofinanziati dal FNS, sono descritti brevemente specificando ciò di cui si occupano e quali iniziative prevedono o hanno prodotto.
Navigando all'interno di questa sezione si coglie la ricchezza della piattaforma, che raccoglie in modo organico e rende fruibile al pubblico le svariate iniziative promosse in anni di lavori e ricerche portati avanti dal Centro. È possibile approfondire ciascuna iniziativa, scaricando le relative pubblicazioni e i materiali didattici messi a disposizione attraverso link interni a Matematicando o esterni come la piattaforma MaMa, contenente materiali volti a sviluppare le competenze matematiche promosse dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2022), e il sito della rivista DdM "Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula" rivolta a ricercatori in didattica della matematica e a insegnanti attivi nella scuola.

Le "Risorse didattiche" offrono una seconda via di accesso ai materiali reperibili nella sezione "Progetti". A differenza di quest'ultima, che raggruppa i materiali in base al progetto di appartenenza, la sezione "Risorse didattiche" permette agli utenti di cercare i materiali attraverso l'uso di filtri. Nella parte alta della pagina sono infatti presenti dei menu a tendina che permettono di effettuare la ricerca dei materiali per *progetto*, *iniziativa*, *ambito* e *età*, e una casella di testo che permette di ricercare per *parole chiave*.
Anche la sezione "Eventi" riprende proposte alle quali è possibile accedere attraverso la sezione "Progetti" ma ne agevola la reperibilità perché permette di filtrarle in base al *progetto*, l'*iniziativa*, l'*anno* e il *mese*.
Infine, la sezione "News" offre la possibilità agli utenti di essere sempre a conoscenza degli ultimi materiali o eventi caricati sul sito. Questa sezione è particolarmente utile perché Matematicando è un sito che si rinnova continuamente, non soltanto attraverso le nuove iniziative promosse dal Centro ma anche grazie alla collaborazione con i suoi utenti che possono inviare materiali realizzati con i loro allievi, ad esempio attraverso l'invito "Collabora con noi" presente nell'iniziativa "Schede didattiche" o "Condividete con noi…" presente nelle iniziative di "Ludolinguistica".
Matematicando è riuscito ad organizzare e rendere disponibili al grande pubblico materiali che rispondono alla sempre maggiore richiesta di insegnanti e ricercatori di rendere più accessibili risorse con cui preparare e personalizzare le lezioni e approfondire temi che si intendono trattare. Ad esempio, un insegnante che si accinge a preparare un percorso didattico sul tema dei solidi, inserendo "solidi" come *parola chiave* all'interno della sezione "Risorse didattiche" avrà immediatamente a sua disposizione una varietà di materiali, tra cui il fumetto dedicato a Platone, delle schede di attività didattiche con approccio laboratoriale o interdisciplinare, e il video "I poliedri regolari".
Questo sito, inoltre, garantisce organicità e affidabilità ad insegnanti che non si accontentano dei libri di testo ma che allo stesso tempo restano spaesati dalla vastità delle risorse disponibili sul web o intimoriti dall'assenza di garanzia di validità disciplinare e didattica dei materiali trovati.
Infine, grazie al suo costante aggiornamento, Matematicando resta al passo con i tempi, mettendo a disposizione materiali sempre nuovi.
In conclusione, Matematicando è un sito che cerca di venire incontro alle esigenze di tutti perché da un lato orienta e non fa sentir perduto chi si sta affacciando al mondo della didattica da neofita e dall'altro permette a persone già esperte di trovare nuovi spunti e restare sempre aggiornati sulle iniziative promosse.
Matematicando ha creato un vero ponte tra ricerca e scuola al quale possono avere accesso tutti, sarebbe un peccato non attraversarlo!

Bibliografia

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Divisione scuola, DECS.

Carlotta Soldano
Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione
Università degli Studi di Torino, Italia

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). ***Gli effetti del contratto didattico in aula: Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica*****. Pitagora.**

Tutti gli insegnanti (non solo di matematica) sanno che una risposta precisa e puntuale, pronunciata da uno studente con assoluta sicurezza e giusta intonazione a una loro domanda lascia spesso trapelare qualcosa di più, di non detto, di sottile o poco personale, legato al desiderio dello studente di fornire non solo una risposta ritenuta sufficientemente corretta dall'insegnante, ma anche quel particolare in più su cui l'insegnante si è soffermato più volte o ha insistito molto, usando in qualche modo o preferibilmente la terminologia usata dall'insegnante o dal libro di testo, come prova dell'attenzione prestata alle sue parole o al libro di testo, della condivisione di termini, discorsi o concetti, dunque (dal punto di vista dello studente) della comprensione dell'argomento in questione.
D'altra parte, le non risposte o risposte laconiche, contorte, incomplete, errate o ambigue pronunciate lentamente da uno studente, in attesa di sguardi complici, sorrisi incoraggianti, suggerimenti, correzioni o completamenti da parte dell'insegnante o di qualche compagno di classe, sono assai frequenti, sotto gli occhi di tutti, insegnanti e studenti.
In tali situazioni l'insegnante può reagire in modi diversi, spesso sulla base di un bagaglio di conoscenze e convinzioni sui processi di insegnamento-apprendimento costruito empiricamente, ovvero sulla base di un'epistemologia spontanea. In particolare può:

- ripetere la domanda in modo identico o con parole diverse;
- evidenziare la presenza di errori o ambiguità nella risposta;
- cercare di ridurre l'incertezza dello studente:
  - fornendo ulteriori informazioni di tipo matematico, tecnico o metodologico;
  - suddividendo la domanda iniziale in domande intermedie che orientino lo studente verso la risposta attesa (segmentazione della domanda);
  - usando vari strumenti retorici extra-matematici, come metafore o analogie (il cui abuso è alla base dell'*effetto Dienes* e dell'*effetto Jourdain*);
  - suggerendo espedienti mnemonici o pronunciando le prime sillabe delle parole che costituiscono la risposta attesa (*effetto Topaze*);
- accettare una risposta di poco valore cognitivo, banale o suggerita (*effetto Jourdain*);
- fornire la risposta attesa completa;

- commentare criticamente gli errori o le scarse conoscenze dello studente;
- tacere;
- …
- cambiare domanda.

Alla base di questi e altri comportamenti, come gli studi e le numerose ricerche di Guy Brousseau hanno evidenziato con chiarezza fin dagli anni '70, vi è un'accettazione, per lo più implicita, di regole, norme o clausole di un contratto dialetticamente intrecciato alla situazione didattica, all'insieme assai complesso, variegato e delicato di interazioni, comportamenti, richieste, atteggiamenti, funzionamenti cognitivi attesi relativi al sapere in gioco, da insegnare o insegnato, che caratterizzano la situazione didattica; una situazione nella quale, per lo studente, fornire la risposta attesa dall'insegnante o mostrare di sapere quello che, dal suo punto di vista, l'insegnante vuole sapere diventa una priorità assoluta.
Il concetto di "contratto didattico" è stato introdotto nel 1978 da Guy Brousseau proprio per caratterizzare l'insieme dei comportamenti dell'insegnante attesi dallo studente e l'insieme dei comportamenti dello studente attesi dall'insegnante, in relazione al sapere matematico in gioco, che possono costituire una possibile causa del *fallimento elettivo* in matematica, ovvero delle difficoltà di apprendimento della matematica da parte degli studenti che mostrano di possedere, nonostante le difficoltà incontrate in matematica, adeguate conoscenze in altre discipline. In altre parole, gli studenti più in difficoltà in matematica si comportano «*come se loro* avessero accettato un contratto secondo il quale essi devono fare solo ciò che essi ritengono che ci si attende da loro» (p. 66).
Il contratto didattico, così concepito, ha una forza esplicativa e una potenza predittiva molto elevate, a tal punto che, opportunamente interpretato e adattato, può essere applicato a situazioni diverse da quelle matematiche specifiche che lo hanno fatto emergere.
Come affermano gli autori, non si tratta di un contratto "vero", con clausole dichiarate, accettate o concordate in modo esplicito tra le parti, ma tutto si svolge come se un tale contratto fosse stato preventivamente stipulato. Il contratto didattico, per il suo enorme potere esplicativo e predittivo, si configura dunque come «un quadro d'analisi di ciò che succede nella relazione di insegnamento» (p. 68), un quadro d'analisi ampio e articolato, ma strettamente legato alle caratteristiche del sapere in gioco.
I diversi effetti del contratto didattico sono qui descritti in modo dettagliato e preciso, accompagnati da esempi persuasivi, chiari ed efficaci, di evidente importanza per l'analisi, l'interpretazione e la gestione di una qualsiasi situazione didattica concreta. Tra gli esempi più interessanti e significativi, vi sono quelli legati:

- alla concezione della scuola come direttiva ed esclusivamente valutativa (che rinviano più a un contratto "sociale" che a un contratto "didattico");
- alla concezione della matematica come disciplina nella quale «si *devono* sempre fare dei calcoli» (p. 14);
- a ripetizioni di comportamenti o modalità di tipo "sociale" (inerenti, per esempio, alle interrogazioni, alle caratteristiche o tipologie attese di domande poste o di problemi proposti);

insieme a tanti altri esempi, tutti descritti, contestualizzati e analizzati in profondità alla luce di diverse clausole del contratto didattico (clausola di fiducia nell'insegnante o di immagine della matematica, clausola di *delega formale*, clausola di *esigenza della giustificazione formale*, clausole relative a problemi "di realtà", clausole "meta" al contratto didattico, o di altro tipo) e dei principali loro effetti (*età del capitano*, *Topaze*, *Jourdain* e *Dienes*, in particolare).
Una conoscenza approfondita, basata su risultati di ricerca, degli effetti del contratto didattico è assolutamente necessaria nella gestione e nella valutazione dei processi di insegnamento-apprendimento,

da parte non solo degli insegnanti di matematica, dei formatori e ricercatori in didattica della matematica, ma anche di tutti coloro che sono o si sentono coinvolti nel settore educativo. Una tale conoscenza fornisce numerosi stimoli e spunti di riflessione sui modi in cui l'insegnante può creare le condizioni affinché l'allievo si allontani deliberatamente da norme contrattuali che ostacolano, limitano o impediscono risposte personali e cognitivamente produttive:

> «[...] si tratterà, per l'insegnante, di creare le condizioni sociali, affettive e didattiche della rottura del contratto didattico al fine di incitare l'allievo a basarsi solo su sé stesso per costruire, con o senza gli altri, i suoi propri significati. Perché infine occorrerà bene che, un giorno, egli prosegua da solo». (p. 98)

Si tratta di una sfida decisiva per l'insegnante e cruciale per l'apprendimento. Ma con quali strategie affrontare tale sfida?
Una risposta a questa e altre domande, che tormentano e affascinano allo stesso tempo ogni insegnante, si può trovare in questo libro, riccamente documentato e argomentato, con numerosi esempi che rinviano non solo alle origini del concetto di contratto didattico, ma anche alla sua evoluzione, ai suoi aspetti teorici ed epistemologici, ai suoi illuminanti quanto pericolosi paradossi, oltre che ai diversi modi (dei quali alcuni fuorvianti o errati) di concepirlo o interpretarlo. Di tutto ciò non svelo altro, proprio per evitare uno dei paradossi più complessi e intriganti del contratto didattico, paradosso che lascio al lettore il piacere di scoprire.
Aggiungo solo che si tratta di una revisione critica di un libro pubblicato per la prima volta nel 2010, con titolo diverso, poi tolto dal catalogo nel 2016, tradotto in spagnolo e pubblicato nel 2018; una raccolta ricca e preziosa di articoli sul contratto didattico, la cui rilevanza, profondità e attualità sono riconosciute con soddisfazione e gratitudine anche da colui che ha genialmente concepito tutto ciò, sì, dallo stesso Guy Brousseau (medaglia Felix Klein 2003), universalmente riconosciuto come il padre della Didattica della Matematica, autore della prefazione e della postfazione.

Maura Iori
Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica di Bologna, Italia

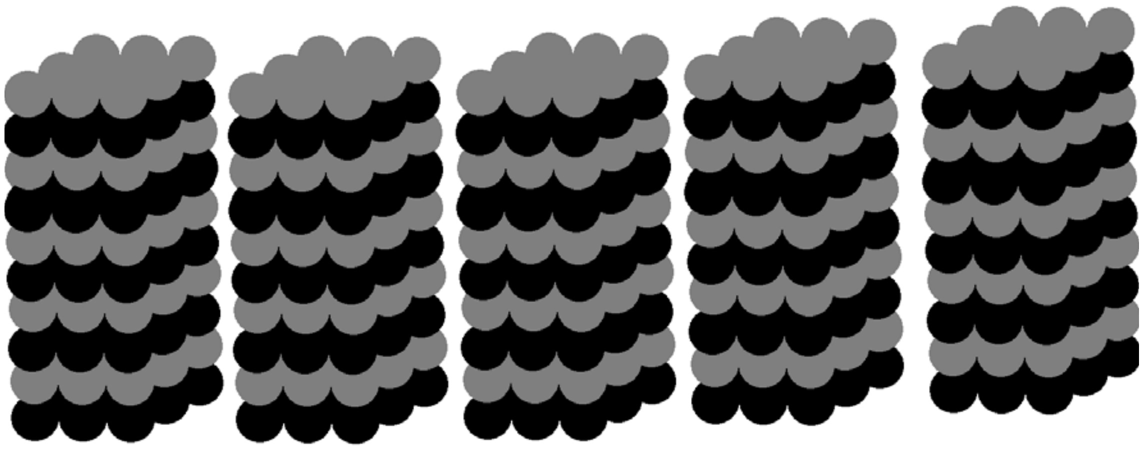
Demartini, S., & Sbaragli, S. (2022). ***Un mondo di figure*****. RSI KIDS e Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI.** **https://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/un-mondo-di-figure/**

Le iniziative legate ai progetti di Italmatica si arricchiscono di un nuovo capitolo, questa volta narrativo, denominato *Un mondo di figure*. Il 2022 ha visto infatti l'avvio di una collaborazione tra Radiotelevisione della Svizzera italiana (RSI) e Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI per la realizzazione di una serie di storie che hanno come protagoniste le figure geometriche. Le storie sono rese disponibili pubblicamente alla pagina https://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/un-mondo-di-figure/ e sul sito della RSI (https://www.rsi.ch/kids/scelta/piccoli/serie/?id=15235942) attraverso file audio-video della durata media di 6 minuti che permettono di apprezzare la qualità della lettura, che, per la copresenza di voce, musica ed effetti sonori, riporta alla memoria i vecchi dischi in voga negli anni Ottanta del secolo scorso che proponevano le fiabe classiche ai giovani ascoltatori. Anche se a una velocità di narrazione e con ritmi di certo superiori, rispetto a quelle letture, le storie "italmatiche" delle fiabe tradizionali riprendono anche la struttura narrativa di base, fatta di tre macro-sequenze (inizio-svolgimento-conclusione), assai adatta anche al pubblico più giovane, agli inizi del percorso scolastico. Allo stesso modo, adatta ai più piccoli è anche la filastrocca che chiude ogni narrazione, recitata con stile cantilena da voci bianche, che sintetizza in rima le caratteristiche della figura geometrica protagonista della storia. Caratteristiche che vengono presentate con l'utilizzo insieme rigoroso e creativo del linguaggio specialistico della matematica, in modo che le ascoltatrici e gli ascoltatori inizino ad avvicinarsi al termine tecnico in maniera divertente e graduale o, se più grandi di età, ne approfondiscano e rafforzino l'uso consapevole.
Questi i titoli e i contenuti geometrici delle prime nove storie: *Un magico cappello a punta* (il cono), *Un tipo "spigoloso"* (il cubo), *La più bella del reame* (la piramide), *Un solido tuttofare* (il parallelepipedo), *Rotolo sempre... Scopri chi sono!* (la sfera), *La figura che ama il tre* (il triangolo), *Tutti parlano di me* (il quadrato), *Una figura aurea* (il rettangolo), *Una straordinaria figura* (il cerchio). La decima storia, *A caccia di figure*, è in realtà una riuscitissima meta-storia, che narra di un nonno e di un nipote che ascoltano la serie di storie "italmatiche" sul sito della RSI e si divertono a inventare giochi ispirati alle storie stesse. I giochi, descritti dalla voce narrante, rappresentano altrettanti spunti per attività didattiche da fare a scuola o fuori da scuola, a cominciare dal gioco che dà il titolo alla storia: la caccia alle figure geometriche. Si tratta di andare alla ricerca delle figure geometriche nascoste nella realtà e negli oggetti che ci circondano, come cartelli stradali, costruzioni, binocoli, finestre, grondaie e tanto

altro ancora, sviluppando lo spirito di osservazione e stimolando il pensiero matematico.
Le storie, scritte da Silvia Demartini e da Silvia Sbaragli, offrono un esempio di come si possono coniugare in maniera efficace le due prospettive chiamate in causa: quella linguistica, con l'esigenza di educare allieve e allievi a un vocabolario sempre più preciso, e quella matematica, con l'esigenza di definire in maniera via via più consapevole le figure geometriche e le loro caratteristiche specifiche. Il tutto puntando sullo sfondo della narrazione, che offre un contesto motivante nel quale l'insegnamento si può esprimere tra l'implicito e l'esplicito, senza forzature, sfruttando anche il coinvolgimento che nasce dal divertimento e dalla creatività. Il dialogo pluridisciplinare si concretizza anche grazie a due altre dimensioni artistiche che vengono coinvolte a margine delle storie, cioè l'arte figurativa, grazie alle illustrazioni, realizzate da Simona Meisser, che accompagnano sul sito le narrazioni, e l'arte musicale e canora, grazie alle convincenti performance del menestrello Francesco Mariotta, disponibili per l'ascolto sulla piattaforma della RSI in file separati da quelli delle storie, che hanno il pregio di trasformare le filastrocche in vere e proprie canzoni, cambiandone lo stile e rendendolo simile alla canzone d'autore; in questo modo, inoltre, si mostra come, grazie al sapiente intreccio di strumenti musicali, ritmo e voce, sia possibile allontanarsi dalla logica a volte un po' limitante della cantilena e dal vincolo a volte troppo stringente imposto delle rime.
Le storie, già di per sé efficaci, sono concepite come il possibile punto di partenza per attività didattiche da sviluppare in sezione o in classe dopo l'ascolto. A questo scopo, e a titolo esemplificativo, sulla piattaforma web di Matematicando (https://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/un-mondo-di-figure/) sono presenti e scaricabili quattro kit per laboratori legati rispettivamente alle storie *Un magico cappello a punta* e *Un tipo "spigoloso"* (I ciclo), e *La figura che ama il tre* e *Una straordinaria figura* (II ciclo). Queste ulteriori proposte rientrano all'interno del progetto del Fondo nazionale svizzero Agora "Italmatica per tutti: la lingua italiana per favorire l'insegnamento-apprendimento della matematica" promosso dal Centro competenze didattica della matematica e dal Centro competenze didattica dell'italiano lingua di scolarizzazione del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI. Con i kit si possono ad esempio realizzare cappelli a cono di diverse forme, cubi con la rappresentazione di una differente emozione per ogni faccia, triangoli di varie dimensioni con asticciole e fermacampioni, origami geometrici e altro ancora.
Narrazioni e sviluppi didattici collaborano così a coltivare il pensiero divergente delle bambine e dei bambini, nutrendo la loro apertura mentale: il cono che si trasforma nel cappello di una fata, di un mago e di tanti altri personaggi, o nel tetto di un castello, in un megafono, in un cono gelato, diventa l'efficace immagine di come si possa stimolare l'apprendimento in modo fantasioso e ludico, preservando al contempo il rigore dei contenuti disciplinari dell'italiano e della matematica.

Simone Fornara
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI, Svizzera

Nicosia, G. G. (2022). ***Contare per ventine: Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo. Volume II: Africa.*** https://www.matematicando.supsi.ch/media/Nicosia_2022_Contare-per-ventine_Vol.2.pdf



Il primo dei volumi dell'opera *Contare per ventine – Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo* (Nicosia, 2019) si era occupato di delineare, dal punto di vista etnomatematico, le caratteristiche dei numerali nei tre continenti Asia, Europa e America. Come il primo, anche questo secondo volume è scritto interamente dal matematico, insegnante, etnomatematico, didatta della matematica e scrittore di romanzi (ebbene sì, anche romanziere) Giovanni Giuseppe Nicosia, i cui studi nell'ambito delle culture matematiche sono ormai imprescindibili per chiunque sia desideroso di affrontare questi temi. Questo secondo volume si dedica esclusivamente al continente africano, e lo fa con una dovizia di elementi e di considerazioni che lascia a bocca aperta: non solo la quantità di popoli passati in rassegna (38 gruppi culturali principali, a loro volta suddivisi in vari sottogruppi), ma anche la precisione nel delineare le caratteristiche culturali, o la ricchezza dei riferimenti bibliografici e sitografici utilizzati per il reperimento (per nulla banale, data l'antichità delle fonti) dei contenuti dei vari capitoli. Insomma, ci troviamo di fronte a un'opera monumentale, ambiziosa, frutto di ricerche durate più dei sei anni.
Prima di addentrarsi nella rassegna e analisi dei numerali nei vari popoli e culture africane, l'autore sceglie di inquadrare la questione culturale africana dal punto di vista storico: è il primo capitolo del volume, quello in cui si racconta di regni, pratiche culturali e lingue antiche, e in cui l'autore non manca di segnalare le responsabilità occidentali nel graduale perdersi delle fonti e delle espressioni culturali autentiche dei popoli africani.
Dal capitolo successivo l'autore si concentra, con metodo e rigore, sull'analisi dei numerali di quasi quaranta gruppi culturali dell'Africa: dai numerali djola dell'Africa atlantica ai numerali delle popolazioni gour, dai numerali delle popolazioni kwa a quelli guang e bangine, passando per i numerali camerunesi e quelli sudanesi. Molto spesso i capitoli propongono una contestualizzazione dei vari elementi matematici delle civiltà: si tratta di puntualizzazioni linguistiche, geografiche, a volte semiotiche, molto interessanti, che consentono al lettore di farsi un'idea generale del tipo di strumenti numerici del gruppo preso in esame. Altrettanto spesso vengono proposte, tramite il racconto di leggende, le ipotesi riguardanti le origini di un determinato gruppo etnico; è il caso del popolo *kuolango*, presente in Costa d'Avorio e in Ghana, di cui l'autore riporta tre versioni differenti, tutte ugualmente affascinanti e suggestive. Il tutto viene condito da curiose informazioni legate a tradizioni sociali, economiche e spirituali.

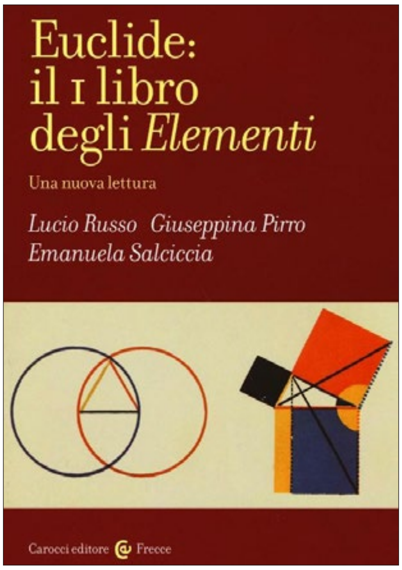
Leggendo, viene da chiedersi se l'autore stia affrontando ricerche sui numerali dell'ultimo continente mancante in questa rassegna, l'Oceania. A fine volume Nicosia si dichiara dubbioso riguardo un ulteriore impegno; ma chissà che non si ricreda e che, con la stessa passione dedicata a questi due volumi, non decida un giorno di dedicare ai popoli del mondo un'ultima fatica di studio.

Bibliografia

Nicosia, G. G. (2019). *Contare per ventine: Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo. Volume I: Europa, Asia e Americhe*. https://www.matematicando.supsi.ch/media/Nicosia_2019_Contare-per-ventine_Vol.1.pdf

Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento
SUPSI, Svizzera

Russo, L., Pirro, G., & Salciccia, E. (2017). *Euclide: il I libro degli Elementi. Una nuova lettura.* Carocci editore.



Euclide: il I libro degli Elementi. Una nuova lettura, di Lucio Russo, Giuseppina Pirro ed Emanuela Salciccia, edito da Carocci, racconta un progetto messo in atto presso il liceo classico "Torquato Tasso" di Roma. Accompagnati dai docenti di matematica e di greco, gli alunni hanno affrontato il primo libro degli Elementi di Euclide e ne hanno prodotto una edizione italiana molto originale.

La lettura trasmette una tonificante freschezza. Il testo è agile e preciso: spiega, racconta, informa, talvolta punzecchia. Il tutto con grande chiarezza linguistica e concettuale. Gli interventi editoriali compiuti sull'opera di Euclide stimolano la riflessione e rivelano un confronto vivace e approfondito con la fonte.

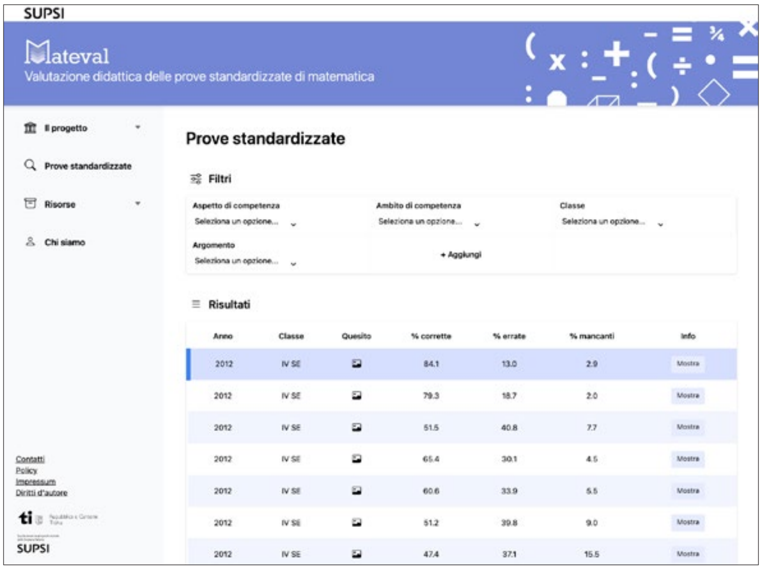
La prima parte del libro contiene una articolata discussione dell'origine degli Elementi e del loro impatto lungo i secoli. In questi capitoli si intrecciano considerazioni storiche, linguistiche, culturali e scientifiche, sostenute da numerose referenze bibliografiche puntuali e circostanziate. Lo scopo dichiarato è di porre le basi su cui poggiano le scelte editoriali messe in atto sul trattato di Euclide. Il risultato è ben di più: un testo di ampio respiro, ricco e scorrevole, con molti spunti di riflessione anche a carattere didattico. Citiamo ad esempio la discussione sulla natura delle dimostrazioni in matematica. Questo tema è trattato a più riprese, costruendo passo dopo passo un mosaico di idee che ben rappresenta la complessità della questione. Da Archimede a Hilbert, da Euclide a Arnol'd, tra astrazione formale e intuizioni meccaniche, il testo illustra come le dimostrazioni matematiche possano assumere un'ampia gamma di forme e di significati. Quale duttilità acquisisce così il concetto di dimostrazione, a volte considerato tra gli aspetti più arcigni della nostra materia!

Nella seconda parte del libro trova spazio l'edizione vera e propria del capitolo primo degli Elementi, presentata con il testo greco a fronte. Gli interventi editoriali sono molto incisivi. L'ordine delle definizioni e delle proposizioni è rivisto in modo da introdurre concetti e definizioni man mano che si rendono necessari lungo lo snodo dell'argomentazione. Definizioni e nozioni comuni considerate apocrife o problematiche sono espunte o modificate (ad esempio trasformando in Postulato il criterio di congruenza per triangoli che classicamente costituisce la tesi della Proposizione VIII). L'operazione compiuta è dunque vigorosa ma non violenta: evoca l'immagine di un artigiano che compone la sua opera lavorando con passione su una preziosa materia prima.

I ragazzi e gli insegnanti del liceo Tasso di Roma ci ricordano così che la buona matematica non invecchia. Anzi, attraversa i secoli come materia viva da interrogare e rivisitare con schiettezza e precisione, per trarne stimoli sempre nuovi. Leggere questo avvincente libro è immergersi nell'abbondanza di idee che ancora oggi sgorgano dagli Elementi: la cornucopia di Euclide.

Emanuele Delucchi
Dipartimento tecnologie innovative
SUPSI, Svizzera

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2022). *Mateval. Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport della Repubblica e Cantone Ticino. https://www.mateval.ch



Da ottobre 2022 è online la piattaforma Mateval, frutto del progetto *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica*, che raccoglie gli item proposti nelle prove standardizzate somministrate nel Canton Ticino e resi pubblici per la consultazione. La piattaforma risulta essere un'ottima risorsa per docenti, ricercatori e tutte le persone interessate all'uso delle prove standardizzate nella didattica della matematica. Mateval sostituisce la consultazione delle prove in formato cartaceo e consente, attraverso una serie di filtri, una ricerca più agevole dei diversi item e la fruizione telematica delle prove anche negli anni a venire. Inoltre, gli item inseriti sono stati corredati da una analisi statistica dei risultati e da commenti didattici specifici, scritti da esperti in didattica della matematica.
Nella piattaforma si possono trovare le prove standardizzate di matematica somministrate nelle classi quarte e quinte della scuola elementare in Canton Ticino. Ad oggi, sono presenti i quesiti rilasciati delle prove del 2012, 2015 e 2021 ma la piattaforma verrà aggiornata ad ogni somministrazione.
Lo stretto legame tra i singoli item delle prove e il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2022) è evidente: ogni quesito è stato indicizzato in base agli ambiti di competenza (Numeri e calcolo, Geometria, Grandezze e misure, …) e agli aspetti di competenza (Sapere e riconoscere, Eseguire ed applicare, Esplorare e provare, …) delineati nel Piano di studio. Tali categorie possono essere utilizzate per filtrare gli item in base a ciò su cui si vuole lavorare, rendendo così agevole per docenti e altri soggetti interessati l'accesso alle informazioni dei singoli quesiti. La forte assonanza tra prove standardizzate e Piano di studio è evidenziata già nella presentazione del progetto, dove si trova il collegamento diretto al documento del Piano di studio e una matrice, che ricalca quella presente nel documento, in cui si può avviare una ricerca degli item in base alla doppia classificazione ambiti di competenza/aspetti di competenza.
La piattaforma rende le prove standardizzate un possibile strumento di valutazione formativa dei processi di insegnamento-apprendimento e favorisce un processo di riflessione e ripensamento dell'azione didattica, come suggerito da Sbaragli e Franchini parlando di utilizzo delle prove standardizzate da parte dei docenti: «Si tratta dunque di accettare queste prove come un contributo alla propria azione didattica, come un aiuto a riconoscere, classificare e valutare i processi complessi di insegnamento/apprendimento della matematica» (2014, p. 18). A questo proposito ogni quesito inserito in

piattaforma è corredato dalle principali informazioni (tra queste anche le percentuali di risposta che fungono da importante riferimento relativamente alla difficoltà del quesito) e da una scheda contenente un commento didattico. Il commento didattico mette in luce le potenzialità del quesito stesso in termini di riflessione sulle difficoltà degli studenti in merito a specifici contenuti o processi cognitivi, in particolare i quesiti rilasciati della prova del 2015 sono relativi al processo "Matematizzare e modellizzare" mentre i quesiti rilasciati della prova del 2021 a "Comunicare e argomentare". Le riflessioni e i riferimenti, tratti anche da importanti ricerche in didattica della matematica, e l'analisi di protocolli di risposta degli studenti, permettono di contestualizzare tali difficoltà e forniscono agli insegnanti suggerimenti per ripensare alla propria azione didattica e progettare eventuali percorsi specifici in base alle evidenze emerse.

Negli ultimi anni, la ricerca in didattica della matematica ha messo in luce come le prove standardizzate possano essere il punto di partenza per impostare nuovi studi (Giberti & Maffia, 2020) su molteplici tematiche. L'introduzione della piattaforma Mateval può essere quindi anche uno stimolo per i ricercatori in didattica della matematica per individuare nuove piste di riflessione e di ricerca possibili, rendendo, ad esempio, più semplice un confronto tra le prove standardizzate effettuate nel Canton Ticino e altre prove standardizzate che vengono somministrate a livello nazionale (ad esempio le italiane prove INVALSI, raccolte nella piattaforma GESTINV – Bolondi et al., 2017) e a livello internazionale (come le prove OECD-PISA e le prove IEA-TIMMS).

La piattaforma Mateval non è perciò una semplice repository di quesiti ma risulta essere un supporto concreto per il lavoro d'aula degli insegnanti e un riferimento importante per tutti coloro che si occupano di educazione matematica. Le prove standardizzate in questo contesto sono il presupposto per una analisi didattica basata su dati e lenti teoriche tratte dalla ricerca in didattica della matematica, al fine di progettare un'azione didattica mirata e consapevole.

Bibliografia

Bolondi, G., Ferretti, F., & Gambini, A. (2017). Il database GESTINV delle prove standardizzate INVALSI: uno strumento per la ricerca. Alcuni esempi di utilizzo nell'ambito della matematica. In P. Falzetti (Ed.), *I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca* (pp. 43–48). Franco Angeli Editore. http://digital.casalini.it/9788891767691

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Divisione scuola, DECS.

Giberti, C., & Maffia, A. (2020). Mathematics educators are speaking about PISA, aren't they? *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *39*(4), 266–280.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare.* Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI. https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca_educativa/2014-Valutazione_didattica_delle_prova_standardizzate_di_matematica_della_quarta.pdf

Chiara Giberti
Dipartimento di Scienze Umane e Sociali
Università di Bergamo, Italia